ISSN 0321-4796 (Print)
ISSN 2782-3229 (Online)

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

IMMANUEL KANT BALTIC FEDERAL UNIVERSITY

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2025

Том
Vol.
56

Издательство
Балтийского федерального
университета им. Иммануила Канта

Immanuel Kant
Baltic Federal University
Press

2025

12+

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2025. — Т. 56. — 129 с.

Редакционная коллегия

О.О. Белова, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта, **гл. редактор** (Калининград, Россия); *К.В. Полякова*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта, **отв. секретарь** (Калининград, Россия); *Ю.И. Шевченко*, канд. физ.-мат. наук, проф., БФУ им. И. Канта, (Калининград, Россия); *В. Балан*, д-р, проф., Политехнический университет Бухареста (Бухарест, Румыния); *В.В. Балащенко*, канд. физ.-мат. наук, проф., Белорусский государственный университет (Минск, Беларусь); *Ш. Бачо*, д-р, проф., Университет Дебрецена (Дебрецен, Венгрия); *Р. Бешимов*, канд. физ.-мат. наук, проф., Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека (Ташкент, Узбекистан); *Т. Бокелавадзе*, канд. физ.-мат. наук, проф., Государственный университет Акакия Церетели (Кутаиси, Грузия); *Л. Велимирович*, д-р, проф., Нишский университет (Ниш, Сербия); *И. Гинтерлейтнер*, проф., Технический университет в Брно (Брно, Чехия); *В.А. Игошин*, д-р физ.-мат. наук, проф., Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева (Н. Новгород, Россия); *Б. Кирик Рац*, проф., Университет Мармара (Стамбул, Турция); *М.В. Кретов*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия); *Й. Микеш*, проф., Оломоуцкий университета им. Франтишека Палацкого (Оломоуц, Чехия); *В.А. Мирзоян*, д-р физ.-мат. наук, проф., Государственный инженерный университет Армении (Ереван, Армения); *П.Т. Надь*, д-р физ.-мат. наук, проф., Обудский университет (Будапешт, Венгрия); *В.Ю. Ровенский*, д-р физ.-мат. наук, проф., Хайфский университет (Хайфа, Израиль); *Л.Л. Сабинина*, канд. физ.-мат. наук, проф., Автономный университет Эстадо де Морелос (Куэрнавака, Мексика); *С.Е. Степанов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Финансовый университет при Правительстве РФ (Москва, Россия); *Дж. Фальконе,* проф., Палермский университет (Палермо, Италия); *А. Фигула,* проф., Университет Дебрецена (Дебрецен, Венгрия); *Г.С. Холл,* д-р, проф., Университет Абердина (Абердин, Великобритания); *А.М. Шелехов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Московский педагогический государственный университет (Москва, Россия)

Выходит с 1970 года.
Входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.
Изданию присвоена **первая категория (К1) Перечня ВАК.**

Учредитель
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Адрес редакции и издателя
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Адрес типографии
236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Дата выхода в свет 19.09.2025 г.

© БФУ им. И. Канта, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 514.76

А. Абу-Салим[1], М. Б. Банару[2], Г. А. Банару[2]
[1] Университет Аль-аль-Байт, Мафрак, Иордания,
[2] Смоленский государственный университет, Россия
[1] dr_ahmad57@yahoo.com, [2] mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-1

О минимальности почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий

Формулируются две задачи: 1) проанализировать одно из известных условий минимальности почти контактной метрической гиперповерхности почти эрмитова многообразия; 2) выяснить, как связано условие минимальности Аббаса для гиперповерхности с классической обобщенной структурой Кенмоцу в многообразии Вайсмана — Грея с условием минимальности гиперповерхности со структурой Кириченко — Ускорева.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, почти эрмитово многообразие, минимальная гиперповерхность, условия минимальности

1. Отправной точкой для написания данной заметки стало изучение недавно опубликованной статьи [1] иракского геометра Мохаммеда Аббаса. В этой работе рассматривается ситуация, когда на ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия, принадлежащего классу многообразий Вайсмана — Грея, индуцируется так называемая классическая

Поступила в редакцию 17.04.2025 г.

обобщенная структура Кенмоцу. Отметим, что методы исследования почти контактных метрических (almost contact metric, acm-) гиперповерхностей, которыми весьма успешно пользуется М. Аббас, разработаны отечественными геометрами В. Ф. Кириченко и Л. В. Степановой [2; 3]. Отметим также, что это, по нашему мнению, первый интересный и важный случай, когда почти контактная метрическая структура на гиперповерхности, являющаяся обобщенной структурой Кенмоцу, изучается так глубоко и детально. Что касается почти эрмитовых многообразий Вайсмана — Грея (то есть многообразий класса $W_1 \oplus W_4$ в общепринятой терминологии Грея — Херверллы), то такие многообразия изучались с разных точек зрения многими геометрами. Обратим внимание на то, что класс многообразий Вайсмана — Грея содержит все келеровы, приближенно келеровы и локально конформные келеровы многообразия.

2. Наиболее интересный результат работы [1], на наш взгляд, — критерий минимальности гиперповерхности с обобщенной структурой Кенмоцу в многообразии Вайсмана — Грея: равенство

$$\sigma(\xi,\xi) = 0 \tag{1}$$

является условием, необходимым и достаточным для минимальности гиперповерхности многообразия Вайсмана — Грея, оснащенной обобщенной структурой Кенмоцу [1, с. 10]. Здесь σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в многообразие Вайсмана — Грея M^{2n}, ξ — структурный вектор почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1}.

3. Условие (1) хорошо знакомо авторам настоящей заметки. Оно возникало ранее при исследовании некоторых видов acm-гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий, принадлежащих различным классам Грея — Херверллы, причем как для более близкого нам случая acm-гиперповерхности 6-мерного почти эрмитова многообразия [4—8], так и для случая гиперповерхности почти эрмитова многообразия произвольной размерности [9—12]. Это условие иногда является критерием минимальности acm-гиперповерхности почти эрмитова многообразия; в других случаях оно оказывается только необходимым или только достаточным. Причем в нескольких работах данное условие характеризует минимальность acm-гиперповерхности именно со структурой Кенмоцу (например, в [9; 10] и некоторых других статьях).

4. В конце статьи мы ставим следующую задачу: проанализировать условие (1), систематизировать результаты о минимальности acm-гиперповерхности почти эрмитова многообразия, связанные с этим условием (оно присутствует в десятках статей). Сформулируем еще одну задачу, на наш взгляд, гораздо менее сложную: выяснить, как связано условие (1) с минимальностью acm-гиперповерхности со структурой Кириченко — Ускорева.

Напомним, что структура Кириченко — Ускорева [13; 14] также является обобщением структуры Кенмоцу, однако эта структура отлична от классической обобщенной структуры Кенмоцу, которая рассматривалась в статье [1] и во многих других работах. Наверное, целесообразнее всего при решении этой задачи «поместить» гиперповерхность со структурой Кириченко — Ускорева именно в многообразие Вайсмана — Грея.

Список литературы

1. *Abass M.Y.* On generalized Kenmotsu manifolds as hypersurfaces of Vaisman — Gray manifolds // Владикавказский математический журнал. 2024. Т. 26, №1. С. 5—12.

2. *Кириченко В.Ф., Степанова Л.В.* О геометрии гиперповерхностей квазикелеровых многообразий // УМН. 1995. №2. С. 213—214.

3. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

4. *Banaru M.B.* Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // J. Harbin Inst. Technol. (N.S.). 2001. Vol. 8, №1. P. 38—40.

5. *Банару М.Б.* О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Матем. сб. 2003. Т. 194, №8. С. 13—24.

6. *Банару М.Б.* О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, №5. С. 981—991.

7. *Банару М.Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 2003. №7. С. 59—63.

8. *Abu-Saleem A., Banaru M.B.* On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 8, №1. P. 35—46.

9. *Banaru M.B.* On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3-manifold // Saitama Math. J. 2002. Vol. 20. P. 1—7.

10. *Abu-Saleem A., Banaru M.B.* Two theorems on Kenmotsu hypersurfaces in a W_3-manifold // Studia Univ. Babes — Bolyai. Math. 2005. Vol. 51, №3. P. 3—11.

11. *Кириченко В.Ф., Банару М.Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 127. С. 5—40.

12. *Степанова Л.В., Банару Г.А., Банару М.Б.* О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Изв. вузов. Матем. 2016, №1.С. 86—89.

13. *Банару М.Б., Банару Г.А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в келеровых многообразиях // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

14. *Банару Г.А.* О несуществовании структуры Кенмоцу на acm-гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 23—28.

Для цитирования: *Абу-Салим А., Банару М.Б., Банару Г.А.* О минимальности почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий // ДГМФ. 2025. №56. С. 5—11. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-1.

MSC 2010: 53B35, 53B25

A. Abu-Saleem[1], M.B. Banaru[2], G.A. Banaru[2]
[1] Al al-Bayt University, Mafraq, Jordan
[2] Smolensk State University,
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
[1] dr_ahmad57@yahoo.com, [2] mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-1

On minimality of almost contact metric hypersurfaces in almost Hermitian manifolds

Submitted on April 17, 2025

We consider obtained in 2024 by M.Y. Abass a minimality criterion for hypersurfaces with classical generalized Kenmotsu structure in a Vaisman — Gray manifold. This condition is known to have arisen in the study of hypersurfaces equipped with certain kinds of almost contact metric structures in almost Hermitian manifolds belonging to various Gray — Hervella classes. The condition was sometimes a minimality criterion for an almost contact metric hypersurface of an almost Hermitian manifold; in other cases, it turned out to be only necessary or only sufficient.

In the present note, we formulate two problems:

1) to analyze in detail the above-mentioned minimality condition for an almost contact metric hypersurface of an almost Hermitian manifold;

2) to find out how the Abass minimality condition for a hypersurface with the classical generalized Kenmotsu structure in a

Vaisman — Gray manifold is related to the minimality of a hypersurface with the Kirichenko — Uskorev structure, which is also a generalization of the Kenmotsu structure.

Keywords: almost contact metric structure, almost Hermitian manifold, minimal hypersurface, minimality condition

References

1. *Abass, M. Y.:* On generalized Kenmotsu manifolds as hypersurfaces of Vaisman — Gray manifolds. Vladikavkaz. Math. J., **26**:1, 5—12 (2024).

2. *Kirichenko, V. F., Stepanova, L. V.:* The geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. Russian Math. Surveys, **50**:2, 440—441 (1995).

3. *Stepanova, L. V.:* Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow State Pedagogical University V. I. Lenin (1995).

4. *Banaru, M. B.:* Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. J. Harbin Inst. Technol. (N. S.). **8**:1, 38—40 (2001).

5. *Banaru, M. B.:* On Sasakian hypersurfaces in 6-dimensional Hermitian submanifolds of the Cayley algebra. Sb. Math., **194**:8, 1125—1136 (2003).

6. *Banaru, M. B.:* The type number of the cosymplectic hypersurfaces of 6-dimensional Hermitian submanifolds of the Cayley algebra. Siberian Math. J., **44**:5, 765—773 (2003).

7. *Banaru, M. B.:* On skew-symplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **47**:7, 60—63 (2003).

8. *Abu-Saleem, A., Banaru, M. B.:* On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere. Malaysian J. of Math. Sci., **8**:1, 35—46 (2014).

9. *Banaru, M. B.:* On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3-manifold. Saitama Math. J. 20, 1—7 (2002).

10. *Abu-Saleem, A., Banaru, M. B.:* Two theorems on Kenmotsu hypersurfaces in a W_3-manifold. Studia Univ. Babeş — Bolyai. Math. **51**:3, 3—11 (2005).

11. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci., New York. **207**:4, 513—537 (2015).

12. *Stepanova, L.V., Banaru, G.A., Banaru, M.B.:* On quasi-Sasakian hypersurfaces of Kählerian manifolds. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **80**:1, 73—75 (2016).

13. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds. Sib. Elektron. Math. Izv., 17, 1715—1721 (2020).

14. *Banaru, G.A.:* On nonexistence of Kenmotsu structure on *acm*-hypersurfaces of cosymplectic type of a Kählerian manifold. DGMF, 50, 23—28 (2019).

For citation: Abu-Saleem, A., Banaru, M.B., Banaru, G.A.: On minimality of almost contact metric hypersurfaces in almost Hermitian manifolds. DGMF, 56, 5—11 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-1.

MSC 2010: 53A45, 53C20

I. A. Alexandrova, S. E. Stepanov
Financial University under the Government of the Russian Federation,
49, Leningradsky Prosp., Moscow, 125993, Russia
s.e.stepanov@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-2

A note on the scalar curvature of a compact Riemannian manifold

In the present paper, we formulate conditions for the constancy of the scalar curvature of an n-dimensional $(\mathrm{n} \geq 3)$ compact Riemannian manifold (M, g). In particular, conditions for the constancy of the scalar curvature of (M, g) in the case of the quasi-negative Ricci tensor are found. Conditions are also obtained for a compact Riemannian manifold (M, g) to be an Einstein manifold.

***Keywords*:** compact Riemannian manifold, scalar curvature, York decomposition, Einstein manifold

1. Introduction and notations

We recall the well-known Yamabe problem from 1960: Let (M, g) be an n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Riemannian manifold, then there exists a positive and smooth function f on M such that the Riemannian metric $\bar{g} := f \cdot g$ has the constant scalar curvature $\bar{s}$. In 1984 an affirmative resolution to this problem was provided. Detailed information can be found in the monograph [1, Ch. 4]. In turn, in this article we will formulate conditions for the constancy of the scalar curvature (M, g) and, as a consequence, a criterion for the degeneration of a compact Einstein manifold (M, g) into a Euclidean sphere.

Submitted on February 4, 2025

Let ∇ be the Levi-Civita connection on (M,g) and $S^pM := S^p(T^*M)$ be the vector bundle of symmetric bilinear differential p-forms $(p \geq 1)$ on (M,g). We denote by Ric and $s = trace_g Ric$ the Ricci tensor and the scalar curvature of (M,g), respectively. The derivatives of Ric and s are related by the following formula (see [1, p. 35; 43]) $\delta Ric = -\frac{1}{2}ds,$ where the differential operator $\delta: C^\infty(\mathrm{S}^2M) \to C^\infty(T^*M)$ is called the divergence (see [1, p. 35]) and defined by the formula $\delta := -trace_g \circ \nabla$. Next define the traceless Ricci tensor $\overset{\circ}{Ric} = Ric - (s/n)g,$ then the pointwise orthogonal decomposition $Ric = \overset{\circ}{Ric} + (s/n)g$ holds. In particular, if $\overset{\circ}{Ric} \equiv 0$, then the Ricci tensor Ric satisfies the condition $Ric = (s/n)g$. In this case (M,g) is called the Einstein manifold (see [1, p. 44]). Furthermore, if $n \geq 3,$ then $s = const$. An example of an Einstein manifold is the Euclidean sphere S^n equipped with its standard metric.

2. The York decomposition for the Ricci tensor

If (M,g) is compact (without boundary), then we can define the L^2 inner scalar product of symmetric bilinear differential p-forms φ and ϕ on (M,g) by the formula

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle := \int_M g(\varphi, \phi) dvol_g$$

where $dvol_g$ being the volume element of (M,g). We define $\delta^*: C^\infty(T^*M) \to C^\infty(S^2M)$ the first-order differential operator by the formula $\delta^*\theta := \frac{1}{2} L_\xi g,$ where L_ξ is the Lie derivative and $\xi = \theta^\#$ is the vector field dual (by g) to the 1-form. Then the differential operator δ is a formal adjoint operator for δ^*(see [1, p. 35]). In this case, we have $\langle \varphi, \delta^*\theta \rangle = \langle \delta\varphi, \theta \rangle$ for any $\varphi \in C^\infty(S^2M)$ and $\theta \in C^\infty(T^*M)$.

The following York theorem [2] is a well-known result in Riemannian geometry in the large and it is also included in the monographs (see, e. g., [1, p. 130]).

Theorem 1. *For any n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Riemannian manifold (M, g) the decomposition*

$$C^{\infty}(S^2M) = (\mathrm{Im}\delta^* + C^{\infty}M \cdot g) \oplus \left(\delta^{-1}(0) \cap trace_g^{-1}(0)\right) \quad (1)$$

holds, where both factors are infinite dimensional and orthogonal to each other with respect to the L^2 inner scalar product.

Remark. The second factor $\delta^{-1}(0) \cap trace_g^{-1}(0)$ of (1) is the space of TT-tensors on (M, g). At the same time, we recall that a symmetric divergence free and traceless covariant two-tensor is called TT-tensor (see, for instance, [3]).

If we suppose $\varphi \in C^{\infty}(S^2M)$, then York L^2-orthogonal decomposition formula (1) can be rewritten in the form

$$\varphi = \left(\frac{1}{2}L_{\xi}g + \lambda g\right) + \varphi^{TT} \quad (2)$$

for some $\xi \in C^{\infty}(TM)$, some TT-tensor φ^{TT} and some scalar function $\lambda \in C^{\infty}(M)$. Applying the operator $trace_g$ to both sides of (2), we obtain $trace_g\varphi = -\,\delta\theta + n\lambda$, where θ is the g-dual one-form of ξ that means $\theta^{\#} = \xi$ (see [1, p. 30]). In this case, (2) can be rewritten in the form $\overset{\circ}{\varphi} = S\theta + \varphi^{TT}$, where

$$\overset{\circ}{\varphi} = \varphi - (1/n)\left(trace_g\varphi\right)g$$

is the traceless part of φ and

$$S\theta := \delta^*\theta + (1/n)\delta\theta g$$

denotes the Cauchy — Ahlfors operator S: $C^{\infty}(T^*M) \to C^{\infty}(S_0^2M)$ actions on the vector space of one-form $C^{\infty}(T^*M)$ and with values in the vector space $C^{\infty}(S_0^2M)$ of symmetric traceless bilinear differential forms (see, e. g., [4]). It's obvious that S annihilates the one-form θ such that $\theta^{\#} = \xi$ for a *conformal Killing vector* ξ on (M, g), since the conformal Killing vector ξ obeys the equation $\delta^*\theta = -(1/n)\delta\theta \cdot g$ (see [5]). Particular cases of a conformal Killing vector field ξ is a homothetic vector for which $\delta\theta = const$ and a Killing vector, for which $\delta\theta = 0$ (see [5]). Using the above, we can formulate the following corollary.

Corollary 1. *For any n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Riemannian manifold (M, g) the decomposition*

$$C^{\infty}(S_0^2 M) = \mathrm{Im}S \oplus \left(\delta^{-1}(0) \cap trace_g^{-1}(0)\right) \qquad (3)$$

holds, where both terms on the right-hand side of (3) *are L^2-orthogonal to each other.*

From the L^2-orthogonal decomposition (3) we deduce the L^2-orthogonal decomposition for the traceless Ricci tensor

$$\overset{\circ}{Ric} = S\theta + Ric^{TT} \qquad (4)$$

for some one-form $\theta \in C^{\infty}(T^*M)$, some TT-tensor $Ric^{TT} \in$ $\in C^{\infty}(S^2 M)$ and the Cauchy — Ahlfors operator S. Therefore, we can formulate the following corollary.

Corollary 2. *Let $\overset{\circ}{Ric}$ be the traceless Ricci tensor of an n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Riemannian manifold (M, g). Then the L^2-orthogonal decomposition $\overset{\circ}{Ric} = S\theta + Ric^{TT}$ holds for its traceless Ricci tensor $\overset{\circ}{Ric}$.*

The formal adjoint operator for S is defined by the formula $S^*\omega = 2\delta\omega$ for an arbitrary $\omega \in C^{\infty}(S_0^2 M)$ (see [4]). Then the elliptic operator of the second kind $S^*S: C^{\infty}(T^*M) \rightarrow C^{\infty}(T^*M)$ is well known as the *Ahlfors Laplacian* (see also [4]). Note that $kerS^*S = kerS$ since $\langle S^*S\theta, \theta\rangle = \langle S\theta, S\theta\rangle$ for any $\theta \in$ $\in C^{\infty}(T^*M)$. Furthermore, the following equation holds (see [6])

$$S^*S\theta = -\ (n-2)/n\ \cdot ds.$$

Therefore, in general, the scalar curvatures s of (M, g) is constant if and only if the vector field $\xi := \theta^{\#}$ is conformal Killing.In addition, we recall that the kernel of S is trivial if the Ric is quasi-negative (see [5]). Recall that Ric is quasi-negative means that Ric is non-positive everywhere but strictly negative somewhere. The following theorem holds.

Theorem 2. *Let (M, g)be an n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Riemannian manifold and $Ric = \left(\frac{1}{2}L_{\xi}g + \lambda g\right) + Ric^{TT}$ be the*

York L^2-decomposition of its Ricci tensor Ric. Then the scalar curvature s of (M, g) is constant if and only if the vector field ξ is conformal Killing. In particular, if the Ricci tensor Ric of (M, g) is quasi-negative, then the scalar curvature s of (M, g) is constant if and only if the vector field ξ is zero.

3. The York decomposition and Einstein manifolds

Let (M, g) be an n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Einstein manifold such that $Ric = \lambda g$. Then from (4) the equality follows $S\theta + Ric^{TT} = 0$. Therefore, if we applying the operator δ to both sides of the equality $S\theta + Ric^{TT} = 0$, we obtain $S^*S\theta = 0$. As a result from $S\theta + Ric^{TT} = 0$ we deduce that $S\theta = 0$ and $Ric^{TT} = 0$. The opposite is obvious. Using the above, in particular, Theorem 2, we can formulate the following theorem.

Theorem 3. *Let (M, g) be an n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Riemannian manifold and*

$$Ric = \left(\frac{1}{2} L_\xi g + \lambda g\right) + Ric^{TT}$$

be the York L^2-decomposition of its Ricci tensor Ric. Then (M, g) is an Einstein manifold if and only if the vector field ξ is conformal Killing and the TT-tensor Ric^{TT} is zero. In particular, if the Ricci tensor Ric of (M, g) is quasi-negative, then (M, g) is an Einstein manifold if and only if the vector field ξ must also be zero as must Ric^{TT}.

According to Theorem 3, we conclude that the definition of an n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Einstein manifold (M, g) is related to the existence (in general) of a non-zero conformal Killing vector field on (M, g). At the same time, the theorem of Yano and Nagano [7] states that an n-dimensional simply connected complete Riemannian manifold (M, g) of positive constant curvature is the only connected complete Einstein manifold admitting a complete conformal vector field ξ which is non-homothetic. Furthermore, (M, g) is conformally diffeomorphic with an n-dimensional

Euclidian sphere S^n. At the same time, we recall that H. Hopf showed that a compact, simply connected Riemannian manifold with constant sectional curvature 1 is necessarily isometric to the Euclidian sphere S^n, equipped with its standard metric (see [8; 9]). Therefore, in the Yano and Nagano theorem, (M, g) must be isometric with the Euclidian sphere S^n if the vector field ξ has a non-constant divergence (see also [5, p. 5]). Using our Theorem 2 and the theorem of Yano and Nagano we can formulate a corollary.

Corollary 3. *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional* $(n \geq 3)$ *simply connected compact Riemannian manifold and let* $Ric = \left(\frac{1}{2} L_\xi g + \lambda g\right) + Ric^{TT}$ *be the York* L^2*-decomposition of its Ricci tensor, where the vector field* ξ *has a non-constant divergence. If* (M, g) *is an Einstein manifold, then it is isometric with an* n*-dimensional Euclidian sphere* S^n.

Remark. An n-dimensional $(n \geq 2)$ Riemannian manifold (M, g) is a Ricci almost soliton if and only if the identity $Ric^{TT} = 0$ holds in the orthogonal decomposition of the Ricci tensor (4) (see [6]).

References

1. *Besse, A.L.:* Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg (2008).
2. *York, J.W.:* Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation. Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.), **21**:4, 319—332 (1974).
3. *Gicquaud, R., Ngo, Q.A.:* A new point of view on the solutions to the Einstein constraint equations with arbitrary mean curvature and small *TT*-tensor. Class. Quant. Grav. **31**:19, 195014 (2014).
4. *Branson, T.:* Stein — Weiss operators and ellipticity. Journal of Functional, 151, 334—383 (1997).
5. *Rademacher, H.-B.*: Einstein spaces with a conformal group, Res. Math., **56**:1, 421—444 (2009).
6. *Stepanov, S.E., Tsyganok, I.I., Mikeš, J.:* New applications of the Ahlfors Laplacian: Ricci almost solitons and general relativistic constraint equations in vacuum. Journal of Geometry and Physics, 209, 105414 (2025).

7. *Yano, K., Nagano, T.:* Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations. Ann. Math., **69**:2 451—461 (1959).

8. *Hopf, H.:* Zum Clifford — Kleinschen Raumproblem. Math. Ann., 95, 313—339 (1926)

9. *Hopf, H.:* Differential geometrie und topologische Gestalt, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 41, 209—229 (1932).

For citation: Alexandrova, I. A., Stepanov, S. E.: A note on the scalar curvature of a compact Riemannian manifold. DGMF, 56, 12—19 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-2.

УДК 514.764.22

И. А. Александрова, С. Е. Степанов
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия
s.e.stepanov@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-2

Заметка о скалярной кривизне компактного риманова многообразия

Поступила в редакцию 04.02.2025 г.

В данной статье формулируются необходимые и достаточные условия постоянства скалярной кривизны n-мерного ($n \geq 3$) компактного риманова многообразия (M, g). В частности, найдены условия постоянства скалярной кривизны компактного риманова многообразия в случае квазиотрицательного тензора Риччи. Также получены условия того, что компактное риманово многообразие (M, g) является многообразием Эйнштейна.

Ключевые слова: компактное риманово многообразие, скалярная кривизна, разложение Йорка, многообразие Эйнштейна

Список литературы

1. *Бессе А*. Многообразия Эйнштейна. М., 1990.

2. *York J.W.* Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.), 1976. Vol. 21, №4. P. 319—332.

3. *Gicquaud R., Ngo Q.A.* A new point of view on the solutions to the Einstein constraint equations with arbitrary mean curvature and small *TT*-tensor // Class. Quant. Grav. 2014. Vol. 31, №19. Art. №195014.

