ISSN 0321-4796 (Print)
ISSN 2782-3229 (Online)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2023

№ 54 (2)

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта

Immanuel Kant Baltic Federal University Press

2023

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2023. — №54 (2). — 92 с.

Выходит с 1970 года.
Входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.
Изданию присвоена **первая категория (К1) Перечня ВАК.**
Периодичность — 2 раза в год (начиная с 2023 г.)

Учредитель
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Адрес редакции и издателя
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Адрес типографии
236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Тираж 300 экз.
Дата выхода в свет 10.11.2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 514.76

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
arturkuleshov@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-1

О конструкции канонической формы на расслоении реперов

Дано подробное изложение конструкции канонической формы на расслоении реперов произвольного порядка над гладким многообразием. В частности, показана корректность построения одного изоморфизма векторных пространств, играющего ключевую роль в данной конструкции, а также описано действие этого изоморфизма.

Ключевые слова: гладкое многообразие, струя, расслоение реперов, каноническая форма

Введение. Каноническая форма на расслоении реперов широко используется при изучении дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях (см., напр., [2; 3; 5—7]). Подходы, применяемые различными авторами для описания ее конструкции, весьма разнообразны, в связи с чем возникает необходимость их сопоставления и выработки единого подхода. Изложение конструкции канонической формы, выполненное в подобном ключе, — такова наша цель. В связи с этим особое внимание уделяется восстановлению техниче-

Поступила в редакцию 14.05.2023 г.

ских деталей, пропущенных в вышеуказанных работах. В частности, ключевую роль в конструкции канонической формы играет изоморфизм Φ_θ (см. п. 2), и данная статья в основном посвящена проверке корректности построения этого изоморфизма, а также описанию его действия.

На протяжении всей работы индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k, l, m, j_1, j_2, \ldots = \overline{1, n}.$$

1. Расслоения реперов высших порядков. В этом пункте излагаются необходимые предварительные сведения. Терминология и обозначения взяты из [3] и [7]. Пусть M — n-мерное гладкое многообразие. Репер порядка p (p-репер) θ на M в точке $x \in M$ — это p-струя $j_0^p f$ всякого диффеоморфизма f окрестностей точек $0 \in \mathbb{R}^n$ и $x \in M$, такого, что $x = f(0)$. В свою очередь, отображение f является представителем репера θ. На множестве $H^p(M)$ всех p-реперов на M имеет место проекция $\pi_p: H^p(M) \to M$, $j_0^p f \mapsto f(0)$. Локальными координатами данного p-репера относительно карты (U, x^i) на M, где $x^i: U \to \mathbb{R}^n$ — координатные функции, считаются значения в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ частных производных до p-го порядка включительно от функций $x^i \circ f$, задающих координатное представление отображения f в данной карте. Таким образом, каждая локальная карта (U, x^i) на M определяет на множестве $H^p(M)$ локальную карту с областью $\pi_p^{-1}(U)$ и координатными функциями

$$(x^i, x^i_{j_1}, x^i_{j_1 j_2}, \ldots, x^i_{j_1 j_2 \ldots j_p}),$$

заданными на $\pi_p^{-1}(U)$ по правилу

$$x^i(\theta) = x^i\left(\pi_p(\theta)\right),$$

$$x^i_{j_1}(\theta) = \left.\frac{\partial\left(x^i \circ f\right)}{\partial t^{j_1}}\right|_0, \; x^i_{j_1 j_2}(\theta) = \left.\frac{\partial^2\left(x^i \circ f\right)}{\partial t^{j_1} t^{j_2}}\right|_0, \; \dots ,$$

$$x^i_{j_1 j_2 \dots j_p}(\theta) = \left.\frac{\partial^p\left(x^i \circ f\right)}{\partial t^{j_1} \partial t^{j_2} \dots \partial t^{j_p}}\right|_0, \; 1 \le j_1 \le \; j_2 \le \dots \le j_p \le n,$$

где $(t^1, t^2, \dots, t^n)$ — стандартные координаты на $\mathbb{R}^n$. Удобно, однако, разрешить любую перестановку индексов $j_1, j_2, \dots, j_p$, что с учетом равенства смешанных частных производных приводит к симметрии координат $x^i_{j_1 j_2}, \dots, x^i_{j_1 j_2 \dots j_p}$ по всем нижним индексам. Построенные таким образом карты наделяют множество $H^p(M)$ всех p-реперов на M структурой гладкого локально тривиального расслоения с канонической проекцией π_k и базой M, причем

$$\dim H^p(M) = nC^n_{n+p}.$$

Если в качестве M взять $\mathbb{R}^n$ со стандартными координатами, то вышеописанная конструкция приводит к глобальной карте на $H^p(\mathbb{R}^n)$. Соответствующий набор координатных функций обозначим через

$$(u^i, u^i_{j_1}, u^i_{j_1 j_2}, \dots, u^i_{j_1 j_2 \dots j_p}).$$

Пусть D^p_n — дифференциальная группа порядка p, то есть группа Ли, образованная всевозможными p-реперами на $\mathbb{R}^n$ в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ относительно композиции p-струй. Заметим, что $D^p_n \subset H^p(\mathbb{R}^n)$, причем D^p_n выделяется уравнениями $u^i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Тогда на D^p_n глобально заданы координаты $(u^i_j, u^i_{jk}, \dots, u^i_{j_1 j_2 \dots j_p})$. Единица группы D^p_n определяется как $e = j^p_0(id_{\mathbb{R}^n})$, а обратный элемент к $\xi = j^p_0 s$ — как p-струя обратного отображения: $\xi^{-1} = j^p_0(s^{-1})$. На $H^p(M)$ определено правое действие группы D^p_n по закону композиции струй:

$$R_\xi \colon \theta \mapsto \theta \circ \xi = \tilde{\theta}, \; \theta \in H^p(M), \; \xi \in D^p_n.$$

Данное действие является свободным и транзитивным на слоях расслоения $H^p(M)$.

В качестве примера приведем координатное представление данного действия при $p = 3$:

$$\left.\begin{array}{c}\tilde{x}^i_j = x^i_k u^k_j,\ \tilde{x}^i_{jk} = x^i_m u^m_{jk} + x^i_{pq} u^p_j u^q_k,\\ \tilde{x}^i_{jkl} = x^i_m u^m_{jkl} + 3x^i_{pq} u^p_{(jk} u^q_{l)} + x^i_{pqr} u^p_j u^q_k u^r_l\end{array}\right\}, \qquad (1)$$

где $(x^i,\ x^i_j,\ x^i_{jk},\ x^i_{jkl})$, $(\tilde{x}^i,\ \tilde{x}^i_j,\ \tilde{x}^i_{jk},\ \tilde{x}^i_{jkl})$, $(u^i_j, u^i_{jk}, u^i_{jkl})$ — координаты реперов θ, $\tilde{\theta}$ и струи ξ соответственно.

Таким образом, $H^p(M)$ наделено структурой главного расслоения с базой M, структурной группой D^p_n и канонической проекцией $\pi^p\colon H^p(M) \to M$.

Так как каждый p-репер определяет последовательность реперов всех низших порядков, то для любых p и q, таких, что $p > q$, определен гомоморфизм главных расслоений

$$\pi^p_q\colon H^p(M) \to H^q(M),\ j^p_0 f \mapsto j^q_0 f.$$

Всякое гладкое отображение $\varphi\colon M_1 \to M_2$ гладких многообразий M_1 и M_2 порождает гомоморфизм расслоений реперов

$$\varphi^p\colon H^p(M_1) \to H^p(M_2),\ j^p_0 f \mapsto j^p_0(\varphi \circ f),$$

называемый p-ым продолжением отображения φ. Если φ — диффеоморфизм, то φ^p — изоморфизм главных расслоений.

Главное расслоение $H^p(\mathbb{R}^n)$ изоморфно $\mathbb{R}^n \times D^p_n$, то есть является тривиальным. В самом деле, благодаря наличию глобального сечения

$$\sigma^p\colon \mathbb{R}^n \to H^p(\mathbb{R}^n),\ u \mapsto j^p_0(t_u),$$

где $t_u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — трансляция на элемент $u \in \mathbb{R}^n$, существует изоморфизм главных расслоений $\mathbb{R}^n \times D^p_n$ на $H^p(\mathbb{R}^n)$, задаваемый по формуле

$$(u, \xi) \mapsto \sigma^p(u) \circ \xi,\ u \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in D^p_n.$$

Тогда касательное пространство $T_eH^p(M)$ представляется в виде прямой суммы

$$T_eH^p(M) \cong T_0(im\,\sigma^p) \oplus T_eD_n^p,$$

причем $T_0(im\,\sigma^p)$ отождествляется с $T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ посредством изоморфизма $d_0\sigma^p$, а $T_eD_n^p$ — с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_n^p$ группы Ли D_n^p. Таким образом,

$$T_eH^p(M) \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_n^p. \tag{2}$$

2. Каноническая форма. Согласно [7], *каноническая форма* Θ на расслоении $H^{p+1}(M)$ — это векторнозначная дифференциальная 1-форма

$$\Theta\colon T\big(H^{p+1}(M)\big) \to \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_n^p,$$

определяемая следующим образом. Пусть $X \in T_\theta\big(H^{p+1}(M)\big)$, где $\theta = j_0^{p+1}\varphi \in H^{p+1}(M)$, положим $\underline{\theta} = \pi_p^{p+1}(\theta)$ и заметим, что $d\pi_p^{p+1}(X) \in T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big)$. Далее рассмотрим дифференциал продолжения φ^p отображения φ в точке $e \in H^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi_\theta = d_e\varphi^p\colon T_eH^p(M) \to T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big). \tag{3}$$

Заметим, что поскольку φ — локальный диффеоморфизм, Φ_θ является изоморфизмом векторных пространств, а потому определено обратное отображение

$$\Phi_\theta^{-1}\colon T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big) \to T_eH^p(M) \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_n^p.$$

Тогда полагают

$$\Theta(X) = \Phi_\theta^{-1}\left(d\pi_p^{p+1}(X)\right). \tag{4}$$

Иными словами, каноническая форма такова, что ее сужение на $T_\theta\big(H^{p+1}(M)\big)$ представляет собой композицию дифференциала канонической проекции π_p^{p+1} и линейного отображения Φ_θ^{-1}.

В связи с данной конструкцией возникает вопрос о корректности построения изоморфизма Φ_θ: почему Φ_θ зависит лишь от репера θ, но не от представляющего его отображения φ? Обсуждению этого вопроса мы посвятим дальнейшую часть статьи.

Прежде всего заметим, что ввиду разложения (2) отображение Φ_θ вполне определяется своими сужениями на каждое из прямых слагаемых $\mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{g}_n^p$ по отдельности. Эти сужения мы рассмотрим в нижеследующих пунктах.

3. Сужение $\boldsymbol{\Phi_\theta}$ на $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Сужение $\Phi_\theta|_{\mathbb{R}^n}$ изоморфизма Φ_θ на первое слагаемое прямой суммы (2) полностью определяется набором векторов

$$X_i(\theta) = d_e\varphi^p\left(\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_e\right),\ i = \overline{1,n},$$

где

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_e = d_0\sigma^p\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_0\right) \in T_e(im\ \sigma^p) \subset T_e\big(H^p(\mathbb{R}^n)\big).$$

Тогда в силу цепного правила для дифференциала имеем

$$X_i(\theta) = (d_e\varphi^p \circ d_0\sigma^p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_0\right) = d_0(\varphi^p \circ \sigma^p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_0\right).$$

Заметим, что $\varphi^p \circ \sigma^p$ есть сужение $\varphi^p|_{\mathbb{R}^n}$ отображения φ^p на $\mathbb{R}^n$, причем для любого $u \in \mathbb{R}^n$, лежащего в области определения отображения φ, имеем

$$(\varphi^p|_{\mathbb{R}^n})(u) = \varphi^p\big(\sigma^p(u)\big) = \varphi^p\big(j_0^p(t_u)\big) = j_0^p(\varphi \circ t_u).$$

Итак,

$$X_i(\theta) = d_0(\varphi^p|_{\mathbb{R}^n})\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^i}\right|_0\right), \tag{5}$$

где $\varphi^p|_{\mathbb{R}^n}$ действует по правилу

$$\varphi^p|_{\mathbb{R}^n}\colon u \mapsto j_0^p(\varphi \circ t_u). \tag{6}$$

Лемма 1. Векторы $X_i(\theta)$ однозначно определяются репером θ, то есть не зависят от выбора его представителя φ.

Доказательство. Рассмотрим локальную карту с координатами $x^i\colon U \to \mathbb{R}$ в окрестности U точки $x_0 = \pi(\theta)$. Обозначим через

$$(\overline{x}^i, \overline{x}^i_j, \overline{x}^i_{jk}, \dots, \overline{x}^i_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}})$$

локальные координаты репера θ относительно данной карты:

$$\overline{x}^i = \varphi^i(0),\ \overline{x}^i_j = \partial_j \varphi^i(0),\ \dots,\ \overline{x}^i_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}} = \partial_{j_1 j_2 \dots j_{p+1}} \varphi^i(0), \quad (7)$$

где $\varphi^i = x^i \circ \varphi$, причем ∂_j — символ дифференцирования по t^j, $\partial_{j_1 j_2 \dots j_s} = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \dots \partial_{j_s}$ $(s \geq 2)$. Тогда отображение $\varphi^p|_{\mathbb{R}^n}$ имеет следующее координатное представление в локальной карте на $H^p(M)$ (см. п. 1):

$$x^i = \varphi^i(t^k),\ x^i_{j_1 j_2 \dots j_\alpha} = \partial_{j_1 j_2 \dots j_\alpha} \varphi^i(t^k),\ 1 \leq \alpha \leq p. \qquad (8)$$

В силу (8) векторы $X_i(\theta)$ имеют следующее выражение:

$$X_i(\theta) = \left.\frac{\partial \varphi^k}{\partial t^i}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\underline{\theta}} + \sum_{\alpha=1}^{p} \left.\frac{\partial(\partial_{j_1 \dots j_\alpha} \varphi^k)}{\partial t^i}\right|_0 \left.\frac{\partial}{\partial x^k_{j_1 \dots j_\alpha}}\right|_{\underline{\theta}}.$$

С учетом (7) получим

$$X_i(\theta) = \overline{x}^k_i \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\underline{\theta}} + \overline{x}^k_{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^k_j}\right|_{\underline{\theta}} + \dots + \overline{x}^k_{i j_1 j_2 \dots j_p} \left.\frac{\partial}{\partial x^k_{j_1 j_2 \dots j_p}}\right|_{\underline{\theta}}, \qquad (9)$$

откуда видно, что данные векторы зависят лишь от репера θ. Лемма доказана.

Замечание 1. В частности, при $p = 3$ имеем:

$$X_i(\theta) = \overline{x}^k_i \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\underline{\theta}} + \overline{x}^k_{ij} \left.\frac{\partial}{\partial x^k_j}\right|_{\underline{\theta}} + \overline{x}^k_{ijl} \left.\frac{\partial}{\partial x^k_{jl}}\right|_{\underline{\theta}},$$

где $\theta \in H^3(M)$.

Замечание 2. Репер $\theta \in H^1(M)$ 1-го порядка определяет изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}^n \to T_x M$, задаваемый базисом $\{X_i(\theta)\}_{i=\overline{1,n}}$.

Замечание 3. Если $p > q \geq 1$, $\theta \in H^p(M)$, $\theta' = \pi_q^p(\theta)$, то $d\pi_q^p(X_i(\theta)) = X_i(\theta')$, то есть вектор $X_i(\theta)$ проектируется в точности на вектор $X_i(\theta')$ для любого $i = \overline{1,n}$.

4. Сужение $\boldsymbol{\Phi_\theta}$ на $\boldsymbol{\mathfrak{g}_n^p}$. Сужение $\Phi_\theta|_{\mathfrak{g}_n^p}$ изоморфизма Φ_θ на второе слагаемое прямой суммы (2) полностью определяется векторами вида

$$X\big(v, \underline{\theta}\big) = (d_e\varphi^p)(v), \tag{10}$$

где

$$v \in \mathfrak{g}_n^p \cong T_e D_n^p \subset T_e\big(H^p(\mathbb{R}^n)\big), \quad X\big(v, \underline{\theta}\big) \in T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big).$$

Обозначение в левой части (10) оправдано следующей леммой.

Лемма 2. Вектор $X(v, \underline{\theta})$ однозначно определяется выбором вектора $v \in \mathfrak{g}_n^p$ и репера $\underline{\theta}$, то есть не зависит ни от репера θ, ни от выбора его представителя φ.

Доказательство. Заметим, что отображение φ^p перестановочно с действием группы D_n^p на $H^p(\mathbb{R}^n)$ и на $H^p(M)$ правыми сдвигами:

$$\varphi^p(\mu \cdot \xi) = \varphi^p(\mu) \cdot \xi, \quad \mu \in H^p(\mathbb{R}^n),\ \xi \in D_n^p.$$

В самом деле, пусть $\mu = j_0^p b$, $\xi = j_0^p s$, тогда

$$\varphi^{(p)}(\mu \cdot \xi) = j_0^p(\varphi \circ b \circ s) = j_0^p(\varphi \circ b) \cdot j_0^p s = \varphi^p(\mu) \cdot \xi.$$

Поэтому сужение изоморфизма φ^p на группу D_n^p (а значит, и дифференциал данного сужения в единице e) не зависит от φ, а определяется лишь действием группы D_n^p на слое расслоения $H^p(M) \to M$, проходящем через точку $\underline{\theta} = \varphi^p(e)$:

$$\varphi^p(\xi) = \varphi^p(e \circ \xi) = \varphi^p(e) \cdot \xi = \underline{\theta} \cdot \xi,$$

и, таким образом,

$$\varphi^p|_{D_n^p}\colon D_n^p \to H^p(M),\ \xi \mapsto \underline{\theta} \cdot \xi.$$

Тогда из определения дифференциала вытекает, что если $\gamma\colon \mathbb{R} \to D_n^p$ — произвольный путь на D_n^p с касательным вектором v при $t = 0$, то

$$X(v, \underline{\theta}) = d_e\left(\varphi^p|_{D_n^p}\right)(v) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \left(\underline{\theta} \cdot \gamma\right)(t), \tag{11}$$

причем, как известно, от выбора пути γ значение дифференциала отображения не зависит. Таким образом, правая часть (11), а значит, и вектор $X(v, \underline{\theta})$ зависят лишь от $\underline{\theta}$ и v. Лемма доказана.

Замечание 4. Векторы $X(v, \underline{\theta})$ в каждой точке $\underline{\theta} \in H^p(M)$ образуют базис вертикального подпространства $V_{\underline{\theta}} \subset T_{\underline{\theta}} H^p(M)$, то есть подпространства, касательного к слою $\pi_p^{-1}(x)$ расслоения $H^p(M)$, где $x = \pi_p(\underline{\theta})$.

Замечание 5. Из формулы (9) следует, что для каждого фиксированного $v \in \mathfrak{g}_n^p$ векторное поле $X^p(v)$ на $H^p(M)$, образованное векторами $X(v, \underline{\theta})$, в точности совпадает с фундаментальным векторным полем на $H^p(M)$. соответствующим элементу v. Отметим, что фундаментальные векторные поля определены на любом главном расслоении [4, с. 57].

Каждый элемент $v \in \mathfrak{g}_n^p$ может быть единственным образом представлен в виде

$$v = v_j^i \partial_i^j + v_{jk}^i \partial_i^{jk} + v_{jkl}^i \partial_i^{jkl} + \cdots + v_{j_1 \dots j_p}^i \partial_i^{j_1 \dots j_p},$$

где $\partial_i^{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial}{\partial u_{j_1 \dots j_s}^i}\Big|_e$ $(1 \le s \le p)$ — векторы натурального базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}_n^p \cong T_e D_n^p$ относительно стандартных координат на D_n^p (см. п. 2), а на координаты $v_{jk}^i, \dots, v_{j_1 \dots j_p}^i$ накладывается требование симметричности по всем нижним индексам.

Для примера выведем выражение фундаментального векторного поля $X^3(v)$ в локальных координатах на расслоении $H^3(M)$, где

$$v = v^i_j \partial^j_i + v^i_{jk} \partial^{jk}_i + v^i_{jkl} \partial^{jkl}_i. \tag{12}$$

Уравнения пути $\gamma: \mathbb{R} \to D^3_n$ с касательным вектором (10) можно представить в виде

$$u^i_j(t) = \delta^i_j + v^i_j t + o(t),\ u^i_{jk}(t) = v^i_{jk} t + o(t),$$

$$u^i_{jkl}(t) = v^i_{jkl} t + o(t),$$

где $o(t)$ — члены порядка малости больше единицы при $t \to 0$. Подставляя данные уравнения в (1), получим

$$\tilde{x}^i_j(t) = x^i_j + \xi^i_j(x) t + o(t),$$

$$\tilde{x}^i_{jk}(t) = x^i_{jk} + \xi^i_{jk}(x) t + o(t),$$

$$\tilde{x}^i_{jkl}(t) = x^i_{jkl} + \xi^i_{jkl}(x) t + o(t),$$

где

$$\begin{gathered} \xi^i_j(x) = x^i_k v^k_j,\ \xi^i_{jk}(x) = x^i_m v^m_{jk} + 2x^i_{m(j} v^m_{k)}, \\ \xi^i_{jkl}(x) = x^i_m v^m_{jkl} + 3x^i_{m(l} v^m_{jk)} + 3x^i_{m(jk} v^m_{l)}. \end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, в данном случае формула (11) дает следующее выражение для $X^3(v)$:

$$X^3(v) = \xi^i_j(x) \frac{\partial}{\partial x^i_j} + \xi^i_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x^i_{jk}} + \xi^i_{jkl}(x) \frac{\partial}{\partial x^i_{jkl}},$$

где коэффициенты $\xi^i_j(x)$, $\xi^i_{jk}(x)$, $\xi^i_{jkl}(x)$ выражаются по формулам (13).

Заключение. Поскольку сужения $\Phi_\theta|_{\mathbb{R}^n}$ и $\Phi_\theta|_{\mathfrak{g}^p_n}$ изоморфизма Φ_θ вместе полностью определяют данный изоморфизм, из лемм 1 и 2 вытекает

Теорема. *Изоморфизм Φ_θ векторных пространств $T_e H^p(\mathbb{R}^n)$ и $T_{\underline{\theta}} H^p(M)$ определен формулой (3) корректно, то есть зависит лишь от репера θ и не зависит от выбора представителя φ данного репера.*

Замечание 6. Изоморфизм Φ_θ, определяемый репером $\theta \in H^{p+1}(M)$, наделяет касательное пространство $T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big)$ базисом, состоящим из векторов

$$X_i(\theta),\ X_i^j,\ X_i^{jk},\ \dots,\ X_i^{j_1 \dots j_p},$$

где

$$X_i^{j_1 \dots j_s} = X^p\left(\partial_i^{j_1 \dots j_s}, \underline{\theta}\right) = \Phi_\theta\left(\partial_i^{j_1 \dots j_s}\right),\ 1 \le s \le p.$$

Замечание 7. Линейная оболочка L_θ векторов $X_i(\theta)$, $i = \overline{1,n}$, является n-мерным подпространством в $T_{\underline{\theta}}\big(H^p(M)\big)$, горизонтальным относительно проекции π_p, и однозначно определяется репером θ. Отметим, что аналогичными свойствами обладают *R*-плоскости на расслоениях *k*-джетов сечений локально тривиальных расслоений [1, с. 104].

Обсуждению вопроса о том, как вывести координатное представление для скалярных компонент формы Θ, получаемых при ее разложении по стандартном базису пространства $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}_n^p$, мы планируем посвятить отдельную статью.

Список литературы

1. *Виноградов А.М.* Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1980. Т. 11. С. 89—134.

2. *Евтушик Л.Е.*Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1969. Т. 2. С. 119—150.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—246.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. Т. 1. М., 1981.

5. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

6. *Юмагужин В. А.* Интегрируемые геометрические структуры конечного типа // Фундамент. и прикл. матем. 2004. Т. 10, вып. 1. С. 255—269.

7. *Kolář I., Michor P., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. Springer, 1993.

Для цитирования: *Кулешов А. В.* О конструкции канонической формы на расслоении реперов // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 5—17. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-1.

MSC 2010: 58A10, 58A20, 58A32.

A. V. Kuleshov

Immanuel Kant Baltic Federal University

14, A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia

arturkuleshov@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-1

On construction of the canonical form on the frame bundle

Submitted on May 14, 2023

The detailed description of the construction of the canonical form on the higher order frame bundle over an n-dimensional smooth manifold is given. In particular, it is shown that some vector space isomorphism playing the key role in this construction is defined correctly, i. e. it depends only on the frame of order $p+1$ and does not depend on the choice of its representative, i. e. a local diffeomorphism which $(p+1)$-jet is exactly this frame. This isomorphism acts from the direct sum of n-dimensional arithmetic space and the Lie algebra of the p-th order differential group to the tangent space to the p-th order frame bundle over the manifold at the p-th order frame lying "below". The action of this isomorphism can be splitted into two its restrictions. The first one acts from the first direct summand, and the second one acts from the second direct summand. It is shown that the first restriction depends only on the choice of the $(p+1)$-frame, while the second one is closely related to fundamental vector fields and therefore does not depend of this frame at all.

Keywords: smooth manifold, jet, frame bundle, canonical form

References

1. *Vinogradov, A.M.:* Geometry of nonlinear differential equations. J. Soviet. Math., **17**:1, 1624—1649 (1981).

2. *Evtushik, L.E.:* Differential connections and infinitesimal transformations of a prolonged pseudogroup. Tr. Geom. Sem. 2, 119—150 (1969).

3. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet. Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

4. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Foundations of differential geometry. Interscience publishers, New York, London (1963).

5. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem. 1, 139—189 (1966).

6. *Yumaguzhin, V. A.:* Finite-type integrable geometric structures. J. Math. Sci. 136, 4401—4410 (2006).

7. *Kolář, I., Michor, P., Slovák, J.*: Natural operations in differential geometry. Springer. Berlin, Heidelberg, 1993.

For citation: Kuleshov, A.V. On construction of the canonical form on the frame bundle. DGMF, 54 (2), 5—17 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-1.

УДК 514.76

Н.Д. Никитин, О.Г. Никитина
Пензенский государственный университет, Россия
nikitina1005@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-2

Аффинные преобразования касательного расслоения общего пространства путей

Исследуются инфинитезимальные преобразования касательного расслоения общего пространства путей. Общее пространство путей является обобщением пространства аффинной связности. По аффинной связности общего пространства путей построена аффинная связность на касательном расслоении. Для инфинитезимального преобразования касательного расслоения составлена система уравнений инвариантности построенной аффинной связности. Эта система является системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонентов инфинитезимального преобразования. Основные результаты статьи получены посредством анализа этой системы с учетом свойств однородных функций. Показано, что полный лифт инфинитезимального преобразования базы является инфинитезимальным аффинным движением касательного расслоения тогда и только тогда, когда инфинитезимальное преобразование базы является аффинным движением в общем пространстве путей. Найдены необходимые и достаточные условия того, что инфинитезимальное преобразование касательного расслоения, порожденное вертикальным векторным полем, оставляет инвариантной аффинную связность касательного расслоения. Приводятся условия, которые являются также необходимы-

Поступила в редакцию 16.04.2023 г.

ми и достаточными, чтобы сохраняющее слои инфинитезимальное преобразование касательного расслоения с аффинной связностью являлось аффинным движением.

Ключевые слова: касательное расслоение, общее пространство путей, производная Ли, инфинитезимальное аффинное преобразование

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие, $T(M)$ — его касательное расслоение, $\pi\colon T(M) \to M$ — каноническая проекция.

Общее пространство путей [1] есть пара (M, H), где H — дифференциально-геометрический объект, заданный на касательном расслоении. Пусть (x^i), где $i = \overline{1,n}$, — система координат окрестности $U \subset M$. В окрестности $\overline{U} = \pi^{-1}(U)$ относительно индуцированных координат (x^i, x^{n+j}), где $i, j = \overline{1,n}$, объект H имеет компоненты $H^i(x^1, \dots, x^n,\ x^{n+1}, \dots, x^{2n})$, однородные второй степени относительно слоевых координат $x^{n+1}, \dots, x^{2n}$.

Векторное поле $X \in F(U)$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием в общем пространстве путей тогда и только тогда, когда

$$L_{X^C} \Gamma_{ij}^h = 0. \tag{1}$$

L_{X^C} — обозначение производной Ли вдоль полного лифта векторного поля X [2], $\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^h}{\partial x^{n+i} \partial x^{n+j}}$ — компоненты аффинной связности Γ общего пространства путей. Условие (1) равносильно условию $L_{X^C} H^h = 0$.

В [3] по аффинной связности Γ общего пространства путей строится аффинная связность Γ^C на касательном расслоении $T(M)$. Если база касательного расслоения — пространство аффинной связности (M, ∇), то $\Gamma^C = \nabla^C$.

Аффинная связность Γ^C называется *полным лифтом аффинной связности Γ* общего пространства путей.

В локальных координатах (x^i, x^{n+j}) окрестности $\bar{U}$ объект Γ^C имеет компоненты

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij}, \bar{\Gamma}^h_{n+i\,j} = \bar{\Gamma}^h_{i\,n+j} = \bar{\Gamma}^h_{n+i\,n+j} = 0, \bar{\Gamma}^{n+h}_{ij} = x^{n+\sigma}\delta_\sigma \Gamma^h_{ij},$$

$$\bar{\Gamma}^{n+h}_{n+i\,j} = \bar{\Gamma}^{n+h}_{i\,n+j} = \Gamma^h_{ij}, \bar{\Gamma}^{n+h}_{n+i\,n+j} = 0 \;\; (i,j,h,\sigma = \overline{1,n}). \qquad (2)$$

В (2)

$$\delta_\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\rho_\sigma \frac{\partial}{\partial x^{n+\rho}}, \; \Gamma^\rho_\sigma = \; \Gamma^\rho_{\sigma\beta} x^{n+\beta} \;\; (\rho, \beta = \overline{1,n}).$$

Запишем уравнения инфинитезимального аффинного преобразования $\bar{X} = \xi^A(x^1, \dots, x^{2n})\frac{\partial}{\partial x^A}$ касательного расслоения $T(M)$ со связностью Γ^C:

$$\partial^2_{BC}\,\xi^A - \partial_D \xi^A\,\bar{\Gamma}^D_{BC} + \partial_B \xi^D\,\bar{\Gamma}^A_{DC} +$$

$$+\partial_C \xi^D\,\bar{\Gamma}^A_{BD} + \xi^D \partial_D\,\bar{\Gamma}^A_{BC} = 0 \;\; (A, B, C, D = \overline{1,2n}). \qquad (3)$$

Для инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения с аффинной связностью Γ^C следующие утверждения.

Теорема 1. *Полный лифт X^C векторного поля X окрестности U многообразия M является инфинитезимальным аффинным преобразованием касательного расслоения T(M) с аффинной связностью Γ^C тогда и только тогда, когда X является инфинитезимальным аффинным преобразованием общего пространства путей.*

Доказательство. Пусть

$$X^C = \xi^i(x^1, \dots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i} + x^{n+\sigma}\partial_\sigma \xi^i(x^1, \dots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^{n+i}}$$

— полный лифт векторного поля

$$X = \xi^i(x^1, \dots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i, \sigma = \overline{1,n}),$$

заданного на многообразии M, является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$. Из дифференциальных уравнений (3) при $A, B, C = \overline{1, n}$ получим, что $L_{X^C} \Gamma_{ij}^h = 0$. Значит, X является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве путей. Пусть теперь векторное поле X является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве путей. Тогда в силу (1) нетрудно показать, что $L_{X^C} \bar{\Gamma}_{BC}^A = 0$, где $\bar{\Gamma}_{BC}^A$ — компоненты объекта связности Γ^C. Следовательно, X^C является аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$. Теорема доказана.

Векторное поле $\bar{X}$ касательного расслоения $T(M)$ называется вертикальным [4], если для любой дифференцируемой функции f на многообразии M выполняется условие $\bar{X}(f^V) = 0$, где f^V — вертикальный лифт функции f, заданной на M, в касательное расслоение. В локальных координатах (x^i, x^{n+j}) окрестности $\bar{U}$

$$\bar{X} = \xi^{n+i}(x^1, \dots, x^{2n}) \frac{\partial}{\partial x^{n+i}}.$$

Теорема 2. *Вертикальное векторное поле $\bar{X}$ на $T(M)$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

a) $\bar{X} = D^V + {}^{VX}C$, где D^V — вертикальный лифт инфинитезимального аффинного преобразования

$$D = D^\alpha(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

в общем пространстве путей,

$${}^{VX}C = C_\beta^h(x^1, \dots, x^n) x^{n+\beta} \frac{\partial}{\partial x^{n+h}}$$

— вертикально-векторное поднятие аффинора $C_\beta^h(x^1, \dots, x^n)$, заданного на базе M [5];

b) $D^\beta \, \Gamma_{ij\beta}^h = 0$, $\Gamma_{ij\beta}^h \, \nabla_s \, D^\beta x^{n+s} = 0$;

c) $\nabla_j\, C_i^h = 0,\, C_\alpha^\beta\, x^{n+\alpha}\, \Gamma_{ij\beta}^h = 0,$

$$\left(C_\beta^h\, K_{i\,\alpha\,j}^\beta + C_\alpha^s\, K_{j\,i\,s}^h\right) x^{n+\alpha} = 0.$$

В условиях b), c) теоремы 2 ∇_j *— ковариантная производная относительно связности* Γ, $K_{i\,\alpha\,j}^\beta$ *— компоненты тензора кривизны общего пространства путей,* $\Gamma_{ij\beta}^h = \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^{n+\beta}}$ $(i, j, h, s, \alpha, \beta = \overline{1, n})$.

Доказательство. Пусть вертикально-векторное поле

$$\bar{X} = \xi^{n+i}(x^1, \dots, x^{2n}) \frac{\partial}{\partial x^{n+i}} \ (i = \overline{1, n})$$

касательного расслоения *T*(*M*) является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$. Исследуем уравнения (3), составленные для инфинитезимального аффинного преобразования $\bar{X}$. Из (3) при $A, B, C = \overline{n+1, 2n}$ имеем

$$\xi^{n+i} = C_\alpha^i(x^1, \dots, x^n) x^{n+\alpha} + D^i(x^1, \dots, x^n) \ (i, \alpha = \overline{1, n}).$$

При допустимых преобразованиях координат

$$\bar{x}^i = f\,(x^1, \dots, x^n), \qquad \bar{x}^{n+i} = \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} x^{n+\alpha}$$

окрестности $\bar{U}$, составляющие $C_\alpha^i(x^1, \dots, x^n)$, преобразуются как компоненты тензорного поля (1, 1), а $D^i(x^1, \dots, x^n)$ — как компоненты векторного поля на *M*. Для тензорного поля $C\left(C_\alpha^i\right)$ и векторного поля $D = D^\alpha(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ сопоставим на $T(M)$ векторные поля

$${}^{VX}C = C_\alpha^i(x^1, \dots, x^n)\, x^{n+\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{n+i}},\ D^V = D^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^{n+i}}.$$

Тогда векторное поле $\bar{X} = {}^{VX}C + D^V$. Учитывая, что

$$\xi^{n+i} = C_\alpha^i(x^1, \dots, x^n) x^{n+\alpha} + D^i(x^1, \dots, x^n),$$

из (3) при следующих значениях индексов A, B, C:

$a)\ A, B, C = \overline{1, n}$;

$b)\ A = \overline{n+1, 2n},\ B, C = \overline{1, n}$;

$c)\ A, C = \overline{n+1, 2n},\ B = \overline{1, n}$

получим:

$$D^{\beta}\,\Gamma^{h}_{i\,j\,\beta} = 0,\ C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} \Gamma^{h}_{i\,j\,\beta} = 0,$$

$$\partial_{ij}\, C^{h}_{\alpha} x^{n+\alpha} - \Gamma^{\beta}_{ij}\,\partial_{\beta} C^{h}_{\alpha} x^{n+\alpha} - C^{h}_{\beta}\left(x^{n+\alpha}\partial_{\alpha}\Gamma^{\beta}_{ij} - x^{n+\alpha}\Gamma^{s}_{\alpha}\,\Gamma^{\beta}_{ijs}\right) +$$
$$+\Gamma^{h}_{\beta j}\partial_{i} C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} + \Gamma^{h}_{i\beta}\,\partial_{j} C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha} + C^{\beta}_{\alpha} x^{n+\alpha}(\partial_{\beta}\Gamma^{h}_{ij} +$$
$$+x^{n+s}\partial_{s}\,\Gamma^{h}_{ij\beta} - 2\,\Gamma^{\alpha}_{\beta}\,\Gamma^{h}_{ij\alpha} - x^{n+s}\,\Gamma^{\alpha}_{s}\,\Gamma^{h}_{ij\alpha\beta}) = 0, \tag{4}$$

$$L_{D^C}\,\Gamma^{h}_{ij} = \Gamma^{h}_{ij\beta}\,\nabla_{s}\,D^{\beta} x^{n+s}, \tag{5}$$

$$\nabla_{i}\, C^{h}_{j} = 0. \tag{6}$$

Здесь ∇_i — обозначение ковариантной производной относительно связности Γ общего пространства путей, D^C — полный лифт векторного поля $D = D^{\alpha}(x^1, \dots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ с базы на касательное расслоение, L_{D^C} — обозначение производной Ли вдоль векторного поля D^C, $\Gamma^{h}_{ij\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{h}_{ij\alpha}}{\partial x^{n+\beta}}$.

В (4)—(6) индексы $i, j, h, \alpha, \beta, s$ принимают значения от 1 до n.

Если обе части соотношения (5) умножим на $x^{n+i}x^{n+j}$ и просуммируем по i, j, то в силу $\Gamma^{h}_{ij\beta}\,x^{n+i} = 0$ получим, что $\left(L_{D^C}\,\Gamma^{h}_{ij}\right)x^{n+i}x^{n+j} = 0$. Из этого соотношения, учитывая, что $L_{D^C}x^{n+i} = 0$ и $H^h = \Gamma^{h}_{ij}\,x^{n+i}x^{n+j}$, имеем $L_{D^C}H^h = 0$. Значит, векторное поле D является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве путей. Но тогда из (5) следует, что $\Gamma^{h}_{ij\beta}\,\nabla_s\,D^{\beta}x^{n+s} = 0$. Из (4) с учетом (6) получим, что

$$\left(C^{h}_{\beta}K^{\beta}_{i\,\alpha j} + C^{s}_{\alpha}K^{h}_{i\,j\,s}\right)x^{n+\alpha} + C^{\beta}_{\alpha}x^{n+\alpha}x^{n+s}\partial_{s}\Gamma^{h}_{j\,i\,\beta} -$$
$$-C^{\beta}_{\alpha}x^{n+\alpha}(\Gamma^{s}_{\beta}\Gamma^{h}_{i\,j\,s} - x^{n+s}\Gamma^{v}_{s}\,\Gamma^{h}_{i\,j\,v\beta})\,. \tag{7}$$

В (7) K_{ijs}^{h} — компоненты тензора кривизны *K* общего пространства путей. Если продифференцируем соотношения $C_{\alpha}^{\beta} x^{n+\alpha} \Gamma_{j\,i\,\beta}^{h} = 0$ по x^s, а затем по индексу *s* просуммируем с x^{n+s}, то, учитывая (6), придем к соотношениям

$$C_{\alpha}^{\beta} x^{n+\alpha} x^{n+s} \partial_s \Gamma_{j\,i\,\beta}^{h} = -\Gamma_{j\,i\,\beta}^{h} \left(C_{v}^{\beta} \Gamma_{s\alpha}^{v} - C_{\alpha}^{v} \Gamma_{sv}^{\beta} \right) x^{n+s} x^{n+\alpha}. \quad (8)$$

Из $C_{\alpha}^{\beta} x^{n+\alpha} \Gamma_{j\,i\,\beta}^{h} = 0$ нетрудно также получить, что

$$\Gamma_{s}^{v} x^{n+s} \Gamma_{j\,i\,v\beta}^{h} C_{\alpha}^{\beta} x^{n+\alpha} = -\, C_{v}^{\beta} \Gamma_{j\,i\,\beta}^{h} \Gamma_{s}^{v} x^{n+s}. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) из (7) следует, что

$$\left(C_{\beta}^{h} K_{i\,\alpha\,j}^{\beta} + C_{\alpha}^{s} K_{j\,i\,s}^{h} \right) x^{n+\alpha} = 0.$$

Таким образом, показано, что если вертикальное векторное поле $\bar{X}$ на *T*(*M*) является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$, то для поля $\bar{X}$ выполняются условия *a*), *b*), *c*). Справедливо и обратное утверждение. Любое векторное поле $\bar{X} = D^V + {}^{VX}C$, где D — инфинитезимальное аффинное движение в пространстве путей, ${}^{VX}C$ — вертикально-векторное поднятие аффинора $C_{\alpha}^{i}(x^1, \ldots, x^n)$ с базы *M* на касательное расслоение *T*(*M*), для которого выполняются условия *b*), *c*), является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве $(T(M), \Gamma^C)$.