4. *Branson T.* Stein-Weiss operators and ellipticity // Journal of Functional. 1997. Vol. 151. P. 334—383.

5. *Rademacher H.-B.* Einstein spaces with a conformal group // Res. Math. 2009. Vol. 56, №1. P. 421—444.

6. *Stepanov S.E., Tsyganok I.I., Mikeš J.* New applications of the Ahlfors Laplacian: Ricci almost solitons and general relativistic constraint equations in vacuum // Journal of Geometry and Physics. 2025. Vol. 209. Art. №105414.

7. *Yano K., Nagano T.* Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations // Ann. Math. 1959. Vol. 69, №2. P. 451—461.

8. *Hopf H.* Zum Clifford — Kleinschen Raumproblem // Math. Ann. 1926. Vol. 95. P. 313—339.

9. *Hopf H.* Differentialgeometrie und topologische Gestalt, Jahresber // Deutsch. Math.-Verein. 1932. Vol. 41. P. 209—229.

Для цитирования: *Александрова И.А., Степанов С.Е.* Заметка о скалярной кривизне компактного риманова многообразия // ДГМФ. 2025. №56. С. 12—19. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-2.

УДК 514.76

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-3

О тензоре конгармонической кривизны 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли

В данной заметке мы рассматриваем 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав. Для таких подмногообразий вычислены компоненты тензора конгармонической кривизны. Этот тензор является инвариантом так называемых конгармонических преобразований, то есть конформных преобразований, сохраняющих свойство гармоничности гладких функций.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, келерова структура, тензор конгармонической кривизны, 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли

1. Конформные преобразования римановых структур являются важным и содержательным объектом дифференциально-геометрических исследований. Существенный интерес представляет специальный тип таких преобразований — конгармонические преобразования, то есть конформные преобразования, сохраняющие свойство гармоничности гладких функций. Этот тип преобразований был введен в рассмотрение в 50-е годы прошлого века японским математиком Йошихито Ишии [1]. Известно, что такие преобразования имеют тензорный инвариант — так называемый тензор конгармонической кривизны. Отметим, что дополнение римановой структуры до почти эрмитовой структуры позволяет выделить еще несколько конгармонических инвариантов.

Поступила в редакцию 17.04.2025 г.

Обратим внимание на то, что значительный вклад в теорию конгармонических преобразований и, в частности, в геометрическую теорию тензора конгармонической кривизны внес известный отечественный специалист В. Ф. Кириченко, а также некоторые его ученики [2—4].

В настоящей работе рассматривается тензор конгармонической кривизны 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав. Келерова (а в общем случае — почти эрмитова) структура на таких подмногообразиях индуцируется так называемыми 3-векторными произведениями Грея — Брауна в алгебре Кэли [5; 6].

2. Напомним, что почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J,\ g=\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g=\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g=\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым*. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J,\ g=\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется **келеровой**, если $\nabla F = 0$.

Задание почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n} равносильно заданию G-структуры на M^{2n} со структурной группой $U(n)$, элементы пространства которой называются А-реперами [2]. Эта G-структура называется присоединенной.

Также напомним, что тензор конгармонической кривизны на римановом многообразии размерности m определяется равенством (см.: [1])

$$Ch\,(X,Y,Z,W)\ =\ R\,(X,Y,Z,W)\ -$$
$$-\ \frac{1}{m-2}\ [\langle X,W\rangle\, ric\,(Y,Z)\ -\langle X,Z\rangle\, ric\,(Y,W)\ +$$
$$+\langle Y,Z\rangle\, ric\,(X,W)\ -\langle Y,W\rangle\, ric\,(X,Z)],$$

где R — тензор римановой кривизны, *ric* — тензор Риччи. Тензор конгармонической кривизны обладает всеми классическими свойствами, которые присущи тензору римановой кривизны и тензору Вейля конформной кривизны [3; 4], а именно:

$$Ch\,(X,Y,Z,W)\ =\ -\,Ch\,(X,Y,W,Z)\,,$$
$$Ch\,(X,Y,Z,W)\ =\ -\,Ch\,(Y,X,W,Z)\,,$$
$$Ch\,(X,Y,Z,W)\ +\ Ch\,(Y,Z,X,W)\ +\ Ch\,(Z,X,Y,W)\ = 0,$$
$$Ch\,(X,Y,Z,W)\ =\ Ch\,(Z,W,X,Y)\,.$$

Вычислим компоненты тензора конгармонической кривизны на пространстве присоединенной G-структуры для 6-мерного келерова подмногообразия алгебры октав. В терминах ковариантных компонент формулу, определяющую тензор конгармонической кривизны, можно записать в виде

$$Ch_{ijkl}\ =\ R_{ijkl}\ -\ \frac{1}{4}\,(ric_{jl}\,g_{ik}\ +\ ric_{ik}\,g_{jl}\ -$$
$$-\,ric_{jk}\,g_{il} - ric_{il}\,g_{jk})\,.$$

Как и в случаях с тензором римановой кривизны [7; 8] и тензором Вейля конформной кривизны[9], исходя из упомянутых выше классических свойств этого тензора, достаточно найти только компоненты Ch_{abcd}; $Ch_{\hat{a}bcd}$; $Ch_{\hat{a}\hat{b}cd}$; $Ch_{\hat{a}b\hat{c}d}$, которые полностью определяют этот тензор. Здесь и далее индексы i, j, k, l принимают значения от 1 до 6, индексы $a\,, b\,, c\,, d\,, \ldots$ — значения от 1 до 3. Как во многих работах о 6-мерных подмногообразиях алгебры октав, здесь $\hat{a} = a + 3$.

Известны компоненты, определяющие тензор римановой кривизны 6-мерного келерова подмногообразия алгебры октав [7]:

$$R_{abcd} = 0,\ R_{\hat{a}bcd} = 0,\ R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0,$$
$$R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -2\, T^7_{\hat{a}\hat{c}} T^7_{bd}.$$

Здесь $\{T^7_{kj}\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения келерова подмногообразия в алгебру октав.

Компоненты тензора Риччи также известны (отметим, что в [9] вычислены соответствующие компоненты для более общего случая — для 6-мерного уплощающегося эрмитова подмногообразия алгебры Кэли):

$$ric_{ab} = 0,\ ric_{\hat{a}b} = -2\ T^7_{\hat{a}\hat{c}}\, T^7_{cb}\ .$$

Наконец, компоненты метрического тензора на пространстве присоединенной *G*-структуры таковы:

$$g_{ab} = 0,\quad g_{\hat{a}b} = \delta^a_b,\quad g_{a\hat{b}} = \delta^b_a,\quad g_{\hat{a}\hat{b}} = 0.$$

Воспользовавшись приведенными выше соотношениями, получаем:

$$Ch_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{4}\,(ric_{bd}\, g_{ac} + ric_{ac}\, g_{bd} - ric_{bc}\, g_{ad} - \\ -ric_{ad}\, g_{bc}) = 0;$$

$$Ch_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}bcd} - \frac{1}{4}\,(ric_{bd}\, g_{\hat{a}c} + ric_{\hat{a}c}\, g_{bd} - ric_{bc}\, g_{\hat{a}d} - \\ - ric_{\hat{a}d}\, g_{bc}) = 0;$$

$$Ch_{\hat{a}\hat{b}cd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} - \frac{1}{4}(ric_{\hat{b}d}\, g_{\hat{a}c} + ric_{\hat{a}c}\, g_{\hat{b}d} - ric_{\hat{b}c}\, g_{\hat{a}d} - \\ - ric_{\hat{a}d}\, g_{\hat{b}c}) = \\ = -\frac{1}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}\, T^7_{hc}\, \delta^b_d + T^7_{\hat{b}\hat{h}}\, T^7_{hd}\, \delta^a_c - T^7_{\hat{a}\hat{h}}\, T^7_{hd}\, \delta^b_c - T^7_{\hat{b}\hat{h}}\, T^7_{hc}\, \delta^a_d\right);$$

$$Ch_{\hat{a}b\hat{c}d} = R_{\hat{a}b\hat{c}d} - \frac{1}{4}\,(ric_{bd}\, g_{\hat{a}\hat{c}} + ric_{\hat{a}\hat{c}}\, g_{bd} - ric_{b\hat{c}}\, g_{\hat{a}d} - \\ - ric_{\hat{a}d}\, g_{b\hat{c}}) = -\ 2\, T^7_{\hat{a}\hat{c}}\, T^7_{bd} + \frac{1}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}\, T^7_{hd}\, \delta^c_b + T^7_{\hat{c}\hat{h}}\, T^7_{hb}\, \delta^a_d\right).$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема. *Тензор конгармонической кривизны 6-мерного келерова подмногообразия алгебры Кэли определяется равенствами*

$$Ch_{abcd} = 0, \quad Ch_{\hat{a}bcd} = 0,$$

$$Ch_{\hat{a}\hat{b}cd} = -\frac{1}{2}\left(T^{7}_{\hat{a}\hat{h}}\,T^{7}_{hc}\,\delta^{b}_{d} + T^{7}_{\hat{b}\hat{h}}\,T^{7}_{hd}\,\delta^{a}_{c} - T^{7}_{\hat{a}\hat{h}}\,T^{7}_{hd}\,\delta^{b}_{c} - \right.$$
$$\left. - T^{7}_{\hat{b}\hat{h}}\,T^{7}_{hc}\,\delta^{a}_{d}\right),$$

$$Ch_{\hat{a}b\hat{c}d} = -\,2\,T^{7}_{\hat{a}\hat{c}}\,T^{7}_{bd} + \frac{1}{2}\left(T^{7}_{\hat{a}\hat{h}}\,T^{7}_{hd}\,\delta^{c}_{b} + T^{7}_{\hat{c}\hat{h}}\,T^{7}_{hb}\,\delta^{a}_{d}\right).$$

3. Ясно, что вычисленные компоненты тензора конгармонической кривизны позволяют исследовать так называемые конгармонические аналоги тождеств Грея из [10]. Такие аналоги были введены в рассмотрение В. Ф. Кириченко и А. Шихабом в [2]. Отметим при этом, что основная часть результатов, полученных в статье [2], а также в работах [3] и [4], относится к приближенно келеровым многообразиям, преимущественно 4-мерным.

Другое возможное приложение полученного результата — это дальнейшее развитие теории 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав. К сожалению, после выхода в свет фундаментальной статьи В. Ф. Кириченко [6] работ именно о келеровых 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли опубликовано крайне мало (см.: [11; 12], отчасти [13; 14], а также обзор [7]).

Список литературы

1. *Ishii Y.* On conharmonic transformations // Tensor (N. S.). 1957. Vol. 7. P. 73—80.

2. *Кириченко В. Ф., Шихаб А. А.* О геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно кэлеровых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, №2. С. 43—54.

3. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Шихаб А. А.* Геометрия тензора конгармонической кривизны почти эрмитовых многообразий // Матем. заметки. 2011. Т. 90, №1. С. 87—103.

4. *Шихаб А. А.* Геометрия тензора конгармонической кривизны приближенно келеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2011.

5. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 21, №4. P. 614—620.

6. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 1980. №8. С. 32—38.

7. *Банару М.Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

8. *Банару М.Б., Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 21—25.

9. *Банару Г.А.* О некоторых тензорах 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 47—56.

10. *Gray A.* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. 1976. Vol. 28, №4. P. 601—612.

11. *Банару М.Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 2003. №7. С. 59—63.

12. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в 6-мерных келеровых подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 2014. №10. С. 13—18.

13. *Степанова Л.В., Банару Г.А., Банару М.Б.* О квазисасакиевых гиперповерхностях келеровых многообразий // Изв. вузов. Математем. 2016. №1. С. 86—89.

14. *Банару М.Б., Банару Г.А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в келеровых многообразиях // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

Для цитирования: *Банару Г.А.* О тензоре конгармонической кривизны 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // ДГМФ. 2025. №56. С. 20—27. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-3.

MSC 2010: 53B35, 53B25

G. A. Banaru
Smolensk State University,
4 Przhevalskogo St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-3

On conharmonic curvature tensor of six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra

Submitted on April 17, 2025

Conharmonic transformations are conformal transformations that preserve the property of harmonicity of smooth functions. This type of transformation was introduced into consideration in the 50s of the last century by the Japanese mathematician Y. Ishii. It is known that such transformations have a tensor invariant — the so-called conharmonic curvature tensor. Note that complementing the Riemannian structure to an almost Hermitian structure allows us to single out some additional conharmonic invariants.

In this paper, we consider the conharmonic curvature tensor of 6-dimensional Kählerian submanifolds of the octave algebra. The Kählerian (and in the general case, almost Hermitian) structure on such submanifolds is induced by the so-called Gray — Brown 3-vector cross products in the Cayley algebra.

The main result of the work is the calculation of the so-called spectrum of the conharmonic curvature tensor for an arbitrary 6-dimensional Kählerian submanifold of the octave algebra. By the concept of the spectrum of a tensor, we mean the minimal set of the components in the space of the associated G-structure that completely determines this tensor.

Keywords: almost Hermitian structure, Kählerian structure, tensor of conharmonic curvature, six-dimensional submanifold of Cayley algebra

References

1. *Ishii, Y.:* On conharmonic transformations. Tensor. (N. S.). 7, 73—80 (1957).

2. *Kirichenko, V.F., Shihab, A.A.:* On the geometry of conharmonic curvature tensor for nearly Kähler manifolds. Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, **16**:2, 43—54 (2010).

3. *Kirichenko, V.F., Rustanov, A.R., Shihab, A.A.:* Geometry of the conharmonic curvature tensor of almost Hermitian manifolds. Math. Notes, **90**:1, 79—93 (2011).

4. *Shihab, A.A.:* Geometry of the tensor of conharmonic curvature of nearly-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow State Pedagogical University (2011).

5. *Gray, A.:* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products. Tôhoku Math. J., **21**:4, 614—620 (1969).

6. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).

7. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. of Math. Sci. (New York), **207**:3, 354—388 (2015).

8. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 48, 21—25 (2017).

9. *Banaru, G.A.:* On some tensors of six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, **55**:2, 47—56 (2024).

10. *Gray, A.:* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds. Tôhoku Math. J., **28**:4, 601—612 (1976).

11. *Banaru, M.B.:* On skew-symplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **47**:7, 60—63 (2003).

12. *Banaru, M.B.:* On almost contact metric hypersurfaces with type number 1 in 6-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **58**:10, 10—14 (2014).

13. *Stepanova, L.V., Banaru, G.A., Banaru, M.B.:* On quasi-Sasakian hypersurfaces of Kählerian manifolds. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **80**:1, 73—75 (2016).

14. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds. Sib. Elektron. Math. Izv. 17, 1715—1721 (2020).

For citation: Banaru, G.A.: On conharmonic curvature tensor of six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 56, 20—27 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-3.

УДК 514.76

М. Б. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-4

Пример неустойчивой эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав

Установлено, что эрмитова структура на скрученном произведении двумерного комплексного евклидова пространства C^2 и комплексного гиперболического пространства CH^1 не является устойчивой.

Ключевые слова: алгебра Кэли, 6-мерное подмногообразие алгебры октав, устойчивость почти эрмитовой структуры

1. В 60-х годах прошлого века выдающийся американский геометр Альфред Грей установил [1], что каждое из двух так называемых 3-векторных произведений в алгебре Кэли порождает на ее 6-мерном подмногообразии почти эрмитову структуру. Значительные результаты в исследовании таких структур получил замечательный отечественный геометр Вадим Федорович Кириченко, статьи которого в 1970—1990-х гг. обобщали, усиливали и развивали идеи Альфреда Грея. В. Ф. Кириченко обратил внимание на следующий результат А. Грея: почти эрмитовы структуры, порожденные разными 3-векторными произведениями в алгебре октав на одном и том же подмногообразии, могут существенно отличаться друг от друга. Например, одна из таких почти эрмитовых структур может быть келеровой, а другая — нет [1]. В. Ф. Кириченко ввел понятие устойчивости для почти эрмитовой структуры на 6-мер-

---

Поступила в редакцию 17.04.2025 г.

ном подмногообразии алгебры Кэли. А именно, почти эрмитову структуру на 6-мерном подмногообразии алгебры октав он назвал устойчивой, если двойственная ей структура (то есть структура, порожденная другим 3-векторным произведением в алгебре Кэли) принадлежит тому же классу почти эрмитовых структур [2]. Наиболее подробно результаты, связанные и устойчивостью почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав, изложены в работе [3].

В статье [4] был рассмотрен вопрос об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли. В настоящей работе приводится конкретный пример неустойчивой эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли, а именно на одном из локально симметрических подмногообразий алгебры октав.

2. Известно [5], что почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J,\ g=\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g=\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g=\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ должны быть согласованы следующим условием:

$$\langle JX,\, JY\rangle=\langle X,\, Y\rangle,\quad X,Y\in\aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем AH-структурой называется *почти эрмитовым* (AH-) многообразием. AH-многообразие называется *эрмитовым*, если его почти комплексная структура интегрируема.

Напомним также о явном виде 3-векторных произведений Грея в алгебре октав [1]:

$$P_1(X,\ Y,Z\,)=-X(\bar{Y}Z)+\langle X,Y\rangle Z+\langle Y,Z\rangle X-\langle Z,X\rangle Y;$$

$$P_2(X,\ Y,Z\,)=-(X\bar{Y})Z+\langle X,Y\rangle Z+\langle Y,Z\rangle X-\langle Z,X\rangle Y.$$

Здесь $\mathbf{O}\equiv\boldsymbol{R}^8$ — алгебра Кэли; $X,Y,Z\in\mathbf{O}$; $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$; $X\to\bar{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$.

В статье [6] В. Ф. Кириченко получены структурные уравнения произвольной почти эрмитовой структуры, индуцированной 3-векторными произведениями в алгебре Кэли на ее 6-мерном подмногообразии общего типа. Для случая эрмитовой структуры эти уравнения были уточнены [7—9]. Оказалось, что они имеют следующий вид:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b;$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b; \qquad (1)$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg}D_{hd}D^{gc} + \sum_{\phi} T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}}T^{\varphi}_{bd}\right)\omega_c \wedge \omega^d,$$

где $\{\omega^k\}$ — компоненты форм смещения, $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности. Здесь и далее индексы принимают следующие значения:

$$\varphi = 7,\, 8;\ a, b, c, d, g, h\ =\ 1, 2, 3;\ \alpha, \beta = 2, 3;$$

$$\hat{a} = a + 3;\ k, j\ =\ 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Как и в [7; 10], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом

$$\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc},\ \varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$$

— компоненты тензора Кронекера третьего порядка;

$$\delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b\delta^h_g - \delta^a_g\delta^h_b;$$

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}; D_{cj} = \mp T^8_{cj} + iT^7_{cj}, \quad D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - iT^7_{\hat{c}j},$$

где $\left\{T^{\varphi}_{kj}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$.

3. Важную роль в эрмитовой геометрии 6-мерных многообразий играют локально симметрические подмногообразия алгебры октав. Им посвящены работы [7; 10], а самая значительная статья по этой тематике принадлежит, на наш взгляд, В. Ф. Кириченко [11]. В ней введены в рассмотрение и исследованы 6-мерные типа Риччи эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. В частности, получен пример 6-мерного типа Риччи подмногообразия алгебры октав с нетривиальной (то есть отличной от келеровой) эрмитовой структурой. Таким примером является так называемое скрученное (warped) произведение двух келеровых многообразий — двумерного комплексного евклидова пространства C^2 и комплексного гиперболического пространства CH^1.

Оказалось [11; 12], что матрица (D_{ab}) при определенном выборе репера для такого подмногообразия алгебры октав имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $D_{11} \neq 0$.

Поэтому мы можем переписать первую группу структурных уравнений (1) для упомянутого выше 6-мерного типа Риччи эрмитова подмногообразия алгебры октав в следующем виде:

$$d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1;$$

$$d\omega_1 = -\omega_1^1 \wedge \omega_1;$$

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{1\alpha\beta} D_{11}\omega^1 \wedge \omega_\beta;$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{1\alpha\beta} D^{11}\omega_1 \wedge \omega^\beta.$$

Из построений Кириченко [3] вытекает, что необходимым условием устойчивости эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав является следующий вид первой группы ее структурных уравнений:

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b. \qquad (2)$$

В силу того, что $D_{11} \neq 0$, коэффициенты

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{1\alpha\beta}D_{11} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{1\alpha\beta}D^{11}$$

являются отличными от нуля, условия (2) не могут выполняться для рассматриваемого локально симметрического подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$, а потому справедлива

Теорема. *Эрмитова структура на скрученном произведении двумерного комплексного евклидова пространства* C^2 *и комплексного гиперболического пространства* CH^1 *не является устойчивой.*

Отметим, что данная теорема дополняет дифференциально-геометрические построения В. Ф. Кириченко, имеющие отношение к устойчивости почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли [3; 4]. Кроме того, этот результат можно рассматривать как развитие представлений о конкретных примерах 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав. Это направление эрмитовой геометрии, заложенное классической работой А. Грея [13], в последнее время интенсивно развивается, к сожалению, лишь для 6-мерных подмногообразий с приближенно келеровой структурой (см. обзоры [14; 15]).

Список литературы

1. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 141. P. 465—504.

2. *Кириченко В. Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур на подмногообразиях алгебры Кэли // УМН. 1980. Т. 35, №1. С. 199—200.

3. *Кириченко В. Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Украинский геометрический сборник. 1982. Т. 25. С. 60—68.

4. *Банару М. Б., Банару Г. А.* Об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 23—29.

5. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

6. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 1980. №8. С. 32—38.

7. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1993.

8. *Банару М. Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Изв. вузов. Матем. 2003. №7. С. 59—63.

9. *Банару М. Б., Банару Г. А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 21—25.

10. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Матем. сб. 2002. Т. 193, №5. С. 3—16.

11. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского ун-та. Сер. Матем. Механ. 1994. №3. С. 6—13.

12. *Банару М. Б.* О локально симметрических 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 11—17.

13. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. Vol. 10, №2. P. 353—366.

14. *Банару М. Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

15. *Банару М. Б.* О шестимерной сфере с приближенно кэлеровой структурой // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2018. Т. 146. С. 3—16.

Для цитирования: *Банару М. Б.* Пример неустойчивой эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав // ДГМФ. 2025. №56. С. 28—35. doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-4.

MSC 2010: 53B35, 53B25

M. B. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalskogo St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-4

An example of an unstable Hermitian structure on a 6-dimensional submanifold of the octave algebra

Submitted on April 17, 2025

It is known that each of the two so-called Gray — Brown 3-fold vector cross products in the Cayley algebra induces an almost Hermitian structure on its 6-dimensional oriented submanifold. As it is also known, the almost Hermitian structures induced by different 3-fold vector cross products in the octave algebra on the same submanifold can differ significantly from each other. For example, one of these almost Hermitian structures can be Kählerian, while the other is not. Such an almost Hermitian structure is called stable if its dual structure (that is, the structure induced by another 3-fold vector cross product in the Cayley algebra) belongs to the same Gray — Hervella class of almost Hermitian structures.

In the present note, we give a specific example of an unstable Hermitian structure on a 6-dimensional submanifold of the Cayley algebra, namely, on a locally symmetric submanifold of the octave algebra.

Keywords: Cayley algebra, 6-dimensional submanifold of Cayley algebra, stability of an almost Hermitian structure

References

1. *Gray, A.:* Vector cross products on manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 41, 465—504 (1969).

2. *Kirichenko, V. F.:* The stability of almost Hermitian structures on submanifolds of a Cayley algebra. Russian Math. Surveys, **35**:1, 215—216 (1980).

3. *Kirichenko, V.F.:* Stability of the almost Hermitian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Ukrain. Geom. Sbornik. 25, 60—68 (1982).

4. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On stability of Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 52, 23—29 (2021).

5. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa, 2013.

6. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).

7. *Banaru, M.B.:* Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. PhD thesis. Moscow State Pedagogical University V.I. Lenin (1993).

8. *Banaru, M.B.:* On skew-symplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **47**:7, 60—63 (2003).

9. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 48, 21—25 (2017).

10. *Banaru, M.B.:* Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra. Sb. Math., **193**:5—6, 635—648 (2002).

11. *Kirichenko, V.F.:* Hermitian geometry of six-dimensional symmetric submanifolds of the Cayley algebra. Mosk. Univ. Bull. Ser. 1. Mat. Mekh., 3, 6—13 (1994).

12. *Banaru, M.B.:* On locally symmetric 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 47, 11—17 (2016).

13. *Gray, A.:* Some examples of almost Hermitian manifolds. Illinois J. Math., **10**:2, 353—366 (1966).

14. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci., New York, **207**:3, 354—388 (2015).

15. *Banaru, M.B.:* On the six-dimensional sphere with a nearly Kählerian structure. J. Math. Sci., New York, **245**:5, 553—567 (2020).

For citation: Banaru, M.B.: An example of an unstable Hermitian structure on a 6-dimensional submanifold of the octave algebra. DGMF, 56, 28—35 (2025). doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-4.

УДК 514.76

К. В. Башашина[1], **Н. А. Елисеева**[2]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[2] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[1] baschaschina@mail.ru, [2] ne2705@gmail.com

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-5

Памяти профессора Юрия Ивановича Попова

Статья посвящена памяти ученого-геометра Попова Юрия Ивановича, одного из ярких представителей Калининградской геометрической школы, профессора БФУ им. И. Канта. Описывается научная работа по дифференциальной геометрии гиперполос и составных распределений и педагогическая работа ученого за 55 лет. Ю. И. Попов — автор 161 научной публикации, 54 учебных пособий и методических разработок по элементарной и высшей математике. Список публикаций представлен в данной статье.

Ключевые слова: Калининградская геометрическая школа, трехсоставные распределения, гиперполосы, гиперполосные распределения

14 февраля 2025 г. ушел из жизни ученый (геометр), профессор Юрий Иванович Попов, посвятивший жизнь математике, отдавший много сил развитию математического образования в Калининградской области. За долгие годы работы Юрий

Поступила в редакцию 02.05.2025 г.