Теорема 3. *Инфинитезимальное преобразование* $\bar{X}$ *касательного расслоения T(M), сохраняющее слои, является инфинитезимальным аффинным преобразованием в пространстве* $(T(M), \Gamma^C)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\bar{X} = X^C + D^V + C^{VX},$$

где X^C, D^V *— соответственно полный и вертикальный лифты инфинитезимальных аффинных преобразований*

$$X = \xi^i(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad D = D^i(x^1, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

в пространстве путей на T(M), C^{VX} *— вертикально-векторное поднятие аффинора* $C^i_\alpha(x^1,\dots,x^n)$ *с базы M на касательное расслоение T(M), и выполняются условия b), c) теоремы 2.*

Доказательство. Пусть $\bar{X}$ — инфинитезимальное аффинное преобразование в пространстве $(T(M),\Gamma^C)$, которое сохраняет слои. Так как $\bar{X}$ сохраняет слои, то в локальных координатах $\left(x^i,\ x^{n+j}\right)$ окрестности $\bar{U}$ первые *n* компонент поля не зависят от слоевых координат $x^{n+1},\dots,x^{2n}$,

$$\bar{X} = \ \xi^i(x^1,\dots,x^n)\ \frac{\partial}{\partial x^i} + \ \xi^{n+i}(x^1,\dots,x^{2n})\ \frac{\partial}{\partial x^{n+i}}.$$

Обозначим через *X* проекцию векторного поля $\bar{X}$ на базу *M*, $X = \ \xi^i(x^1,\dots,x^n)\ \frac{\partial}{\partial x^i}$. Из уравнений (3), составленных для инфинитезимального аффинного преобразования $\bar{X}$ при $A,B,C = \overline{1,n}$, получим, что $L_X cH^h = 0$. Значит, *X* является инфинитезимальным аффинным преобразованием в общем пространстве путей. Но тогда в силу теоремы 1 векторное поле X^C является аффинным преобразованием в пространстве $(T(M),\Gamma^C)$. В силу свойства производной Ли вертикальное векторное поле $Y = \bar{X} - X^C$ является аффинным преобразованием в пространстве $(T(M),\Gamma^C)$. Согласно теореме 2, $Y = D^V + {}^{VX}C$, где *D* — инфинитезимальное аффинное преобразование в пространстве путей и выполняются условия *b*), *c*) теоремы 2. Значит, $\bar{X} = X^C + D^V + C^{VX}$.

Справедливо и обратное утверждение. Любое векторное поле $\bar{X} = X^C + D^V + C^{VX}$ касательного расслоения $T(M)$, где X^C, D^V — соответственно полный и вертикальный лифты инфинитезимальных аффинных преобразований *X*, *D* в пространстве путей, ${}^{VX}C$ — вертикально-векторное поднятие аффинора $C^i_\alpha(x^1,\dots,x^n)$ с базы *M* на касательное расслоение $T(M)$, при выполнении условий *b*), *c*) теоремы 2 является аффинным движением в пространстве $(T(M),\Gamma^C)$.

Список литературы

1. *Douglas J.* The general geometry of pahts // Annalas of Math. 1928. Vol. 29. P. 143—168.
2. *Yano K.* The theory of Lie derivaruves and its applications. Amsterdam, 1957.
3. *Yano K., Okubo T.* On the tangent bundles of generalized spaces of pahts // Rendicondi di matematica. 1971. Vol. 4, №2. P. 327—346.
4. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry. N. Y., 1973.
5. *Каган Ф. И.* Каноническое разложение проективно-киллинговых и аффинно-киллинговых векторов на касательном расслоении // Матем. заметки. 1976. Т. 19, вып. 2. С. 247—258.
6. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.
7. *Никитин Н.Д.* Об аффинных движениях в общих пространствах путей // Изв. вузов. Математика. 1996. №2. С. 21—25.
8. *Никитин Н.Д.*, *Никитина О.Г.* Инфинитезимальные преобразования аффинной связности касательного расслоения пространства нелинейной связности // ДГМФ. 2013. Вып. 44. С. 95—100.

Для цитирования: *Никитин Н.Д., Никитина О.Г.* Аффинные преобразования касательного расслоения общего пространства путей // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 18—28. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-2.

MSC 2010: 53A35

N. D. Nikitin, O. G. Nikitina
Penza State University
37, Lermontova St., Penza, 440026, Russia
nikitina1005@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-2

Affine transformations of the tangent bundle of a common path space

Submitted on April 16, 2023

In this paper, we study infinitesimal transformations of the tangent bundle of a common path space. The general path space is a generalization space of the affine connectivity. By affine connectivity of the common path space, we construct an affine connection on the tangent bundle. For the infinitesimal transformation of the tangent bundle, a system of invariance equations for the constructed affine connectivity is compiled. This system is a system of second-order differential equations with respect to the components of the infinitesimal transformation. The main results of the article are obtained by analyzing this system taking into account the properties of homogeneous functions. It is shown that the complete lift of an infinitesimal transformation of base is an infinitesimal affine motion of a tangent bundle if and only if the infinitesimal transformation of base is an affine motion in the general path space. Necessary and sufficient conditions are found that the infinitesimal transformation of a tangent bundle generated by a vertical vector field leaves the affine connectivity of the tangent bundle invariant. Conditions are given that are necessary and sufficient so that the infinitesimal transformation of a tangent bundle with affine connectivity that preserves layers is an affine motion.

Keywords: tangent bundle, general path space, Lie derivative, infinitesimal affine transformation

References

1. *Douglas, J.:* The general geometry of pahts. Annalas of Math., 29, 143—168 (1928).

2. *Yano, K.:* The theory of Lie derivaruves and its applications. Amsterdam (1957).

3. *Yano, K., Okubo, T.:* On the tangent bundles of generalized spaces of pahts. Rendicondi di matematica, **4**:2, 327—346 (1971).

4. *Yano, K., Ishihara, S.:* Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry. New York (1973).

5. *Kagan, F.I.:* Canonical decomposition of projective-killing and affine-killing vectors on a tangent bundle. Math. Notes, **19**:2, 247—258 (1976).

6. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Foundations of differential geometry, 1. Moscow (1981).

7. *Nikitin, N.D.:* On affine motions in general path spaces. Izvestiya vuzov. Math., 2, 21—25 (1996).

8. *Nikitin, N. D.*, *Nikitina, O. G.:* Infinitesimal transformations of affine connectivity of tangent bundle of spaces of nonlinear connectivity. DGMF, 44, 95—100 (2013).

For citation: Nikitin, N. D., Nikitina, O. G. Affine transformations of the tangent bundle of a common path space. DGMF, 54 (2), 18—28 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-2.

УДК 514.76

К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-3

О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами

Изучается многообразие, структурные уравнения и деривационные формулы которого построены с помощью деформаций внешнего и обычного дифференциалов. Рассмотрены расслоения несимметричных корепелов и реперов 2-го порядка на этом многообразии и задана аффинная связность. Доказано, что кривизна и кручение этой связности не являются тензорами. Построена каноническая связность и показано, что она является плоской и несимметричной.

Ключевые слова: возмущение дифференциала, касательное пространство 2-го порядка, несимметричные реперы и кореперы 2-го порядка, объекты кручения и кривизны, плоская и несимметричная связность

Введение

Введением деформации внешнего и обычного дифференциалов D и d на гладком многообразии X_m в [4] был построен аппарат, позволяющий построить многообразие $\breve{X}_m$ с несимметричными формами дифференциальных групп 2-го и более высоких порядков, а также несимметричными векторами касательного пространства 2-го и более высоких порядков. Рас-

---

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

сматриваемое многообразие $\breve{X}_m$ представляет собой деформацию обычного гладкого многообразия X_m и называется деформирующимся [2; 10].

В данной работе мы приводим структурные формы и деривационные уравнения полученного многообразия $\breve{X}_m$. Задаем аффинную связность на этом многообразии, а также объекты ее кривизны и кручения. Рассматриваем каноническую аффинную связность, объекты ее кривизны и кручения. Полученные результаты в значительной степени согласуются с результатами работ по неголономным реперам [7] и неголономным многообразиям [8].

Деформации дифференциалов D и d в кокасательном T^*X_m и касательном TX_m пространствах многообразия X_m были определены в [4] с помощью введения внешнего поля $f = f(x^i, x^\xi)$ для возмущения внешнего дифференциала D и внутреннего поля $f^\xi = f^\xi(x^i)$ для возмущения дифференциала d; $i, j, k = 1, \dots, m$. В настоящей работе продолжаем изучать случай, когда значения индекса ξ нумеруют элементы матрицы (x^i_j), то есть $(x^\xi) = (x^i_j)$ и $f^\xi = f|_{x^\xi=1,\text{остальные}=0}$; $\xi = m+1, \dots, m+m^2$.

Замечание 1. В работе [11] рассматривается глобальная геометрия некоммутативных теорий поля с точки зрения деформации, где изучаемые пространства-время — это деформации классических пространственно-временных многообразий. Показано, как можно получить деформацию ассоциированных векторных расслоений.

Замечание 2. Следует отметить, что касательные (а также кокасательные) пространства многообразий X_m и $\breve{X}_m$ не различаются, различие проявляется для 2-го и более высоких порядков.

В [4] внешняя деформация внешнего дифференциала D (то есть отображение $\breve{D}$) и внешняя деформация дифференциала касательных векторов (то есть отображение $\check{d}$) определены по законам

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\wedge^2 T^*},$$

$$\check{d}v = dv + d(v(f^\xi))\partial_\xi\big|_{T^*},$$

где

$$f = f(x^i, x^\xi),\, f^\xi = f^\xi(x^i),\, v = v^i\partial_i,\, d\big(v(f^\xi)\big) = v^i d(\partial_i f^\xi).$$

Причем вдоль линии ρ на многообразии $\check{X}_m$ выполняются традиционные равенства

$$\breve{D}^2\big|_\rho = 0,\ \breve{D}(\check{d}v)\big|_\rho = 0.$$

Замечание 3. Для дифференциала $\breve{D}$ справедливо $\breve{D}g = dg$, $\breve{D}(df) = 0$, $\breve{D}\big(dx^\xi\big) = 0$, $\breve{D}^2\big(a_\xi dx^\xi\big) = 0$ (см.: [4]).

Замечание 4. При ограничении на подпространство деформации внешнего дифференциала, рассматриваемые в работах [2; 9; 10; 12; 13], являются дифференциалами.

В частности, для элементов dx^i и $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ операторы $\breve{D}$ и $\check{d}$ дают

$$\breve{D}(dx^i) = \overline{N}^i_{jk} dx^j \wedge dx^k,$$

$$\check{d}(\partial_i) = \Big(\partial_{ij} + \overline{N}^\xi_{ij}\partial_\xi\Big) \otimes dx^j,$$

где

$$\overline{N}^i_{jk} = \delta^i_{[k}\partial_{j]} f,\ \ \overline{N}^\xi_{ij}\partial_\xi = \partial_{ij} f^\xi$$

— кососимметрический и симметрический объекты, задающие возмущения дифференциалов $\breve{D}$ и $\check{d}$ на элементах dx^i и ∂_i.

1. Структурные уравнения и деривационные формулы деформирующегося многообразия

Рассмотрим над m-мерным деформирующимся многообразием $\check{X}_m$ главное расслоение реперов 2-го порядка $D^2_m(\check{X}_m)$ со структурными уравнениями [4; 5; 7; 8]

$$\check{D}\omega^i = \omega^j \wedge \check{\omega}^i_j, \tag{1}$$

$$\check{D}\check{\omega}^i_j = \check{\omega}^k_j \wedge \check{\omega}^i_k + \omega^k \wedge \check{\omega}^i_{jk}, \tag{2}$$

$$\check{D}\check{\omega}^i_{jk} = \check{\omega}^l_{jk} \wedge \check{\omega}^i_l - \check{\omega}^i_{lk} \wedge \check{\omega}^l_j - \check{\omega}^i_{jl} \wedge \check{\omega}^l_k + \omega^l \wedge \check{\omega}^i_{jkl}.$$

При фиксации точки многообразия структурные формы $\check{\omega}^i_j, \check{\omega}^i_{jk}$ превращаются в формы, являющиеся инвариантными формами (обобщенной) дифференциальной группы 2-го порядка D^2_m [7]. Уравнения (1), (2) задают главное расслоение касательных реперов $D^1_m(\check{X}_m)$. Его типовым слоем является линейная группа $D^1_m = GL(m)$, действующая в касательном пространстве $T\check{X}_m$ в точке A, фиксируемой вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^i = 0$.

Замечание 5. Будем сохранять галочку над несимметричными формами (в том числе двухиндексными формами $\check{\omega}^i_j$) и несимметричными векторами, полученными в результате применения операторов $\check{D}$ и $\check{d}$, чтобы подчеркнуть их связь с $\check{D}$ и $\check{d}$, а также отметить их отличие от классических форм и векторов.

Формы $\omega^i, \check{\omega}^i_j, \check{\omega}^i_{jk}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx^i_j, d\check{x}^i_{jk}\}$ выражаются по формулам [3—5]

$$\omega^i = x^i_j dx^j,$$

$$\check{\omega}^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - \check{x}^i_{jk}\omega^k, \tag{3}$$

$$\check{\omega}^i_{jk} = \check{\Delta}\check{x}^i_{jk} + (\check{x}^s_{j[k}\check{x}^i_{sl]} - \check{x}^i_{jkl})\omega^l,$$

$$\check{\omega}^i_{jkl} = \check{\Delta}\check{x}^i_{jkl} - \check{x}^i_{sk}\check{\omega}^s_{jl} - \check{x}^i_{js}\check{\omega}^s_{kl} + \check{x}^s_{jk}\check{\omega}^i_{sl} + (\dots)^i_{jkls}\omega^s,$$

где x^j — локальные координаты точки на многообразии. Тензорный дифференциальный оператор $\check{\Delta}$ действует по закону

$$\check{\Delta} S^i_{jk} = dS^i_{jk} + S^l_{jk}\check{\omega}^i_l - S^i_{lk}\check{\omega}^l_j - S^i_{jl}\check{\omega}^l_k.$$

Слоевые координаты 1-го порядка x^i_j образуют невырожденную матрицу, для которой $(\overset{*}{x}{}^i_j)$ — обратная матрица, то есть $\overset{*}{x}{}^i_j x^j_k = \delta^i_k$.

Слоевые координаты 2-го порядка $\breve{x}^i_{jk}$ несимметричны по нижним индексам, причем

$$\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk},$$

где

$$N^i_{jk} = \overset{*}{x}{}^l_{[j}\delta^i_{k]}\partial_l f.$$

Компоненты N^i_{jk} можно выразить с помощью ранее введенных $\overline{N}^i_{jk}$ по формуле $N^i_{jk} = x^i_l \overline{N}^l_{pq} \dot{x}^p_j \dot{x}^q_k$.

Координаты $\breve{x}^i_{jk}$ симметричны по нижним индексам, если $N^i_{jk} = 0$. Значит, $\overline{N}^l_{pq} = \delta^l_{[q}\partial_{p]}f = 0$, что выполняется в случае $\partial_p f = 0$, то есть $f = f(x^\xi)$. В этом случае $f^\xi = const$, $\breve{D}\omega = D\omega$, $\check{d}v = dv$, поэтому очевидно несимметричные формы и векторы не получаются.

Всевозможные альтернации слоевых координат 3-го порядка $\breve{x}^i_{jkl}$ удовлетворяют соотношениям

$$\breve{x}^i_{j[kl]} = 0,$$

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{2}(N^i_{s[k}\breve{x}^s_{j]l} - N^s_{jk}\breve{x}^i_{sl} - \breve{x}^i_{s[k}N^s_{j]l} - N^s_{jk}N^i_{sl}) \neq 0,$$

$$\breve{x}^i_{[j|k|l]} = \frac{1}{2}(N^i_{s[l}\breve{x}^s_{j]k} - \breve{x}^i_{s[l}N^s_{j]k} - N^s_{jl}\breve{x}^i_{sk} - N^s_{jl}N^i_{sk}) \neq 0.$$

Слоевые координаты 3-го порядка $\breve{x}^i_{jkl}$ симметричны только по последним двум индексам k, l как следствие использования леммы Картана.

Альтернирование форм $\breve{\omega}^i_{jk}$ имеет вид

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} = -\breve{\Delta}N^i_{jk} + (\frac{1}{2}N^s_{jk}\breve{x}^i_{sl} - \frac{1}{2}\breve{x}^i_{s[k}\breve{x}^s_{j]l} - \breve{x}^i_{[jk]l})\omega^l,$$

то есть

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} \equiv -\breve{\Delta} N^i_{jk} \ \ (mod\ \omega^k).$$

При фиксации точки многообразия получим

$$\breve{\omega}^i_{[jk]}\Big|_{\omega^l=0} = \dot{x}^s_{[j}\delta^i_{k]}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\xi \partial x^s}dx^\xi.$$

Значит, формы $\breve{\omega}^i_{jk}$ несимметричны даже при фиксации точки многообразия, то есть

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} \not\equiv 0\ (mod\ \omega^k).$$

Кроме того,

$$\breve{\omega}^i_{j[kl]} \equiv \breve{x}^i_{js}\breve{\Delta}\mathrm{N}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{kl}} \ \ (mod\ \omega^k).$$

Каноническая форма 1-го порядка $\omega = \omega^i\varepsilon_i$ на многообразии $\check{X}_m$ связывает касательное $T\check{X}_m = span(\varepsilon_i)$ и кокасательное $T^*\check{X}_m = span(\omega^i)$ пространства к этому многообразию в его текущей точке. Кобазис $\{\omega^i\}$ сопряжен подвижному базису $\{\varepsilon_i\}$, то есть $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Для построенных дифференциалов справедливо

$$\breve{D}\omega^i = D\omega^i + N^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$\check{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N^\xi_{ij}\omega^j \otimes \partial_\xi,$$

где

$$N^i_{jk} = x^i_l \overline{N}^l_{pq}\overset{*}{x}{}^p_j\overset{*}{x}{}^q_k, \quad N^\xi_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^k_j\overline{N}^\xi_{lk}$$

— кососимметрический и симметрический объекты, задающие возмущения дифференциалов $\breve{D}$ и $\check{d}$ на элементах ω^i и ε_j.

Линия ρ на многообразии $\check{X}_m$ задается уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$, причем $\breve{D}\omega = \omega \wedge \omega_1$ и

$$\breve{\Delta}\rho^i - \rho^i\omega_1 = \rho^i_1\omega.$$

Слоевые формы $\breve{\omega}_j^i$, $\breve{\omega}_{jk}^i$, интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера ε_i, $\breve{\varepsilon}_{ij}$, удовлетворяющего деривационным уравнениям

$$\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j, \quad \breve{\Delta}\breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\omega}_{ij}^k \otimes \varepsilon_k = \omega^k \otimes \breve{\varepsilon}_{ijk}, \tag{4}$$

которые получены дифференцированием касательных векторов 1-го и 2-го порядков

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}_i^j \partial_j, \quad \breve{\varepsilon}_{ij} = \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k \partial_{lk} + \breve{x}_{ij}^k \varepsilon_k + \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k N_{lk}^\xi \partial_\xi,$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^i}, \partial_\xi = \frac{\partial}{\partial x^\xi}.$$

Векторы $\breve{\varepsilon}_{ij}$ несимметричны, причем

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]} = -N_{ij}^k \varepsilon_k,$$

$$\breve{\varepsilon}_{(ij)} = \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k \partial_{lk} + \breve{x}_{(ij)}^k \varepsilon_k + \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k N_{lk}^\xi \partial_\xi.$$

Размерность касательного пространства 2-го порядка $T^2\breve{X}_m = span(\varepsilon_k, \breve{\varepsilon}_{ij})$ деформирующегося многообразия $\breve{X}_m$ равна $\dim T^2\breve{X}_m = m + m^2$.

2. Аффинная связность на многообразии $\breve{X}_m$

В главном расслоении реперов $D_m^1(\breve{X}_m)$ со структурными уравнениями (1), (2) зададим аффинную связность по Лаптеву с помощью форм

$$\widetilde{\breve{\omega}}_j^i = \breve{\omega}_j^i - \breve{\Gamma}_{jk}^i \breve{\omega}^k,$$

где $\breve{\Gamma}_{jk}^i$ — функции на расслоении $D_m^1(\breve{X}_m)$. Дифференцируя формы $\widetilde{\breve{\omega}}_j^i$, получим

$$\breve{D}\widetilde{\breve{\omega}}_j^i = \widetilde{\breve{\omega}}_j^i \wedge \widetilde{\breve{\omega}}_j^i + \breve{\omega}^k \wedge \left(\breve{\Delta}\, \breve{\Gamma}_{jk}^i + \breve{\omega}_{jk}^i\right) - \breve{\Gamma}_{jk}^s \breve{\Gamma}_{sl}^i \wedge \omega^k \wedge \omega^l. \tag{5}$$

Согласно теореме Картана — Лаптева, аффинная связность задается полем объекта $\breve{\Gamma}^i_{jk}$

$$\breve{\Delta}\,\breve{\Gamma}^i_{jk} + \breve{\omega}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{jk,l}\breve{\omega}^l. \tag{6}$$

С учетом (6) уравнения (5) принимают вид:

$$\breve{D}\tilde{\breve{\omega}}^i_j = \tilde{\breve{\omega}}^i_j \wedge \tilde{\breve{\omega}}^i_j + \breve{R}^i_{jkl} \wedge \breve{\omega}^k \wedge \breve{\omega}^l,$$

где $\breve{R}^i_{jkl}$ — компоненты объекта кривизны аффинной связности, выражающиеся по формуле

$$\breve{R}^i_{jkl} = \breve{\Gamma}^i_{j[k,l]} - \breve{\Gamma}^s_{j[k}\breve{\Gamma}^i_{|s|l]}. \tag{7}$$

Кривизна аффинной связности не является тензором на деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$

$$\breve{\Delta}\,\breve{R}^i_{jkl} - \breve{\Gamma}^i_{js}\breve{\omega}^s_{[kl]} + \breve{\omega}^i_{j[kl]} \equiv 0. \tag{8}$$

Замечание 6. В работе [8, с. 52] сравнения на объект кривизны $\breve{R}^i_{jk}$ несимметрической аффинной связности неголономного гладкого многообразия имеют вид (8), то есть объект $\breve{R}^i_{jk}$ образует геометрический объект (квазитензор) лишь вместе с объектом связности.

Учитывая, что выражения для альтернированных форм $\breve{\omega}^i_{[kl]}$, $\breve{\omega}^i_{j[kl]}$ известны, сравнения (8) можно записать в уточненном виде:

$$\breve{\Delta}\,\breve{R}^i_{jkl} \equiv -\breve{\gamma}^i_{js}\breve{\Delta}N^s_{kl}, \tag{9}$$

где тензор $\breve{\gamma}^i_{jk}$ имеет вид $\breve{\gamma}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{jk} + \breve{x}^i_{jk}$. Из (9) видно, что кривизна является тензором (причем нулевым) только при $\breve{\gamma}^i_{js} = 0$, то есть для канонической связности, рассматриваемой далее.

Введем формы аффинной связности $\tilde{\breve{\omega}}^i_j$ в структурные уравнения (1):

$$\breve{D}\breve{\omega}^i = \breve{\omega}^j \wedge \tilde{\breve{\omega}}^i_j + \breve{T}^i_{jk}\breve{\omega}^j \wedge \breve{\omega}^k,$$

где $\breve{T}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{[jk]}$ — объект кручения аффинной связности. Альтернируя уравнения (5), получим уравнения

$$\breve{\Delta}\,\breve{T}^i_{jk} + \breve{\omega}^i_{[jk]} = \breve{\Gamma}^i_{[jk],l}\breve{\omega}^l$$

или сравнения

$$\breve{\Delta}\,\breve{T}^i_{jk} \equiv \breve{\Delta}\,N^i_{jk}.$$

При фиксации точки многообразия имеем

$$\breve{\Delta}\,\breve{T}^i_{jk} \equiv \overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\xi \partial x^s}dx^\xi.$$

Откуда видно, что объект кручения $\breve{T}^i_{jk}$ не образует тензор.

Утверждение 1. *На деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$ объект кручения $\breve{T}^i_{jk}$ аффинной связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ не является тензором. Следовательно, аффинная связность на многообразии $\breve{X}_m$ всегда с кручением, то есть несимметрическая.*

На деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$ равенства $\breve{T}^i_{jk} = 0$ не являются инвариантными, следовательно, они могут выполняться лишь в отдельных точках многообразия $\breve{X}_m$.

По аналогии с [3; 6] справедливо

Утверждение 2. *Для аффинной связности справедливо разложение*

$$\breve{\Gamma}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk} + \breve{\gamma}^i_{jk},\ \text{где}\ \breve{\gamma}^i_{jk} = \breve{\gamma}^i_{jk}(x^l, x^p_q).$$

Выражения для кручения и кривизны с учетом тензора деформации $\breve{\gamma}^i_{jk}$ имеют вид

$$\breve{T}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{[jk]} + \breve{\gamma}^i_{[jk]} = N^i_{jk} + \breve{\gamma}^i_{[jk]},$$
$$\breve{R}^i_{jkl} = \partial_s\breve{\gamma}^i_{j[k}\dot{x}^s_{l]} - \breve{\gamma}^i_{js}N^s_{kl} - \breve{\gamma}^s_{j[k}\breve{\gamma}^i_{|s|l]}.$$

3. Оснащающее подпространство

Введем в уравнения (4_1) формы аффинной связности $\tilde{\breve{\omega}}^i_j$:

$$\check{d}\varepsilon_i = \tilde{\breve{\omega}}^j_i \otimes \varepsilon_j + \tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} \otimes \omega^j,$$

где

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \breve{\varepsilon}_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k,$$

или $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + (\breve{\Gamma}^k_{ij} + \breve{x}^k_{ij})\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi$. С учетом тензора $\breve{\gamma}^k_{ij}$ имеем

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j (\partial_{lk} + N^\xi_{lk}\partial_\xi) + \breve{\gamma}^k_{ij}\varepsilon_k.$$

Векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} \equiv 0 \pmod{\omega^k},$$

значит, совокупность векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ инвариантна (при фиксации точки многообразия). Для многообразия $\breve{X}_m$ векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ определяют линейное подпространство $\tilde{E} = span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij})$: $\tilde{E} \subset T^2\breve{X}_m$, $\frac{1}{2}m(m+1) \le \dim\tilde{E} \le m^2$.

Найдем векторы, принадлежащие пересечению пространств $\tilde{E} \cap T\breve{X}_m$:

$$v^k\varepsilon_k = v^{ij}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} \Leftrightarrow v^k\varepsilon_k = v^{ij}(\breve{\varepsilon}_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k),$$

$$v^k\varepsilon_k = v^{ij}(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi + \breve{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k),$$

$$v^k\varepsilon_k = v^{ij}\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + v^{ij}(\breve{x}^k_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij})\varepsilon_k + v^{ij}\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi.$$

В силу линейной независимости $\varepsilon_k, \partial_{lk}, \partial_\xi$ получим

$$v^k = v^{ij}\left(\breve{x}^k_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij}\right),\ \ v^{ij}\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j = 0,\ \ v^{ij}\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk} = 0.$$

Видим, что система

$$v^k = v^{ij}\breve{\gamma}^k_{ij},\ \ v^{ij}\overset{*}{x}{}^{(l}_i \overset{*}{x}{}^{k)}_j = 0,\ \ v^{ij}N^\xi_{lk} = 0$$

имеет ненулевое решение. Таким образом, пространства $\tilde{E}$ и $T\breve{X}_m$ пересекаются.

Задание аффинной связности в расслоении реперов $L_{n^2}(\breve{X}_m)$ над гладким многообразием $\breve{X}_m$ эквивалентно оснащению многообразия $\breve{X}_m$ полем подпространств $\tilde{E} = span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij})$ [8, с. 50].

Несимметричные векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ можно представить в виде суммы кососимметричных векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]}$ и симметричных векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)}$:

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]} + \tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)},$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]} = (\breve{\mathrm{T}}^k_{ij} - N^k_{ij})\varepsilon_k,\\ \tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)} = \left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j\right)\partial_{lk} + \left(\breve{x}^k_{(ij)} + \breve{\Gamma}^k_{(ij)}\right)\varepsilon_k + (\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk})\partial_\xi.\end{gathered} \tag{10}$$

Альтернирование и симметрирование можно производить под знаком оператора Δ [8, с. 50]. Значит, инвариантными являются совокупности векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]}$, $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)}$ и подпространства $\tilde{E}_{[\,]}$, $\tilde{E}_{(\,)}$.

Оснащающее пространство $\tilde{\mathrm{E}}$ распадается на прямую сумму подпространств $\tilde{E}_{[\,]}$ и $\tilde{E}_{(\,)}$, то есть $\tilde{E} = \tilde{E}_{[\,]} \oplus \tilde{E}_{(\,)}$, размерности которых вычисляются следующим образом [8, с. 50]:

$$\dim\tilde{E}_{[\,]} = \frac{1}{2}m(m+1), \quad \dim\tilde{E}_{(\,)} = \frac{1}{2}m(m-1).$$

С помощью тензора $\breve{\gamma}^k_{ij}$ равенства (10) можно записать короче:

$$\begin{gathered}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]} = \breve{\gamma}^k_{[ij]}\varepsilon_k,\\ \tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)} = \left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j\right)\partial_{lk} + \breve{\gamma}^k_{(ij)}\varepsilon_k + (\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk})\partial_\xi.\end{gathered}$$

4. Каноническая связность

Равенство нулю тензора $\breve{\gamma}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{jk} + \breve{x}^i_{jk}$ выделяет каноническую аффиную связность $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$. Объект $\breve{\gamma}^i_{jk} = \breve{\gamma}^i_{jk}(x^l, x^p_q)$

является тензором деформации от канонической аффинной связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk}$ к произвольной, то есть $\breve{\gamma}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} = \breve{\Gamma}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}} - \overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk}$.

Теорема. *Справедливы следующие свойства канонической аффинной связности* $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$.

1. Каноническая аффинная связность является плоской и несимметричной, то есть

$$\overset{c}{\breve{T}}{}^i_{jk} = N^i_{jk},\ \overset{c}{\breve{R}}{}^i_{jkl} = 0.$$

Действительно, в силу выражений (7) получим равенство $\overset{c}{\breve{T}}{}^i_{jk} = N^i_{jk}$, то есть

$$\overset{c}{\breve{T}}{}^i_{jk} = \dot{x}^l_{[j}\delta^i_{k]}\partial_l f.$$

2. Задание канонической аффинной связности в расслоении реперов $D^1_m(\breve{X}_m)$ *над многообразием* $\breve{X}_m$ *эквивалентно оснащению многообразия* $\breve{X}_m$ *полем подпространств* $\overset{c}{\tilde{\breve{E}}} = span(\overset{c}{\tilde{\breve{e}}}_{ij})$*, дополняющих касательные пространства* $T\breve{X}_m$ *до соприкасающихся пространств* $T^2\breve{X}_m$*:* $T\breve{X}_m \oplus \overset{c}{\tilde{\breve{E}}} = T^2\breve{X}_m$ [8, с. 49].

Для канонической связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$ имеем $\breve{\gamma}^k_{ij} = 0$, поэтому

$$\overset{c}{\tilde{\breve{e}}}_{[ij]} = 0,$$

$$\overset{c}{\tilde{\breve{e}}}_{(ij)} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j (\partial_{lk} + N^{\xi}_{lk}\partial_{\xi}).$$

3. Равенство нулю ковариантных производных координат $\overset{*}{x}{}^j_i$ *векторов* $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j$ *выделяет каноническую аффинную связность. При этом базисные касательные векторы* ε_i *переносятся абсолютно параллельно относительно канонической связности.*

Действительно, внося формы связности в уравнения на m тензоров $\overset{*}{x}{}_i^1, \ldots, \overset{*}{x}{}_i^m$:

$$d\overset{*}{x}{}_i^j = \overset{*}{x}{}_k^j \breve{\omega}_i^k + \overset{*}{x}{}_l^j \breve{x}_{ik}^l \omega^k,$$

получим $d\overset{*}{x}{}_i^j - \overset{*}{x}{}_k^j \widetilde{\breve{\omega}}{}_i^k = \overset{*}{x}{}_l^j \breve{\gamma}_{ik}^l \omega^k$, то есть ковариантный дифференциал $\breve{\nabla}\overset{*}{x}{}_i^j$ и ковариантные производные $\breve{\nabla}_k \overset{*}{x}{}_i^j$ координат $\overset{*}{x}{}_i^j$ векторов ε_i выражаются по формуле

$$\breve{\nabla}\overset{*}{x}{}_i^j = d\overset{*}{x}{}_i^j - \overset{*}{x}{}_k^j \widetilde{\breve{\omega}}{}_i^k, \quad \breve{\nabla}_k \overset{*}{x}{}_i^j = \overset{*}{x}{}_l^j \breve{\gamma}_{ik}^l.$$

Равенство $\breve{\nabla}_k \overset{*}{x}{}_i^j = 0$ имеет место, если $\breve{\gamma}_{ik}^l = 0$, то есть векторы ε_i переносятся абсолютно параллельно в канонической связности.

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Петрова Л.И.* Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. М., 2006.

3. *Полякова К.В.* Канонические аффинные связности первого и второго порядков // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 203. С. 71—83.

4. *Полякова К.В.* О расширении касательного пространства 2-го порядка гладкого многообразия // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 111—117.

5. *Полякова К.В.* О строении объекта аффинной связности и тензора кручения в расслоении линейных реперов // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 99—112.

6. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, №2. С. 279—290.

7. *Рыбников А.К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. №1. С. 73—80.

8. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

9. *Belova O., Mikeš J., Sherkuziyev M., Sherkuziyeva N.* An analytical inflexibility of surfaces attached along a curve to a surface regarding a point and plane // Results in Mathematics. 2021. Vol. 76, №2. P. 56.

10. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory. Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10. Art. №46.

11. *Waldmann S.* Noncommutative field theories from a deformation point of view // Fauser B., Tolksdorf J., Zeidler E. (eds.). Quantum Field Theory. Basel, 2009.

12. *Witten E.* Supersymmetry and Morse theory // J. Diff. Geom. 1982. Vol. 17, №4. P. 661—692.

13. *Witten E.* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv:1009.6032v1 [hep-th].

Для цитирования: *Полякова К.В.* О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 29—44. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-3.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14, A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-3

On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor

Submitted on December 21, 2022

This paper relates to differential geometry, and the research technique is based on G. F. Laptev's method of extensions and envelopments, which generalizes E. Cartan's method of moving frame and exterior forms.

A manifold is studied, the structure equations and derivational formulas of which are built using the deformations of the exterior and ordinary differentials. The manifold in question is a deformation of an ordinary smooth manifold. The bundles of non-symmetrical coframes and frames of the second order on this manifold are examined and an affine connection is given. It is proved that the curvature and torsion of this connection are not tensors. A canonical connection is built. It is shown that the canonical connectionis flat and non-symmetrical.

Keywords: differential perturbation, second order tangent space, non-symmetrical second order frames and coframes, torsion and curvature objects, flat and non-symmetrical connection

References

1. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

2. Petrova, L.I.: Skew-symmetric differential forms: Conservation laws. Fundamentals of field theory. Moscow (2006).

3. *Polyakova, K.V.:* Canonical affine connections of the first and second orders. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, **203**:2, 71—83 (2021).

4. *Polyakova, K.V.:* On some extension of the second order tangent space for a smooth manifold. DGMF, 53, 111—117 (2022).

5. *Polyakova, K.V.:* On the structure of an affine connection object and the torsion tensor in the bundle of linear frames. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, **220**, 99—112 (2023).

6. *Rybnikov, A.K.:* Affine connections of second order. Math. Notes, **29**:2, 143—149 (1981).

7. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. Izvestia vuzov. Math., **27**:1, 84—93 (1983).

8. *Shevchenko, Yu.I.:* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

9. *Belova, O., Mikeš, J., Sherkuziyev, M., Sherkuziyeva, N.:* An analytical inflexibility of surfaces attached along a curve to a surface regarding a point and plane. Results in Math., **76**:2, 56 (2021).

10. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, **10**:46 (2021).

11. *Waldmann, S.:* Noncommutative field theories from a deformation point of view. Fauser, B., Tolksdorf, J., Zeidler, E. (eds.). Quantum Field Theory. Basel (2009).

12. *Witten, E.:* Supersymmetry and Morse theory. J. Diff. Geom., **17**:4, 661—692 (1982).
13. *Witten, E.:* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv:1009.6032v1 [hep-th].

For citation: Polyakova, K. V. On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 54 (2), 29—44 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-3.

MSC 2010: 53A45; 53C20

S. E. Stepanov*, *I. I. Tsyganok
Financial University under the Government of the Russian Federation
49, Lenigradsky Prosp., Moscow, 125993, Russia
s.e.stepanov@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-4

Pointwise orthogonal splitting of the space of *TT*-tensors

In the present paper we consider pointwise orthogonal splitting of the space of well-known *TT*-tensors on Riemannian manifolds. Tensors of the first subspace belong to the kernel of the Bourguignon Laplacian, and the tensors of the second subspace belong to the kernel of the Sampson Laplacian. We give examples and prove Liouville-type non-existence theorems of these tensors.

Keywords: Riemannian manifold, *TT*-tensor, Liouville-type non-existence theorems, sectional curvature

Introduction

Let (M, g) be an n-dimensional $(n \geq 2)$ Riemannian manifold with the Levi-Civita connection ∇. By S^2M we understand the vector bundle of symmetric bilinear differential two-forms. We define the *divergence of symmetric two-tensors fields* $\delta: C^\infty S^2M \to$ $\to C^\infty T^*M$ by the formula $\delta \coloneqq -\, trace_g \circ \nabla$ (see [1, p. 35]).

We recall that a symmetric divergence free and traceless covariant two-tensor (transverse-trace free tensor) field is called TT-tensor (see, for instance, [2]). The vector space of TT-tensors φ^{TT} is defined by the condition

$$S^{TT}(M) \colon= \left\{\varphi \in S^2M \,\middle|\, \delta\,\varphi = 0, trace_g\varphi = 0\right\}.$$

Submitted on March 3, 2023

Any TT-tensor is denoted by φ^{TT} (see [2]). As a consequence of a result of Bourguignon — Ebin — Marsden (see [1, p. 132; 2]) the space of TT-tensors is an infinite-dimensional vector space on any closed Riemannian manifold (M, g). Such tensors are of fundamental importance in stability analysis in General Relativity (see, for instance, [3]) and in Riemannian geometry (see, for instance, [1, p. 346—347; 2]). A simple example of TT-tensors is the Ricci tensor of a Riemannian manifold of zero scalar curvature.