Иванович прошел все ступени преподавательской работы — от ассистента до профессора. Его жизненный путь — это яркий пример преданности науке и преподаванию.

Юрий Иванович Попов родился 29 января 1937 г. в г. Новочеркасске Ростовской области в семье военного летчика. Еще в школьном возрасте у него проявилась тяга к знаниям и серьезный интерес к математике. Окончив Калининградский педагогический институт по специальности «Математика» в 1960 г., Юрий Иванович два года работал учителем в средней школе г. Светлогорска. А с 1962 г. началась его карьера в Калининградском педагогическом институте (ныне БФУ им. И. Канта) в должности ассистента кафедры элементарной математики и методики преподавания математики. Заинтересовавшись дифференциальной геометрией и проявив яркие способности к научным исследованиям в данной области, Ю.И. Попов поступил в очную целевую аспирантуру при кафедре геометрии Московского педагогического института имени В.И. Ленина и обучался там с 1964 по 1967 г. под научным руководством Л.С. Атанасяна. В период 1967—1971 гг., успешно совмещая преподавательскую и научную деятельность, работал старшим преподавателем кафедры геометрии и высшей алгебры Калининградского государственного университета (КГУ). В 1970 г. Юрий Иванович успешно защитил кандидатскую диссертацию по теме «Теория оснащенных гиперполос многомерного проективного пространства». В 1971 г. был избран на должность доцента по кафедре высшей алгебры и геометрии КГУ, а с 1996 г. занимал должность профессора.

Юрий Иванович Попов — один из старейших и ярких представителей Калининградской геометрической школы, автор 161 научной публикации (среди которых 4 монографии) по темам, входившим в круг его интересов. Полученные результаты он регулярно докладывал на всесоюзных, российских и международных геометрических конференциях, участвовал в работе геометрических школ и научных семинаров.

Научные интересы профессора Юрия Ивановича Попова определились под влиянием калининградского профессора В. С. Малаховского, московских профессоров Л. С. Атанасяна, М. А. Акивиса, Г. Б. Гуревича, Б. А. Розенфельда, Г. Ф. Лаптева, казанского профессора А. П. Нордена, саратовского профессора В. В. Вагнера, личное общение с которыми было чрезвычайно важным для молодого ученого.

Юрий Иванович активно и плодотворно занимался научно-исследовательской работой. Область его научных интересов составляли теория регулярных гиперполос и теория составных распределений — важнейшие проблемы дифференциальной геометрии.

В работах Ю. И. Попова получены следующие результаты по теории гиперполос и их обобщений — гиперполосных распределений аффинного пространства (см.: [1—4]):

1) построены основы теории полей геометрических объектов гиперполос и гиперполосных распределений;

2) приведены различные конструкции построения нормалей регулярного гиперполосного распределения, рассмотрены соответствия Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода;

3) рассмотрены многообразия фокальных точек конуса асимптотических направлений гиперполосного распределения, построения которых ассоциированы с распределением нормалей Михэйлеску 1-го рода и с распределением нормалей Фубини 1-го рода, выяснен геометрический смысл этих многообразий;

4) построены поля внутренних виртуальных нормалей 1-го рода и показано, что они порождают пучок внутренних неголономных композиций А. П. Нордена; доказано, что с каждой неголономной композицией Нордена ассоциируется распределение, несущее -структуру ранга $m + n$;

5) построены примеры почти контактных структур на регулярной гиперполосе и гиперполосном распределении и выяснена их геометрическая интерпретация;

6) найдена система уравнений для определения аффинных линий кривизны на базисной поверхности регулярной гиперполосы;

7) с использованием аффинной нормали Бляшке введены аффинные кривизны базисной поверхности гиперполосы, а также понятия средней и полной кривизны базисной поверхности в точке, даны их аналитические признаки;

8) введена в рассмотрение аффинная касательная связность (внутренняя аффинная связность), индуцируемая инвариантным оснащением гиперполосы на базисной поверхности;

9) введена в рассмотрение аффинная характеристическая связность (нормальная характеристическая центроаффинная связность), индуцируемая инвариантным оснащением гиперполосы на тангенциально вырожденной гиперповерхности;

10) введены в рассмотрение новые классы гиперполос аффинного пространства, среди них: центрально оснащенные гиперполосы; гиперполосы, имеющие центральноосевое оснащение; квазисферические гиперполосы; сферические гиперполосы; доказаны аналитические признаки этих гиперполос и рассмотрены признаки эквиаффинных связностей этих гиперполос.

Ряд работ Ю.И. Попова посвящен изучению проективно-дифференциальной геометрии гиперполос и гиперполосных распределений в проективном пространстве P_n. Введены и изучались центрированные тангенциально вырожденные гиперполосы; вырожденные гиперполосы ранга r (распадающиеся и нераспадающиеся); касательно -оснащенные гиперполосы. Доказано, что нормализованная регулярная полоса в проективном пространстве порождает семейство точечных расширенных аффинных пространств. Это приводит к появлению структур теории точечных соответствий в геометрии гиперполос, что позволило получить и охарактеризовать новые геометрические образы, присоединенные к гиперполосе, а также дать новые интерпретации известным. Доказан ряд теорем, связывающих, с одной стороны, касательные дробно-линейные отображения, в том числе локальную коррекцию Э. Чеха и связность Г. Врэнчану, с соприкасающимися гиперквадриками, чебышевским вектором и двойственными аффинными связностями на гиперполосе — с другой.

Вершиной научных разработок Ю. И. Попова являются трехсоставные распределения проективного пространства. В его работах получены следующие основополагающие результаты:

1) введено понятие и разработаны основы проективно-дифференциальной геометрии трехсоставных распределений;

2) показано, что теория трехсоставных распределений в пространстве P_n обобщает проективную геометрию вырожденных гиперполос (как общего, так и специальных видов), полос, распределений -мерных элементов, двухсоставных распределений, поверхностей полного и неполного ранга;

3) показано, в каких случаях можно применять теорию трехсоставных распределений к перечисленным геометрическим образам.

Ряд работ Ю. И. Попова по теории трехсоставных распределений проективного пространства посвящен:

1) изучению специальных классов трехсоставных распределений, например скомпонованных трехсоставных распределений;

2) описанию построения сети линий В. Т. Базылева, ассоциированных с трехсоставным распределением;

3) построению флаговых структур на подрасслоениях трехсоставного распределения;

4) введению и изучению почти контактных структур основных структурных подрасслоений многообразия $P_0(\mathcal{H})$.

Ю. И. Попов отмечал, что исследование составных распределений имеет своим конечным результатом построение внутренней геометрии полос (гиперполос) и их обобщений в многомерных аффинных и проективных пространствах, в пространствах с другими фундаментальными группами. Многосоставные распределения находят приложения в механике и теоретической физике, так как неголономные механические связи могут быть описаны с помощью распределений.

В своих работах Ю. И. Попов применял инвариантный метод дифференциально-геометрических исследований, основанный на методе Э. Картана и общей схеме исследования дифференциально-геометрических структур, разработанной Г. Ф. Лаптевым.

Ниже представлен список научных публикаций Ю. И. Попова.

1. *Попов Ю. И.* Сферические гиперполосы многомерного проективного пространства P_n // Учен. записки Калининград. ун-та. Калининград, 1969. С. 27—57.
2. *Попов Ю. И.* К теории оснащенных регулярных гиперполос многомерного проективного пространства // IV Всесоюз. межвуз. конф. по геометрии : тез. докл. Тбилиси, 1969. С. 209—210.
3. *Попов Ю. И.* К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве // Учен. записки Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. Ч. 1, №374. М., 1970. С. 102—117.
4. *Попов Ю. И.* Гиперполосы многомерного проективного пространства с общим оснащением // Учен. записки Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. Ч. 1, №374. М., 1970. С. 89—102.
5. *Попов Ю. И.* Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_{m} многомерного проективного пространства P_n // ДГМФ. 1970. Вып. 1. С. 27—46.
6. *Попов Ю. И.* Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n // Учен. записки Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. М., 1971. С. 286—296.
7. *Попов Ю. И.* Об инвариантном оснащении вырожденных гиперполос Γ_m ранга $r = m/2$ многомерного проективного пространства P_n // ДГМФ. 1971. Вып. 2. С. 20—27.
8. *Попов Ю. И., Приц А. К.* Принцип стационарных состояний открытых систем и статистические параметры популяций // Теоретическая и экспериментальная биофизика. №2. Калининград, 1971. С. 30—35.
9. *Попов Ю. И.* Регулярные гиперполосы многомерного проективного пространства с ассоциированной связностью // V Всесоюз. конф. по совр. проблемам геометрии : тез. докл. Самарканд, 1972. С. 82.

10. *Попов Ю.И.* Теория оснащенных регулярных гиперполос с ассоциированной связностью многомерного проективного пространства P_n // ДГМФ. 1973. Вып. 3. С. 81—96.

11. *Попов Ю.И.* О вырожденных гиперполосах многомерного проективного пространства // IV Прибалт. геом. конф. по вопросам диф. Геометрии : тез. докл. Тарту, 1973. С. 102.

12. *Попов Ю.И.* К теории двумерных оснащенных гиперполос $N(\Gamma_2)$ многомерного проективного пространства // ДГМФ. 1973. Вып. 4. С. 136—150.

13. *Попов Ю.И., Мишенина Т.И.* Инвариантное оснащение распадающейся $(n-2)$-мерной гиперполосы CH_{n-2}^r ранга r многомерного проективного пространства P_n // ДГМФ. 1974. Вып. 5. С. 103—130.

14. *Попов Ю.И.* Вырожденные гиперполосы многомерного проективного пространства // VI геом. конф. по вопросам диф. геометрии : тез. докл. Вильнюс, 1975. С. 195.

15. *Попов Ю.И.* Внутренние оснащения вырожденной -мерной гиперполосы H_m^r ранга r многомерного проективного пространства // ДГМФ. 1975. Вып. 6. С. 102—142.

16. *Попов Ю.И.* Аффинные связности вырожденных гиперполос // ДГМФ. 1976. Вып. 7. С. 79—85.

17. *Попов Ю.И.* О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства // ДГМФ. 1977. Вып. 8. С. 43—70.

18. *Попов Ю.И.* О дифференциальной геометрии регулярных гиперполос аффинного пространства // V Прибалт. геом. конф. : тез. докл. Друскининкай, 1978. С. 69.

19. *Попов Ю.И.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы аффинного пространства // ДГМФ. 1979. Вып. 10. С. 84—96.

20. *Попов Ю.И.* О проективно-дифференциальной геометрии двухсоставного гиперполосного распределения $H_{m,n-1}^r$ // VII Всесоюз. конф. по совр. проблемам геом. : тез. докл. Минск, 1979. С. 160.

21. *Попов Ю.И.* Линейные связности вырожденных гиперполос многомерного проективного пространства // I Конф. молодых уч. «Молодежь и научно-техн. прогресс» : тез. докл. Гродно, 1979. С. 8.

22. *Попов Ю.И.* Об инвариантном оснащении специального класса гиперполос CH_m^r проективного пространства // ДГМФ. 1980. Вып. 11. С. 70—75.

23. *Попов Ю.И., Косаренко М.Ф.* О полях геометрических объектов регулярной гиперполосы $H_{n-2} \subset P_n$ // ДГМФ. 1981. Вып. 12. С. 60—66.

24. *Попов Ю.И.* Многомерные регулярные гиперполосы аффинного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №5455-81, 1982. 58 с.

25. *Попов Ю.И.* Трехсоставные регулярные распределения $H^r_{m,n-1}$ проективного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №192-82, 1982. 126 с.

26. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос : учеб. пособие. Калининград, 1983. 82 с.

27. *Попов Ю.И.* Связности в многообразии $P^0(H(M(\Lambda)))$ структуры // Всесоюз. школа по теории функций, посвященная 100-летию со дня рождения акад. Н.Н. Лузина. Кемерово, 1983. С. 83.

28. *Попов Ю.И.* Введение аффинной связности на регулярном трехсоставном распределении $H^r_{m,n-1}$ // ДГМФ. 1983. Вып. 14. С. 70—76.

29. *Попов Ю.И.* О двойственных проективных связностях регулярного трехсоставного распределения. Деп. в ВИНИТИ, №3430-83, 1983. 22 с.

30. *Попов Ю.И.* Введение проективных связностей на регулярном распределении проективного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №997-84, 6А710 Деп., 1984. 38 с.

31. *Попов Ю.И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением // VI Прибалт. геом. конф. : тез. докл. Таллин, 1984. С. 96.

32. *Попов Ю.И.* О голономности $H(M(\Lambda))$-распределения // ДГМФ. 1984. Вып. 15. С. 71—78.

33. *Попов Ю.И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. I. Деп. в ВИНИТИ, №4481-84, 10А601 Деп., 1984. 94 с.

34. *Попов Ю.И.* О дифференциально-геометрических структурах многообразия $P^0(H(M(\Lambda)))$ // VIII Всесоюз. науч. конф. по соврем. проблемам диф. геометрии : тез. докл. Одесса, 1984. С. 78.

35. *Попов Ю.И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. II. Деп. в ВИНИТИ, №252-85, 4А667 Деп., 1985. 36 с.

36. *Попов Ю.И.* Об одномерных нормалях первого рода $H(M(\Lambda))$-распределения // ДГМФ. 1985. Вып. 16. С. 57—66.

37. *Попов Ю.И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. III. Деп. в ВИНИТИ, №1275-85, 6А568 Деп., 1985. 37 с.

38. *Попов Ю.И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. IV. Деп. в ВИНИТИ, №5371-1386, 11А759 Деп., 1986. 16 с.

39. *Попов Ю.И.* О неголономных композициях А.П. Нордена оснащающих распределений $H(M(\Lambda))$-распределения // ДГМФ. 1986. Вып. 17. С. 73—79.

40. *Попов Ю.И.* Трехсоставные распределения проективного пространства // ДГМФ. 1987. Вып. 18. С. 65—86.

41. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №6807-887, 1А737 Деп., 1987. 50 с.

42. *Попов Ю.И., Трушкова Н.П.* Регулярные $(n-1)$-мерные гиперполосы $(n+1)$-мерного аффинного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №8691-В87, 4А622 Деп., 1988. 42 с.

43. *Попов Ю.И.* Дифференциально-геометрические структуры трехсоставного распределения проективного пространства // IX Всесоюз. геом. конф. Кишинев, 1988. С. 257.

44. *Попов Ю.И.* Нормали гиперполосного распределения аффинного пространства // ДГМФ. 1988. Вып. 19. С. 69—79.

45. *Попов Ю.И.* К теории регулярных гиперполос аффинного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №8205-В88, 4А622 Деп., 1988. 34 с.

46. *Попов Ю.И.* Скомпонованные трехсоставные распределения проективного пространства // ДГМФ. 1989. Вып. 20. С. 73—96.

47. *Попов Ю.И.* Скомпонованные трехсоставные распределения проективного пространства // XXI науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1989. С. 48.

48. *Попов Ю.И.* О специальных классах трехсоставных распределений проективного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №7402-В89, 4А811, 1990. 28 с.

49. *Попов Ю.И.* Дифференциально-геометрические структуры многообразия // XXII науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1990. С. 53.

50. *Попов Ю.И.* H_1-распределения проективного пространства // ДГМФ. 1990. Вып. 21. С. 69—85.

51. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства // III Всесоюз. школа «Понтрягинские чтения. Геометрия и анализ» : тез. докл. Кемерово, 1990. С. 120.

52. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №5625-В90, 3А469. 1991. 181 с.

53. *Попов Ю.И.* Структуры расслоенных многообразий, ассоциированных с многообразием $P^0(H)$ // XXIII науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1991. С. 69.

54. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства // Геометрия и анализ : сб. тр. Кемерово, 1991. С. 63—65.

55. *Попов Ю.И.* О полях инвариантных подпространств H-распределения проективного пространства // ДГМФ. 1991. Вып. 22. С. 75—84.

56. *Попов Ю.И.* Двойственная теория регулярного скомпонованного распределения $H^r_{m,n-1}$ // ДГМФ. 1992. Вып. 23. С. 75—84.

57. *Попов Ю.И.* Касательно r-оснащенные гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ проективного пространства // XXIV науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1992. С. 147.

58. *Попов Ю.И.* Дифференциально-геометрические структуры составных распределений // Междунар. науч. конф. «Лобачевский и современная геометрия» : тез. докл. Казань, 1992. С. 117.

59. *Попов Ю.И.* Почти контактные структуры $P^0(H)$. Деп. в ВИНИТИ, №2030-В92, 11А39Б, 1992. 38 с.

60. *Попов Ю.И., Столяров А.В.* Специальные классы регулярных гиперполос : учеб. пособие. Калининград, 1992. 80 с.

61. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений аффинного пространства. СПб., 1992.

62. *Попов Ю.И.* К теории регулярных гиперполос аффинного пространства // XXV науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1993. С. 156.

63. *Попов Ю.И., Лисицина И.Е.* H-распределение трехмерного проективного пространства // ДГМФ. 1993. Вып. 24. С. 83—92.

64. *Попов Ю.И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. V. Деп. в ВИНИТИ, №2791-В93, 3А716, 1994. 18 с.

65. *Попов Ю.И., Юрьева СН.* О нормалях Нордена — Чакмазяна гиперполосного распределения аффинного пространства // ДГМФ. 1994. Вып. 25. С. 69—85.

66. *Popov Yu.* Structures of reducible manifolds in higher dimensional space // International jubilee conference commemorating 450th Anniversary of Konigsberg University (Albertina). Kaliningrad, 1994. P. 15—16.

67. *Попов Ю.И.* Сети линий Базылева, ассоциированные с трехсоставным распределением проективного пространства // ДГМФ. 1995. Вып. 26. С. 68—78.

68. *Попов Ю.И.* Сети линий проективного пространства, ассоциированных с Н-распределением // XXVI науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1995. С. 58.

69. *Попов Ю.И.* О неголономных композициях Нордена -распределения аффинного пространства // ДГМФ. 1996. Вып. 27. С. 71—77.

70. *Попов Ю.И., Попова Т.Ю.* Центрированные тангенциально-вырожденные гиперполосы CH_m^r ранга r проективного пространства P_n // ДГМФ. 1996. Вып. 27. С. 77—90.

71. *Попов Ю.И.* О структурах H-распределения аффинного пространства // XXVII науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1996. С. 10—11.

72. *Попов Ю.И.* Регулярные гиперполосы аффинного пространства // XXVIII науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1997. С. 8—9.

73. *Попов Ю.И.* Дифференциально-геометрические структуры, ассоциированные с многообразием $P_n^0(H)$ // XXVIII науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1997. С. 9.

74. *Попов Ю.И.* Внутренняя геометрия регулярных гиперполос аффинного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №1199-В97, 1997. 29 с.

75. *Попов Ю.И., Волкова С.Ю.* Касательно 1-оснащенные регулярные гиперполосы $H_m(\Lambda)$ аффинного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №219-В98, 1997. 23 с.

76. *Попов Ю.И.* Нормальная аффинная связность оснащенной гиперполосы аффинного пространства // XXIX науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1998. С. 8.

77. *Попов Ю.И.* Нормальная аффинная связность оснащенной гиперполосы аффинного пространства // ДГМФ. 1998. Вып. 29. С. 53—59.

78. *Попов Ю.И.* Основы теории регулярных гиперполосных распределений и гиперполос аффинного пространства : итоговый отчет о научно-исследовательской работе по теме гранта 95-0-1.0-22 №01970006678. Калининград, 12.01.1998. 8 с.

79. *Попов Ю.И.* Регулярные гиперполосы $H_m(\Delta)$ аффинного пространства. Деп. в ВИНИТИ, №3341-В98, 1998. 36 с.

80. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос. Деп. в ВИНИТИ, №3342-В98, 1998. 105 с.

81. *Попов Ю.И.* Дифференциально-геометрические структуры многообразия $P^0(H)$ // XXX науч. конф. ППС, науч. сотр., асп. и студ. КГУ : тез. докл. Калининград, 1999. С. 8.

82. *Попов Ю.И.* Дифференциально-геометрические структуры многообразия $P(H)$ // Междунар. конф., посвященная 90-летию со дня рождения Г.Ф. Лаптева : тез. докл. М., 1999. С. 94—95.

83. *Попов Ю.И.* Дифференциально-геометрические структуры многообразия $P^0(H)$ // VII Междунар. конф. «Математика. Экономика. Экология. Образование». Междунар. симпоз. «Ряды Фурье и их приложения» : тез. докл. Ростов н/Д, 1999. С. 100—101.

84. *Попов Ю.И.* f-структуры на расслоенных многообразиях, ассоциированных с многообразием $P_n^0(H)$ // ДГМФ. 2000. Вып. 30. С. 65—69.

85. *Попов Ю.И.* Аффинная теория регулярных гиперполос // Проблемы математических и физических наук : материалы постоянных науч. семин. Калининград, 2000. С. 33—34.

86. *Попов Ю.И.* Аффинные связности регулярных гиперполос в A_{n+1} // Математика. Экономика. Экология. Образование. Н. Новгород, 2001. Т. 9, вып. 1. С. 59—63. (Труды Российской ассоциации «Женщины-математики»).

87. *Попов Ю.И.* Почти контактные структуры многообразия // Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики. Ч. 2. М., 2001. С. 157—166.

88. *Попов Ю. И.* Аффинная теория регулярных гиперполос // Математика. Экономика. Экология. Образование : тез. докл. Чебоксары, 2001. С. 55.

89. *Попов Ю. И.* Общая теория регулярных гиперполос аффинного пространства : учеб. пособие. Калининград, 2001. 112 с.

90. *Попов Ю. И.* Почти контактные структуры, ассоциированные с многообразием $P^0(H)$ // Проблемы матем. и физич. наук : материалы постоянных науч. семин. Калининград, 2001. С. 22—25.

91. *Попов Ю. И.* Связности на многообразии $P^0(H)$ // X Междунар. конф. «Математика. Экономика. Экология. Образование». II Междунар. симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» : тез. докл. Ростов н/Д, 2002. С. 137—138.

92. *Попов Ю. И.* Почти контактные структуры многообразия $P^0(H)$ // Известия вузов. Математика. 2002. С. 57—63.

93. *Попов Ю. И.* Инвариантные оснащения гиперполосы $H_m(\Delta)$ // ДГМФ. 2002. Вып. 33. С. 84—89.

94. *Попов Ю. И.* Дифференциально-геометрические структуры многообразия $P^0(H)$ // Докл. Междунар. матем. семинара к 140-летию со дня рождения Д. Гильберта из Кёнигсберга и 25-летию математического факультета. Калининград, 2002. С. 145—151.

95. *Попов Ю. И.* Связность многообразия $P^0(H)$ // 4-я междунар. науч.-практ. конф. «Современные проблемы науки и образования» : материалы конф. Харьков, 2003. С. 35.

96. *Попов Ю. И.* Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства. Деп. №1743-В2003, 29.09.2003. 35 с.

97. *Попов Ю. И.* Кооснащенные гиперполосы проективного пространства. Деп. №2223-В2003, 22.12.2003. 40 с.

98. *Попов Ю. И.* Флаговые структуры многообразия $P^0(H)$ // ДГМФ. 2003. Вып. 34. С. 121—125.

99. *Попов Ю. И.* О двойственности трехсоставных распределений. Деп. №131-В2004, 26.01.2004. 17 с.

100. *Popov Yu.* Differential-geometric structures of the manifold // Избранные вопросы современной математики : тр. междунар. науч. конф., приуроченной к 200-летию со дня рождения великого немецкого математика Карла Густава Якоби и 750-летию со дня основания г. Калининграда (Кёнигсберга). Калининград, 2005. С. 45—46.

101. *Попов Ю. И.* Введение проективных связностей на *SH*-распределении // ДГМФ. 2005. Вып. 36. С. 108—113.

102. *Попов Ю.И.* Гиперповерхности пространства K_{n+1}. Деп. №922-В2005, 29.06.2005. 17 с.

103. *Попов Ю.И.* $H(L)$-распределения проективного пространства. Деп. №837-В2006, 23.06.2006. 33 с.

104. *Попов Ю.И.* Двойственные нормальные связности базисного подрасслоения *SH*-распределения проективного пространства // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 141—149.

105. *Попов Ю.И.* VH-распределения проективного пространства // Тез. регион. науч. конф. «Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твердого тела». Чебоксары, 2006. С. 33.

106. *Попов Ю.И.* VH-распределения проективного пространства // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2006. №5. С. 128—133.

107. *Попов Ю.И.* Касательно r-оснащенные гиперполосы H_m аффинного пространства. Деп. №445-В2007, 23.04.2007. 30 с.

108. *Попов Ю.И.* Гиперполосы ${}^{p}H_m$ проективного пространства. Деп. №491-В2007, 02.05.2007. 46 с.

109. *Попов Ю.И.* Двойственные нормальные связности регулярной полосы проективного пространства. Деп. №1088-В2007, 21.11.2007. 22 с.

110. *Попов Ю.И.* Нормализация Тренсона гиперполосы $H_m(\Lambda)$ // ДГМФ. 2007. Вып. 38. С. 117—122.

111. *Попов Ю.И.* Специальный класс скомпонованных гиперплоскостных распределений аффинного пространства. Деп. №1098-В2007, 27.11.2007. 33 с.

112. *Попов Ю.И.* Регулярные полосы проективного пространства, ассоциированные с *H*-распределением // ДГМФ. 2008. Вып. 39. С. 117—123.

113. *Попов Ю.И.* Специальный класс регулярных гиперполос H_m аффинного пространства. Деп. №781-В2009, 08.12.2009. 37 с.

114. *Попов Ю.И.* Введение двойственных нормальных связностей регулярной полосы проективного пространства // ДГМФ. 2009. Вып. 40. С. 117—129.

115. *Попов Ю.И.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперполосного $H(L)$-распределения аффинного пространства. Деп. №385-В2010, 21.06.2010. 34 с.

116. *Попов Ю.И., Волкова С.Ю.* Поля фундаментальных и охваченных объектов кооснащенной гиперполосы проективного пространства // ДГМФ. 2010. Вып. 41. С. 23—35.