The tangent space T_xM at any $x \in M$ is an n-dimensional Euclidian vector space E with the orthogonal group $O(n, \mathbb{R})$. We consider the space

$$\mathfrak{S}(E) = \{G \in E^* \otimes S_0^2 E \mid G_{12}(c) = 0\},$$

where $S_0^2 E$ is the space of trace-free symmetric two-tensors on E and $G_{12}(c) = \sum_{k=1}^{n} G(e_k, e_k, c)$ for an orthonormal basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ and an arbitrary c in E. By [4], the tensor space $\mathfrak{S}(E)$ has the orthogonal splitting $\mathfrak{S}(E) = \mathfrak{S}_1(E) \oplus \mathfrak{S}_2(E)$ for two subspaces irreducible with respect to the action the orthogonal group $O(n, \mathbb{R})$:

$$\mathfrak{S}_1(E) = \{\Phi \in \mathfrak{S}(E) \mid \Phi(a, b, c) = \Phi(b, a, c)\},$$

$$\mathfrak{S}_2(E) = \{\Phi \in \mathfrak{S}(E) \mid \Phi(a, b, c) + \Phi(b, c, a) + \Phi(c, a, b) = 0\}$$

for arbitrary *a, b, c* in E. Then the tensor field $\nabla\varphi^{TT}$ on (M, g) is a section of the vector bundle $\mathfrak{S}(TM)$, the fiber of which at each point $x \in M$ is the space $\mathfrak{S}(E)$. As a consequence, we obtain a pointwise decomposition of $\nabla\varphi^{TT}$ into a sum of the tensor fields corresponding to the pointwise irreducible components of the action of the group $O(n, \mathbb{R})$. This decomposition of $\nabla\varphi^{TT}$ determines a rough classification of TT-tensors, where the first class $\mathfrak{S}_1$ consists of TT-tensors for which their covariant derivatives are sections of $\mathfrak{S}_1(TM)$ and the second class $\mathfrak{S}_2$ consists of TT-tensors for which their covariant derivatives are sections of $\mathfrak{S}_2(TM)$.

1. The first class of transverse-trace free tensors

Suppose $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_1$, then it satisfies the differential equation

$$(\nabla_X \varphi^{TT})(Y,Z) = (\nabla_Y \varphi^{TT})(X,Z)$$

for any $X,Y,Z \in TM$. In this case, the condition $trace_g \varphi^{TT} = 0$ takes the form $\delta\, \varphi^{TT} = 0$. It follows that the tensor field φ^{TT} is a *Codazzi tensor* with zero trace and zero divergence.

A simple example of $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_1$ is the second fundamental form of the minimal hypersurface of a Riemannian manifold of constant curvature (see [1, p. 436]). On the other hand, the geometry of manifolds bearing Codazzi tensor fields is described in detail in the literature (see, for example, the survey in [1, p. 590—598]). In turn, we can formulate the following local result.

Theorem 1. *Let (M,g) be a Riemannian manifold of constant curvature C. Then a TT-tensor $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_1$ has the form*

$$\varphi^{TT} = Hess\,(f) + C \cdot f\, g$$

where $f \in C^2 M$ is a solution of the equation $\Delta\, f + n\, C\, f = 0$ for the Beltrami Laplacian on functions $\Delta := trace_g \nabla^2$.

Proof. A Codazzi tensor φ on (M,g) with constant curvature C has the form (see [1, p. 436])

$$\varphi = Hess\,(f) + C \cdot f\, g$$

for the C^2-function f on (M,g). If $\varphi = \varphi^{TT}$, then it is a solution of the equations $\Delta\, f + n\, C\, f = 0$ and $\bar{\Delta}\, df = C\, df$, because $trace_g \varphi = 0$ and $\delta\, \varphi = 0$, respectively. Recall that $\bar{\Delta} := \delta \circ \nabla$ is *the rough Laplacian* (see [1, p. 52]). In addition, it is easy to prove that the second equation above is a consequence of the first equation.

J.P. Bourguignon (see [1, p. 355; 5, p. 273]) constructed the Laplacian $\Delta_B : C^\infty S^2 M \to C^\infty S^2 M$ by the formula

$$\Delta_B := d\,\delta + \delta\, d$$

where

$$d\,\varphi\,(X,Y,Z) := (\nabla_X\varphi)(Y,Z) = (\nabla_Y\varphi)(X,Z)$$

for arbitrary $X, Y, Z \in TM$ (see [1, p. 355]). In turn, $\varphi \in C^\infty S^2M$ is called *harmonic* if it belongs to the kernel of Δ_B. Therefore, a Codazzi tensor with constant trace and, in particular, with zero trace is harmonic (see [6, p. 350]). In turn, if (M,g) is a closed manifold and a harmonic symmetric bilinear form φ is given in a global way on (M,g) then $\varphi \in \ker\Delta_B$ (see [7]). Furthermore, an arbitrary $\varphi \in \ker\Delta_B$ on a closed Riemannian manifold (M,g) with nonnegative sectional curvature $K(\sigma)$ is parallel and if $K(\sigma) > 0$ at some point, then φ is a constant multiple of g (see also [7]). Using the above, we can formulate our theorem.

Theorem 2. *An arbitrary TT-tensor $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_1$ on a closed Riemannian manifold (M,g) with nonnegative sectional curvature $K(\sigma)$ is parallel. Moreover, if $K(\sigma) > 0$ at some point, then φ^{TT} is a zero-tensor.*

It is well known that a Riemannian symmetric space of compact type is a compact (without boundary) Riemannian manifold with nonnegative sectional curvature (see [6, p. 387]). One can state the following assertion.

Corollary 1. *An arbitrary TT-tensor $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_1$ on a Riemannian symmetric space of compact type (M,g) is parallel. Moreover, if the holonomy group* $\mathrm{Hol}(g)$ *of the space (M,g) is irreducible, then $\varphi^{TT} \equiv 0$.*

On the other hand, we proved the following proposition (see [7; 8]): if the sectional curvatures of a connected complete noncompact Riemannian manifold (M,g) are everywhere nonnegative, then there exists no nonzero Codazzi tensor $\varphi \in C^\infty S_0^pM$, $p \geq 2$, such that $\int_M \|\varphi\|^q d\mathrm{vol}_g < +\infty$ for at least one $q \in (0,+\infty)$. Therefore, we have the following theorem.

Theorem 3. *Let (M,g) be a connected complete noncompact Riemannian manifold with nonnegative sectional curvature. Then there is no a nonzero TT-tensor $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_1$ such that $\int_M \|\varphi^{TT}\|^q d\mathrm{vol}_g < +\infty$ for at least one $q \in (0,+\infty)$.*

2. The second class of transverse-trace free tensors

Now suppose that $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_2$, then it satisfies the differential equation

$$(\nabla_X \varphi^{TT})(Y,Z) + (\nabla_Y \varphi^{TT})(Z,X) + (\nabla_Z \varphi^{TT})(X,Y) = 0 \quad (1)$$

for any $X, Y, Z \in TM$. In this case, the condition $trace_g \varphi^{TT} = 0$ takes the form $\delta\, \varphi^{TT} = 0$. From (1) it follows that the tensor field φ^{TT} is a *symmetric Killing two-tensor* with zero trace and zero divergence. The geometry of manifolds bearing symmetric Killing tensor fields is described in detail in the literature (see, for example, [9; 10]). For a Riemannian manifold of constant curvature, we can formulate the following local result.

Theorem 4. *Let (M, g) be a Riemannian manifold of constant curvature, then a TT-tensor $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_2$ has the form*

$$\varphi_{ij}^{TT} = e^{2\omega}\left(A_{ijkl}\, x^k x^l + B_{ijk} x^k + C_{ij}\right) \quad (2)$$

for $\omega = (n+1)^{-1} \ln(\det g)$ with respect to a local coordinate system $\{x^1, \dots, x^n\}$ of (M, g). The coefficients A_{ijkl}, B_{ijk} and C_{ij} of (2) *are constant symmetric with respect to the first two subscripts and satisfying the identities*

$$A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0; \quad (3)$$

$$B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij} = 0; \quad (4)$$

$$g^{ij} A_{ijkl} = g^{ij} B_{ijk} = g^{ij} \mathrm{C}_{ij} = 0 \quad (5)$$

for $i, j, k, l = 1, \dots, n$.

Proof. According to [11] and [12], if (M, g) is a Riemannian manifold of constant curvature, then the general solution of the equation $(\nabla_X \varphi)(X, X) = 0$ for any $X \in TM$ has the form (2) for $\omega = (n+1)^{-1} \ln(\det g)$ and the constants A_{ijkl}, B_{ijk}, C_{ij} which are symmetric with respect to the first two subscripts and satisfying (3) and (4). In this case, the condition $trace_g \varphi = 0$ takes the form (5). Therefore, the equalities (2)—(5) describe the solution of (1).

We proved that every divergence-free Killing tensor $\varphi \in C^\infty S^2 M$ on a closed Riemannian manifold (M, g) with nonpositive sectional curvature $K(\sigma)$ is parallel and if $K(\sigma) < 0$ at some point, then φ is a constant multiple of g (see [13]). This implies the following result.

Theorem 5. *An arbitrary TT-tensor* $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_2$ *on a closed Riemannian manifold* (M, g) *with nonpositive sectional curvature* $K(\sigma)$ *is parallel. Moreover, if* $K(\sigma) < 0$ *at some point, then* φ^{TT} *is a zero-tensor.*

If $\varphi \in C^\infty S^2 M$ is a traceless symmetric Killing tensor on (M, g) and $\Delta_S := \delta\delta^* - \delta^*\delta$ is the *Sampson Laplacian*, then φ belongs to $\ker \Delta_S$ (see [1, p. 356; 24]). We recall here that the symmetric derivative $\delta^*: C^\infty S^2 M \to C^\infty S^3 M$ is defined by the equation

$$\delta^*\varphi\,(X, Y, Z) := (\nabla_X \varphi)(Y, Z) + (\nabla_Y \varphi)(Z, X) + (\nabla_Z \varphi)(Y, Z)$$

for arbitrary $X, Y, Z \in TM$ (see [1, p. 35, 356]). At the same time, in [14] was proved that there is no a nonzero symmetric two-tensor field $\varphi \in \ker \Delta_S$ on a simply connected complete Riemannian manifold (M, g) such that $\int_M \|\varphi\|^q d\mathrm{vol}_g < +\infty$ for at least one $q \in (0, +\infty)$. Note that such Riemannian manifold is diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$ and has an infinite volume.Using the above, we can formulate the following theorem.

Theorem 6. *There is no a nonzero TT-tensor* $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_2$ *on a simply connected complete Riemannian manifold* (M, g) *of nonpositive sectional curvature such that* $\int_M \|\varphi^{TT}\|^q d\mathrm{vol}_g < +\infty$ *for at least one* $q \in (0, +\infty)$.

An example of such a manifold is a Riemannian symmetric manifold (M, g) of non-compact type, since it is simply connected and has nonpositive curvature.

Corollary 2. *There is no a nonzero TT-tensor* $\varphi^{TT} \in \mathfrak{S}_2$ *on a Riemannian symmetric manifold of non-compact type* (M, g) *such that* $\int_M \|\varphi^{TT}\|^q d\mathrm{vol}_g < +\infty$ *for at least one* $q \in (0, +\infty)$.

References

1. *Besse, A.L.:* Einstein manifolds. Springer (2008).

2. *Bourguignon, J. P., Ebin, D.G., Marsden, J.E.:* Sur le noyau des opérateurs pseudo-differentiels á symbole surjectif et non injectif. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Sér. A et B, Sciences mathématiques et Sciences physiques, 282, 867—870 (1976).

3. *Garattini, R.:* Self sustained tranversable wormholes? Class. Quant. Grav., **22**:6, 2673—2682 (2005).

4. *Stepanov, S.E.:* On a group approach to studying the Einstein and Maxwell equations, Theoretical and Mathematical Physics, **11**:1, 419—427 (1997).

5. *Bourguignon, J.-P.:* Les variétés de dimension 4 á signature non nulledont la courbure est harmonique sont d'Einstein. Invent. Math., 63, 263—286 (1981).

6. *Petersen, P.:* Riemannian Geometry. Springer (2016).

7. *Rovenski, V., Stepanov, S., Tsyganok, I.:* The Bourguignon Laplacian and harmonic symmetric bilinear forms. Mathematics, **8**:1, 83 (2020).

8. *Stepanov, S.E., Tsyganok, I.I.:* Codazzi and Killing tensors on a complete Riemannian manifold. Math. Notes, **109**:6, 932—939 (2021).

9. *Eisenhart, L.P.:* Riemannian geometry. Princeton Univ. Press (1949).

10. *Heil, K., Jentsh, T.:* A special class of symmetric Killing 2-tensors. J. Geom. and Physics, 138, 103—123 (2019).

11. *Stepanov, S.E., Smolnikova, M.V.:* Affine differential geometry of Killing tensors, Russian Math., **48**:11, 74—78 (2004).

12. *Stepanov, S.E., Tsyganok, I., Khripunova, M.:* The Killing tensor on an n-dimensional manifold with $SL(n,\mathbb{R})$-structure. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica, **55**:1, 121—131 (2016).

13. *Stepanov, S.E.:* On an application of a theorem of P.A. Shirokov in the Bochner technique. Russian Math., 9, 50—55 (1996).

14. *Stepanov, S., Tsyganok, I., Mikeš, J.:* On the Sampson Laplacian, Filomat, **33**:4, 1059—1070 (2019).

For citation: Stepanov, S.E., Tsyganok, I.I. Pointwise orthogonal splitting of the space of *TT*-tensors. DGMF, 54 (2), 45—53 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-4.

УДК 514.764.212

С. Е. Степанов, *И. И. Цыганок*
Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия
s.e.stepanov@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-4

Поточечное ортогональное расщепление пространства *TT*-тензоров

Поступила в редакцию 03.03.2023 г.

В статье рассматривается ортогональное расщепление пространства известных *TT*-тензоров на римановых многообразиях. Тензоры первого подпространства принадлежат ядру лапласиана Бургиньона, а тензоры второго подпространства принадлежат ядру лапласиана Сэмпсона. Приводятся примеры и доказываются теоремы Лиувилля о несуществовании этих тензоров.

Ключевые слова: риманово многообразие, *TT*-тензор, теоремы несуществования лиувиллевского типа, секционная кривизна

Список литературы

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М., 1990.
2. *Bourguignon J. P., Ebin D. G., Marsden J. E.* Sur le noyau des opérateurs pseudo-differentiels á symbolesurjectif et non injectif // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Sér. A et B: Sciences mathématiques et Sciences physiques. 1976. Vol. 282. P. 867—870.
3. *Garattini R.* Self sustained tranversable wormholes? // Class. Quant. Grav. 2005. Vol. 22, № 6. P. 2673—2682.
4. *Степанов С. Е.* О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла // ТМФ. 1997. Т. 111, № 1. С. 32—43.
5. *Bourguignon J.-P.* Les variétés de dimension 4 á signature non nulledont la courbure est harmonique sont d'Einstein // Invent. Math. 1981. Vol. 63. P. 263—286.
6. *Petersen P.* Riemannian Geometry. Springer, 2016.

7. *Rovenski V., Stepanov S., Tsyganok I.* The Bourguignon Laplacian and harmonic symmetric bilinear forms // Mathematics. 2020. Vol. 8, №1. P. 83.

8. *Степанов С.Е., Цыганок И.И.* О тензорах Кодацци и Киллинга на полном римановом многообразии // Матем. заметки. 2021. Т. 109, вып. 6. С. 901—911.

9. *Эйзенхарт Л.* Риманова геометрия. М., 1948.

10. *Heil K., Jentsh T.* A special class of symmetric Killing 2-tensors // J. Geometry and Physics. 2019. №138. P. 103—123.

11. *Степанов С.Е., Смольникова М.В.* Аффинная дифференциальная геометрия тензоров Киллинга // Изв. вузов. Математика. 2004. №11. С. 82—86.

12. *Stepanov S.E., Tsyganok I., Khripunova M.* The Killing tensor on an n-dimensional manifold with $SL(n,\mathbb{R})$-structure // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica. 2016. Vol. 55, №1. P. 121—131.

13. *Степанов С.Е.* О применении одной теоремы П.А. Широкова в технике Бохнера // Изв. вузов. Математика. 1996. №9. С. 53—59.

14. *Stepanov S., Tsyganok I., Mikeš J.* On the Sampson Laplacian // Filomat. 2019. Vol. 33, №4. P. 1059—1070.

Для цитирования: *Stepanov S.E., Tsyganok I.I.* Pointwise orthogonal splitting of the space of *TT*-tensors // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 45—53. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-4.

УДК 514.76

***А. Я. Султанов*[1], *М. В. Глебова*[2], *Г. А. Султанова*[3]**
[1, 2] Пензенский государственный университет, Россия
[3] Филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. А. В. Хрулева (Пенза), Россия
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] mvmorgun@mail.ru, [3] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-5

Дифференцирование линейных алгебр с единицей над полем

Линейные алгебры над заданным полем возникают при изучении различных задач алгебры, анализа и геометрии. Операция дифференцирования, возникшая в математическом анализе, была перенесена в теорию линейных алгебр над полем, а также в теорию колец.

Множество всех дифференцирований линейной алгебры сами образуют линейную алгебру. Эта алгебра называется алгеброй дифференцирований. При этом она допускает структуру алгебры Ли. Если алгебра, дифференцирования которой рассмотрены, является конечномерной, то ее алгебра Ли дифференцирований будет также конечномерной. Поэтому возникает естественная задача определения размерности алгебр Ли дифференцирований рассматриваемой линейной алгебры или оценки сверху размерности алгебры дифференцирований.

Для решения этих задач в работе получена система линейных однородных уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного дифференцирования. Оценка ранга этой системы позволяет получить оценку снизу ранга матрицы рассматриваемой системы. Получена оценка размерности сверху алгебр Ли дифферен-

Поступила в редакцию 29.04.2023 г.

цирований произвольной конечномерной линейной алгебры, обладающей главной единицей над произвольным полем, характеристика которого отлична от двух. Доказана точность полученной оценки путем построения линейной алгебры, алгебра Ли дифференцирований которой реализует максимальную размерность алгебры дифференцирований данной алгебры.

Ключевые слова: алгебра Ли, дифференцирование линейной алгебры, размерность алгебры Ли, линейная алгебра

1. Необходимые понятия и сведения из теории линейных алгебр и их дифференцирований

Линейной алгеброй над полем P называется векторное пространство над этим полем, на котором задана билинейная операция, называемая операцией умножения. Будем считать, что рассмотренная алгебра A является конечномерной, а произведение любых двух элементов x и y обозначим через xy.

Дифференцированием линейной алгебры А называется всякий линейный оператор $D: A \to A$, удовлетворяющий условию

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

для любых элементов x и y из A.

Множество всевозможных дифференцирований алгебры A обозначается символом $DerA$. Это множество допускает естественную структуру алгебры Ли над полем P относительно операции коммутирования, определенной по правилу

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1,$$

где $\circ$ является композицией отображений D_1 и D_2.

Алгебра Ли $DerA$ имеет размерность, не превращающую n^2, где n — размерность алгебры A [2]. Для доказательства этого утверждения возьмем полную линейную алгебру Ли *gl*(*n,P*) квадратных матриц порядка *n* над полем *P*. Операция коммутирования в этой алгебре задана по правилу

$$[B, C] = BC - CB,$$

где *BC* и *CB* — произведения матриц *B* и *C* из *gl*(*n,P*). Размерность этой алгебры Ли над полем *P* равна n^2.

Далее в алгебре *A* выберем некоторый базис $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Для произвольного дифференцирования *D* алгебры *A* положим

$$D(e_i) = x_i^k e_k, x_i^k \in P$$

и составим матрицу $M(D) = ||x_i^k||$, для элементов x_i^k будем считать, что верхний индекс указывает номер строки, а нижний — номер столбца.

Ясно, что $M(D)$ является элементом множества *gl*(*n,P*). Так как для дифференцирования *D* относительно выбранного базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ матрица $M(D)$ определена единственным образом, то можно определить отображение

$$f\colon Der\ A \to gl(n, P)$$

условием $f(D) = M(D)$.

Можно доказать, что отображение *f* является гомоморфизмом, причем инъективным, то есть $Ker\ f = \{0\}$. В силу этого заключаем, что $dim(Der\ A) \leq n^2$.

Пусть $D(e_i) = x_i^k e_k$ и $e_i e_j = C_{ij}^k e_k$, где C_{ij}^k — структурные постоянные алгебры относительно базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Оператор *D* будет дифференцированием тогда и только тогда, когда

$$D(e_i e_j) = D(e_i)e_j + e_i D(e_j).$$

Эти соотношения равносильны следующей системе линейных однородных уравнений относительно переменных x_i^k:

$$C_{mj}^h x_i^m + C_{im}^h x_j^m - C_{ij}^m x_m^h = 0. \qquad (1.1)$$

Эту систему представим следующим образом:

$$C\binom{h}{ij}\Big|\binom{k}{m}x_k^m = 0, \tag{1.2}$$

где

$$C\binom{h}{ij}\Big|\binom{k}{m} = \delta_i^k C_{mj}^h + \delta_j^k C_{im}^h - \delta_m^h C_{ij}^k. \tag{1.3}$$

Здесь $\delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i \\ 0 & \text{при } k \neq i \end{cases}$ — символ Кронекера, 1 — единичный элемент поля P, 0 — нейтральный (нулевой) элемент поля P.

Из скаляров $C\binom{h}{ij}\Big|\binom{k}{m}$ составим прямоугольную матрицу

$$C = C\binom{h}{ij}\Big|\binom{k}{m},$$

где тройка индексов $\binom{h}{ij}$ фиксирует строку, а пара индексов $\binom{k}{m}$ — столбец этой матрицы. Так, например, скаляр $C\binom{h}{ij}\Big|\binom{k}{m}$ является коэффициентом при переменном x_m^k в уравнении $\binom{h}{ij}$ (при фиксированных индексах h, i, j, k, m).

Поскольку система (1.2) линейная и однородная, то имеет место

Теорема 1.

(1) $dim(Der\ A) \leq n^2 - \rho$, *где* ρ *— ранг матрицы C;*

(2) *если* $rang\ C \geq r$, *то* $dim(Der\ A) \leq n^2 - r$.

Отметим, что ранг матрицы *C* не зависит от выбора базиса. Поэтому $dim(Der\ A)$ не зависит от выбора базиса.

2. Оценка сверху размерности алгебры Ли дифференцирований линейной алгебры A, обладающей единицей

Предположим, что линейная алгебра *A* обладает единицей, то есть в ней имеется элемент δ такой, что $\delta x = x\delta = x$. Элемент δ обычно называется главной единицей алгебры [1]. Очевидно, что алгебра *A* имеет лишь только одну главную единицу. Для исследования алгебры дифференцирований алгебры A выберем специальным образом базис в ней. Включим главную единицу в базис и обозначим $\delta = e_0$. Остальные элементы базиса могут быть выбраны произвольно. Тогда получим следующий набор базисных элементов: $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$. Так как $e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$, то структурные постоянные алгебры A будут удовлетворять условиям

$$C_{0i}^k = \delta_i^k \,, C_{i0}^k = \delta_i^k .$$

Эти соотношения являются необходимым и достаточным условием того, что элемент является главной единицей алгебры A. Считая, что $e_0 = \delta$, перейдем к исследованию матрицы C.

Теорема 2. *Размерность алгебры $DerA$ алгебры A с единицей не больше, чем $(n-1)^2$, где $n = dim_P A$ при условии, что характеристика поля P не равна 2.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу T, составленную из коэффициентов при переменных

$$x_1^0, x_i^0 \ \ (i > 1), \qquad x_0^k \ \ (k > 0)$$

в уравнениях

$$\binom{1}{11}, \binom{1}{m1} \ (m > 1), \qquad \binom{h}{00} \ (h = 0,1, \dots, n-1).$$

Вычислим эти коэффициенты по формулам (1.3), получим

$$C\left(\begin{smallmatrix}1\\11\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = C_{01}^1 + C_{10}^1 = 2, \qquad C\left(\begin{smallmatrix}1\\m1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = 0,$$

$$C\left(\begin{smallmatrix}1\\m1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}h\\0\end{smallmatrix}\right) = \delta_m^h C_{01}^1 = \delta_m^h, C\left(\begin{smallmatrix}h\\00\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = -\delta_0^h C_{00}^1 = 0,$$

$$C\left(\begin{smallmatrix}h\\00\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}0\\k\end{smallmatrix}\right) = \delta_k^h + \delta_k^h - \delta_k^h C_{00}^0 = \delta_k^h .$$

На основании полученных соотношений можно сделать вывод о том, что матрица T имеет следующее строение:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & E_{n-2} & * \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix},$$

где E_s — единичная матрица порядка s. Ранг этой матрицы равен $2n-1$. Следовательно, ранг матрицы C не меньше, чем $2n-1$. Отсюда заключаем, что

$$dim(Der\ A) \leq n^2-(2n-1)=(n-1)^2.$$

Для доказательства точности оценки рассмотрим алгебру $(n-1)$-дуальных чисел $R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) = \{a_0 + a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_{n-1}\varepsilon_{n-1} |\ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in P,\ \varepsilon_i\varepsilon_j = 0\}$, ε_0 — единица алгебры. Поэтому $D(\varepsilon_0) = D(\varepsilon_0\varepsilon_0)$. Отсюда

$$D(\varepsilon_0) = D(\varepsilon_0)\varepsilon_0 + \varepsilon_0 D(\varepsilon_0).$$

Значит, $D(\varepsilon_0) = 0$. Следовательно, $x_0^i = 0\ (i = 0,1, \dots, n-1)$. Поскольку $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$, то $D(\varepsilon_i)\varepsilon_j + \varepsilon_i D(\varepsilon_j) = 0$. Отсюда, положив $D(\varepsilon_i) = x_i^k\varepsilon_k\ (k = 0,1, \dots, n-1)$, получим

$$x_i^0\varepsilon_j + x_j^0\varepsilon_i = 0.$$

Если $i = 1,\ j \neq 1$, то $x_1^0 = 0,\ x_j^0 = 0$ в силу линейной независимости $\varepsilon_1, \varepsilon_j\ (j \neq 1)$. Значит, $x_1^0 = 0$ и $x_j^0 = 0$. То есть $x_k^0 = 0\ (k = 1, 2, \dots, n-1)$.

Если же $dimA = 2$, то $2x_1^0\varepsilon_1 = 0$. Так как характеристика поля $P \neq 2$, то $x_1^0 = 0\ (i \neq 0)$.

Таким образом, имеем $x_0^i = 0\ (i = 0, 1, \dots, n-1)$.

Следовательно, каждое дифференцирование задается равенством $D(\varepsilon_i) = x_i^k\varepsilon_k\ (i, k = 0, 1, \dots, n-1)$.

Следовательно, $dim\, R(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) = (n-1)^2$. Это доказывает точность оценки в теореме 2.

Заметим, что аналогичные задачи авторами были рассмотрены для йордановых алгебр [8], а также для некоторых других алгебр специального вида [5—7].

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами : учеб. пособие. Казань, 1985.

2. *Винберг Э.* Б. Курс алгебры. М., 2021.

3. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. СПб., 2005.

4. *Мальцев А. И.* Линейная алгебра. М., 2010.

5. *Моргун М. В.* О размерностях алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения пространств аффинной связности // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 117—123.

6. *Моргун М. В.* Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств аффинной связности специального вида // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В. Г. Белинского. 2009. Вып. 17. С. 18—23.

7. *Султанов А. Я., Глебова М. В., Болотникова О. В.* Алгебры Ли дифференцирований линейных алгебр над полем // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 123—136.

8. *Султанов А. Я., Глебова М. В.* Об алгебре Ли дифференцирований йордановой алгебры билинейной симметрической формы // Итоги науки и техн. Соврем. математика и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 222. С. 94—99.

9. *Шурыгин В. В.* Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй // Успехи математических наук. 1993. Т. 48, № 2 (290). С. 75—106.

10. *Yano K.* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam, 1957.

Для цитирования: *Султанов А. Я., Глебова М. В., Султанова Г. А.* Дифференцирование линейных алгебр с единицей над полем // ДГМФ. 2023. № 54 (2). С. 54—62. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-5.

MSC 2010: 16P10

A. Ya. Sultanov[1], *M. V. Glebova*[2], *G. A. Sultanova*[3]

[1, 2] Penza State University

37, Lermontova St., Penza, 440026, Russia

[3] Branch of the Military Academy of Logistics named after A. V. Khrulev

Penza-5, Penza region, 440005, Russia

[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] mvmorgun@mail.ru, [3] sultgaliya@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-6

Differentiation of linear algebras with a unit over a field

Submitted on April 29, 2023

Linear algebras over a given field arise when studying various problems of algebra, analysis and geometry. The operation of differentiation, which originated in mathematical analysis, was transferred to the theory of linear algebras over a field, as well as to the theory of rings.

The set of all differentiations of a linear algebra themselves form a linear algebra. This algebra is called the algebra of differentiations. At the same time, this algebra admits the structure of a Lie algebra. If the algebra whose differentiations are considered is finite-dimensional, then its Lie algebra of differentiations will also be finite-dimensional. Therefore, there is a natural problem of determining the dimension of the Lie algebras of the differentiations of the linear algebra under consideration or to obtain an estimate from above of the dimension of the algebra of differentiations.

To solve these problems, a system of linear homogeneous equations is obtained, which is satisfied by the components of arbitrary differentiation. Evaluation of the rank of this system allows us to obtain an estimate from below of the rank of the matrix under consideration.

Keywords: Lie algebra, differentiation of linear algebra, dimension of Lie algebra, linear algebra

References

1. *Vishnevskij, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V.:* Spaces over algebras. (1985).
2. *Vinberg, E. B.:* Algebra Course. Moscow (2021).
3. *Kurosh, A. G.:* Lectures on general algebra. Saint Petersburg (2005).
4. *Maltsev, A. I.:* Linear Algebra. Moscow (2010).
5. *Morgun, M. V.:* On the dimensions of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of the direct product of spaces of affine connectivity. DGMF, 37, 117—123 (2006).
6. *Morgun, M. V.:* On Lie algebras of infinitesimal affine transformations of spaces of affine connectivity of a special kind. Izvestia Penza State Ped. Univ. 17, 18—23 (2009).
7. *Sultanov, A.Ya., Glebova, M. V., Bolotnikova, O. V.:* Lie algebras of differentiations of linear algebras over a field. DGMF, 52, 123—136 (2021).
8. *Sultanov, A.Ya., Glebova, M. V.:* On the Lie algebra of differentiations of a Jordan algebra of bilinear symmetric form. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 222, 94—99 (2023).

9. *Shurygin, V. V.:* Manifolds over algebras and their application in the geometry of jet bundles. Success of Math. Sci. **48**:2 (290), 75—106 (1993).

10. *Yano, K.:* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam (1957).

For citation: Sultanov, A. Ya., Glebova, M. V., Sultanova, G. A. Differentiation of linear algebras with a unit over a field. DGMF, 54 (2), 54—62 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-5.

УДК 514.76

А. Я. Султанов[1], Г. А. Султанова[2], О. А. Монахова[3]

[1, 3] Пензенский государственный университет, Россия

[2] Филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. А. В. Хрулева (Пенза), Россия

[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru, [3] oxmonakh@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-6

О группе автоморфизмов алгебры плюральных чисел

В работе исследуются автоморфизмы алгебр плюральных чисел, которые являются обобщением алгебры дуальных чисел. Алгебры плюральных чисел оказались в центре внимания профессора Казанского университета А. П. Широкова. Занимаясь геометрией касательных расслоений высших порядков, он установил, что касательные расслоения высших порядков над гладкими многообразиями несут структуру гладкого многообразия над алгебрами плюральных чисел. Это позволило ему в 1970-е годы построить теорию лифтов тензорных полей и линейных связностей с гладкого многообразия в его касательные расслоения произвольного порядка.

Изучаются автоморфизмы алгебры плюральных чисел. Доказано, что множество всех автоморфизмов алгебры плюральных чисел образует группу. Описано строение этой группы. В качестве примеров указаны группы автоморфизмов алгебры плюральных чисел, имеющих небольшую размерность.

Ключевые слова: алгебра плюральных чисел, автоморфизм, векторное пространство, матрица автоморфизма

Поступила в редакцию 27.04.2023 г.

1. Алгебра плюральных чисел

Рассмотрим -мерное векторное пространство V над полем действительных чисел R с базисом $(\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1})$, на котором задана билинейная операция умножения, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\varepsilon^0\varepsilon^\alpha = \varepsilon^\alpha\varepsilon^0 = \varepsilon^\alpha,$$
$$\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta = \varepsilon^{\alpha+\beta} \ (\alpha, \beta = 1,2, \ldots, m-1), \tag{1}$$
$$\varepsilon^m = 0 \quad (m = dim\, V).$$

Полученная линейная алгебра называется алгеброй плюральных чисел и обозначается символом $R(\varepsilon^{m-1})$ [1]. Из этого определния следует, что элемент ε^0 является единичным элементом алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$. Будем считать, что $e^0 = 1$ (1 — единица поля R). Из определения базисных элементов следует, что алгебра $R(\varepsilon^{m-1})$ является коммутативной и ассоциативной.

Соотношение $\varepsilon^m = 0$ дает основания к заключению, что каждый базисный элемент ε^α $(\alpha = 1,2, \ldots, m-1)$ является делителем нуля. Векторное подпространство, натянутое на эти элементы, является идеалом алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$, причем максимальным. Этот идеал называется радикалом алгебры плюральных чисел и обозначается $Rd(R(\varepsilon^{m-1}))$. Перейдем к автоморфизмам алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$.

Определение. Обратимый линейный оператор

$$\phi : R(\varepsilon^{m-1}) \to R(\varepsilon^{m-1})$$

называется *автоморфизмом* этой алгебры, если выполняются условия $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ для любых $x, y \in R(\varepsilon^{m-1})$.

Иначе говоря, автоморфизм алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$ плюральных чисел представляет собой изоморфное отображение этой алгебры на себя. Множество всех автоморфизмов алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$ обозначается символом $Aut(R^{m-1})$.

Теорема 1. *Для любого автоморфизма ϕ алгебры плюральных чисел имеет место равенство* $\phi(1) = 1$.

Доказательство. Пусть ϕ — произвольный автоморфизм алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$. Тогда для любого элемента $a \in R(\varepsilon^{m-1})$ имеем

$$\phi(1)a = \phi(1)(\phi \circ \phi^{-1}(a)) = \phi(1)(\phi(\phi^{-1}(a))) =$$
$$= \phi(1 \cdot \phi^{-1}(a)) = \phi(\phi^{-1}(a)) = a.$$

Аналогично $a\phi(1) = a$. Поскольку в алгебре $R(\varepsilon^{m-1})$ имеется только одна единица, то $\phi(1) = 1$.

Теорема 2. *Для любого автоморфизма* $\phi \in Aut(R^{m-1})$ *имеем* $\phi(\varepsilon^1) = x_\alpha \varepsilon^\alpha$ $(\alpha = 1,2,\dots,m-1)$.

Доказательство. Пусть

$$\phi(\varepsilon^1) = a_0\varepsilon^0 + a_\alpha\varepsilon^\alpha(\alpha \neq 0).$$

Тогда

$$\phi(\varepsilon^2) = \phi(\varepsilon^1\varepsilon^1) = \phi(\varepsilon)\phi(\varepsilon^1) = (a_0\varepsilon^0 + a_\alpha\varepsilon^\alpha)(a_0\varepsilon^0 +$$
$$+a_\beta\varepsilon^\beta) = (a_0)^2\varepsilon^0 + b,\ \ b \in Rd(R(\varepsilon^{m-1}).$$

Применяя метод математической индукции, получим

$$\phi(\varepsilon^k) = (a_0)^k\varepsilon^0 + c, \qquad c \in Rd(R(\varepsilon^{m-1}))$$

для любого натурального числа $k < m-1$. При $k = m-1$ имеем следующее равенство:

$$\theta = (a_0)^{m-1}\varepsilon^0 + d,\ \ d \in Rd(R(\varepsilon^{m-1})).$$

Отсюда следует $(a_0)^{m-1} = 0$ и $d = 0$. Следовательно, $a_0 = 0$. Теорема 2 доказана.

2. Описание группы автоморфизмов алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$

В п. 1 было отмечено, что базис алгебры $A = R(\varepsilon^{m-1})$ составляют элементы 1, $\varepsilon = \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}$. Здесь ε^α является степенью элемента $\varepsilon = \varepsilon^1$. Для каждого автоморфизма

$\phi \in AutA$ мы получим, что $\phi(\varepsilon) = t_\alpha \varepsilon^\alpha$ $(\alpha = 1,2,\dots,m-1)$, где $t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_{m-1}$ — произвольные действительные числа (параметры).

Тогда в силу того, что ϕ — автоморфизм алгебры A, можно найти образы остальных базисных элементов, то есть $\phi(\varepsilon^\tau)$ $(\tau = 2,3,\dots,m-1)$:

$$\phi(\varepsilon^\tau) = (\phi(\varepsilon))^\tau = \left(t_{\lambda_1}\varepsilon^{\lambda_1}\right) \dots (t_{\lambda_\tau}\varepsilon^{\lambda_\tau}) =$$

$$= t_{\lambda_1,\dots,\lambda_\tau}\varepsilon^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_\lambda}.$$

Пусть $\phi(\varepsilon^\lambda) = \phi_\mu^\lambda \varepsilon^\mu$, $\lambda,\mu = 1,2,\dots,m-1$. Тогда получим, что $\phi_\mu^1 = t_\mu$, а

$$\phi_\nu^{\tau+1} = \phi_\lambda^\tau t_{\nu-\lambda}, \qquad (*)$$

где по индексу λ ведется суммирование от 1 до $m-1$ при условии $\nu - \lambda > 0$. Если $\nu - \lambda \leq 0$, то по определению будем считать, что $t_{\nu-\lambda} = 0$.

Теорема 3. *Коэффициенты ϕ_μ^λ удовлетворяют тождествам*

1) ϕ_μ^λ=0, *если* $\mu < \lambda$;

2) $\phi_\lambda^\lambda = (t_1)^\lambda$ (*по индексу нет суммирования*) *для* $\lambda = 1, 2, \dots, m-1$.

Доказательство.

1. Доказательство проведем методом математической индукции по $\lambda \geq 2$ и $\mu \geq 1$.

Пусть λ — фиксированное натуральное число, равное $2, 3,\ \dots,\ m-1$. Докажем, что ϕ_μ^λ =0 для всех $\mu < 2$.

При $\mu = 1$ имеем $\phi_1^\lambda = \phi_\nu^\lambda t_{1-\nu}$, $\nu \geq 1$. Но $t_{1-\nu} = 0$ при $1 - \nu \leq 0$. Следовательно, $\phi_1^\lambda = 0$.

Предположим, что $\phi_\mu^\lambda = 0$ для всех $\mu < \lambda - 2$.

Докажем, что $\phi_{\lambda-1}^\lambda = 0$. В силу равенства (*) имеем $\phi_{\lambda-1}^\lambda = \phi_\nu^\lambda t_{(\lambda-1)-\nu}$. Если $\nu \leq \lambda - 2$, то $\phi_\mu^\lambda = 0$ по индуктивному предположению. Поэтому $\phi_{\lambda-1}^\lambda = 0$.

2. Применим также метод математической индукции.

При $\lambda = 1$ соотношение 2) настоящей теоремы имеет вид $\phi_1^1 = t_1$. С другой стороны, $\phi(\varepsilon^1) = \phi(\varepsilon) = t_\lambda \varepsilon^\varepsilon$. Отсюда $\phi_1^1 = t_1$.

Пусть $\phi_\lambda^\lambda = (t_1)^\lambda$ для каждого фиксированного $\lambda < m - 1$.

Докажем, что $\phi_{\lambda+1}^{\lambda+1} = (t_1)^{\lambda+1}$. Для этого рассмотрим (*). Из него получим, что

$$\phi_{\lambda+1}^{\lambda+1} = \phi_\mu^\lambda t_{(\lambda+1)-\mu},$$

где по индексу μ ведется суммирование (при условии $(\lambda + 1) - \mu \geq 0$). По индуктивному предположению, $\phi_\mu^\lambda = 0$, если $\mu < \lambda$. Поэтому при $\mu \geq \lambda$ имеем $(\lambda + 1) - \mu \leq 1$. Отсюда следует, что $(\lambda + 1) - \mu = 1$ (иначе: $t_{(\lambda+1)-\mu} = 0$). Таким образом,

$$\phi_{\lambda+1}^{\lambda+1} = \phi_\lambda^\lambda t_1 = \left(t_1^\lambda\right) t_1 = (t_1)^{\lambda+1}.$$

Утверждение 2) теоремы 3 доказано.