117. *Попов Ю.И.* Регулярные гиперполосы ${}^{p}H_m$ проективного пространства // ДГМФ. 2010. Вып. 41. С. 117—125.

118. *Попов Ю.И.* Основания геометрии : учеб. пособие. Калининград, 2011.

119. *Попов Ю.И.* Введение связностей на H-распределении аффинного пространства // ДГМФ. 2011. Вып. 42. С. 122—133.

120. *Попов Ю.И.* Нормализации гиперполосы // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2012. №10. С. 131—141.

121. *Попов Ю.И.* Введение в теорию регулярного гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник БФУ им. И. Канта. 2013. №10. С. 49—56.

122. *Попов Ю.И., Белозерова М.А.* Соответствия Бомпьяни — Пантази, порождаемые H-распределением аффинного пространства // ДГМФ. 2013. Вып. 44. С. 19—27.

123. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов H-распределения аффинного пространства // ДГМФ. 2013. Вып. 44. С. 113—125.

124. *Попов Ю.И.* Нормализации, ассоциированные с гиперполосой $H_m(\Delta)$ // Евразийский союз ученых. 2014. №7-2 (7). С. 45—49.

125. *Попов Ю.И.* Инволютивное преобразование трехсоставного распределения проективного пространства // Естественные и математические науки в современном мире. 2015. №27. С. 33—47.

126. *Попов Ю.И.* Введение аффинных и нормальных связностей на гиперполосе // Естественные и математические науки в современном мире. 2015. №29. С. 28—37.

127. *Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение $H(L)$ аффинного пространства // Естественные и математические науки в современном мире. 2015. №34. С. 17—30.

128. *Попов Ю.И.* Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2015. №10. С. 62—76.

129. *Попов Ю.И.* Введение проективных связностей на трехсоставном распределении проективного пространства // Естественные и математические науки в современном мире. 2016. №42. С. 57—73.

130. *Попов Ю.И.* Сильно сопряженные трехсоставные распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2016. №1. С. 5—18.

131. *Попов Ю.И.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов 2-го порядка *H*-распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2016. №2. С. 18—24.

132. *Попов Ю.И.* Построение нормализаций Нордена *L*-, *E*-подрасслоений *H*-распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2016. №3. С. 5—11.

133. *Попов Ю.И.* Нормализации Фосса и Грина гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2016. №4. С. 16—23.

134. *Попов Ю.И., Будылкин А.А.* Квазинормали скомпонованного гиперплоскостного распределения проективного пространства // Естественные и математические науки в современном мире. 2016. №9 (44). С. 35—45.

135. *Попов Ю.И.* Нормализация базисного подрасслоения сильно сопряженного *H*-распределения // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 125—131.

136. *Попов Ю.И.* Введение проективных связностей на распределении проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2017. №1. С. 5—15.

137. *Попов Ю.И.* О полях геометрических объектов *H*-распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2017. 2017. №2. С. 13—23.

138. *Попов Ю.И.* О полях геометрических объектов *D*-оснащенной гиперповерхности проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2017. 2017. №4. С. 16—23.

139. *Попов Ю.И., Волкова С.Ю.* Нормальные связности *L*-подрасслоения сильно взаимного распределения проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2017. №3. С. 5—17.

140. *Попов Ю.И.* Дифференциально-геометрические структуры, ассоциированные с регулярной касательно *R*-оснащенной гиперполосой проективного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2017. №3. С. 52—63.

141. *Попов Ю.И.* Нормализации Фосса и Грина $H(L)$-распределения аффинного пространства // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 86—95.

142. *Попов Ю.И.* Нормализация Фосса основных структурных подрасслоений -распределения аффинного пространства // ДГМФ. 2018. Вып. 49. С. 146—152.

143. *Попов Ю.И.* Введение связностей на гиперповерхности $W(D)$ // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2018. №1. С. 18—24.

144. *Попов Ю.И.* Нормализация основных структурных подрасслоений $H(\varLambda, L)$-распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2018. №3. С. 5—14.

145. *Попов Ю.И.* Связность центрально оснащенной гиперполосы // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований : сб. ст. по материалам XVI Междунар. науч.-практ. конф. Новосибирск, 2019. С. 10—17.

146. *Попов Ю.И.* Проективные нормали H-распределения аффинного пространства // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований : сб. ст. по материалам XVIII—XIX Междунар. науч.-практ. конф. Новосибирск, 2019. С. 19—27.

147. *Попов Ю.И.* Скомпонованные гиперплоскостные $H(\varLambda_{n-2}, L_1)$-распределения аффинного пространства // Вопросы технических и физико-математических наук в свете современных исследований : сб. ст. по материалам XV Междунар. науч.-практ. конф. Новосибирск, 2019. С. 33—44.

148. *Попов Ю.И., Елисеева Н.А.* О построениях в геометрии $H(\varLambda, L)$-распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2019. №1. С. 5—17.

149. *Попов Ю.И.* Пучки проективных нормалей гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2019. №3. С. 69—75.

150. *Попов Ю.И.* Соприкасающиеся гиперквадрики кооснащенной гиперполосы // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 126—132.

151. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов, ассоциированных со скомпонованным гиперплоскостным $H(\varLambda_{n-2}, L_1)$-распределением аффинного пространства // ДГМФ. 2020. Вып. 51. С. 103—115.

152. *Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение аффинного пространства // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 203. С. 84—99.

153. *Попов Ю.И.* Касательно *r*-оснащенные гиперполосы проективного пространства // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 97—116.

154. *Попов Ю.И.* Специальные классы гиперполосных распределений аффинного пространства. Калининград, 2021.

155. *Попов Ю.И.* Мой учитель // Атанасян Левон Сергеевич: воспоминания к 100-летию со дня рождения / под общ. ред. Н.С. Денисовой. М., 2021. С. 74—75.

156. *Попов Ю.И.* Гиперполосные распределения аффинного пространства : монография. Калининград, 2022.

157. *Попов Ю.И.* Специальные классы регулярных гиперполос проективного пространства : монография. Калининград, 2022.

158. *Попов Ю.И., Елисеева Н.А.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов регулярной гиперполосы с центральным оснащением проективного пространства // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 43—58.

159. *Попов Ю.И., Елисеева Н.А.* Гиперполосное распределение, оснащенное полем сопряженных плоскостей пространства // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 78—91.

160. *Попов Ю.И., Елисеева Н.А.* Оснащенное гиперполосное распределение аффинного пространства // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 20—33.

Ю.И. Попов проработал в Калининградском государственном университете (БФУ им. И. Канта) более 50 лет. Преподавал как фундаментальные дисциплины, составляющие основу математического образования («Аналитическая геометрия», «Основания геометрии»), так и специальные курсы: «Группы преобразований», «Составные распределения и гиперполосы», «Фундаментальные и охваченные объекты составных распределений», «Теория оснащений и нормализаций», «Основы многомерной геометрии», «Теория сетей», «Общая теория гиперполос аффинного пространства», «Теория многосоставных распределений проективного пространства», а также спецкурсы по решению задач школьной математики («Избранные главы элементарной математики», «Факультатив в школьном курсе математики»). Он обладал яркой образной речью и был замечательным лектором. Его лекции помнят многие поколения студентов. Помимо интересного изложения материала навсегда остаются в памяти его замечательные чертежи и рисунки. Обладая красивым почерком, Юрий Иванович с первого выпуска и до использования компьютера вписывал формулы во все статьи журнала «Дифференциальная геометрия многообразий фигур» в течение 26 лет.

Юрий Иванович руководил дипломными работами студентов, магистерскими диссертациями и студенческими кружками. Под его научным руководством было подготовлено и успешно защищено две кандидатские диссертации.

Наряду с успехами в области дифференциальной геометрии, Юрий Иванович активно вел разработку учебных пособий для школьников и студентов. По его книгам учится и обучает учеников не одно поколение школьных учителей и преподавателей вузов. Работы, выпущенные с 1984 по 2008 г., актуальны и сейчас для педагогов, занимающихся олимпиадным движением. Более поздние издания дополнены необходимыми материалами для подготовки к ЕГЭ и посвящены решению задач с параметрами, задач по планиметрии и стереометрии. Юрий Иванович работал в системе повышения квалификации учителей г. Калининграда. Многие годы являлся бессменным председателем региональной предметной комиссии по проверке ЕГЭ по математике Калининградской области, подготовив множество профессиональных экспертов ЕГЭ. Под руководством профессора были защищены работы по методике преподавания математики, иногда итогом сотрудничества со студентами были изданные в соавторстве учебные пособия. Его энергия, упорство, дисциплина, живой ум, чувство юмора, доброта покоряли школьников и студентов. Он давал огромную поддержку своим ученикам и делился секретом мастерства: «Нужно решать каждый день!» — говорил Юрий Иванович.

За свою жизнь Ю. И. Попов издал 54 методические статьи, разработки и учебных пособия. Поскольку многие пособия дополнялись, редактировались и переиздавались, то мы приводим только их последние издания.

1. *Попов Ю.И.* Векторы в школьном курсе геометрии : учеб.-метод. пособие. Калининград, 1998. 64 с.
2. *Попов Ю.И.* Энциклопедия элементарной математики : учеб. пособие. Калининград, 1998. 335 с.
3. *Корнев Л.М., Попов Ю.И.* Устный экзамен по математике : учеб. пособие для абитуриентов. Калининград, 2002. 208 с.
4. *Попов Ю.И.* Алгебра. Методы и приемы решения задач элементарной математики : учеб. пособие. 2-е изд., перераб. Калининград, 2008. 292 с.
5. *Попов Ю.И.* Высшая математика для студентов экономических специальностей : учеб. пособие. Калининград, 2010.
6. *Попов Ю.И.* Практикум по комбинаторике и теории вероятностей школьного курса математики : учеб. пособие. Калининград, 2013. 144 с.
7. *Попов Ю.И.* Решение задач с параметрами : учеб. пособие. 2-е изд., доп. и перераб., 2014. 222 с.
8. *Попов Ю.И.* Математика : учеб. пособие. Калининград, 2014. 214 с.
9. *Башашина К.В., Попов Ю.И.* Элементы математической логики : учеб пособие. Калининград, 2015. 147 с.
10. *Попов Ю.И.* Лекции по аналитической геометрии : учеб пособие. 2-е изд., испр. и доп. Калининград, 2016. 248 с.
11. *Попов Ю.И.* Тригонометрия. Методы и приемы решения задач : учеб. пособие. 3-е изд., испр. и доп. Калининград, 2016. 220 с.
12. *Башашина К.В., Курченко О.Н., Попов Ю.И.* Практикум по решению планиметрических задач : учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. Калининград, 2016. 179 с.
13. *Башашина К.В., Курченко О.Н., Попов Ю.И.* Практикум по решению задач с параметрами : учеб. пособие. Калининград, 2017. 135 с.
14. *Попов Ю.И.* Практикум по решению стереометрических задач векторно-координатным способом : учеб. пособие. Калининград, 2018. 133 с.

15. *Попова Л.А., Попов Ю.И.* Практикум по решению задач стереометрии методом вспомогательных элементов : учеб. пособие. Калининград, 2021. 102 с.

За многолетний труд и заслуги в развитии науки и образования Ю.И. Попов был награжден медалями «Ветеран системы образования Калининградской области», «За заслуги перед БФУ им. И. Канта» и «За заслуги перед Калининградской областью», имеет благодарность Министерства образования Российской Федерации.

Помимо выдающихся достижений в области математики, профессор Ю.И. Попов известен своим активным образом жизни и страстью к спорту. Он профессионально играл в баскетбол, выступал за сборную университета, демонстрируя командный дух и спортивное мастерство. Участвовал в матчах по регби, выступая за команду преподавателей в играх против студентов на днях физмата. Кроме того, он увлекался шахматами, что отражало его стратегическое мышление и любовь к интеллектуальным вызовам. Юрий Иванович был страстным болельщиком калининградской команды по футболу, всегда поддерживая ее на трибунах и вдохновляя студентов своим примером. Спорт для него был не просто хобби, а важным элементом баланса между умственной и физической деятельностью.

Юрий Иванович являлся одним из самых квалифицированных и добросовестных преподавателей, заслуженно пользовался большим уважением коллег и студентов. Его увлеченность дифференциальной геометрией служила ярким примером для начинающих исследователей. Человек высокой культуры и выдающейся эрудиции,он обладал огромным личным обаянием. Светлая память о Юрии Ивановиче Попове навсегда сохранится в сердцах всех, кто знал этого ученого, преподавателя и замечательного человека.

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос аффинного пространства : учеб. пособие. Калининград, 2001.

2. *Попов Ю.И.* Гиперполосные распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

3. *Попов Ю.И.* Специальные классы гиперполосного распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

4. *Попов Ю.И.* Специальные классы регулярных гиперполос проективного пространства. Калининград, 2022.

Для цитирования: *Башашина К.В., Елисеева Н.А.* Памяти профессора Юрия Ивановича Попова // ДГМФ. 2025. №56. С. 36—58. https://doi.org/10.5922/ 0321-4796-2025-56-5.

MSC 2010: 58A05, 53A20

K. V. Bashashina[1], *N. A. Eliseeva*[2]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University,*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[2] *Kaliningrad State Technical University,*
1 Sovietsky Prospect, Kaliningrad, 236022, Russia
[1] baschaschina@mail.ru, [2] ne2705@gmail.com

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-5

Professor Yuri Ivanovich Popov has passed away

Submitted on May 2, 2025

The article is dedicated to the memory of the scientist-geometer Yuri Ivanovich Popov, one of the representatives of the Kaliningrad geometric school, professor of the Immanuel Kant Baltic Federal University. The scientific and pedagogical work of the scientist during 55 years is described. The area of scientific interests of Yu. I. Popov was the differential geometry of hyperstrips and composite distributions. He is the author of 161 scientific papers and 54 textbooks, the list is presented in this paper.

Keywords: Kaliningrad geometric school, three-part distributions, hyperstrips, hyperstrip distributions

References

1. *Popov, Yu. I.:* General theory of regular hyperstrips of affine space. Kaliningrad (2001).
2. *Popov, Yu. I.:* Hyperband distributions of affine space. Kaliningrad (2021).
3. *Popov, Yu. I.:* Special classes of hyperstrips distribution of an affine space. Kaliningrad (2021).
4. *Popov, Yu. I.:* Special classes of regular hyperstrips of projective space. Kaliningrad (2022).

For citation: Bashashina, K. V., Eliseeva, N. A.: Professor Yuri Ivanovich Popov has passed away. DGMF, 56, 36—58 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-5.

УДК 514.76

О. О. Белова[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
olgaobelova@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-6

Плоские связности в области проективного пространства

В проективном пространстве рассмотрена область, описанная точкой. Над областью возникает главное расслоение, типовым слоем которого является подгруппа стационарности точки.

В этом расслоении задана фундаментально-групповая связность по Г. Ф. Лаптеву. Показано, что оснащение Бортолотти рассматриваемой области индуцирует центропроективные связности трех типов в ассоциированном расслоении, причем данные связности имеют нулевую кривизну и нулевоекручение.

Даны геометрические характеристики полученным связностям.

Ключевые слова: проективное пространство, связность, расслоение, оснащение Бортолотти, кривизна, кручение

Теория связностей различных многообразий имеет широкое применение в математике и физике.

Связность с нулевой кривизной (плоская связность) играет важную роль в теории солитонов (см., напр., [9]). Аффинные и эквиаффинные связности нулевой кривизны были изучены в работах [3; 5], а в [4] тот же автор рассмотрел ненулевую кривизну для связностей внередуктивных пространствах.

Поступила в редакцию 15.12.2024 г.

В [2] Гольдберг исследовал нулевую кривизну параметрического семейства многомерных плоскостей и показал, что аффинная связность является проективно евклидовой тогда и только тогда, когда рассмотренный им объект имеет нулевую кривизну.

В [10] Трофимов рассмотрел каноническую связность с нулевой кривизной на расслоении линейных реперов.

Нулевая кривизна влияет на тип параллельных перенесений. Если компоненты объекта кривизны групповой связности равны нулю, то параллельные перенесения в рассматриваемой связностиявляются абсолютными; обратное тоже верно (см. [7; 8]).

Исследуем кривизну и кручение связности на многообразии Грассмана точек.

В проективном пространстве P_n будем использовать подвижной репер $\{A, A_I\}$ $(I, \ldots = 1, \ldots, n)$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dA = \theta A + \omega^I A_I,$$

$$dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

где линейная форма θ играет роль множителя пропорциональности, а формы Пфаффа ω^I,ω_I, ω_J^I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,$$

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

Рассмотрим частный случай многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ всех m-мерных плоскостей L_m, когда $m = 0$. Таким образом, получим многообразие Грассмана $V = Gr(0, n)$ точек [12].

Формы ω^I являются главными, так как при их обнулении фиксируется точка A.

Получим главное расслоение $G(V)$ ($\dim G = n(n+1)$), которое является расслоением центропроективных реперов с типовым слоем — подгруппой G стационарности точки A:

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I.$$

В статье [1] автор рассмотрел такую область проективного пространства, задав фундаментально-групповую связность в ассоциированном направлении методом Г. Ф. Лаптева. Были исследованы центропроективные связности трех типов, получены условия их совпадения и дана геометрическая интерпретация связности 1-го типа.

Связность в главном расслоении $G(V)$ зададим способом Лаптева — Лумисте [6]:

$$\widetilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - \Gamma_{JK}^I \omega^K,$$

$$\widetilde{\omega}_I = \omega_I - \Gamma_{IJ}\omega^J.$$

Компоненты объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{JK}^I, \Gamma_{IJ}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma_{JK}^I - \delta_J^I \omega_K - \delta_K^I \omega_J = \Gamma_{JKL}^I \omega^L,$$

$$\Delta\Gamma_{IJ} + \Gamma_{IJ}^K \omega_K = \Gamma_{IJK}\omega^K,$$

причем оператор Δ действует по закону

$$\Delta\Gamma_{JK}^I = d\Gamma_{JK}^I + \Gamma_{JK}^L \omega_L^I - \Gamma_{LK}^I \omega_J^L - \Gamma_{JL}^I \omega_K^L.$$

Структурные уравнения форм связности имеют вид

$$D\widetilde{\omega}_J^I = \widetilde{\omega}_K^I \wedge \widetilde{\omega}_J^K + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L,$$

$$D\widetilde{\omega}_I = \widetilde{\omega}_I^J \wedge \widetilde{\omega}_J + R_{IJK}\omega^J \wedge \omega^K,$$

где

$$R_{JKL}^I = \Gamma_{J[KL]}^I + \Gamma_{F[K}^I \Gamma_{JL]}^F,$$

$$R_{IJK} = \Gamma_{I[JK]} + \Gamma_{L[J}\Gamma^{L}_{IK]}$$

являются компонентами кривизны $R = \{R^{I}_{JKL}, R_{IJK}\}$ связности Γ. Квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам.

При продолжении дифференциальных уравнений получим следующие сравнения по модулю базисных форм ω^{I}:

$$\Delta\Gamma^{I}_{JKL} + \Gamma^{I}_{JK}\omega_{L} + \Gamma^{I}_{JL}\omega_{K} + \Gamma^{I}_{LK}\omega_{J} - \delta^{I}_{L}\Gamma^{F}_{JK}\omega_{F} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{IJK} + \Gamma^{L}_{JIK}\omega_{L} + 2\Gamma_{IJ}\omega_{K} + \Gamma_{IK}\omega_{J} + \Gamma_{KJ}\omega_{I} \equiv 0.$$

Подставим формы связности $\widetilde{\omega}^{I}_{J}$ в структурные уравнения базисных форм ω^{I}, тогда

$$D\omega^{I} = \omega^{J} \wedge \widetilde{\omega}^{I}_{J} + S^{I}_{JK}\omega^{J} \wedge \omega^{K},$$

где $S^{I}_{JK} = \Gamma^{I}_{[JK]}$ — компоненты объекта кручения S.

Произведем оснащение Бортолотти [13] многообразия V, которое состоит в присоединении к каждой точке A гиперплоскости P_{n-1}, не проходящей через данную точку. Данное оснащение индуцирует центропроективные связности трех типов в расслоении центропроективных реперов $G(V)$, ассоциированном с областью V проективного пространства P_n (см.: [1]):

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{I}_{JK} = -\delta^{I}_{J}\lambda_{K} - \delta^{I}_{K}\lambda_{J},$$

$$\overset{01}{\Gamma}_{IJ} = -\lambda_{I}\lambda_{J}, \quad \overset{02}{\Gamma}_{IJ} = \lambda_{IJ} - 2\lambda_{I}\lambda_{J}, \quad \overset{03}{\Gamma}_{IJ} = -\lambda_{IJ}.$$

Находим охваты пфаффовых производных компонент объекта связности Γ:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{I}_{JKL} = -\delta^{I}_{J}\lambda_{K}\lambda_{L} - \delta^{I}_{K}\lambda_{J}\lambda_{L},$$

$$\overset{01}{\Gamma}_{IJK} = -2\lambda_{I}\lambda_{J}\lambda_{K};$$

$$\overset{02}{\Gamma}_{IJK} = 2\lambda_{IJ}\lambda_{K} + \lambda_{IK}\lambda_{J} + \lambda_{KJ}\lambda_{I} - 6\lambda_{I}\lambda_{J}\lambda_{K};$$

$$\overset{03}{\Gamma}_{IJK} = -2\lambda_{IJ}\lambda_K - \lambda_{IK}\lambda_J - \lambda_{KJ}\lambda_I + 2\lambda_I\lambda_J\lambda_K.$$

Учитывая полученные охваты, имеем

$$\overset{01}{R}{}^I_{JKL} = 0, \quad \overset{01}{R}_{IJ} = 0;$$

$$\overset{02}{R}{}^I_{JKL} = 0, \quad \overset{02}{R}_{IJ} = 0;$$

$$\overset{03}{R}{}^I_{JKL} = 0, \quad \overset{03}{R}_{IJ} = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Тензор кривизны R во всех трех связностях имеет нулевые компоненты, то есть индуцированные центропроективные связности в расслоении над областью V проективного пространства имеют нулевую кривизну, таким образом, связности являются плоскими.*

Учитывая охват в выражениях компонент кручения, получим

$$\overset{0}{S}{}^I_{JK} = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Тензор кручения S в связности $\overset{0}{\Gamma}$ имеет нулевые компоненты, то есть индуцированные центропроективные связности в расслоении над областью V проективного пространства имеют нулевое кручение, то есть связность будет симметрической* [11].

Дадим геометрическую характеристику оснащающей гиперплоскости P_{n-1}.

Гиперплоскость зададим точками

$$B_I = A_I + \lambda_I A,$$

где $\lambda = \{\lambda_I\}$ — оснащающий квазитензор, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^I

$$\Delta\lambda_I + \omega_I \equiv 0.$$

Находя дифференциалы точек B_I и учитывая охваты, получим

$$dB_I = (\theta - \lambda_J\omega^J)B_I + \overset{0}{\widetilde{\omega}}{}_I^J B_J + (\overset{01}{\nabla}\lambda_I - \lambda_I\lambda_J\omega^J)A, \tag{1}$$

$$dB_I = (\theta - \lambda_J\omega^J)B_I + \overset{0}{\widetilde{\omega}}{}_I^J B_J + [\overset{02}{\nabla}\lambda_I + (\lambda_{IJ} - \lambda_I\lambda_J)\omega^J]A,$$

$$dB_I = (\theta - \lambda_J\omega^J)B_I + \overset{0}{\widetilde{\omega}}{}_I^J B_J + [\overset{03}{\nabla}\lambda_I + (-\lambda_{IJ} + \lambda_I\lambda_J)\omega^J]A,$$

где $\overset{01}{\nabla}\lambda_I, \overset{02}{\nabla}\lambda_I, \overset{03}{\nabla}\lambda_I$ — ковариантные дифференциалы оснащающего квазитензора в соответствующих связностях.

Из полученных формул видно, что при обращении ковариантных дифференциалов в нуль во всех трех связностях оснащающая плоскость остается на месте.

Замечание. Ковариантные дифференциалы

$$\nabla\lambda_I = d\lambda_I - \lambda_J\widetilde{\omega}_I^J + \widetilde{\omega}_I = (\lambda_{IJ} - \Gamma_{IJ} + \lambda_K\Gamma_{IJ}^K)\omega^J$$

оснащающего квазитензора λ в связностях имеют вид

$$\overset{01}{\nabla}\lambda_I = (\lambda_{IJ} - \lambda_I\lambda_J)\omega^J,$$

$$\overset{02}{\nabla}\lambda_I = 0,$$

$$\overset{03}{\nabla}\lambda_I = 2(\lambda_{IJ} - \lambda_I\lambda_J)\omega^J.$$

Таким образом, $\overset{01}{\nabla}\lambda_I = 0$ и $\overset{03}{\nabla}\lambda_I = 0$, если $\lambda_{IJ} = \lambda_I\lambda_J$.

Теорема 3. *Простой подобъект* $\overset{0}{\Gamma}_1 = \{\overset{0}{\Gamma}{}_{JK}^I\}$ *объектов связности* $\overset{01}{\Gamma}$, $\overset{02}{\Gamma}$, $\overset{03}{\Gamma}$ *характеризуется центральным проектированием плоскости* $P_{n-1} + dP_{n-1}$, *смежной с гиперплоскостью* P_{n-1}, *на исходную плоскость* P_{n-1} *из центра — точки* A.

Доказательство. Проекция плоскости $P_{n-1} + dP_{n-1}$, которая смежна с плоскостью P_{n-1}, из центра — точки А определяется формами связности $\overset{0}{\widetilde{\omega}}{}_\mathrm{I}^\mathrm{J}$, которые выражаются с помощью подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_1 = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{JK}}\right\}$, так как имеет место равенство (1). Таким образом, справедливо утверждение

$$\overset{0}{\Gamma}_1: \quad P_{n-1} + dP_{n-1} \xrightarrow{\mathrm{A}} P_{n-1}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Белова О.О.* Связности трех типов в расслоении над областью проективного пространства // ДГМФ. 2003. №34. С. 21—26.

2. *Гольдберг В.В.* Об одном свойстве тканей с нулевой кривизной // Изв. вузов. Математика. 1975. №9. С. 10—13.