Из теоремы 3 следует, что матрица произвольного автоморфизма ϕ алгебры $R(\varepsilon^{m-1})$ относительно ее естестествен-ного базиса имеет вид

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & t_2^2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \phi_{m-1}^1 & \phi_{m-1}^2 & \dots & (t_1)^{m-1} \end{pmatrix}, \; t_1 \neq 0.$$

Следовательно,

$$dim\, A\, ut(R(\varepsilon^{m-1})) = m - 1 = dim(\, R^{m-1}).$$

Можно рассмотреть вид матрицы $M(\phi)$ для второго, третьего и четвертого порядков:

$$AutR(\varepsilon) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix} | t_1 \in R, t \neq 0 \right\},$$

$$AutR(\varepsilon^2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & t_2 & (t_1)^2 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in R, t_1 \neq 0 \right\},$$

$$AutR(\varepsilon^3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & (t_1)^2 & 0 \\ 0 & t_3 & 2t_1t_2 & (t_1)^3 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2, t_3 \in R, t_1 \neq 0 \right\}.$$

Эти матрицы представляют группы автоморфизмов алгебры плюральных чисел в частных случаях.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1984.

2. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. М., 2001.

3. *Кертис И., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969.

4. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. 1—3. М., 2000.

5. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. М., 1962.

6. *Никитина Я.В., Султанов А.Я.* Расслоение Вейля над тензорным произведением двух алгебр дуальных чисел // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 4, №28. С. 17—28.

7. *Султанов А.Я.* О группах автоморфизмов специальных линейных алгебр // Изв. ПГПУ им. В.Г. Белинского. 2010. Т. 8, №22. С. 70—74.

8. *Султанова Г.А.* О размерностях алгебр Ли автоморфизмов в касательных расслоениях со связностью полного лифта над проективно-евклидовой базой // Дальневост. матем. журн. 2016. Т. 16, №1. С. 83—95.

9. *Султанова Г.А.* Об оценке размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов касательных расслоений со связностью полного лифта над непроективно-евклидовой базой // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 146—153.

10. *Широков А.П.* Замечание о структурах в касательных расслоениях // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1973. Т. 5. С. 259—309.

Для цитирования: *Султанов А.Я., Султанова Г.А., Монахова О.А.* О группе автоморфизмов алгебры плюральных чисел // ДГМФ. 2023. № 54 (2). С. 63—70. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-6.

MSC 53B15

A. Ya. Sultanov[1], G. A. Sultanova[2], O. A. Monakhova[3]

[1, 3] Penza State University
37, Lermontova St., Penza, 440026, Russia
[2] Branch of the Military Academy of Logistics named after A. V. Khrulev
Penza-5, Penza region, 440005, Russia
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru, [3] oxmonakh@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-6

On the group of automorphisms of the algebra of plural numbers

Submitted on April 27, 2023

The algebra of dual numbers was first introduced by V. K. Clifford in 1873. The algebras of plural and dual numbers are analogous to the algebra of complex numbers. Dual numbers form an algebra, but not a field, because only dual numbers with a real part not equal to zero have an inverse element.

In this work, automorphisms of algebras of plural numbers, which are a generalization of the algebra of dual numbers, are studied. Algebras of plural numbers were in the center of attention of the professor of Kazan University A. P. Shirokov. Studying the geometry of higher-order tangent bundles, he established that higher-order tangent bundles over smooth manifolds have the structure of a smooth manifold over algebras of plural numbers. This allowed him in the 70s of the twentieth century to construct a theory of lifts of tensor fields and linear connections from a smooth manifold to its tangent bundles of arbitrary order.

In this paper, we study automorphisms of the algebra of plural numbers. It is proved that the set of all automorphisms of the algebra of plural numbers forms a group. The structure of this group is described. The groups of automorphisms of the algebra of plural numbers with small dimension are indicated as examples.

Keywords: plural algebra, automorphism, vector space, matrix of automorphism

References

1. *Vishnevskiy, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V.:* Spaces over algebras. Kazan (1984).

2. *Vinberg, E. B.:* Course of algebra. Moscow (2001).

3. *Curtis, I., Reiner, I.:* Theory of representations of finite groups and associative algebras. Moscow (1969).

4. *Kostrikin, A. I.:* Introduction to Algebra. Parts 1—3. Moscow (2000).

5. *Kurosh, A. G.:* Lectures on general algebra. Moscow (1962).

6. *Nikitina, Ya. V., Sultanov, A. Ya.:* Weil bundle over the tensor product of two algebras of dual numbers. Izvestia vuzov. Volga region. Phys.-Math. Nauki, **4**:28, 17—28 (2013).

7. *Sultanov, A. Ya.:* On automorphism groups of special linear algebras. Izvestia Penza State Ped. Univ., **8**:22, 70—74 (2010).

8. *Sultanova, G. A.:* On the dimensions of Lie algebras of automorphisms in tangent bundles with a complete lift connection over a projective Euclidean base. Dalnevost. Math. J., **16**:1, 83—95 (2016).

9. *Sultanova, G. A.:* On an estimate for the dimensions of Lie algebras of infinitesimal automorphisms of tangent bundles with a complete lift connection over a nonprojective Euclidean base. DGMF, 47, 146—153 (2016).

10. *Shirokov, A. P.:* A note on structures in tangent bundles. Tr. Geom. Sem., 5, 259—309 (1973).

For citation: Sultanov, A. Ya., Sultanova, G. A., Monakhova O. A. On the group of automorphisms of the algebra of plural numbers. DGMF, 54 (2), 63—70 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-6.

УДК 514.75

М. А. Чешкова
Алтайский государственный университет, Барнаул
cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-7

Преобразование Бианки псевдосферы

Исследуется преобразование Бианки для поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Поверхностями вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны являются волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера (поверхность Бельтрами). Также к поверхностям постоянной отрицательной гауссовой кривизны относятся поверхность Куэна и поверхность Дини. Изучение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны (псевдосферических поверхностей) имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Известна связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с теорией сетей, теорией солитонов, нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона. Преобразования Бианки позволяют получить по данной псевдосферической поверхности новые псевдосферические поверхности.

С использованием математического пакета построены псевдосфера и ее преобразования Бианки.

Ключевые слова: гауссова кривизна, поверхность вращения, псевдосфера, поверхность Куэна, преобразование Бианки

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.

Обозначим через $k = (0,0,1)$ орт оси, а через $e(v) = = (\cos(v), \sin(v), 0)$ — радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k\,, \tag{1}$$

где f — дифференцируемая функция, u, v— параметры.

Обозначим через n орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f'e-k}{\sqrt{(f')^2+1}}. \tag{2}$$

Главные кривизны k_1 k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}},\; k_2 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2+1}\right)^3}$$

Гауссова кривизна $K = k_1 k_2$ равна

$$K = \frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}} \frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2+1}\right)^3}.$$

Требуем $K = const$, получим решение

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{Ku^2-(c-1)}{c-Ku^2}}\,du,$$

где c — произвольная константа.

Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга $0 < c < 1$, катушка Миндинга $c < 0$, псевдосфера $c = 0$ [1, с. 100; 2, с. 175].

Полагаем $K = -1,\; c = 0$ и выбираем знак «плюс».

Имеем

$$f(u) = \int \sqrt{\frac{-u^2+1}{u^2}}\,du. \tag{3}$$

Определим метрический тензор g_{ij} и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k.

Имеем

$$r_1 = r_u = e(v) + \sqrt{\frac{-u^2+1}{u^2}}\ k,\quad r_2 = r_v\ = ue'(v),$$

$$g_{11} = \frac{1}{u^2},\ g_{12} = 0,\ g_{22} = u^2.$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{u}\ ,\ \Gamma_{22}^1 = -u^3,\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{u}. \tag{4}$$

Остальные Γ_{ij}^k равны нулю.

Рассмотрим две гладкие поверхности $M, \bar{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем вектор $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$. Обозначим через n орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид $T_{f(o)}\bar{M} = \{f(p, n, V_p)\}$. Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность $\bar{M}$ имеет ту же кривизну.

Обозначим через r радиус-вектор поверхности M, а через R — радиус-вектор поверхности $\bar{M}$. Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение $f : M \to \overline{M}$ [2, с. 489].

Имеем $R = r - V,\ V = V^s r_s$.

Из условия $< R_i[n, v] > = 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n.$$

Так как $< \mathrm{V}, \mathrm{V} > = 1, < \partial_i V, V > = 0$, то

$$\omega(r_i) = < r_i\ , V >,\ \ \nabla_i \mathrm{V} = r_i - \ \omega(r_i)V.$$

Имеем

$$\begin{gathered} \nabla_1\ V^1 = 1 - g_{11}(V^1)^2,\ \nabla_1\ V^2 = -g_{11}V^1V^2, \\ \nabla_2\ V^1 = -g_{22}V^1V^2,\ \nabla_2\ V^2 = 1 - g_{22}(V^2)^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Формулы (5) в силу (4) примут вид

$$\partial_u V^1 - \frac{V^1}{u} = 1 - \frac{(V^1)^2}{u^2}, \quad \partial_u V^2 + \frac{V^2}{u} = -\frac{V^1 V^2}{u^2}, \tag{6}$$

$$\partial_v V^1 - u^3 V^2 = -u^2 V^1 V^2, \partial_v V^2 + \frac{V^1}{u} = 1 - u^2 (V^2)^2.$$

Система (6) имеет решение

$$V^1 = \frac{(u^2(C_1 v^2 - 2C_2 + 2v) - C_1)u}{u^2(C_1 v^2 - 2C_2 + 2v) + C_1},$$

$$V^2 = \frac{2C_1 v + 2}{u^2(C_1 v^2 - 2C_2 + 2v) + C_1},$$

$C_1, C_2 - const.$

Потребуем, чтобы $< V, V > = 1$. Тогда $2C_1C_2 + 1 = 0$.

Введем обозначение $c_1 = 1/C_1$. Имеем

$$V^1 = \frac{(u^2(c_1 + v)^2 - 1)u}{u^2(c_1 + v)^2 + 1}, \tag{7}$$

$$V^2 = \frac{2(c_1 + v)}{u^2(c_1 + v)^2 + 1}.$$

Положим $u = \sin(t)$. В силу (3) $f(t) = \cos(t) + \ln(tg\left(\frac{t}{2}\right))$ и псевдосфера имеет уравнение $r = \sin(t)\, e(v) + f(t)k$. Построим ее (рис. 1).

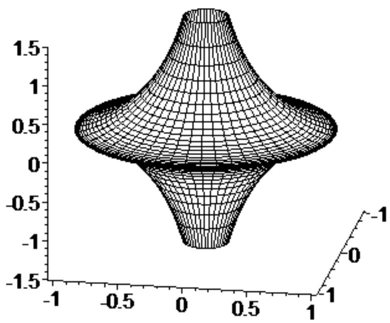

Рис. 1. Псевдосфера

В силу (4), (7) имеем

$$V = \frac{\sin(t)\,((c_1+v)^2 sin^2(t)-1)}{(c_1+v)^2 sin^2(t)+1}\left(e(v)+\frac{\cos(t)}{\sin(t)}k\right)+$$

$$+\frac{2(c_1+v)}{(c_1+v)^2 sin^2(t)+1}\sin(t)\,e'(v).$$

Построим поверхности $R = r - V, V = V^s r_s$ при $c_1 = 30$ (рис. 2), $c_1 = 0$ (рис. 3).

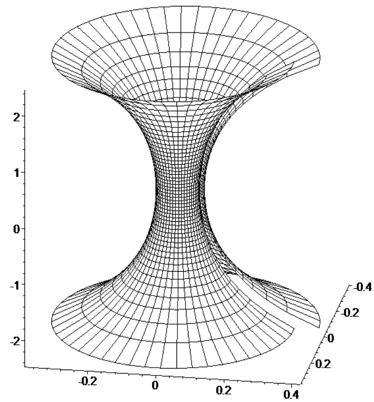

Рис. 2. Преобразование Бианки псевдосферы при $c_1 = 30$

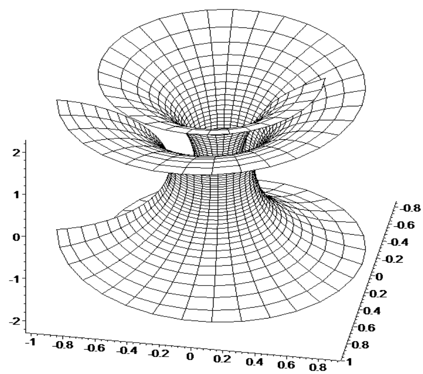

Рис. 3. Преобразование Бианки псевдосферы при $c_1 = 0$

Уравнения поверхности при $c_1 = 0$ примут вид

$$x = \frac{2\sin(t)}{v^2 sin^2(t) + 1}\big(\cos(v) + vsin(v)\big),$$

$$y = \frac{2\sin(t)}{v^2 sin^2(t) + 1}\big(\cos(v) - vsin(v)\big),$$

$$z = \frac{2\sin(t)}{v^2 sin^2(t) + 1} + \lg(tg\left(\frac{t}{2}\right)).$$

Полученная поверхность — это поверхность Куэна [3, с. 342].

Список литературы

1. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. М. ; Л., 1948.
2. *Норден А. П.* Об основаниях геометрии. М., 1956.
3. *Кривошапко С. Н., Иванов В. Н., Халаби С. М.* Аналитические поверхности. М., 2006.

Для цитирования: *Чешкова М. А.* Преобразование Бианки псевдосферы // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 71—77. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-7.

MSC 2010: 53A05

M. A. Cheshkova
Altai State University
61, Prosp. Lenina, Barnaul, 656049, Russia
cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-7

Bianchi transformation of the pseudosphere

Submitted on March 6, 2023

The work is devoted to the study of the Bianchi transform for surfaces of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Minding top, the Minding coil, the pseudosphere (Beltrami surface). Surfaces of constant negative Gaussian curvature also include Kuens surface and the Dinis surface. The study of surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospherical surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. The connection of the geometric characteristics of pseudospherical surfaces with the theory of networks, with the theory of solitons, with nonlinear differential equations and sin-Gordon equations is established. The sin-Gordon equation plays an important role in modern physics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudospherical surface. The Bianchi transform for the pseudosphere is constructed. Using a mathematical package, the pseudosphere and its Bianchi transform are constructed.

Keywords: Gaussian curvature, surface of revolution, pseudosphere, Kouen's surface, Bianchi transform

References

1. *Kagan, V.F.:* Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition, 2. Moscow, Leningrad (1948).

2. *Norden, A.P.:* On the foundations of geometry. Moscow (1956).

3. *Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N., Chalabi, S.M.:* Analytical surfaces. Moscow (2006).

For citation: Cheshkova, M.A. Bianchi transformation of the pseudosphere. DGMF, 54 (2), 71—77. (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-7.

УДК 514.76

Ю. И. Шевченко[1], ***А. В. Вялова***[2]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[2] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
ESkrydlova@kantiana.ru, vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-8

Линейные и проективные связности над гладким многообразием

Рассмотрены главные расслоения корепейров 1-го и 2-го порядков, а также фактор-расслоение центропроективных (коаффинных) корепейров. В расслоении линейных корепейров задана связность с помощью поля объекта связности. Определены тензоры кручения и кривизны этой линейной связности. Выделены особые связности: без кручения, без кривизны. Пространство линейной связности, лишенное кручения и кривизны, представляет собой аффинную группу, что послужило основанием для классического названия «аффинная связность».

При специализациях многообразия введены сильное и слабое условия проективности, позволяющие выделить соответствующие расслоения корепейров. Связности в этих главных расслоениях названы сильной и слабой проективными связностями.

В случае симметрической линейной связности, когда отсутствует кручение, рассмотрен объект классической проективной связности. Введены формы этой связности и найдены их структурные уравнения. Отсюда следует, что классическая проективная связность не является ни фундаментально-групповой, ни линейной

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.

дифференциально-геометрической. Доказано, что объект кривизны этой связности образует квазитензор лишь в совокупности с объектом связности. Показано, что классическая проективная связность вырождается в отличную от исходной линейную связность на образе сечения некоторого однородного расслоения.

Ключевые слова: расслоение кореперов, линейная связность, тензоры кручения и кривизны, слабая и сильная проективные связности, классическая проективная связность

1. Расслоения над гладким многообразием

Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие V_n со структурными уравнениями Лаптева [1; 2]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \left(i, j, \ldots = \overline{1, n}\right). \qquad (1.1)$$

Продолжим их, то есть продифференцируем внешним образом и разрешим по лемме Лаптева (обобщенной лемме Картана [1; 2]):

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \qquad (1.2)$$

причем трехиндексные формы удовлетворяют условиям

$$\omega_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega_{[jk]}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\omega_{[jk]}^i = \lambda_{jkl}^i \omega^l, \quad \lambda_{(jk)l}^i = 0, \;\; \lambda_{\{jkl\}}^i = 0, \qquad (1.3)$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, а фигурные скобки — циклирование.

Продолжая структурные уравнения (1.2), получим

$$d\omega_{jk}^i = \omega_{jk}^l \wedge \omega_l^i - \omega_{lk}^i \wedge \omega_j^l - \omega_{jl}^i \wedge \omega_k^l + \omega^l \wedge \omega_{jkl}^i, \qquad (1.4)$$

$$\omega_{j[kl]}^i = \lambda_{jklm}^i \omega^m, \quad \lambda_{j(kl)m}^i = 0, \;\; \lambda_{j\{klm\}}^i = 0. \qquad (1.5)$$

Утверждение 1. *Над гладким многообразием V_n имеются главные расслоения кореперов $L(V_n), L^2(V_n)$ со структурными уравнениями (1.1, 1.2), (1.1, 1.2, 1.4), типовыми слоями которых являются линейные группы 1-го и 2-го порядков:*

$$L = GL(n), dimL = n^2\,; L^2 = GL^2(n),\;\; dimL^2 = \frac{1}{2}n^2(n+3),$$

причем группа L является факторгруппой группы L^2.

Свернем уравнения (1.4) по индексам i, j:

$$d\omega_k = -\omega_l \wedge \omega_k^l + \omega^l \wedge \omega_{kl}, \tag{1.6}$$

$$\omega_k = \omega_{ik}^i,\;\; \omega_{kl} = \omega_{ikl}^i,\;\; \omega_{[kl]} \equiv 0, \tag{1.7}$$

где символ $\equiv$ обозначает сравнение по модулю базисных форм ω^i.

Следствие. В расслоении линейных кореперов 2-го порядка $L^2(V_n)$ наряду с фактор-расслоением линейных кореперов 1-го порядка $L(V_n)$ присутствует фактор-расслоение центропроективных (коаффинных) кореперов $C(V_n)$ со структурными уравнениями (1.1, 1.2, 1.6), типовым слоем которого является коаффинная группа $C = GA^*(n)$.

2. Линейная связность

Зададим линейную связность в главном расслоении линейных кореперов $L(V_n)$ способом Лаптева — Лумисте [3; 4]. Преобразуем слоевые формы ω_j^i с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^k:

$$\widetilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k. \tag{2.1}$$

Потребуем, чтобы функции Γ_{jk}^i удовлетворяли следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\, \Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jkl}^i \omega^l, \tag{2.2}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\,\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k.$$

Тогда преобразованные слоевые формы (1) удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \qquad (2.3)$$

где коэффициенты при внешних произведениях базисных форм выражаются по формуле

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]}, \qquad (2.4)$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках.