3. *Можей Н.П.* Связности нулевой кривизны на однородных пространствах разрешимых групп Ли // Известия Гомельского ун-та им. Ф. Скорины, 2017. №6 (105). С. 104—111.

4. *Можей Н.П.* Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуктивных пространствах // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 381—393. doi: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393.

5. *Можей Н.П.* Эквиаффинные связности нулевой кривизны на однородных пространствах с разрешимой группой преобразований // Известия Гомельского ун-та им. Ф. Скорины. 2020. №6 (123). С. 131—137.

6. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

7. *Полякова К.В.* Тензор параллельности и абсолютные параллельные перенесения // ДГМФ. 2001. №32. С. 94—98.

8. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства. Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 129—177.

9. *Рыбников А.К.* Построение солитонов уравнений синус-Гордона и Кортевега — де Фриза при помощи связностей, определяющих представления нулевой кривизны // Учен. записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2011. Т. 153, кн. 3. С. 72—80.

10. *Трофимов Ю.А.* О канонической плоской связности на расслоении линейных реперов // ДГМФ. 2009. №40. С. 129—134.

11. *Черников Н. А.* Конспект теории аффинной связности для гравитационистов // Сообщения объединенного Института ядерных исследований. Дубна, 1986.

12. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

13. *Bortolotti E.* Connessioni nelle varieta luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1933. №3. С. 81—89.

Для цитирования: *Белова О. О.* Плоские связности для области проективного пространства // ДГМФ. 2025. №56. С. 59—68. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-6.

MSC 2010: 53A20, 53B15

O. O. Belova
Immanuel Kant Baltic Federal Univetsity,
14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-6

Flat connections in a domain of projective space

Submitted on December 15, 2024

The theory of connections of manifolds has wide application in mathematics and physics.

Flat connection affects the type of parallel translations.

In the present paper, we study the curvature and torsion of connections on the Grassmann manifold of points.

In projective space, the region described by a point is considered. A principal bundle arises over the domain, the typical fiber of which is the stationarity subgroup of a point.

A fundamental group connection according to G. F. Laptev is given in this bundle. It is shown that the Bortolotti's clothing of the domain induces centroprojective connections of three types in the associated bundle, and these connections have zero curvature and the connections are torsion-free.

A geometric characteristics of the resulting connections are given:

1) when the covariant differentials vanish in all three connections, the clothing hyperplane is immovable;

2) a simple subobject $\overset{0}{\Gamma}_1 = \{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{JK}\}$ of connection objects $\overset{01}{\Gamma}, \overset{02}{\Gamma}, \overset{03}{\Gamma}$ is characterized by the central projection of the plane $P_{n-1} + dP_{n-1}$adjacent to the hyperplane P_{n-1} to the original plane P_{n-1} from the center — the point A.

Keywords: projective space, connection, fibering, Bortolotti's clothing, curvature, torsion

References

1. *Belova O. O.:* Connections of three types in a bundle over a domain of projective space. DGMF, 34, 21—26 (2003).

2. *Goldberg V. V.:* About one property of fabrics with zero curvature. Izvestia Vuzov. Math., 9, 10—13 (1975).

3. *Mozhey N. P.:* Connections of zero curvature on homogeneous spaces of solvable Lie groups. Izvestia Gomel Univ. named after F. Skaryny, **6**:105, 104—111 (2017).

4. *Mozhey N. P.:* Connections of Non-zero Curvature on Three-dimensional Non-reductive Spaces. Izvestia Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **17**:4, 381—393. doi: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-381-393 (2017).

5. *Mozhey N. P.:* Equiaffine connections of zero curvature on homogeneous spaces with a solvable transformation group. Izvestia Gomel Univ. named after F. Skaryny, **6**:123, 131—137 (2020).

6. *Norden A. P.:* Spaces of affine connection. Moscow, Nauka (1976).

7. *Polyakova K. V.:* Parallelism tensor and absolute parallel displacements. DGMF, 32, 94—98 (2001).

8. *Polyakova K. V.:* Parallel translations on the surface of projective space. J. of Math. Sci., **162**:5, 675—709 (2009).

9. *Rybnikov A. K.:* Construction of solitons of the sine-Gordon and Korteweg — de Vries equations using connections defining representations of zero curvature. Scientific Notes Kazan. Univ. Ser. Phys.-Math. Sciences, **153**:3, 72—80 (2011).

10. *Trofimov Y.:* On canonical flat connection on linear frame bundle. DGMF, 40, 129—134 (2009).

11. *Chernikov N.A.:* Abstract of the theory of affine connection for gravitationalists. Communications of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna (1986).

12. *Shevchenko Yu.I.:* Clothings of centroprojective manifolds, Kaliningrad (2000).

13. *Bortolotti E.:* Connessioni nelle varieta luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 3, 81—89 (1933).

For citation: Belova, O.O.: Flat connections in a domain of projective space. DGMF, 56, 59—68 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-6.

УДК 514.76

М. В. Глебова[1]***, Г. А. Султанова***[2]
[1] Пензенский филиал Финансового университета
при Правительстве РФ, Россия
[2] Филиал Военной академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А. В. Хрулева Министерства обороны РФ, Пенза, Россия
[1] mvmorgun@mail.ru,[2] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-7

О максимальной размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа

Аффинные преобразования в обобщенных пространствах являются одним из важнейших направлений в современной дифференциальной геометрии. В случае прямого произведения более двух пространств аффинной связности вопрос об аффинных преобразованиях данного пространства оставался открытым. М. В. Глебовой и А. Я. Султановым ранее была получена оценка размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств аффинной связности, представляющих собой прямое произведение не менее трех непроективно-евклидовых пространств, удовлетворяющих специальному условию. Такие пространства названы пространствами первого типа. В данной работе доказана точность этой оценки. Для решения поставленной задачи исследована система линейных однородных уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного инфинитезимального аффинного преобразования. Эта система получена с использованием свойств производной Ли, примененной к тензорному полю кривизны рассматриваемых пространств.

Ключевые слова: прямое произведение пространств аффинной связности, инфинитезимальные аффинные преобразования, алгебра Ли, размерность алгебры Ли

Поступила в редакцию 28.03.2025 г.

1. Основные понятия и сведения

В современной дифференциальной геометрии одной из основных задач геометрии пространства с дифференциально-геометрической структурой является изучение группы аффинных преобразований (автоморфизмов) этого пространства. Исследованию автоморфизмов в различных пространствах аффинных связностей посвящены работы Э. Картана, П.К. Рашевского, П.А. Широкова, И.П. Егорова, А.Я. Султанова [6] и других ученых.

Аффинные преобразования в прямых произведениях двух пространств аффинной связности рассматривались в работах М.В. Моргун [3].

Приведем основные понятия, необходимые для детального изложения материала.

Пусть (M_n, ∇) — пространство аффинной связности без кручения.

Векторное поле X на многообразии M_n, снабженном аффинной связностью ∇, называется *инфинитезимальным аффинным преобразованием* пространства (M_n, ∇), если (см.: [3])

$$L_X \nabla = 0, \tag{1}$$

где L_X — символ производной Ли вдоль векторного поля X.

В локальных координатах уравнение (1) равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{gathered} \partial_j X^s = X^s_j, \\ \partial_i X^k_j + \Gamma^k_{sj} X^s_i + \Gamma^k_{is} X^s_j - \Gamma^s_{ij} X^k_s + X^s \partial_s \Gamma^k_{ij} = 0 \,. \end{gathered} \tag{2}$$

Условия интегрируемости системы (2) имеют вид

$$L_X(\nabla^m T) = 0,$$
$$L_X(\nabla^t R) = 0,$$

где $\nabla^m T$, $\nabla^t R$ — ковариантные дифференциалы порядков m и t тензорных полей кручения и кривизны соответственно, m и t — неотрицательные целые числа, $\nabla^0 T = T$, $\nabla^0 R = R$.

Поскольку в работе рассматриваются пространства аффинной связности без кручения, то условия интегрируемости составляют только соотношения

$$L_X(\nabla^t R) = 0.$$

Первую серию условий интегрируемости этой системы составляют уравнения

$$L_X R = 0, \tag{3}$$

где R — тензорное поле кривизны связности ∇.

В локальных координатах уравнения (3) представляют собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений от координат поля X и частных производных от этих координат:

$$X^M \partial_M R^D_{ABC} + R\left(^D_{ABC}\middle|^F_M\right) X^M_F = 0, \tag{4}$$

где $R\left(^D_{ABC}\middle|^F_M\right) = \delta^F_A R^D_{MBC} + \delta^F_B R^D_{AMC} + \delta^F_C R^D_{ABM} - \delta^D_M R^F_{ABC}$.

Известно, что множество всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M_n, ∇) образует алгебру Ли над полем $\mathbb{R}$ относительно операции коммутирования векторных полей, размерность которой не больше $n^2 + n$ (см.: [1]). Обозначим эту алгебру через $g(M_n,\nabla)$ (см.: [6]).

Если ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных X^M_F системы (4), равен r, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M_n, ∇) не больше, чем $n^2 + n - r$ (см.: [1]).

2. Прямое произведение пространств аффинной связности

Пусть $({}^aM_{n_a}, \nabla^a)(a = \overline{1,s})$ — пространства аффинной связности без кручения. На прямом произведении

$$M_n = {}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$$

возникает структура гладкого многообразия.

Рассмотрим естественные проекции

$$ {}^a\pi\colon M_n \to {}^aM, $$

определенные следующим образом:

$$ {}^a\pi(\rho) = {}^a\rho, $$

где $\rho = ({}^1\rho, \ldots, {}^s\rho) \in M_n$. Эти проекции позволяют функции, заданные на ${}^aM_{n_a}$, продолжить на прямое произведение M_n.

Пусть ${}^af \in C^\infty({}^aM)$.

Функция $({}^af)_{(0)}$ на ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$, определенная условием $({}^af)_{(0)} = {}^af \circ {}^a\pi$, называется *естественным продолжением функции* ${}^af \epsilon\, {}^aM_{n_a}$ на ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$ $(a = \overline{1,s})$.

Для любых функций, заданных на ${}^aM_{n_a}$, имеют место следующие равенства:

$$ ({}^af + {}^ag)_{(0)} = {}^af_{(0)} + {}^ag_{(0)}, $$

$$ (\lambda\, {}^af)_{(0)} = \lambda\, {}^af_{(0)}, $$

$$ ({}^af\, {}^ag)_{(0)} = {}^af_{(0)}\, {}^ag_{(0)}. $$

Можно доказать, что если X — непрерывное векторное поле на ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$, такое что $X\, {}^af_{(0)} = 0$ для любых функций ${}^af \in \mathrm{C}^\infty({}^aM_{n_a})(a = \overline{1,s})$, то $X = 0$.

На основании этого свойства можно построить продолжения векторных полей с многообразия ${}^aM_{n_a}$ на многообразие ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$.

Для каждого векторного поля ${}^aX \in \mathfrak{I}_0^1({}^aM_{n_a})$ $(a = \overline{1,s})$ единственное векторное поле ${}^aX^0$ на многообразии ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$, удовлетворяющее условиям

$$ {}^aX^0\, {}^bf_0 = \begin{cases} ({}^aX\ {}^af)_{(0)}, & \text{если } a = b, \\ 0, & \text{если } a \neq b \end{cases} $$

для любых функций ${}^bf$ $(b = \overline{1,s})$, называется *естественным продолжением векторного поля* ${}^aX$ с многообразия ${}^aM_{n_a}$ на многообразие ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$.

Имеют место следующие тождества:

$$({}^aX + {}^aY)^{(0)} = {}^aX^{(0)} + {}^aY^{(0)},$$

$$[{}^aX, {}^aY]^{(0)} = [{}^aX^{(0)}, {}^aY^{(0)}].$$

Для каждой дифференциальной формы ${}^a\omega$ на многообразии ${}^aM_{n_a}$ единственная дифференциальная форма ${}^a\omega_{(0)}$ на ${}^1M_{n_1} \times . . . \times {}^sM_{n_s}$, удовлетворяющая условиям

$$({}^a\omega)_{(0)}\left(\left({}^bX\right)^{(0)}\right) = \begin{cases} ({}^a\omega({}^aX))_{(0)}, \text{ если } a = b, \\ \quad 0, \qquad \text{если } a \neq b, \end{cases}$$

для любых ${}^bX \in \mathfrak{I}_0^1({}^bM_{n_b})$ $(b = \overline{1,s})$ называется *естественным продолжением формы* ${}^a\omega$ с многообразия ${}^aM_{n_a}$ на многообразие ${}^1M_{n_1} \times . . . \times {}^sM_{n_s}$.

Прямые вычисления позволяют доказать, что справедливы следующие тождества:

$$(1)\ ({}^a\omega + {}^a\overline{\omega})_{(0)} = ({}^a\omega)_{(0)} + ({}^a\overline{\omega})_{(0)},$$

$$(2)\ (\lambda\, {}^a\omega)_{(0)} = \lambda({}^a\omega)_{(0)} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Аналогичным образом вводится понятие естественного продолжения тензорных полей.

Аффинная связность ∇ на ${}^1M_{n_1} \times . . . \times {}^sM_{n_s}$, удовлетворяющая условиям

$$\nabla_{{}_aX^{(0)}}\, {}^bY^{(0)} = \begin{cases} ({}^a\nabla_{{}_aX}\, {}^aY)^{(0)}, \text{если } a = b, \\ \qquad 0, \text{если } a \neq b, \end{cases}$$

называется *прямым произведением аффинных связностей* ${}^a\nabla$ заданных на ${}^aM_{n_a}$ $(a = \overline{1,s})$ по А.П. Нордену и обозначается ${}^1\nabla \times . . . \times {}^s\nabla$, а пространство

$$({}^1M_{n_1} \times . . . \times {}^sM_{n_s}, {}^1\nabla \times . . . \times {}^s\nabla)$$

называется *прямым произведением пространств аффинных связностей* (см.: [4]).

Из последнего определения следует, что если

$$({}^1U \times \ldots \times {}^sU,\ {}^1\varphi \times \ldots \times {}^s\varphi)$$

— локальная карта многообразия ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$, то коэффициенты аффинной связности ${}^1\nabla \times \ldots \times {}^s\nabla$ в этой карте определяются следующими соотношениями:

$$\Gamma^{\text{к}^1}_{i^1 j^1} = ({}^1\Gamma^{\text{к}^1}_{i^1 j^1})_{(0)},$$

$$\Gamma^{n_1+\text{к}^2}_{n_1+i^2 n_1+j^2} = ({}^2\Gamma^{\text{к}^2}_{i^2 j^2})_{(0)},$$

$$\ldots,$$

$$\Gamma^{n_1+\ldots+n_{s-1}+\text{к}^s}_{n_1+\ldots+n_{s-1}+j^s n_1+\ldots+n_{s-1}+j^s} = ({}^s\Gamma^{\text{к}^s}_{i^s j^s})_{(0)},$$

в остальных случаях $\Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{AB}} = 0$ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} = \overline{1, n_1 + \ldots + n_s})$, где ${}^a\Gamma^{\text{к}^a}_{i^a j^a}$ $(i^a, j^a, k^a = \overline{1, n_a})$ — коэффициенты аффинных связностей ${}^a\nabla$ в картах $({}^aU,\ {}^a\varphi)$ соответственно.

Аналогичные соотношения справедливы и для составляющих тензорных полей кручения и кривизны.

В дальнейшем у естественных продолжений функций, векторных полей, дифференциальных форм, тензорных полей индекс (0) будем опускать.

3. Алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности специального вида

Пусть $({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla)$ $(a = 1,2, \ldots, s)$ — непроективно-евклидовы пространства аффинной связности без кручения.

Как известно (см., напр., [1]), пространство аффинной связности $({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla)$ $(n_a > 2)$ является непроективно-евклидовым тогда и только тогда, когда тензорное поле Вейля отлично от нулевого. Это условие локально эквивалентно выполнению одного из следующих условий:

(1) существует такая карта $({}^aU,\ {}^a\varphi)$ гладкого атласа, что составляющая тензора кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$ $(i_1^a, i_{2,}^a\ i_3^a = \overline{= 1, n_a}\,)$ отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов $i_1^a, i_{2,}^a\ i_3^a$;

(2) в каждой карте $({}^aV,\ {}^a\varphi)$ все составляющие тензора кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$ равны нулю, но существует такая карта $({}^aU,\ {}^a\varphi)$, что составляющая тензора кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_3^a i_4^a}$ $(i_1^a, i_2^a\ , i_3^a, i_4^a = \overline{1, n_a}\,)$ отлична от нуля для некоторых попарно отличающихся индексов $i_1^a, i_2^a\ , i_3^a, i_4^a$ (см.: [5]) .

В данной работе ограничимся лишь рассмотрением случаев, когда все пространства $({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla)$ $(a = 1,2, \dots, s)$ удовлетворяют условию (1), то есть у которых имеется такая карта $({}^aU,\quad x^{i^a})$ гладкого атласа, что существует хотя бы одна составляющая тензорного поля кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$, отличная от нуля для попарно различных между собой индексов. Тогда прямое произведение этих пространств аффинной связности $({}^1M_{n_1} \times \dots \times {}^sM_{n_s},\ {}^1\nabla \times \dots \times {}^s\nabla)$ в дальнейшем будем называть пространством аффинной связности первого типа ${}^1A_a \times \dots \times {}^sA_a$.

Для пространств первого типа ${}^1A_a \times \dots \times {}^sA_a$ доказана следующая теорема [2]:

Теорема 1. *Если составляющие* ${}^1R^{i_1^1}_{i_2^1 i_2^1 i_3^1}$, ${}^2R^{i_1^2}_{i_2^2 i_2^2 i_3^2}$, ..., ${}^sR^{i_1^s}_{i_2^s i_2^s i_3^s}$ $(s\ \geq 3)$ *тензоров кривизны пространств аффинной связности без кручения* $({}^1M_{n_1},\ {}^1\nabla)$, $({}^2M_{n_2},\ {}^2\nabla)$, ..., $({}^sM_{n_s},\ {}^s\nabla)$ *соответственно отличны от нуля, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности* $(M_n,\ \nabla)$ *не превосходит*

$$(n_1 +\ n_2 + \dots +\ n_s)^2 -$$
$$-(3s - 1)(n_1 +\ n_2 + \dots +\ n_s) + 2s^2 + 3s.$$

В данной работе докажем, что указанная в теореме 1 граница точная, то есть что имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности первого типа* ${}^1A_a \times \ldots \times^s A_a$ *равна точно*

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_s)^2 -$$
$$-(3s-1)(n_1 + n_2 + \dots + n_s) + 2s^2 + 3s.$$

Доказательство. При $s = 1$ максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности $({}^1M_{n_1}, {}^1\nabla)$, удовлетворяющего условию (1), равна точно $n_1^2 - 2n_1 + 5$. Это утверждение доказано И. П. Егоровым (см.: [1]).

При $s=2$ имеем, что максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности$({}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2}, {}^1\nabla \times^2 \nabla)$, где пространства аффинной связности $({}^1M_{n_1}, {}^1\nabla)$, и $({}^2M_{n_2}, {}^2\nabla)$ удовлетворяют условию (1), равна точно $(n_1+n_2)^2 - 5(n_1+n_2) + 14)$. Этот факт доказан в работе М. В. Моргун (см. [5]).

Остановимся на доказательстве точности приведенной оценки для $s \geq 3$.

Пусть $s \geq 3$.

Рассмотрим следующий пример.

В качестве многообразий ${}^aM_{n_a}$ $(a = 1,2,\dots,s)$ возьмем пространства $\mathbb{R}^{n_a}$, а линейную связность без кручения ${}^a\nabla$, на них определим условиями

$${}^a\Gamma_{23}^1 = x^2, \text{ остальные } {}^a\Gamma_{i^a j^a}^{k^a} = 0,$$
$$a = \overline{1,s},\ i^a, j^a, k^a = \overline{1,n_a}.$$

Непосредственными вычислениями находим, что составляющие тензора кривизны для связности ${}^a\nabla$ имеют вид

$${}^aR_{223}^1{=}1,\ \ {}^aR_{232}^1 = -1,\ \ a = 1,2,\dots,s,$$

остальные ${}^aR_{i^a i^a i^a}^{l^a} = 0 \ \ (i^a, j^a, k^a, l^a = 1,2,\dots,n_a).$

Описанным выше способом строим прямое произведение рассматриваемых пространств аффинной связности. Получим пространство аффинной связности

$$(\mathbb{R}^n, \nabla) = ({}^1\mathbb{R}^{n_1} \times . . . \times^s \mathbb{R}^{n_s},\ {}^1\nabla \times . . . \times^s \nabla),$$

где $n = n_1 + \cdots + n_s$.

Очевидно, что построенная связность является связностью без кручения и коэффициентами этой связности являются следующие функции:

$$\Gamma^1_{23} = x^2,$$

$$\Gamma^{n_1+1}_{n_1+2\, n_1+3} = x^{n_1+2},$$

$$\Gamma^{n_1+n_2+1}_{n_1+n_2+2\ \ n_1+n_2+3} = x^{n_1+n_2+2},$$

$$\cdots,$$

$$\Gamma^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}_{n_1+\ldots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\ldots+n_{s-1}+3} = x^{n_1+\ldots+n_{s-1}+2},$$

остальные $\Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{AB}} = 0,\ (\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C} = 1, 2, \ldots, n_1 + \ldots + n_s)$.

Составляющие тензорного поля кривизны будут следующими:

$$R^1_{223} = 1,$$

$$R^{n_1+1}_{n_1+2\, n_1+2\, n_1+3} = 1,$$

$$R^{n_1+n_2+1}_{n_1+n_2+2\, n_1+n_2+2\, n_1+n_2+3} = 1, \ldots,$$

$$R^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}_{n_1+\ldots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\ldots+n_{s-1}+2\, n_1+\ldots+n_{s-1}+3} = 1,$$

остальные $R^D_{ABC} = 0, (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, D = 1, 2, \ldots, n_1 + \ldots + n_s)$.

Найдем первую серию условий интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M_n, ∇). Для этого в систему (4) подставим найденные составляющие тензорного поля кривизны. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} X_A^1 = 0, \qquad A > 1, \\ X_B^2 = 0, \qquad B \geq 3, \\ X_C^3 = 0, \qquad C \geq 4, \\ X_1^1 - 2X_2^2 - X_3^3 = 0, \\ X_{n_1+1}^D = 0, \qquad D \neq 2, 3, n_1 + 1, \\ X_F^{n_1+2} = 0, \qquad F \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2, \\ X_K^{n_1+3} = 0, \qquad K \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \\ X_{n_1+1}^{n_1+1} - 2X_{n_1+2}^{n_1+2} - X_{n_1+3}^{n_1+3} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_H^{n_1+\cdots+n_{s-1}+1} = 0, \qquad H \neq 2, 3, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots, \\ n_1 + \cdots + n_{s-2} + 2, n_1 + \cdots + n_{s-2} + 3, n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1, \\ X_Z^{n_1+\cdots+n_{s-1}+2} = 0, Z \neq 1, n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \dots, \\ \qquad , n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1, n_1 + \cdots + n_{s-1} + 2, \\ X_V^{n_1+\cdots+n_{s-1}+3} = 0, \qquad V \neq 1, n_1 + 1, \dots, \\ n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1, n_1 + \cdots + n_{s-1} + 2, n_1 + \cdots + n_{s-1} + 3, \\ X_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}^{n_1+\cdots+n_{s-1}+1} - 2X_{n_1+\cdots+n_{s-1}+2}^{n_1+\cdots+n_{s-1}+2} - X_{n_1+\cdots+n_{s-1}+3}^{n_1+\cdots+n_{s-1}+3} = 0. \end{cases}$$

Вторая серия, а значит, и последующие серии условий интегрируемости являются следствиями этой системы.

Выпишем матрицу B, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$X_A^1\ (A > 1),\ X_B^2\ \ (B \geq 3),\ X_C^3\ \ (C \geq 4),$$

$$X_1^1, X_2^2, X_3^3,\ X_{n_1+1}^D\ (D \neq 2, 3, n_1 + 1),$$

$$X_F^{n_1+2}\ (F \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2),$$

$$X_K^{n_1+3}\ (K \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3),$$

$$X_{n_1+1}^{n_1+1}, X_{n_1+2}^{n_1+2}, X_{n_1+3}^{n_1+3}, \dots, X_H^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}$$

$$(H \neq 2, 3, n_1 + 2, n_1 + 3, \ldots, n_1 + \ldots + n_{s-2} + 2,$$

$$n_1 + \ldots + n_{s-2} + 3,\ n_1 + \ldots + n_{s-1} + 1),$$

$$X_Z^{n_1+\ldots+n_{s-1}+2} \quad (Z \neq 1,\ n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_{s-1} + 1,$$

$$n_1 + \ldots + n_{s-1} + 2),$$

$$X_V^{n_1+\ldots+n_{s-1}+3}$$

$$(V \neq 1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_{s-1} + 1, n_1 + \ldots + n_{s-1} + 2,$$

$$n_1 + \ldots + n_{s-1} + 3),$$

$$X_{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1} - 2X_{n_1+\ldots+n_{s-1}+2}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+2} - X_{n_1+\ldots+n_{s-1}+3}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+3}.$$

Из сказанного выше следует, что матрица B является матрицей всех условий интегрируемости и имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_s \end{pmatrix},$$

причем матрица A_1 имеет следующее строение:

$$A_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

где E_n — единичная матрица порядка n, $n = n_1 + \ldots + n_s$.

Остальные матрицы $A_2, \ldots, A_s$ имеют аналогичное строение.

Ранг матрицы B равен $r = 3ns - 3s - 2s^2$.

Следовательно, алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности имеет размерность, равную

$$n^2 + n - r = n^2 - n(3s - 1) + 2s^2 + 3s,$$

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. записки Пензенск. пед. ин-та. Казань, 1965.

2. *Глебова М.В., Султанов А.Я.* О размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 70—77. doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-5.

3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

4. *Моргун М.В.* Инфинитезимальные аффинные преобразования прямого произведения пространств аффинной связности : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 2009.

5. *Моргун М. В.* Аффинные преобразования прямого произведения непроективно-евклидовых пространств аффинной связности // Изв. вузов. Математика. 2009. №4. С. 72—77.

6. *Султанов А.Я., Глебова М.В., Болотникова О.В.* Алгебры Ли дифференцирований линейных алгебр над полем // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 123—136.

Для цитирования: *Глебова М.В., Султанова Г.А.* О максимальной размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа // ДГМФ. 2025. №56. С. 69—82. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-7.

MSC: 53B15

M. V. Glebova[1], *G. A. Sultanova*[2]
[1] *Financial University under the Government of the Russian Federation, Penza branch,*
33b, Kalinina Str., Penza, Russia
[2] *Logistic Military Educational Institution named after general A. V. Khrulov*
of the Ministry of Defence of the Russian Federation,
125 Military Town, Penza-5, Russia
[1] mvmorgun@mail.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-7

On the maximal dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces of affine connection of the first type

Submitted on March 28, 2025

In modern differential geometry, one of the main problems of the geometry of a space with a differential-geometric structure is the study of the group of affine transformations (automorphisms) of this space. The studies of automorphisms in various spaces of affine connections are devoted to the works of E. Cartan, P.K. Rashevsky, P.A. Shirokov, I.P. Egorov, A.Ya. Sultanov and other scientists.

Affine conversions in direct products of two spaces with affine connection were considered in the works of M.V. Morgun. In the case of direct products of more than two spaces with affine connection, the question of affine envelopes, these spaces are stable.

In the article Glebova M.V. and Sultanov A.Ya an estimate was obtained for the dimension of the Lie algebra of infinitesimal affine transformations of spaces with affine connection that represent a direct product of at least three non-projective Euclidean spaces of the special condition. Such spaces are called spaces of the first type.

In this paper, the accuracy of this estimate is proven. To solve the problem, a system of linear homogeneous equations is investigated, which is satisfied by the components of an arbitrary infinitesimal affine transformation.

This system is obtained using the properties of the Lie derivative applied to the tensor field of curvature of the spaces under consideration. An estimate of the rank of this system made it possible to obtain a lower estimate for the rank of the matrix of the original system.

Keywords: direct product of affine connectivity spaces, infinitesimal affine transformations, Lie algebra, dimension of Lie algebra

References

1. *Egorov, I.P.:* Movements in spaces of affine connection. Scientific Notes Penza Pedagogical Institute (1965).
2. *Glebova, M.V., Sultanov, A. Ya.:* On the dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces with affine connection of the first type. DGMF, **55**:2, 70—77 (2024). doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-5.
3. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Fundamentals of differential geometry, Moscow (1981).
4. *Morgun, M.V.:* Infinitesimal affine transformations of the direct product of affine connectivity spaces. PhD thesis. Kazan (2009).
5. *Morgun, M.V.:* Affine transformations of the direct product of non-projective Euclidean spaces of affine connectivity. Izvestia Vuzov. Math., 4, 72—77 (2009).
6. *Sultanov, A.Ya., Glebova, M.V., Bolotnikova, O.V.:* Lie algebras of differentiations of linear algebras over a field. DGMF, 52, 123—136 (2021).

For citation: Glebova, M.V., Sultanova, G.A. On the maximal dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces of affine connection of the first type. DGMF, 56, 69—82 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-7.

УДК 514.76

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
arturkuleshov@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-8

Симметрии одной задачи гидродинамики со свободной границей

Рассматривается задача о волнах на воде в трехмерном случае без поверхностного натяжения, относящаяся к классу задач со свободной границей. Как показали Т. Брук Бенджамин и П. Олвер, на задачи такого типа можно распространить методы группового анализа дифференциальных уравнений. Основу группового анализа составляет техника вычисления алгебры Ли инфинитезимальных симметрий заданной системы дифференциальных уравнений. Цель настоящей работы — продемонстрировать применение этих методов на примере вышеуказанной задачи. Произведен подробный вывод базисных инфинитезимальных симметрий, указан их физический смысл, вычислены их попарные коммутаторы и найдены члены производного ряда для алгебры Ли, являющейся линейной оболочкой данных инфинитезимальных симметрий. Показано, что все инфинитезимальные симметрии вышеуказанной задачи образуют 13-мерную неразрешимую алгебру Ли, что согласуется с результатом, приведенным без доказательства в работе вышеуказанных авторов.

Ключевые слова: задача со свободной границей, групповой анализ, инфинитезимальная симметрия, алгебра Ли

Поступила в редакцию 10.05.2025 г.

1. Введение. Постановка задачи

Нахождение групп симметрий тех или иных дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, составляет основу группового анализа дифференциальных уравнений, восходящего к работам Софуса Ли и имеющего многочисленные приложения. Например, с помощью этого метода строят новые решения по уже известным, находят точные решения, имеющие физический смысл, а также получают законы сохранения согласно теореме Нётер (см., напр., монографии [1—4]). В работе [7] показано, каким образом групповой анализ можно распространить на случай задач гидродинамики со свободной границей. Свой подход авторы указанной работы проиллюстрировали на примере нахождения алгебры Ли инфинитезимальных симметрий для двумерной задачи при отсутствии поверхностного натяжения ($\sigma = 0$), ограничившись лишь указанием конечного результата для аналогичной трехмерной задачи. В настоящей статье мы восполняем указанный пробел, произведя подробный вывод алгебры Ли инфинитезимальных симметрий для трехмерного случая.

Пусть (x, y, z) — прямоугольная декартова система координат, причем ось y направлена вверх, и пусть несжимаемая невязкая жидкость единичной плотности заполняет область D_η, ограниченную сверху подвижной (свободной) поверхностью S, описываемой уравнением

$$y = \eta(x, z, t), \tag{1.1}$$

где t — время, η — некоторая гладкая функция переменных x, z, t. Горизонтальная проекция S_0 поверхности S представляет собой всю плоскость xz. Область D_η может как простираться на бесконечную глубину для всех $(x, z) \in S_0$, так и быть ограниченной снизу фиксированной горизонтальной плоскостью $y = -h$. Для всякой функции $f(x, y, z, t)$ обозначим через f_S ее ограничение на поверхность S, то есть результат подстановки уравнения (1.1) в данную функцию.

Следуя [7], будем считать, что поток жидкости порожден консервативными, а значит, безвихревыми силами. В таком случае векторное поле скоростей $\vec{u}\colon D_\eta \to \mathbb{R}^3$ является потенциальным, то есть представляется в виде $\vec{u} = \nabla\varphi$, где $\varphi\colon D_\eta \to$ $\to \mathbb{R}$ — потенциал. В силу того что несжимаемость жидкости приводит к условию $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \tag{1.2}$$

Наряду с ним рассматриваются нелинейные граничные условия: кинематическое условие (kinematic condition)

$$\Gamma_1 \equiv \eta_t - \Phi_{(y)} + \Phi_{(x)}\eta_x + \Phi_{(z)}\eta_z = 0 \tag{1.3}$$

и динамическое условие (dynamic condition) для случая отсутствия поверхностного натяжения ($\sigma = 0$)

$$\Gamma_2 \equiv \Phi_{(t)} + \frac{1}{2}\left(\Phi_{(x)}^2 + \Phi_{(y)}^2 + \Phi_{(z)}^2\right) + g\eta = 0, \tag{1.4}$$

где

$$\Phi_{(x)} = (\varphi_x)_S,\ \ \Phi_{(y)} = \left(\varphi_y\right)_S,$$
$$\Phi_{(z)} = (\varphi_z)_S,\ \ \Phi_{(t)} = (\varphi_t)_S.$$

Уравнения (1.2—1.4) вместе образуют *трехмерную задачу со свободной границей*. Требуется найти алгебру Ли инфинитезимальных симметрий задачи (1.2—1.4).

Замечание 1. В число кинематических условий также включают (см., напр., [7]) требование $|\nabla\varphi| \to 0$ при

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \to \infty,$$

а также условие $\varphi_y = 0$ при $y = -h$ (в случае конечной глубины). Кроме того, требуют, чтобы $\eta \to 0$ при $(x^2 + z^2)^{1/2} \to \infty$. Однако данные требования в наших последующих рассмотрениях учитываться не будут.

Замечание 2. Нахождение алгебры Ли инфинитезимальных симметрий для двумерной задачи при наличии поверхностного натяжения ($\sigma \neq 0$) приведено в статье [6].

Замечание 3. К аналогичным задачам несколько более общего вида приводит модель трехмерной жидкости под тонким слоем льда [8; 10], а также модель пульсирующего (pulsatile) потока в трубках с вязкоупругими (viscoelastic) стенками [9]. Задачам со свободной границей посвящена монография [5].

2. Описание метода

Материал данного пункта основан на приложении 2 статьи [7]. Рассмотрим задачу со свободной границей в более общей постановке. Обозначим набор независимых переменных через $(\vec{x}, y) = (x^1, \dots, x^p, y) \in \mathbb{R}^{p+1}$, причем время t содержится среди них в качестве одной из переменных x^i ($i = \overline{1, p}$), а координата $y \equiv x^{p+1}$ выделена, поскольку в рассматриваемой задаче она играет роль вертикального направления. Набор зависимых переменных обозначим через

$$\vec{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^q) \in \mathbb{R}^q,$$

а через $\partial\vec{\phi}$ обозначим набор из всевозможных частных производных ϕ_I^j функций ϕ^j ($j = \overline{1, q}$) по переменным $(\vec{x}, y)$ до заданного порядка ν_1 включительно:

$$\phi_I^j := \frac{\partial^{|I|}\phi^j}{\partial x^I} = \frac{\partial^{|I|}\phi^j}{\partial(x^1)^{\lambda_1} \dots \partial(x^{p+1})^{\lambda_{p+1}}}, \quad 1 \leq |I| \leq \nu_1,$$

где $I = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$, $|I| = \lambda_1 + \dots + \lambda_{p+1}$. Сама задача со свободной границей представляется в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$\vec{\Lambda}(\vec{x}, y, \vec{\phi}, \partial\vec{\phi}) = 0, \tag{2.1}$$

рассматриваемой на области

$$D_\eta = \{(\vec{x}, y)\colon y \leq \eta = h(\vec{x})\} \subset \mathbb{R}^{p+1},$$

вместе с граничными условиями

$$\vec{\Gamma}\left(\vec{x}, \eta, \eta_J, \vec{\phi}_S, \partial\vec{\phi}_S\right) = 0, \qquad (2.2)$$

справедливыми на верхней границе данной области, называемой *свободной поверхностью*

$$S = \{(\vec{x}, y) \colon y = \eta = h(\vec{x})\},$$

где

$$\eta_J \colon = \frac{\partial^{|J|}\eta}{\partial x^J} = \frac{\partial^{|I|}\phi^j}{\partial(x^1)^{\lambda_1} \ldots \partial(x^p)^{\lambda_p}},$$

$$J = \left(\lambda_1, \ldots, \lambda_p\right), \quad 1 \leq |J| \leq \nu_2,$$

$$\vec{\phi}_S \colon = \vec{\phi}\left(\vec{x}, \eta(\vec{x})\right).$$

Через $\partial\vec{\phi}_S$ обозначен набор из всевозможных частных производных функций $\vec{\phi}$ по переменным $(\vec{x}, y)$ до заданного порядка ν_2 включительно, ограниченных на поверхность S:

$$\left(\phi_I^j\right)_S \colon = \phi_I^j\left(\vec{x}, \eta(\vec{x})\right), \quad 1 \leq |I| \leq \nu_2.$$

Решение задачи (2.1, 2.2) — это пара функций $h \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ и $\vec{f} \colon D_\eta \to \mathbb{R}^q$ таких, что $\eta = h(\vec{x})$ и $\vec{\phi} = \vec{f}(\vec{x}, y)$ удовлетворяют системе (2.1, 2.2) тождественно.

Рассмотрим диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$ на себя, заданный уравнениями

$$\tilde{\vec{x}} = \vec{X}\left(\vec{x}, y, \vec{\phi}\right), \quad \tilde{\vec{y}} = \vec{Y}\left(\vec{x}, y, \vec{\phi}\right), \quad \tilde{\vec{\phi}} = \vec{P}\left(\vec{x}, y, \vec{\phi}\right).$$

Если он достаточно близок к тождественному отображению, то область D_η взаимно-однозначно отобразится в новую область $D_{\tilde{\eta}}$ со свободной границей $\tilde{\eta} = \tilde{h}\left(\tilde{\vec{x}}\right)$, а функция $\vec{f} \colon D_\eta \to \mathbb{R}^q$ преобразуется в новую функцию $\tilde{\vec{f}} \colon D_{\tilde{\eta}} \to \mathbb{R}^q$. Такой диффеоморфизм называется *симметрией задачи* (2.1, 2.2), если пара $\tilde{h}$, $\tilde{\vec{f}}$ является ее решением всякий раз, когда $\tilde{h}$, $\vec{f}$ — решение.

Пусть $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, причем по повторяющемуся индексу предполагается суммирование согласно правилу Эйнштейна. Векторное поле X на $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$ рассматривается как дифференциальный оператор первого порядка, действующий на $C^\infty(\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q)$:

$$X = \alpha^i(\vec{x}, y, \vec{\phi})\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta(\vec{x}, y, \vec{\phi})\frac{\partial}{\partial y} + \psi^j(\vec{x}, y, \vec{\phi})\frac{\partial}{\partial \phi^j}. \qquad (2.3)$$

Векторное поле такого вида является генератором некоторой локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$ на себя. Если все они являются симметриями задачи (2.1, 2.2), то векторное поле X называется *инфинитезимальной симметрией* данной задачи. Множество всех инфинитезимальных симметрий задачи (2.1, 2.2) образует алгебру Ли относительно обычного коммутатора векторных полей. Последняя является алгеброй Ли группы Ли симметрий задачи (2.1, 2.2) и играет важную роль в исследовании данной задачи.

Для векторного поля вида (2.3) рассматриваются его продолжения в пространства струй высших порядков над $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$. Формула для -го продолжения векторного поля X имеет вид

$$\mathrm{pr}_\nu X = X + \delta\phi_I^j \frac{\partial}{\partial \phi_I^j}, \quad 1 \le |I| \le \nu, \qquad (2.4)$$

где

$$\delta\phi_I^j = \partial_I\left(\psi^j - X_1(\phi^j)\right) + X_1(\phi_I^j), \qquad (2.5)$$

$$X_1 = \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta \frac{\partial}{\partial y}. \qquad (2.6)$$

Здесь и далее мы опускаем аргументы у функций α^i, β, ψ^j.

В рамках задачи со свободной границей также определяется граничное продолжение (boundary prolongation), формула для которого имеет вид

$$\mathrm{pr}_\nu X_S = X_S + \left(\delta\phi_I^j\right)_S \frac{\partial}{\partial \Phi_{(I)}^j} + \delta\eta_J \frac{\partial}{\partial \eta_J}, \qquad (2.7)$$

где

$$X_S = \alpha_S^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta_S \frac{\partial}{\partial \eta} + \psi_S^j \frac{\partial}{\partial \Phi^j},$$

$$\delta \eta_J = \partial_J\big(\beta_S - X_0(\eta)\big) + X_0(\eta_J), \tag{2.8}$$

$$X_0 = \alpha_S^i \frac{\partial}{\partial x^i}\ , \quad \Phi^j_{(I)} = \left(\phi^j_I\right)_S, \quad \Phi^j = \left(\phi^j\right)_S. \tag{2.9}$$

$$1 \le |I| \le \nu, \quad 1 \le |J| \le \nu.$$

Для величин $\delta \phi^j_I$, $\delta \eta_J$ справедливы рекуррентные формулы (см.: [3]):

$$\delta \phi^j_{Iu} = D_u\left(\delta \phi^j_I\right) - \phi^j_{Iv} D_u \alpha^v, \quad u,\, v = \overline{1,\, p+1}, \tag{2.10}$$

$$\delta \eta_{Ji} = D_i\left(\delta \eta_J\right) - \eta_{Jk} D_i\left(\alpha_S^k\right), \tag{2.11}$$

где D_u — операторы полных производных:

$$D_u = \frac{\partial}{\partial x^u} + \varphi_u \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varphi_{uv} \frac{\partial}{\partial \varphi_v}\ , \quad u = \overline{1,\, p+1};$$

$$\phi^j_{Iu} = \frac{\partial}{\partial x^u} \frac{\partial^{|I|} \phi^j}{\partial x^I}, \quad \eta_{Ji} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial^{|J|} \eta}{\partial x^J}.$$

Имеет место

Теорема [7, с. 183]. *Векторное поле X является инфинитезимальной симметрией задачи (2.1, 2.2) тогда и только тогда, когда имеют место равенства*

$$\mathrm{pr}_{\nu_1} X\left(\vec{\Lambda}\right) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{\Lambda} = 0, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{pr}_{\nu_2} X_S\left(\vec{\Gamma}\right) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{\Gamma} = 0, \tag{2.13}$$

где $\mathrm{pr}_{\nu_1} X$ *и* $\mathrm{pr}_{\nu_2} X_S$ *определяются по формулам (2.4—2.9).*

Уравнения (2.12) и (2.13) называются *определяющими уравнениями* для нахождения инфинитезимальных симметрий задачи (2.1, 2.2).

Замечание 4. В формулах продолжения, а также в определяющих уравнениях символы ϕ^j_I, Φ^j, $\Phi^j_{(I)}$, η, η_J рассматриваются как независимые переменные.

3. Составление определяющих уравнений

В соответствии с п. 2 всякая инфинитезимальная симметрия задачи (1.2—1.4) должна иметь вид

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \psi\frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{3.1}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \tau, \psi$ — функции переменных x, y, z, t, φ. На протяжении всего дальнейшего изложения индексы будут пробегать следующие значения (если не оговорено иное):

$$u, v, w = \overline{1,\ 4};\quad i, j, k = \overline{1,\ 3};\quad r, s = \overline{2,\ 4}.$$

Обозначим

$$t = x^1,\quad x = x^2,\quad z = x^3,\quad y = x^4,$$

$$\tau = \alpha^1,\quad \alpha = \alpha^2,\quad \gamma = \alpha^3,\quad \beta = \alpha^4,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^u} = \partial_{x^u} = \partial_u,\quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \partial_\varphi,\quad \varphi_{x^u} = \varphi_u,\quad \varphi_{x^u x^v} = \varphi_{uv},$$

$$\delta\varphi_{x^u} = \delta\varphi_u,\quad \delta\varphi_{x^u x^v} = \delta\varphi_{uv},\quad \Phi_{(x^u)} = \Phi_{(u)},$$

$$\eta_{x^i} = \eta_i,\quad \delta\eta_{x^i} = \delta\eta_i,$$

тогда с учетом правила Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу векторное поле X примет вид

$$X = \alpha^u\frac{\partial}{\partial x^u} + \psi\frac{\partial}{\partial \varphi} = \alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \psi\frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{3.2}$$

Поскольку порядок уравнения (1.2) равен двум, то нам потребуется второе продолжение векторного поля X, которое вследствие формул (2.4—2.6) имеет вид

$$\mathrm{pr}_2 X = X + \delta\varphi_u\frac{\partial}{\partial \varphi_u} + \textstyle\sum_{u\le v}\delta\varphi_{uv}\frac{\partial}{\partial \varphi_{uv}}, \tag{3.3}$$

где в силу (2.10)

$$\delta\varphi_u = D_u\psi - \varphi_v D_u\alpha^v, \tag{3.4}$$

$$\delta\varphi_{uv} = D_u\delta\varphi_v - \varphi_{vw} D_u\alpha^w. \tag{3.5}$$

Порядок уравнений (1.3) и (1.4) равен единице, а потому достаточно ограничиться первым граничным продолжением этого векторного поля

$$\mathrm{pr}_1\, X_S = X_S + (\delta\varphi_u)_S \frac{\partial}{\partial\Phi_{(u)}} + \delta\eta_i \frac{\partial}{\partial\eta_i}, \tag{3.6}$$

где в силу (2.11)

$$\delta\eta_i = D_i(\beta_S) - \eta_j D_i\big(\alpha_S^j\big), \tag{3.7}$$

$$D_i\big(\alpha_S^j\big) = D_i\big(\alpha^j\big)_S + \big(\alpha_y^j\big)_S \eta_i. \tag{3.8}$$

Итак, определяющие уравнения (2.12, 2.13) для задачи (1.2—1.4) имеют вид

$$\mathrm{pr}_2\, X\,(\Delta\varphi) = 0 \ \text{ при } \ \Delta\varphi = 0, \tag{3.9}$$

$$\mathrm{pr}_1\, X_S\,(\Gamma_1) = 0 \ \text{ при } \ \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \tag{3.10}$$

$$\mathrm{pr}_1\, X_S\,(\Gamma_2) = 0 \ \text{ при } \ \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \tag{3.11}$$

где $\mathrm{pr}_2\, X$ и $\mathrm{pr}_1\, X_S$ выражаются по формулам (3.3) и (3.6) соответственно.

4. Анализ уравнения (3.9)

Лемма 1. *Уравнение (3.9) равносильно системе*

$$\alpha_x = \beta_y = \gamma_z,\ \alpha_y = -\beta_x,\ \alpha_z = -\gamma_x,\ \beta_z = -\gamma_y, \tag{4.1}$$

$$\alpha_\varphi = \beta_\varphi = \gamma_\varphi = 0, \tag{4.2}$$

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = \tau_\varphi = 0, \tag{4.3}$$

$$\Delta\psi = 0,\ \Delta\alpha = 2\psi_{x\varphi},\ \Delta\beta = 2\psi_{y\varphi}, \tag{4.4}$$

$$\Delta\gamma = 2\psi_{z\varphi},\ \psi_{\varphi\varphi} = 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. С учетом (3.2, 3.3) уравнение (3.9) принимает вид

$$\textstyle\sum_r \delta\varphi_{rr} = 0 \ \text{ при } \ \Delta\varphi = 0. \tag{4.6}$$

Формулы (3.5) распишем подробнее применительно к $\delta\varphi_{rr}$:

$$\delta\varphi_{rr} = \left(\Delta_r\psi + \psi_\varphi\varphi_{rr}\right) - \varphi_s\left(\Delta_r\alpha^s + \alpha^s_\varphi\varphi_{rr}\right) - 2\varphi_{rs}D_r\alpha^s,$$

где

$$\Delta_r\alpha^s = \alpha^s_{rr} + 2\alpha^s_{r\varphi}\varphi_r + \alpha^s_{\varphi\varphi}\varphi_r^2,$$

$$\Delta_r\psi = \psi_{rr} + 2\psi_{r\varphi}\varphi_r + \psi_{\varphi\varphi}\varphi_r^2.$$

Тогда левая часть (4.6) принимает вид

$$\sum_r \delta\varphi_{rr} = \sum_r \Delta_r\psi + \psi_\varphi\Delta\varphi - \sum_r \varphi_u\Delta_r\alpha^u -$$

$$-\varphi_u\alpha^u_\varphi\Delta\varphi - 2\sum_r \varphi_{ru}D_r\alpha^u.$$

Все величины φ_{ru} фигурируют здесь в явной форме. С учетом уравнения $\Delta\varphi = 0$ имеем $\varphi_{zz} = -\varphi_{xx} - \varphi_{yy}$, поэтому (4.6) принимает вид

$$\sum_r \Delta_r\psi - \sum_r \varphi_u\Delta_r\alpha^u -$$

$$-2\varphi_{xu}D_x\alpha^u - 2\varphi_{yu}D_y\alpha^u - 2\varphi_{xz}D_z\alpha - 2\varphi_{yz}D_z\beta +$$

$$+2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})D_z\gamma - 2\varphi_{zt}D_z\tau = 0. \qquad (4.7)$$

Рассматривая левую часть (4.7) как полином от переменных

$$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}, \varphi_{xz}, \varphi_{yz}, \varphi_{xt}, \varphi_{yt}, \varphi_{zt}$$

с коэффициентами, зависящими лишь от x, y, z, t, φ, мы приравниваем каждый из коэффициентов к нулю, в результате чего получаем систему (4.1—4.5). Лемма доказана.

Следствие 1. Коэффициенты α, β, γ зависят лишь от переменных x, y, z, t, в то время как τ зависит лишь от t.

Следствие 2. Имеют место равенства

$$\alpha^r_{rr} = -\alpha^r_{ss}, \quad r \neq s, \qquad (4.8)$$

$$D_u\alpha^r = \alpha^r_u, \quad D_r\tau = 0, \quad D_t\tau = \tau_t. \qquad (4.9)$$

5. Анализ уравнения (3.10)

Лемма 2. *Пусть имеют место равенства (4.1—4.5), тогда уравнение (3.10) равносильно системе уравнений*

$$\tau_t + \psi_\varphi = 2\alpha_x, \tag{5.1}$$

$$\psi_x = \alpha_t, \quad \psi_z = \gamma_t, \quad \psi_y = \beta_t \tag{5.2}$$

на поверхности S.