Продолжим дифференциальные уравнения (2.2):

$$\Delta\,\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{ml} - \Gamma^i_{mk}\omega^m_{jl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} + \omega^i_{jkl} \equiv 0.$$

Проальтернируем эти дифференциальные сравнения по двум последним индексам и учтем условия (1.3_1, 1.5_1):

$$\Delta\,\Gamma^i_{j[kl]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} - \Gamma^i_{m[k}\omega^m_{jl]} \equiv 0. \qquad (2.5)$$

С помощью уравнений (2.2) получаются сравнения для второго слагаемого в формуле (2.4):

$$\Delta\,\Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + \omega^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} \equiv 0.$$

Вычтем их из сравнений (2.5) и воспользуемся формулой (2.4):

$$\Delta\,R^i_{jkl} \equiv 0. \qquad (2.6)$$

Внесем формы (2.1) в структурные уравнения (1.1):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \qquad (2.7)$$

где $T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}$. Альтернируя дифференциальные уравнения (2) и учитывая условие (1.3_1), получим

$$\Delta\,T^i_{jk} \equiv 0. \qquad (2.8)$$

Утверждение 2. *Линейная связность (в классической терминологии — аффинная связность) в главном расслоении линейных корепероов* $L(V_n)$ *задается формами (2.1), определенными с помощью компонент объекта связности* Γ^i_{jk}*, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.2). Формы линейной связности (2.1) подчиняются структурным уравнениям (2.3), содержащим компоненты объекта кривизны* R^i_{jkl}*, которые выражаются по формуле (2.4) через объект связности* Γ^i_{jk} *и его пфаффовы производные* Γ^i_{jkl}*. Компоненты* R^i_{jkl} *образуют тензор, так как удовлетворяют дифференциальным сравнениям (2.6). Внесение форм связности (2.1) в структурные уравнения базисных форм (1.1) преобразует их к виду (2.7), куда входят компоненты тензора кручения* T^i_{jk} *с дифференциальными сравнениями (2.8).*

Определение 1. Главное расслоение линейных корепероов $L(V_n)$, при более подробном обозначении $L_{n^2}(V_n)$, с заданным полем объекта Γ^i_{jk} называется *пространством линейной связности* $L_{n^2,n}$.

3. Особые линейные связности

Тензоры кручения T^i_{jk} и кривизны R^i_{jkl} позволяют выделить 3 особых линейных связности:

1) $T^i_{jk} = 0$ — линейная связность без кручения;

2) $R^i_{jkl} = 0$ — линейная связность без кривизны;

3) $T^i_{jk} = 0$, $R^i_{jkl} = 0$ — линейная связность без кручения и кривизны, иначе говоря, связность локально аффинного пространства.

В последнем случае уравнения (2.3), (2.7) становятся структурными уравнениями аффинной группы $GA(n)$:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \dot{\tilde{\omega}}^i_j, \quad d\dot{\tilde{\omega}}^i_j = \dot{\tilde{\omega}}^k_j \wedge \dot{\tilde{\omega}}^i_k, \tag{3.1}$$

где точка означает выполнение условий 3). Это послужило основанием для названия «аффинная связность» (см., напр., [5]), которое было дано до развития теории расслоенных пространств. Группа $GA(n)$ имеет линейную факторгруппу $GL(n)$ со структурными уравнениями (3.1_2).

4. Сильная и слабая проективные связности

Наряду с особыми линейными связностями на произвольном расслоении $L(V_n)$ можно специализировать само расслоение и получать другие связности. Выделим расслоение специальных линейных кореперов с помощью условия проективности

$$\omega_i^i = 0. \tag{4.1}$$

Замечание 1. В аффинной группе $GA(n)$ со структурными уравнениями (3.1) аналогичное равенство выделяет эквиаффинную подгруппу, а в линейной факторгруппе $GL(n)$ — специальную линейную подгруппу, изоморфную проективной группе $GP(n-1)$.

Из структурных уравнений (1.2) при $j=i$ следует

$$d\omega_i^i = \omega^k \wedge \omega_k .$$

Учтем условие (4.1) и разрешим полученное квадратичное уравнение по лемме Картана:

$$\omega_k = \mu_{kl}\omega^l, \;\; \mu_{[kl]} = 0. \tag{4.2}$$

Отталкиваясь от равенства (4.1), введем более общее условие

$$\omega_i^i = \nu_k\omega^k , \tag{4.3}$$

продолжение которого имеет вид

$$\Delta\nu_k + \omega_k \equiv 0. \tag{4.4}$$

Назовем (4.1) сильным условием проективности, а (4.3) — слабым условием проективности.

При выполнении условия (4.3) с помощью обозначения (2.1) получим

$$\widetilde{\omega}_i^i = \gamma_k\omega^k, \;\; \gamma_k = \nu_k - \Gamma_k, \;\; \Gamma_k = \Gamma_{ik}^i. \tag{4.5}$$

Уравнения (2.2) и сравнения (4.4) дают $\Delta\gamma_k \equiv 0$. В рассматриваемом случае формулы (4.3) и (4.5_1) аналогичны. Более того, если тензор γ_k аннулируется, то $\widetilde{\omega}_i^i = 0$, что подобно условию (4.1), и тогда $\nu_k = \Gamma_k$.

Определение 2. Расслоение линейных кореперов $L(V_n)$ с условием (4.1) назовем *сильным расслоением проективных кореперов* и обозначим $\dot{P}(V_n)$, а при выполнении условия (4.3) — слабым расслоением проективных кореперов $P(V_n)$. Линейные связности в расслоениях $\dot{P}(V_n)$ и $P(V_n)$ назовем соответственно сильной и слабой проективными связностями. Главные расслоения $\dot{P}(V_n)$ и $P(V_n)$ со связностями будем называть пространствами с сильной и слабой проективными связностями и обозначать $\dot{P}_{n^2-1,n}$ и $\mathrm{P}_{n^2-1,n}$.

Замечание 2. Пространства $\dot{P}_{n^2-1,n}$ и $\mathrm{P}_{n^2-1,n}$ с одной базой V_n и одинаковым типовым слоем — проективной группой $GP(n\text{-}1)$ — нельзя отождествить, так как в окрестности точки базы имеем разные формулы (4.1) и (4.3).

Утверждение 3. *Если слоевые формы ω_j^i удовлетворяют слабому условию проективности (4.3), в частности сильному условию проективности (4.1), то формы проективной связности $\widetilde{\omega}_j^i$ подчиняются аналогичному условию.*

Из дифференциальных уравнений (2.2) следует, что свертки Γ_k удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma_k + \omega_k = \Gamma_{kl}\omega^l \ (\Gamma_{kl} = \Gamma_{ikl}^i), \tag{4.6}$$

которые с учетом следствия (4.2_1) из условия сильной проективности (4.1) принимают тензорный вид: $\Delta\Gamma_k \equiv 0$.

Замечание 3. Линейную связность с объектом Γ_{jk}^i, удовлетворяющим в случае выполнения равенства (4.1) условию $\Gamma_k = 0$, можно назвать *специальной сильной проективной связностью*.

5. Объект классической проективной связности

В общем случае слабое условие проективности (4.3) и тем более сильное условие (4.1) не выполняются, поэтому нельзя дать определение 2 и доказать утверждение 3. Это препятствие преодолевается при построении объекта классической проективной связности в пространстве симметрической линейной связности.

Утверждение 4. *Объект симметрической линейной связности* Γ^i_{jk} $(\Gamma^i_{[jk]} = 0)$ *и его свертка* $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$ *позволяют построить объект классической проективной связности (см., напр., [6]):*

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \Gamma_k + \delta^i_k \Gamma_j), \tag{5.1}$$

причем в силу симметрии компонент Γ^i_{jk} *объект* Π^i_{jk} *симметричен по нижним индексам:* $\Pi^i_{[jk]} = 0$.

Замечание 4. Построение шести объектов проективной связности по данному объекту несимметрической линейной связности произведено разными аппаратами в статьях [7; 8].

Из дифференциальных уравнений (2.2), (4.6) следует, что компоненты объекта Π^i_{jk} подчиняются следующим сравнениям:

$$\Delta\Pi^i_{jk} + \omega^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \omega_k + \delta^i_k \omega_j) \equiv 0. \tag{5.2}$$

Свернем их по индексам i, j:

$$\Delta\Pi_k \equiv 0, \;\; \Pi_k = \Pi^i_{ik}.$$

Более того, формула (5.1) дает

$$\Pi_k = 0. \tag{5.3}$$

6. Формы классической проективной связности

По аналогии с формами линейной связности (2.1) введем формы проективной связности

$$\widehat{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Pi^i_{jk}\omega^k. \tag{6.1}$$

Замечание 5. Из формулы (6.1) и тождеств (5.3) следует $\widehat{\omega}^i_i = \omega^i_i$, то есть сумма диагональных форм не подвергается преобразованию.

Согласно формулам (2.1), (5.1) имеем

$$\widehat{\omega}_j^i = \widetilde{\omega}_j^i + \frac{1}{n+1}(\delta_j^i \Gamma_k + \delta_k^i \Gamma_j)\omega^k. \qquad (6.2)$$

С помощью структурных уравнений (1.1) получим

$$d\widehat{\omega}_j^i = d\widetilde{\omega}_j^i + \frac{1}{n+1}[\delta_j^i d\Gamma_k + \delta_k^i d\Gamma_j - (\delta_j^i \Gamma_l + \delta_l^i \Gamma_j)\omega_k^l] \wedge \omega^k.$$

Раскроем круглые скобки и воспользуемся дифференциальными уравнениями (4.6):

$$d\widehat{\omega}_j^i = d\widetilde{\omega}_j^i + \frac{1}{n+1}[(\delta_j^i \Gamma_{kl} + \delta_k^i \Gamma_{jl})\omega^l -$$

$$-\delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j + \delta_k^i \Gamma_l \omega_j^l - \Gamma_j \omega_k^i] \wedge \omega^k.$$

Используем структурные уравнения (2.3):

$$d\widehat{\omega}_j^i = \widetilde{\omega}_j^k \wedge \widetilde{\omega}_k^i + [R_{jkl}^i - \frac{1}{n+1}(\delta_j^i \Gamma_{kl} + \delta_k^i \Gamma_{jl})]\omega^k \wedge \omega^l +$$

$$+\frac{1}{n+1}(\delta_k^i \Gamma_l \omega_j^l - \Gamma_j \omega_k^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j) \wedge \omega^k. \qquad (6.3)$$

Преобразуем внешние произведения форм линейной связности с помощью равенств (6.2):

$$\widetilde{\omega}_j^k \wedge \widetilde{\omega}_k^i = \widehat{\omega}_j^k \wedge \widehat{\omega}_k^i + \frac{1}{(n+1)^2}\Gamma_j \omega^k \wedge \Gamma_k \omega^i -$$

$$-\frac{1}{n+1}(\widehat{\omega}_j^k \wedge \Gamma_k \omega^i + \Gamma_j \omega^k \wedge \widehat{\omega}_k^i).$$

В последнем выражении используем обозначение (6.1):

$$\widetilde{\omega}_j^k \wedge \widetilde{\omega}_k^i = \widehat{\omega}_j^k \wedge \widehat{\omega}_k^i - \frac{1}{n+1}\left(\omega_j^k \wedge \Gamma_k \omega^i + \Gamma_j \omega^k \wedge \omega_k^i\right) +$$

$$+\frac{1}{n+1}(\Gamma_j \Pi_{kl}^i + \Pi_{jk}^m \Gamma_m \delta_l^i)\omega^k \wedge \omega^l + \frac{1}{(n+1)^2}\Gamma_j \Gamma_k \omega^k \wedge \omega^i.$$

Подставим полученный результат в формулу (6.3), вынесем внешние произведения базисных форм и проальтернируем коэффициенты при этих произведениях с учетом симметрии компонент Π_{jk}^i:

$$d\widehat{\omega}_j^i = \widehat{\omega}_j^k \wedge \widehat{\omega}_k^i - \frac{1}{n+1}(\delta_j^i \omega_k + \delta_k^i \omega_j) \wedge \omega^k + \mathcal{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \qquad (6.4)$$

$$\mathcal{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{n+1}[\delta^i_j \Gamma_{[kl]} -$$

$$-(\Gamma_{j[k} + \Gamma_m \Pi^m_{j[k} + \tfrac{1}{n+1}\Gamma_j \Gamma_{[k})\delta^i_{l]}]. \qquad (6.5)$$

Утверждение 5. Классическая проективная связность со структурными уравнениями (1.1), (1.6), (6.4) не является ни фундаментально-групповой [1—4], ни линейной дифференциально-геометрической [9] связностью над базой V_n. Однако над расслоением центропроективных кореперов $\mathrm{C}(V_n)$ это линейная связность, непостоянная часть объекта кривизны которой выражается по формуле (6.5).

7. Квазитензорность объекта кривизны

Продолжим дифференциальные уравнения (4.6):

$$\Delta\Gamma_{kl} - \Gamma_m \omega^m_{kl} + \omega_{kl} \equiv 0.$$

Альтернируем эти сравнения:

$$\Delta\Gamma_{[kl]} - \Gamma_m \omega^m_{[kl]} + \omega_{[kl]} \equiv 0.$$

В случае полуголономности [10] многообразия V_n имеем $\omega^m_{[kl]} \equiv 0, \omega_{[kl]} \equiv 0$, поэтому $\Delta\Gamma_{[kl]} \equiv 0$, то есть $\Gamma_{[kl]}$ — антисимметрический тензор на многообразии V_n. Значит, $\delta^i_j \Gamma_{[kl]}$ — тензор.

Найдем дифференциальные сравнения для компонент 2-го слагаемого в квадратных скобках формулы (6.5):

$$\Delta(\Gamma_{j[k} + \Gamma_m \Pi^m_{j[k} + \tfrac{1}{n+1}\Gamma_j \Gamma_{[k})\delta^i_{l]} + (\omega_{j[k} + \omega_m \Pi^m_{j[k})\delta^i_{l]} \equiv 0.$$

Следовательно, компоненты $\mathcal{R}^i_{jkl}$ удовлетворяют следующим сравнениям:

$$\Delta\mathcal{R}^i_{jkl} + \tfrac{1}{n+1}\left(\omega_{j[k} + \omega_m \Pi^m_{j[k}\right)\delta^i_{l]} \equiv 0. \qquad (7.1)$$

Утверждение 6. *Дифференциальные сравнения (5.2), (7.1) показывают, что объект кривизны $\mathcal{R}^i_{jkl}$ классической проективной связности образует квазитензор лишь в совокупности с объектом этой связности* Π^i_{jk}.

8. Случай вырождения проективной связности

Уравнения (6.4) станут структурными уравнениями форм линейной связности лишь в особом случае, когда выполняются дифференциальные сравнения

$$\delta^i_j\omega_k + \delta^i_k\omega_j \equiv 0. \tag{8.1}$$

Сворачивая их по индексам i, j, получим $\omega_k \equiv 0$. Наоборот, из этих сравнений следуют сравнения (8.1). Соответствующие пфаффовы уравнения имеют вид

$$\omega_k = \Lambda_{kl}\omega^l, \tag{8.2}$$

где Λ_{kl} — некоторые функции. Продолжим эти уравнения и запишем результат в виде сравнений

$$\vartriangle \Lambda_{kl} + \omega_{kl} \equiv 0. \tag{8.3}$$

Альтернируя их и используя сравнения (1.7_3), получим

$$\vartriangle \Lambda_{[kl]} \equiv 0. \tag{8.4}$$

Подставим пфаффовы уравнения (8.2) в структурные уравнения (6.4):

$$d\widehat{\omega}^i_j = \widehat{\omega}^k_j \wedge \widehat{\omega}^i_k + \mathbb{R}^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{8.5}$$

$$\mathbb{R}^i_{jkl} = \mathcal{R}^i_{jkl} + \frac{1}{n+1}\left(\delta^i_j\Lambda_{[kl]} - \Lambda_{j[k}\delta^i_{l]}\right). \tag{8.6}$$

В рассматриваемом случае сравнения (7.1) примут вид

$$\vartriangle \mathcal{R}^i_{jkl} + \frac{1}{n+1}\omega_{j[k}\delta^i_{l]} \equiv 0. \tag{8.7}$$

Дифференциальные сравнения (8.3), (8.4), (8.7) позволяют найти сравнения для компонент (8.6): $\Delta\, \mathbb{R}^i_{jkl} \equiv 0$.

Утверждение 7. *Классическая проективная связность становится линейной связностью на образе сечения (8.2) однородного расслоения* $A^*_n(V_n)$ *со структурными уравнениями (1.1), (1.6), где* $A^*_n = GA^*\ (n)/GL(n)$ *— коаффинное пространство размерности n. Эта отличная от исходной линейная связность имеет структурные уравнения (1.1),(8.5) и тензор кривизны (8.6).*

Список литературы

1. *Лаптев Г.Ф.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Труды 3-го Всесоюз. матем. съезда / АН СССР. М., 1958. Т. 3. С. 409—418.

2. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 139—189.

3. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Труды 4-го Всесоюз. матем. съезда. 1961. Т. 2. Л., 1964. С. 226—233.

4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. 2-е изд. М., 1976.

6. *Veblen O.* Generalized projective geometry // J. Lond. Math. Soc. 1929. Vol. 4. P. 140—160.

7. *Гордеева И.А.* Шесть классов несимметрических метрических связностей // ДГМФ. 2007. Вып. 38. С. 33—38.

8. *Шевченко Ю.И., Вялова А.В.* Метрики пространства с линейной связностью, не являющейся полусимметрической // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 148—160.

9. *Вагнер В.В.* Теория составного многообразия // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. М. ; Л., 1950. Вып. 8. С. 11—72.

10. *Шевченко Ю.И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // ДГМФ. 2015. Вып. 46. С. 168—177.

Для цитирования: *Шевченко Ю.И., Вялова А.В.* Линейные и проективные связности над гладким многообразием // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 78—91. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-8.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

Yu. I. Shevchenko[1], *A. V. Vyalova*[2]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14, A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia
[2] *Kaliningrad State Technical University*
1, Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
ESkrydlova@kantiana.ru, vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-2-8

Linear and projective connections over a smooth manifold

Submitted on March 16, 2023

The principal bundles of the first order coframes and the second order coframes, as well as factor bundle of centroprojective (coaffine) coframes are considered. In the bundle of linear coframes a connection is given with the help of the field of connection object. The torsion and curvature tensors of this linear connection are determined. Special connections are singled out: torsion-free, curvature-free. The space of a linear connection devoid of torsion and curvature is an affine group, that served as the basis for classical name «affine connection».

Under the specializations of a manifold, strong and weak projectivity conditions was introduced, which make it possible to single out the coframe bundles. The connections in these principal bundles are called strong and weak projective connections.

In the case of symmetric linear connection, when the torsion is absent, the object of classic projective connection is considered. Connection forms are introduced and their structure equations are found. Hence it follows that classic projective connection is neither fundamental-group nor linear differential-geometric. It is proved, that the curvature object of this connection forms a quasitensor together with the connection object only. It is shown, that classic projective connection degenerates into different from the original linear connection on the image of a section of some homogeneous bundle.

Keywords: bundle of coframes, linear connection, torsion and curvature tensors, weak and strong projective connection, classic projective connection

References

1. *Laptev, G.F.:* Group-theoretic method in differential geometric investigation. Tr. 3rd All-Union Math. Congr., 3, 409—418 (1958).

2. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

3. *Laptev, G.F.:* Manifolds, imbedded in generalized spaces. Tr. 4th All-Union Math. Congr., 1961, 2. Leningrad, 226—233 (1964).

4. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.*: Differential-geometric structures on manifolds. Itogi Nauki i Tekhn. Probl. Geom., 9 (1979).

5. *Norden, A.P.:* Spaces with an affine connection. Moscow (1976).

6. *Veblen, O.:* Generalized projective geometry. J. Lond. Math. Soc., 4, 140—160 (1929).

7. *Gordeeva*, *I.:* Six classes of non-symmetric metric connections. DGMF, 38, 33—38 (2007).

8. *Shevchenko*, *Yu.I., Vyalova A.V.:* Metrics of a space with linear connection, which isn't semisymmetric. DGMF, 53, 148—160 (2022).

9. *Vagner, V.V.:* The theory of composite manifolds. Tr. Sem. Vect. and Tenz. Analysis, 8, 11—72 (1950).

10. *Shevchenko, Yu.I.:* Holonomic and semi-holonomic submanifolds of smooth manifolds. DGMF, 46, 168—177 (2015).

For citation: Shevchenko, Yu.I., Vyalova, A.V. Linear and projective connections over a smooth manifold. DGMF, 54 (2), 78—91 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-8.

Published since 1970.
Indexing: MathSciNet (American Mathematical Society),
ZBMATH — The database Zentralblatt MATH.
Frequency — twice a year (from 2023)

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

Put to the Press:
October 20, 2023

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY
OF MANIFOLDS OF FIGURES

2023

№ 54 (2)

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 20.10.2023 г.
Дата выхода в свет 10.11.2023 г.
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Усл. печ. л. 5,8
Тираж 300 экз. (1-й завод 50 экз.). Заказ 113

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14