Доказательство. С учетом (3.2, 3.6) уравнение (3.10) принимает вид

$$\delta\eta_t - \left(\delta\varphi_y\right)_S + (\delta\varphi_x)_S\eta_x + \varphi_x\delta\eta_x +$$

$$+(\delta\varphi_z)_S\eta_z + \varphi_z\delta\eta_z = 0 \ \text{ при } \ \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0. \tag{5.3}$$

Распишем подробно $\delta\eta_x$, $\delta\eta_z$ и $\delta\eta_t$, используя формулы (3.7, 3.8), которые упрощаются благодаря равенствам (4.9):

$$\delta\eta_t = (\beta_t)_S + \left(\beta_y\right)_S\eta_t - \eta_x(\alpha_t)_S - \eta_x\left(\alpha_y\right)_S\eta_t -$$

$$-\eta_z(\gamma_t)_S - \eta_z\eta_t\left(\gamma_y\right)_S - \eta_t(\tau_t)_S, \tag{5.4}$$

$$\delta\eta_i = (\beta_i)_S + \left(\beta_y\right)_S\eta_i - \eta_j\left(\alpha_i^j\right)_S -$$

$$-\eta_x\eta_i\left(\alpha_y\right)_S - \eta_z\eta_i\left(\gamma_y\right)_S, \quad i = \overline{2,\ 3}. \tag{5.5}$$

Подставляя формулы (3.4), (5.4) и (5.5) в равенство (5.3), получим:

$$\beta_t + \beta_y\eta_t - \eta_x\alpha_t - \eta_x\alpha_y\eta_t - \eta_z\gamma_t - \eta_z\eta_t\gamma_y - \eta_t\tau_t -$$

$$-\left(D_y\psi - \varphi_x\alpha_y - \varphi_y\beta_y - \varphi_z\gamma_y\right) +$$

$$+\left(D_x\psi - \varphi_x\alpha_x - \varphi_y\beta_x - \varphi_z\gamma_x\right)\eta_x +$$

$$+\varphi_x\left(\beta_x + \beta_y\eta_x - \eta_x\alpha_x - \eta_x^2\alpha_y - \eta_z\gamma_x - \eta_z\eta_x\gamma_y\right) +$$

$$+\varphi_z\left(\beta_z + \beta_y\eta_z - \eta_x\alpha_z - \eta_x\eta_z\alpha_y - \eta_z\gamma_z - \eta_z^2\gamma_y\right) +$$

$$+\left(D_z\psi - \varphi_x\alpha_z - \varphi_y\beta_z - \varphi_z\gamma_z\right)\eta_z = 0 \ \text{ при } \ \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \tag{5.6}$$

где *S* мы для краткости опустили (так будем делать и далее).

Учитывая систему (3.10, 3.11), сделаем подстановку:

$$\eta_t = \varphi_y - \varphi_x\eta_x - \varphi_z\eta_z,$$

тогда (5.6) примет вид

$$\begin{gathered}
\beta_t + \beta_y(\varphi_y - \varphi_x\eta_x - \varphi_z\eta_z) - \\
-\eta_x\alpha_t - \eta_x\alpha_y(\varphi_y - \varphi_x\eta_x - \varphi_z\eta_z) - \\
-\eta_z\gamma_t - \eta_z\gamma_y(\varphi_y - \varphi_x\eta_x - \varphi_z\eta_z) - \tau_t(\varphi_y - \varphi_x\eta_x - \varphi_z\eta_z) - \\
-(D_y\psi - \varphi_x\alpha_y - \varphi_y\beta_y - \varphi_z\gamma_y) + \\
+(D_x\psi - \varphi_x\alpha_x - \varphi_y\beta_x - \varphi_z\gamma_x)\eta_x + \\
+\varphi_x(\beta_x + \beta_y\eta_x - \eta_x\alpha_x - \eta_x^2\alpha_y - \eta_z\gamma_x - \eta_z\eta_x\gamma_y) + \\
+(D_z\psi - \varphi_x\alpha_z - \varphi_y\beta_z - \varphi_z\gamma_z)\eta_z + \\
+\varphi_z(\beta_z + \beta_y\eta_z - \eta_x\alpha_z - \eta_x\eta_z\alpha_y - \eta_z\gamma_z - \eta_z^2\gamma_y) = 0. \quad (5.7)
\end{gathered}$$

Рассматривая левую часть (5.7) как полином от переменных η_x, η_z с коэффициентами, зависящими лишь от

$$x,\ y,\ z,\ t,\ \ \varphi,\ \varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_z,$$

мы сводим (5.7) к системе:

$$\eta_x^2:\ \ \alpha_y\varphi_x - \varphi_x\alpha_y = 0, \tag{5.8}$$

$$\eta_z^2:\ \ \gamma_y\varphi_z - \varphi_z\gamma_y = 0, \tag{5.9}$$

$$\eta_x\eta_z:\ \ \alpha_y\varphi_z + \gamma_y\varphi_x - \varphi_x\gamma_y - \varphi_z\alpha_y = 0, \tag{5.10}$$

$$\begin{gathered}
\eta_x:\ \ -\beta_y\varphi_x - \alpha_t - \alpha_y\varphi_y + \tau_t\varphi_x + \\
+(D_x\psi - \varphi_x\alpha_x - \varphi_y\beta_x - \varphi_z\gamma_x) + \\
+\varphi_x\beta_y - \varphi_x\alpha_x - \varphi_z\alpha_z = 0, \quad (5.11)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\eta_z:\ \ -\beta_y\varphi_z - \gamma_t - \gamma_y\varphi_y + \tau_t\varphi_z - \varphi_x\gamma_x + \\
+(D_z\psi - \varphi_x\alpha_z - \varphi_y\beta_z - \varphi_z\gamma_z) + \varphi_z\beta_y - \varphi_z\gamma_z = 0, \quad (5.12)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
1:\ \ \beta_t + \beta_y\varphi_y - \tau_t\varphi_y - (D_y\psi - \varphi_x\alpha_y - \varphi_y\beta_y - \varphi_z\gamma_y) + \\
+\varphi_x\beta_x + \varphi_z\beta_z = 0. \quad (5.13)
\end{gathered}$$

Равенства (5.8—5.10) тождественно выполняются и, таким образом, не влекут никаких ограничений на симметрию *X*. Рассматривая левые части равенств (5.11—5.13) как полиномы от переменных φ_x, φ_y,φ_z, мы приравниваем каждый из их коэффициентов к нулю, в результате чего получаем систему уравнений, часть из которых являются следствиями системы (4.1—4.5), а оставшиеся имеют вид (5.1, 5.2). Лемма доказана.

6. Анализ уравнения (3.11)

Лемма 3. *Уравнение (3.11) с условиями (4.1—4.5, 5.1—5.2) приводится к виду*

$$\psi_t + g\{(\tau_t - \psi_\varphi)\eta + \beta\} = 0 \text{ на } S. \quad (6.1)$$

Доказательство. Распишем подробнее уравнение (3.11), используя (1.3, 3.2, 3.6):

$$\delta\varphi_t + \textstyle\sum_r \varphi_r \delta\varphi_r + g\beta = 0 \text{ при } \Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \quad (6.2)$$

где *S* мы для краткости снова опустили. Подставляя выражения (3.4) для $\delta\varphi_u$ в (6.2), получим:

$$D_t\psi - \varphi_u D_t \alpha^u + \sum_r \varphi_r (D_r\psi - \varphi_u D_r \alpha^u) + g\beta = 0$$

при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, что с учетом (4.9) приводится к виду

$$\psi_t + \psi_\varphi \varphi_t - \varphi_u \alpha_t^u + \textstyle\sum_r \varphi_r (\psi_r + \psi_\varphi \varphi_r - \varphi_s \alpha_r^s) + g\beta = 0 \quad (6.3)$$

при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$.

Учитывая систему (3.10, 3.11), сделаем подстановку:

$$\varphi_t = -\frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) - g\eta,$$

тогда (6.3) примет вид

$$\psi_t - (\psi_\varphi - \tau_t)\left(\frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) + g\eta\right) - \varphi_x \alpha_t - \varphi_y \beta_t -$$
$$- \varphi_z \gamma_t + \varphi_x (\psi_x + \psi_\varphi \varphi_x - \varphi_x \alpha_x - \varphi_y \beta_x - \varphi_z \gamma_x) +$$

$$+\varphi_y(\psi_y+\psi_\varphi\varphi_y-\varphi_x\alpha_y-\varphi_y\beta_y-\varphi_z\gamma_y)+$$

$$+\varphi_z(\psi_z+\psi_\varphi\varphi_z-\varphi_x\alpha_z-\varphi_y\beta_z-\varphi_z\gamma_z)+g\beta=0. \quad (6.4)$$

Рассматривая левую часть (6.4) как полином от переменных φ_x, φ_y, φ_z с коэффициентами, зависящими лишь от $x,\ y,\ z,\ t,\ \varphi$, мы сводим (6.4) к системе:

$$\varphi_r^2\colon\ -\frac{1}{2}\left(\psi_\varphi-\tau_t\right)+\psi_\varphi=\alpha_r^r\ \ \left(\text{по } r \text{ не суммируем}\right), \quad (6.5)$$

$$\varphi_r\varphi_s\colon\ -\alpha_r^s-\alpha_s^r=0\ \ (r\neq s), \quad (6.6)$$

$$\varphi_r\colon\ -\alpha_t^r+\psi_r=0, \quad (6.7)$$

$$1\colon\ \psi_t+g\eta\left(\tau_t-\psi_\varphi\right)+g\beta=0. \quad (6.8)$$

Уравнения (6.5—6.7) являются следствиями ранее полученных уравнений (4.1—4.5, 5.1, 5.2), а (6.8) приводится к виду (6.1). Лемма доказана.

Замечание 5. Независимую переменную η, фигурирующую явно либо неявно в уравнениях (5.1, 5.2, 6.1), далее будем везде заменять на y.

7. В силу (4.5) ψ_φ не зависит от φ, а значит, ψ можно представить в виде линейной функции по данной переменной:

$$\psi=c_0(x,y,z,t)\varphi+\chi(x,y,z,t). \quad (7.1)$$

Покажем, что c_0 — константа. В самом деле, в силу следствия 1 коэффициенты α,β,γ зависят лишь от переменных x,y,z,t, в то время как τ зависит лишь от t. Поэтому, дифференцируя (7.1) по x, y, z и t, с учетом равенств (5.2, 6.1) получим

$$(c_0)_r\varphi+\chi_r=\psi_r=\alpha_t,$$

$$(c_0)_t\varphi+\chi_t=\psi_t=-gy\left(\tau_t-\psi_\varphi\right)-g\beta,$$

где правые и левые части рассматриваются как многочлены от переменной φ, причем $\left(\tau_t-\psi_\varphi\right)y+\beta$ не зависит от φ. Тогда

$$(c_0)_u=0,\ \ u=\overline{1,\ 4}.$$

Таким образом, выражение для ψ упрощается:

$$\psi = c_0\varphi + \chi(x, y, z, t), \quad \psi_\varphi = c_0 = const. \tag{7.2}$$

Тогда в силу (4.1, 5.1) имеем:

$$\alpha_x = \beta_y = \gamma_z = \frac{1}{2}(\tau_t + \psi_\varphi) = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0),$$

причем $\tau_t + c_0$ зависит лишь от t. А значит, коэффициенты α, β и γ можно представить в виде

$$\alpha = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)x + \sigma(y, z, t), \tag{7.3}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)y + \rho(x, z, t), \tag{7.4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)z + \omega(x, z, t), \tag{7.5}$$

где $\sigma(y, z, t)$, $\rho(x, z, t)$ и $\omega(x, z, t)$ — некоторые функции. Из (7.3—7.5) и (4.8) следует, что

$$\alpha_{ss}^r = 0, \quad r, s = \overline{2,\ 4}.$$

Значит, каждая из функций $\sigma(y, z, t)$, $\rho(x, z, t)$, $\omega(x, z, t)$ линейна по переменным x, y, z, тогда

$$\sigma(y, z, t) = \sigma_1(t)yz + \sigma_2(t)y + \sigma_3(t)z + \sigma_4(t), \tag{7.6}$$

$$\rho(x, z, t) = \rho_1(t)xz + \rho_2(t)x + \rho_3(t)z + \rho_4(t), \tag{7.7}$$

$$\omega(x, z, t) = \omega_1(t)xy + \omega_2(t)x + \omega_3(t)y + \omega_4(t). \tag{7.8}$$

Из равенств (4.1) с учетом (7.3—7.8) вытекают следующие соотношения на коэффициенты σ_u, ρ_u, ω_u $(u = \overline{1,\ 4})$:

$$\sigma_1(t) = -\rho_1(t), \quad \sigma_2(t) = -\rho_2(t), \tag{7.9}$$

$$\sigma_1(t) = -\omega_1(t), \quad \sigma_3(t) = -\omega_2(t), \tag{7.10}$$

$$\rho_1(t) = -\omega_1(t), \quad \rho_3(t) = -\omega_3(t), \tag{7.11}$$

из которых, в свою очередь, следует, что

$$\sigma_1(t) = \rho_1(t) = \omega_1(t) = 0. \tag{7.12}$$

С учетом (7.6—7.12) формулы (7.3—7.5) принимают вид

$$\alpha = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)x + \sigma_2(t)y + \sigma_3(t)z + \sigma_4(t), \tag{7.13}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)y - \sigma_2(t)x + \rho_3(t)z + \rho_4(t), \tag{7.14}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\tau_t + c_0)z - \sigma_3(t)x - \rho_3(t)y + \omega_4(t). \tag{7.15}$$

Из (4.4) и (7.1) получаем, что

$$\Delta\chi = 0. \tag{7.16}$$

8. Найдем выражение для функции $\chi(x, y, z, t)$. В силу (5.2) имеем:

$$\chi_x = \frac{1}{2}\tau'' x + \sigma_2' y + \sigma_3' z + \sigma_4', \tag{8.1}$$

$$\chi_y = \frac{1}{2}\tau'' y - \sigma_2' x + \rho_3' z + \rho_4', \tag{8.2}$$

$$\chi_z = \frac{1}{2}\tau'' z - \sigma_3' x - \rho_3' y + \omega_4'. \tag{8.3}$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по t. С учетом равенства смешанных частных производных $\chi_{rs} = \chi_{sr}$, где $r \neq s$, формулы (8.1—8.3) дают

$$\sigma_2' = \sigma_3' = \rho_3' = 0.$$

Значит, σ_2, σ_3, ρ_3 — константы. Обозначим их следующим образом:

$$\sigma_2 = c_{11}, \quad \sigma_3 = c_{12}, \quad \rho_3 = c_{13}. \tag{8.4}$$

Тогда формулы (8.1—8.3) упрощаются:

$$\chi_x = \frac{1}{2}\tau'' x + \sigma_4', \quad \chi_y = \frac{1}{2}\tau'' y + \rho_4', \quad \chi_z = \frac{1}{2}\tau'' z + \omega_4'.$$

Заметим, что в силу (7.16) они приводят к равенству

$$\tau'' = 0.$$

Следовательно, τ — линейная функция, то есть τ имеет вид

$$\tau = c_2 t + c_3, \quad (c_2,\, c_3 = const) \tag{8.5}$$

и при этом $\chi(x, y, z, t)$ представима в виде

$$\chi(x, y, z, t) = \sigma_4'(t)x + \rho_4'(t)y + \omega_4'(t)z + \theta(t), \qquad (8.6)$$

где $\theta(t)$ — некоторая функция. Тогда

$$\chi_t = \sigma_4''x + \rho_4''y + \omega_4''z + \theta'.$$

С другой стороны, из (6.1) с учетом (7.14) и (8.4) получаем

$$\chi_t = \frac{1}{2}yg(c_0 - 3\tau') - g\big(-\sigma_2 x + \rho_3 z + \rho_4(t)\big).$$

Таким образом,

$$\sigma_4''x + \rho_4''y + \omega_4''z + \theta' =$$
$$= \frac{1}{2}yg(c_0 - 3\tau') - g\big(-\sigma_2 x + \rho_3 z + \rho_4(t)\big). \qquad (8.7)$$

Рассматривая (8.7) как тождество двух многочленов от переменных x, y, z, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях этих переменных:

$$x\colon\ \ \sigma_4'' = g\sigma_2, \qquad (8.8)$$

$$y\colon\ \ \rho_4'' = \frac{1}{2}g(c_0 - 3\tau'), \qquad (8.9)$$

$$z\colon\ \ \omega_4'' = -g\rho_3, \qquad (8.10)$$

$$1\colon\ \ \theta' = -g\rho_4. \qquad (8.11)$$

Из (8.8—8.9) вытекает, что σ_4, ρ_4, ω_4 и θ имеют вид

$$\sigma_4 = \frac{1}{2}g\sigma_2 t^2 + c_4 t + c_5, \qquad (8.12)$$

$$\rho_4 = \frac{g}{4}c_1 t^2 + c_6 t + c_7, \qquad (8.13)$$

$$\omega_4 = -\frac{1}{2}g\rho_3 t^2 + c_8 t + c_9, \qquad (8.14)$$

$$\theta = -\frac{g^2}{12}c_1 t^3 - \frac{1}{2}gc_6 t^2 - gc_7 t + c_{10}, \qquad (8.15)$$

где c_4, …, c_{10} — константы, причем

$$c_1 = c_0 - 3c_2. \qquad (8.16)$$

9. Выражения (7.13—7.15) для $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ с учетом (8.16) принимают вид

$$\alpha = \frac{1}{2}(4c_2 + c_1)x + c_{11}y + c_{12}z + \frac{1}{2}gc_{11}t^2 + c_4t + c_5, \quad (9.1)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(4c_2 + c_1)y - c_{11}x + c_{13}z + \frac{g}{4}c_1t^2 + c_6t + c_7, \quad (9.2)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(4c_2 + c_1)z - c_{12}x - c_{13}y - \frac{1}{2}gc_{13}t^2 + c_8t + c_9, \quad (9.3)$$

а выражение (7.2) для ψ в силу (8.6, 8.12—8.16) принимает вид

$$\psi = (3c_2 + c_1)\varphi + (g\sigma_2t + c_4)x + \left(\frac{g}{2}c_1t + c_6\right)y +$$

$$+(-g\rho_3t + c_8)z - \frac{g^2}{12}c_1t^3 - \frac{1}{2}gc_6t^2 - gc_7t + c_{10}. \quad (9.4)$$

Подставляя найденные выражения в (3.1) и группируя слагаемые при одинаковых константах, мы выделяем базис алгебры Ли $\mathfrak{L}$ инфинитезимальных симметрий задачи (1.2—1.4):

$$X = \sum_{i=1}^{13} c_iX_i,$$

где

$$X_1 = \frac{x}{2}\partial_x + \left(\frac{1}{2}y + \frac{g}{4}t^2\right)\partial_y + \frac{z}{2}\partial_z + \left(\varphi + \frac{gt}{2}y - \frac{g^2}{12}t^3\right)\partial_\varphi,$$

$$X_2 = 2x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z + t\partial_t + 3\varphi\partial_\varphi,$$

$$X_3 = \partial_t, \quad X_4 = t\partial_x + x\partial_\varphi, \quad X_5 = \partial_x,$$

$$X_{11} = \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_x - x\partial_y + gtx\partial_\varphi,$$

$$X_{12} = z\partial_x - x\partial_z,$$

$$X_{13} = z\partial_y + \left(-y - \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_z - gtz\partial_\varphi,$$

$$X_6 = t\partial_y + \left(y - \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_\varphi,$$

$$X_7 = \partial_y - gt\partial_\varphi, \quad X_8 = t\partial_z + z\partial_\varphi,$$
$$X_9 = \partial_z, \quad X_{10} = \partial_\varphi.$$

Для удобства перейдем к новому базису:

$$V_1 = X_5, \quad V_2 = X_3, \quad V_3 = X_{10}, \quad V_4 = X_7,$$
$$V_5 = X_4, \quad V_6 = X_6, \quad V_7 = 4X_1 - X_2,$$
$$V_8 = X_{11}, \quad V_9 = \frac{1}{2}X_2, \quad V_{10} = X_{12},$$
$$V_{11} = X_{13}, \quad V_{12} = X_8, \quad V_{13} = X_9.$$

Выражения для новых базисных инфинитезимальных симметрий имеют вид

$$V_1 = \partial_x, \quad V_2 = \partial_t, \quad V_3 = \partial_\varphi, \tag{9.5}$$
$$V_4 = \partial_y - gt\partial_\varphi, \tag{9.6}$$
$$V_5 = t\partial_x + x\partial_\varphi, \tag{9.7}$$
$$V_6 = t\partial_y + \left(y - \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_\varphi, \tag{9.8}$$
$$V_7 = gt^2\partial_y - t\partial_t + \left(\varphi + 2gty - \frac{g^2}{3}t^3\right)\partial_\varphi, \tag{9.9}$$
$$V_8 = \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_x - x\partial_y + gtx\partial_\varphi, \tag{9.10}$$
$$V_9 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \frac{t}{2}\partial_t + \frac{3}{2}\varphi\partial_\varphi, \tag{9.11}$$
$$V_{10} = z\partial_x - x\partial_z, \tag{9.12}$$
$$V_{11} = z\partial_y + \left(-y - \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_z - gtz\partial_\varphi, \tag{9.13}$$
$$V_{12} = t\partial_z + z\partial_\varphi, \tag{9.14}$$
$$V_{13} = \partial_z. \tag{9.15}$$

Отметим, что каждое из найденных векторных полей является генератором соответствующей однопараметрической группы симметрий задачи (1.2—1.4). А именно, V_1 и V_{13} порождают горизонтальные сдвиги, V_2 — сдвиги по времени, V_3 — сдвиги значения потенциала, V_4 — вертикальные сдвиги, V_{10} — горизонтальные вращения, V_5 и V_{12} — горизонтальные галилеевы бусты, V_6 — вертикальные галилеевы бусты, V_7 — вертикальные ускорения, V_8 и V_{11} — вращения, компенсируемые гравитацией (gravity-compensated rotations), V_9 — масштабирование.

Исследуем полученную алгебру Ли $\mathfrak{L}$ на разрешимость. Для этого приведем здесь попарные коммутаторы найденных векторных полей. Все ненулевые коммутаторы вида $[V_i, V_j]$, где $1 \le i < j \le 13$, имеют вид

$$[V_1, V_5] = V_3, \ \ [V_1, V_8] = -V_4, \ \ [V_1, V_9] = V_1,$$
$$[V_1, V_{10}] = -V_{13}, \ \ [V_2, V_4] = -gV_3, \ \ [V_2, V_5] = V_1,$$
$$[V_2, V_6] = V_4, \ \ [V_2, V_7] = 2gV_6 - 2V_2, \ \ [V_2, V_8] = gV_5,$$
$$[V_2, V_9] = \frac{1}{2}V_2, \ \ [V_2, V_{11}] = -gV_{12}, \ \ [V_2, V_{12}] = V_{13},$$
$$[V_3, V_7] = V_3, \ \ [V_3, V_9] = \frac{3}{2}V_3, \ \ [V_4, V_6] = V_3,$$
$$[V_4, V_8] = V_1, \ \ [V_4, V_9] = V_4, \ \ [V_4, V_{11}] = -V_{13},$$
$$[V_5, V_7] = V_5, \ \ [V_5, V_8] = -V_6, \ \ [V_5, V_9] = \frac{1}{2}V_5,$$
$$[V_5, V_{10}] = -V_{12}, \ [V_6, V_7] = V_6, \ [V_6, V_8] = V_5, \ [V_6, V_9] = \frac{1}{2}V_6,$$
$$[V_6, V_{11}] = -V_{12}, \ \ [V_7, V_{12}] = -V_{12}, \ \ [V_8, V_{10}] = V_{11},$$
$$[V_8, V_{11}] = -V_{10}, \ \ [V_9, V_{12}] = -\frac{1}{2}V_{12}, \ \ [V_9, V_{13}] = -V_{13},$$
$$[V_{10}, V_{11}] = V_8, \ \ [V_{10}, V_{12}] = -V_5, \ \ [V_{10}, V_{13}] = -V_1,$$
$$[V_{11}, V_{12}] = -V_6, \ \ [V_{11}, V_{13}] = -V_4, \ \ [V_{12}, V_{13}] = -V_3.$$

Остальные коммутаторы вида $[V_i, V_j]$, где $1 \le i < j \le 13$, являются нулевыми векторными полями. Тогда

$$\mathfrak{L}' := [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] =< V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_8, V_{10}, V_{11}, V_{12}, V_{13} >,$$

где $\mathfrak{L}'$ — коммутатор алгебры Ли $\mathfrak{L}$, причем угловые скобки обозначают линейную оболочку элементов. Остальные члены производного ряда имеют вид

$$\mathfrak{L}^{(n)} := \left(\mathfrak{L}^{(n-1)}\right)' =$$

$$= < V_1, V_3, V_4, V_5, V_6, V_8, V_{10}, V_{11}, V_{12}, V_{13} >, \quad n \geq 2.$$

Значит, данная алгебра Ли не является разрешимой. Таким образом, доказана

Теорема. *Инфинитезимальные симметрии трехмерной задачи (1.2—1.4) образуют 13-мерную неразрешимую алгебру Ли, базис которой образован векторными полями (9.5—9.15).*

Замечание 6. Данная теорема согласуется с результатом, приведенным без доказательства в работе [7, с. 150].

Список литературы

1. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М., 1983.

2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.

3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.

4. *Симметрии* и законы сохранения уравнений математической физики / Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. [и др.] ; под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М., 1997.

5. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М., 1990.

6. *Шамардина Е.Р.* Нахождение симметрий для задачи о волнах на воде с поверхностным натяжением // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 135—147. doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-13.

7. *Brooke Benjamin T., Olver P.J.* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 125. P. 137—185.

8. *Guyenne P.*, *Parau E.I.* Forced and unforced flexural gravity solitary waves // Nonlinear interfacial wave phenomena form the Micro- to the Macro-scale : Procedia IUTAM. 2014. Vol. 11. P. 44—57.

9. *Mitsotakis D., Dutykh D., Li Q., Peach E.* On some model equations for pulsatile flow in viscoelastic vessels // Wave Motion. 2019. Vol. 90. P. 139—151.

10. *Plotnikov P.I., Toland J.F.* Modelling nonlinear hydroelastic waves // Phil. Trans. R. Soc. A. 2011. Vol. 369, № 1947. P. 2942—2956.

Для цитирования: *Кулешов А.В.* Симметрии одной задачи гидродинамики со свободной границей // ДГМФ. 2025. № 56. С. 83—106. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-8.

MSC 2010: 76M60, 58J70

A. V. Kuleshov
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia
arturkuleshov@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-8

Symmetries of some free boundary problem in hydrodynamics

Submitted on May10, 2025

The free boundary problem of water waves in three space dimensions without surface tension is considered. The problem consists of the Laplace equation on the velocity potential, and of the kinematic and dynamic boundary conditions. T. Brooke Benjamin and P. Olver have showed that the methods of group analysis of differential equations can be applied to such problems. The group analysis is based on finding infinitesimal symmetries inherent to the problem. The key point is that each infinitesimal symmetry generates a one-parameter group of symmetries, and that transforming a given solution of the problem by any of the symmetries produces a continuous family of other solutions. The aim of the present paper is demonstration of application of the group analysis to the problem. The base infinitesimal symmetries of the problem are deduced, their physical meanings are revealed, and their commutators are computed. It is shown that all the infinitesimal symmetries of the problem form a 13-dimensional non-solvable Lie algebra, and the corresponding Lie group of symmetries is generated by horizontal and vertical translations, time translation, variation of base-level for potential, horizontal rotations, horizontal and vetical Galilean boosts, vertical acceleration, gravity-compensated rotations, and scaling. All the results agree with the ones obtained by T. Brooke Benjamin and P. Olver.

Keywords: free boundary problem, group analysis, infinitesimal symmetry, Lie algebra

References

1. *Ibragimov, N.Kh.:* Transformation groups applied to mathematical physics. Springer (1984).
2. *Ovsiannikov, L. V.:* Group analysis of differential equations. N. Y. (1982).
3. *Olver, P.J.:* Applications of Lie groups to differential equations. Springer, 1986.
4. *Symmetries* and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics. Bocharov, A. V., Chetverikov, V.N., Duzhin, S.V. [et al.]. AMS (1999).
5. *Friedman, A.:* Variational Principles and Free Boundary Problems. John Wiley and Sons, Inc. (1982).
6. *Shamardina, E.R.:* Finding symmetries for the problem of water waves with surface tension. DGMF, 53, 135—147 (2022). doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-13.
7. *Brooke Benjamin, T., Olver, P.J.:* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves. J. Fluid Mech., 125, 137—185 (1982).
8. *Guyenne, P., Parau E.I.:* Forced and unforced flexural gravity solitary waves. Nonlinear interfacial wave phenomena form the Micro- to the Macro-scale. Procedia IUTAM, 11, 44—57 (2014).
9. *Mitsotakis, D., Dutykh, D., Li, Q., Peach, E.:* On some model equations for pulsatile flow in viscoelastic vessels. Wave Motion, 90, 139—151 (2019).

10. *Plotnikov, P.I., Toland, J.F.:* Modelling nonlinear hydroelastic waves. Phil. Trans. R. Soc. A, **369**:1947, 2942—2956 (2011).

For citation: Kuleshov, A.V. Symmetries of some free boundary problem in hydrodynamics. DGMF, 56, 83—106 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-8.

УДК 514.76

К. В. Полякова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
polyakova_@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-9

Обобщенные тождества Риччи и Бианки для связности с нетензорами кручения и кривизны

Рассматривается многообразие, структурные уравнения которого построены с помощью деформации внешнего дифференциала. Кручение и кривизна аффинной связности на этом многообразии не являются тензорами. Кривизна является тензором, причем нулевым, только для канонической связности. Кручение совпадает с антисимметрией слоевых координат и не обращается в нуль даже для канонической связности. Каноническая связность, в отличие от связности Леви-Чивиты, является плоской и несимметричной.

Построены обобщенные тождества Риччи и Бианки для кривизны и кручения аффинной связности на этом многообразии. Однако повторный деформированный дифференциал от базисных форм и форм связности обращается в нуль только вдоль линии на многообразии. Для канонической связности эти тождества приобретают классический вид. Причем в этом случае повторный деформированный дифференциал от форм связности тождественно равен нулю, а повторный деформированный дифференциал от базисных форм обращается в нуль только вдоль линии на многообразии.

Ключевые слова: тождества Риччи и Бианки, объекты кручения и кривизны, полусимметрическая связность, каноническая связность

Поступила в редакцию 02.05.2025 г.

Продолжается изучение деформирующегося многообразия $\breve{X}_m$ [23], начатое в [7; 8] и рассматривающее дифференциал $\breve{D}$, определенный для дифференциальной 1-формы ω формулой (ср. [15; 16; 25; 26])

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\wedge^2 T^*}$$

и включающий возмущение внешнего дифференциала D (см., напр., [10]).

В расслоении линейных реперов над многообразием $\breve{X}_m$ зададим связность $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ с помощью форм

$$\tilde{\breve{\omega}}^i_j = \breve{\omega}^i_j - \breve{\Gamma}\,^i_{jk}\omega^k \quad (\breve{\Delta}\,\breve{\Gamma}^i_{jk} + \breve{\omega}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{jk,l}\omega^l),$$

где $i, j, k = 1, \dots, m$.

Структурные уравнения для базисных форм ω^i и форм связности $\tilde{\breve{\omega}}^i_j$ приведем к виду

$$\breve{D}\omega^i = \omega^j \wedge \tilde{\breve{\omega}}^i_j + \tfrac{1}{2}\breve{T}^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{1}$$

$$\breve{D}\tilde{\breve{\omega}}^i_j = \tilde{\breve{\omega}}^k_j \wedge \tilde{\breve{\omega}}^i_k + \tfrac{1}{2}\breve{R}^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{2}$$

объекты кручения $\breve{T}^i_{jk}$ и кривизны $\breve{R}^i_{jkl}$ выражаются по формулам

$$\frac{1}{2}\breve{T}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{[jk]}, \;\; \frac{1}{2}\breve{R}^i_{jkl} = \breve{\Gamma}^i_{j[k,l]} - \breve{\Gamma}^s_{j[k}\breve{\Gamma}^i_{|s|l]}.$$

Объекты кручения $\breve{T}^i_{jk}$ и кривизны $\breve{R}^i_{jkl}$ удовлетворяют уравнениям

$$\breve{\Delta}\,\breve{T}^i_{jk} + \overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\partial^{\,q}_{sp} f x^t_q \breve{\omega}^p_t = \breve{T}^i_{jk,l}\omega^l, \tag{3}$$

$$\breve{\Delta}\,\breve{R}^i_{jkl} - \gamma^i_{j[l}\overset{*}{x}{}^s_{k]}\partial^{\,q}_{sp} f x^u_q \breve{\omega}^p_u = \breve{R}^i_{jkl,s}\omega^s, \tag{4}$$

где $f = f(x^i, x^j_k)$. Заменяя в уравнениях (3, 4) слоевые формы на формы связности (см., напр., [12]) $\breve{\omega}^i_j = \tilde{\breve{\omega}}^i_j + \breve{\Gamma}^i_{jk}\omega^k$, получим

$$\breve{\nabla}\breve{T}^i_{jk} = \omega^l\breve{\nabla}_l\breve{T}^i_{jk}, \;\; \nabla\breve{R}^i_{jkl} = \omega^s\breve{\nabla}_s\breve{R}^i_{jkl}.$$

Ковариантные дифференциалы $\breve{\nabla}\breve{T}^i_{jk}$, $\breve{\nabla}\breve{R}^i_{jkl}$ имеют вид

$$\breve{\nabla}\breve{T}^i_{jk} = d\breve{T}^i_{jk} + \breve{T}^l_{jk}\widetilde{\widetilde{\omega}}^i_l - \breve{T}^i_{lk}\widetilde{\widetilde{\omega}}^l_j - \breve{T}^i_{jl}\widetilde{\widetilde{\omega}}^l_k + \overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\partial_{sp}^{\ q} f x^t_q \widetilde{\widetilde{\omega}}^p_t ,$$

$$\breve{\nabla}\breve{R}^i_{jkl} = d\breve{R}^i_{jkl} + \breve{R}^s_{jkl}\widetilde{\widetilde{\omega}}^i_s - \breve{R}^i_{skl}\widetilde{\widetilde{\omega}}^s_j - \breve{R}^i_{jsl}\widetilde{\widetilde{\omega}}^s_k - \breve{R}^i_{jks}\widetilde{\widetilde{\omega}}^s_l -$$
$$-\gamma^i_{j[l}\overset{*}{x}{}^p_{k]}x^q_v \partial_{pu}^{\ \ v} f \widetilde{\widetilde{\omega}}^u_{jq},$$

а ковариантные производные $\breve{\nabla}_l\breve{T}^i_{jk}$, $\breve{\nabla}_s\breve{R}^i_{jkl}$ выражаются по формулам

$$\breve{\nabla}_l\breve{T}^i_{jk} = \breve{T}^i_{jk,l} - \breve{T}^s_{jk}\breve{\Gamma}^i_{sl} + \breve{T}^i_{sk}\breve{\Gamma}^s_{jl} + \breve{T}^i_{js}\breve{\Gamma}^s_{kl} - \overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\partial_{sp}^{\ q} f x^t_q \breve{\Gamma}^p_{tl},$$

$$\breve{\nabla}_s\breve{R}^i_{jkl} = \breve{R}^i_{jkl,s} - \breve{R}^p_{jkl}\breve{\Gamma}^i_{ps} + \breve{R}^i_{pkl}\breve{\Gamma}^p_{js} + \breve{R}^i_{jpl}\breve{\Gamma}^p_{ks} + \breve{R}^i_{jkp}\breve{\Gamma}^p_{ls} +$$
$$+\breve{\Gamma}^u_{qs}\gamma^i_{j[l}\overset{*}{x}{}^p_{k]}x^q_v \partial_{pu}^{\ \ v} f.$$

Для компонент объекта связности справедливо разложение [6; 9]

$$\breve{\Gamma}^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - \breve{x}^i_{jk},$$

где $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$ — тензор деформации от канонической аффинной связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$ к произвольной связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$. В [8] показано, что слоевые координаты 2-го порядка $\breve{x}^i_{jk}$ полусимметричны (см.: [5; 18; 19; 27]); кроме того, они удовлетворяют равенству $\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk}$, где $N^i_{jk} = \overset{*}{x}{}^l_{[j}\delta^i_{k]}\partial_l f$ — это кручение канонической связности. Указанное разложение позволяет свести объекты связности, кручения и кривизны, не являющиеся тензорами, к тензору γ^i_{jk}, слоевым координатам 1-го x^i_j и 2-го $\breve{x}^i_{jk}$ порядков, а также функции f, задающей деформацию (искривление) дифференциалов. Объекты кручения $\breve{T}^i_{jk}$ и кривизны $\breve{R}^i_{jkl}$ выражаются следующим образом [7]:

$$\tfrac{1}{2}\breve{T}^i_{jk} = \gamma^i_{[jk]} + N^i_{jk}\ , \qquad (5)$$

$$\tfrac{1}{2}\breve{R}^i_{jkl} = \partial_s\gamma^i_{j[k}\overset{*}{x}{}^s_{l]} - \gamma^i_{js}N^s_{kl} - \gamma^s_{j[k}\gamma^i_{|s|l]}. \qquad (6)$$

Замечание. Из (4, 6) следует, что для нулевого тензора γ^i_{jl} кривизна $\breve{R}^i_{jkl}$ становится тензором, причем нулевым. Из (3) видно, что кручение $\breve{T}^i_{jk}$ не является тензором и не обращается в нуль (см. также, напр., [21; 24]). В работе [1] рассматривается связность в максимальном фактор-расслоении над пространством центрированных плоскостей, которая всегда с кручением, так как построенные квазитензоры S', S'' и тензор кручения S''' нельзя обратить в нуль.

Используя (5, 6), найдем тождества Риччи и Бианки, которым удовлетворяют кручения и кривизна.

Действуя на обе части уравнения (5) внешним дифференциалом $\breve{D}$, получим

$$\breve{D}^2\omega^i = \tfrac{1}{2}\breve{\nabla}\breve{T}^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k +$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\breve{T}^i_{sl}\breve{T}^s_{jk} - \breve{R}^i_{jkl} + \gamma^p_{tl}\overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}x^t_q\partial^{\;q}_{sp}f\right)\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l +$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\partial^{\;l}_{sp}f\right)dx^p_l \wedge \omega^j \wedge \omega^k.$$

Учитывая выражение ковариантного дифференциала, получим

$$\breve{D}^2\omega^i =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\breve{\nabla}_l\breve{T}^i_{jk} + \breve{T}^i_{sj}\breve{T}^s_{kl} - \breve{R}^i_{jkl} + \overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}x^t_q\gamma^p_{tl}\partial^{\;q}_{sp}f\right)\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l +$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\partial^{\;l}_{sp}f\right)dx^p_l \wedge \omega^j \wedge \omega^k.$$

Введем обозначение

$$M^i_{jkl} = \breve{\nabla}_{[l}\breve{T}^i_{jk]} + \breve{T}^i_{s[j}\breve{T}^s_{kl]} - \breve{R}^i_{[jkl]} + \gamma^p_{t[l}\overset{*}{x}{}^s_j\delta^i_{k]}x^t_q\partial^{\;q}_{sp}f.$$

Поскольку каждое слагаемое в выражении M^i_{jkl} кососимметрично по двум индексам, входящим в группу индексов j, k, l, по которым производится альтернирование, то альтернирование можно заменить циклированием. Следовательно,

$$M^i_{jkl} = \breve{\nabla}_{\{l}\breve{T}^i_{jk\}} + \breve{T}^i_{s\{j}\breve{T}^s_{kl\}} - \breve{R}^i_{\{jkl\}} + \gamma^p_{t\{l}\overset{*}{x}{}^s_j\delta^i_{k\}}x^t_q\partial^{\;q}_{sp}f.$$

Тогда

$$\breve{D}^2\omega^i = \tfrac{1}{2}M^i_{jkl}\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l + \tfrac{1}{2}\overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\partial^{\;l}_{sp} f dx^p_l \wedge \omega^j \wedge \omega^k.$$

Равенство $M^i_{jkl} = 0$ является тождеством, что легко показать, используя выражения (5, 6) для объектов кручения и кривизны с помощью тензора деформации γ^i_{jk}.

Аналог тождества Риччи $M^i_{jkl} = 0$, то есть

$$\breve{\nabla}_{\{l}\breve{T}^i_{jk\}} + \breve{T}^i_{s\{j}\breve{T}^s_{kl\}} - \breve{R}^i_{\{jkl\}} + \gamma^p_{t\{l}\overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]\}}x^t_q\partial^{\;q}_{sp} f \ = 0, \qquad (7)$$

приводит выражение для $\breve{D}^2\omega^i$ к виду

$$\breve{D}^2\omega^i = \left(\tfrac{1}{2}\overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\partial^{\;l}_{sp} f\right) dx^p_l \wedge \omega^j \wedge \omega^k. \qquad (8)$$

Выполнение тождеств не влечет за собой равенство нулю второго дифференциала $\breve{D}^2\omega^i$ только вдоль линии на многообразии $\breve{X}_m$.

Для канонической связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$ имеем

$$\gamma^p_{tl} = 0,\ \breve{T}^i_{jk} = N^i_{jk},\ \breve{R}^i_{jkl} = 0,$$

поэтому (7) имеет вид классического тождества Риччи для плоской связности

$$\breve{\nabla}_{\{l}\breve{T}^i_{jk\}} + \breve{T}^i_{s\{l}\breve{T}^s_{jk\}} = 0. \qquad (9)$$

Объект $M^i_{jkl} = \breve{\nabla}_{\{l}\breve{T}^i_{jk\}} + \breve{T}^i_{s\{l}\breve{T}^s_{jk\}}$ является тензором, и его обращение в нуль инвариантно. При этом выражение

$$\overset{\mathrm{o}}{\breve{D}}{}^2\omega^i = \left(\tfrac{1}{2}\overset{*}{x}{}^s_{[j}\delta^i_{k]}\partial^{\;l}_{sp} f\right) dx^p_l \wedge \omega^j \wedge \omega^k$$

обращается в нуль вдоль любой линии ρ на многообразии $\breve{X}_m$. Такой же вид имеет второй дифференциал в простой (*полусимметрической*) связности ${}^N\breve{\Gamma}^i_{jk}$.

Замечание. Канонической связность $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$, в отличие от связности Леви-Чивиты, имеет нулевую кривизну и ненулевое кручение. Связность Вайценбека (см., напр., [17]) также имеет нулевую кривизну и ненулевое кручение, причем кручение является объектом неголономности подвижного репера. Кручение канонической связности также совпадает с антисимметрией координат $\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk}$.

Действуя на обе части уравнения (2) внешним дифференциалом $\breve{D}$, получим

$$\breve{D}^2\tilde{\tilde{\omega}}^i_j = \tfrac{1}{2}\left(\breve{\nabla}\breve{R}^i_{jkl} + \gamma^i_{js}\overset{*}{x}{}^p_{[k}\delta^s_{l]}x^q_v\overset{v}{\partial}_{pu}f\tilde{\tilde{\omega}}^u_{jq} - \breve{R}^i_{jkp}\breve{T}^p_{ls}\omega^s\right) \wedge \omega^k \wedge \omega^l.$$

Учитывая выражение ковариантного дифференциала, находим

$$\breve{D}^2\tilde{\tilde{\omega}}^i_j = \frac{1}{2}\left(\breve{\nabla}_s\breve{R}^i_{jkl} - \breve{R}^i_{jkp}\breve{T}^p_{ls} - \gamma^i_{j[l}\overset{*}{x}{}^p_{k]}x^q_v\gamma^u_{qs}\overset{v}{\partial}_{pu}f\right)\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^s -$$

$$-\tfrac{1}{2}\gamma^i_{js}\overset{*}{x}{}^p_{[k}\delta^s_{l]}\overset{v}{\partial}_{pu}f\,dx^u_v \wedge \omega^k \wedge \omega^l.$$

Введем обозначение

$$M^i_{jkls} = \breve{\nabla}_{\{s}\breve{R}^i_{|j|kl\}} + \breve{R}^i_{jp\{k}\breve{T}^p_{ls\}} - \gamma^i_{j\{[l}\overset{*}{x}{}^p_{k]}\gamma^u_{|q|s\}}x^q_v\overset{v}{\partial}_{pu}f,$$

тогда

$$\breve{D}^2\tilde{\tilde{\omega}}^i_j = \tfrac{1}{2}M^i_{jkls}\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^s - \tfrac{1}{2}\left(\gamma^i_{j[l}\overset{*}{x}{}^p_{k]}\overset{v}{\partial}_{pu}f\right)dx^u_v \wedge \omega^k \wedge \omega^l.$$

Аналог тождества Бианки $M^i_{jkls} = 0$, то есть

$$\breve{\nabla}_{\{s}\breve{R}^i_{|j|kl\}} + \breve{R}^i_{jp\{k}\breve{T}^p_{ls\}} - \gamma^i_{j\{[l}\overset{*}{x}{}^p_{k]}\gamma^u_{|q|s\}}x^q_v\overset{v}{\partial}_{pu}f \;= 0, \qquad (10)$$

приводит выражение для $\breve{D}^2\tilde{\tilde{\omega}}^i_j$ к виду

$$\breve{D}^2\tilde{\tilde{\omega}}^i_j = -\tfrac{1}{2}\gamma^i_{j[l}\overset{*}{x}{}^p_{k]}\overset{v}{\partial}_{pu}f\,dx^u_v \wedge \omega^k \wedge \omega^l. \qquad (11)$$

Замечание. В работе [2] рассматривается геометрическое доказательство тождества Бианки.

Для канонической связности $\gamma_{tl}^{p} = 0$, $\breve{T}_{jk}^{i} = N_{jk}^{i}$, $\breve{R}_{jkl}^{i} = 0$ равенство (10) имеет вид классического тождества Бианки плоской связности

$$\breve{\nabla}_{\{s}\breve{R}^{i}_{|j|kl\}} = 0, \tag{12}$$

причем

$$\breve{D}^{2}\widetilde{\breve{\omega}}_{j}^{i} = 0,$$

поскольку $\gamma_{jk}^{i} = 0$.

Найденные тождества (7, 10) являются обобщенными тождествами Бианки для кручения и кривизны рассматриваемой связности $\breve{\Gamma}_{jk}^{i}$. При этом второй дифференциал (8) базисных форм ω^{i} и второй дифференциал (11) форм связности $\widetilde{\breve{\omega}}_{j}^{i}$ не равны нулю. В случае канонической связности тождества (7, 10) принимают классический вид (9, 12).

Замечание. В работе [20, p. 85] представлен матричный способ выражения обобщенных тождеств Бианки в терминах миноров коэффициентов ковариантно замкнутых дифференциальных форм со значениями в векторном расслоении. Также обобщенные тождества Бианки рассматриваются, например, в [3; 4; 11, с. 28; 13]. В [22] вводятся обобщенные тождества Бианки в модели модифицированной гравитации с динамическим кручением, с использованием возмущения связности. В [14] показано, что в общем случае в обобщенном пространстве Вейля первое тождество Бианки не выполняется. Оно имеет место, если обобщенное пространство Вейля обладает полусимметрической связностью.

Список литературы

1. *Белова О.О.* 1. Кручение групповой подсвязности в пространстве центрированных плоскостей // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 15—22.

2. *Борисов Ю. Ф.* Геометрическое доказательство тождества Бианки // Математические структуры и моделирование, 2000. Вып. 6. С. 21—28.

3. *Вагнер В.* Обобщение тождеств Риччи и Бианки для связности в составном многообразии // ДАН СССР. 1945. Т. XLVI, №8. С. 335—338.

4. *Манов С.* О тензорах энергии-импульса для полевых теорий в пространствах с аффинной связностью и метрикой. Обобщенные тождества Бианки и различные виды тензоров энергии-импульса. Дубна, 1991.

5. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

6. *Полякова К. В.* Канонические аффинные связности первого и второго порядков // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 203. С. 71—83. doi: 10.36535/0233-6723-2021-203-71-83.

7. *Полякова К. В.* О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГМФ. 2023. Вып. 54 (2). С. 29—44.

8. *Полякова К. В.* Аналоги симметрической и плоской связностей с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 78—95. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-6.

9. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. №1. С. 73—80.

10. *Солодов Н. В.* Бивариантные когомологии с симметриями : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2003.

11. *Шарыгин Г. И.* Геометрия некоммутативных главных расслоений : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2001.

12. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб пособие. Калининград, 1998.

13. *Coimbra A.* Higher curvature Bianchi identities, generalized geometry // Phys. Rev. D. 2019. Vol. 100. Art. №106001. doi: 10.1103/PhysRevD.100.106001.

14. *Çivi G.* On the Bianchi identities in a generalized Weyl space // Second International Conference on Geometry, integrability and Quantization, June 7—15, 2000, Varna, Bulgaria. Sofia, 2001. P. 151—155.

15. *Dotsenko V., Shadrin S., Vallette B.* Maurer — Cartan Methods in Deformation Theory — The Twisting Procedure // London Math. Soc. Lecture Note. Ser. 488. Cambridge, 2024.

16. *Dotsenko V., Shadrin S., Vallette B.* Maurer — Cartan methods in deformation theory: the twisting procedure. arXiv: 2212.11323 [math.QA].

17. *Fernandez O.E., Bloch A.M.* The Weitzenböck connection and time reparameterization in nonholonomic mechanics // J. of Math. Phys. 2011. Vol. 52. Art. №012901.

18. *Friedman A., Schoaten J.A.* Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung // Math. Zeitschrift. 1924. Vol. 21. S. 211—223.

19. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection // Tensor N.S. 1975. Vol. 29. P. 249—254.

20. *Kahouadji N.* Conservation laws and generalized isometric embeddings : Doctoral thesis. Université Paris-Diderot — Paris VII, 2009. URL: https://theses.hal.science/tel-00427033v1 (дата обращения: 30.04.2025).

21. *Nieh H.T.* Torsional topological invariant // International J. of Modern Physics A. 2007. Vol. 22, №29. P. 5237—5244.

22. *Nikiforova V.* On the stability of self-accelerating Universe in modified gravity with dynamical torsion. arXiv: 1705.00856v2 [hep-th] 2 Nov 2017.

23. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10, №46. https://doi.org/ 10.3390/ axioms10020046.

24. *Wanas M.I., Hassan H.A.* Torsion and problems of standard cosmology. arXiv: 1209.6218v3 [gr-qc] 7 Nov 2012.

25. *Witten E.* Supersymmetry and Morse theory // J. Differ. Geom. 1982. Vol. 17, №4. P. 661—692.

26. *Witten E.* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv: 1009.6032v1 [hep-th] 30 Sep 2010.

27. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Rev. Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.

Для цитирования: *Полякова К.В.* Обобщенные тождества Риччи и Бианки для связности с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2025. №56. С. 107—118. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-9.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-9

Generalized Ricci and Bianchi identities for a connection with torsion non-tensor and curvature non-tensor

Submitted on May 2, 2025

A manifold is considered whose structure equations are constructed using a deformation of the exterior differential. The torsion and curvature objects of the affine connection on this manifold are not tensors. The curvature object is a tensor, and it is vanishing, only for a canonical connection. The torsion object coincides with the antisymmetry of fiber coordinates and it is non-vanishing even for the canonical connection. Unlike the torsion-free Levi-Civita connection, the canonical connection has vanishing curvature and non-vanishing torsion.

Generalized Ricci and Bianchi identities are constructed for curvature and torsion of the affine connection on this manifold. However, the repeated deformed differential for the basis forms and connection forms vanishes only along a line on the manifold. For the canonical connection, these identities take on a classical form. Moreover, in this case, the repeated deformed differential for the connection forms is identically equal to zero, and the repeated deformed differential for the basis forms vanishes only along the line on the manifold.

Keywords: Ricci and Bianchi identities, torsion and curvature objects, semi-symmetric connection, canonical connection

References

1. *Belova, O. O.* 1. Torsion of the group subconnection in the space of the centered planes. DGMF, 43, 15—22 (2012).

2. *Borisov, Yu.F.:* Geometric proof of the Bianchi identity. Mathematical structures and modeling, 6, 21—28 (2000).

3. *Vagner, V.V.* Generalization of Ricci and Bianca identities for connection in a composite manifold. Dokl. Akad. Nauk SSSR, XLVI (8), 335—338 (1945).

4. *Manov, S.:* On the energy-momentum for field theories in spaces with affine connection and metric, Generalized Bianchi identities and different energy-momentum tensors. JINR, Dubna (1991).

5. *Norden, A.P.:* Spaces of affine connection. Moscow (1976).

6. *Polyakova, K.V.:* Canonical affine connections of the first and second orders. Geometry, Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 203, 71—83 (2021).

7. *Polyakova, K.V.:* On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF. 54 (2), 29—44 (2023).

8. *Polyakova, K.V.:* Analogues of torsion-free and curvature-free connections with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 55 (2), 78—95 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-6.

9. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. Soviet Math. (Izvestia Vuzov Math.), **27**:1, 84—93 (1983).

10. *Solodov, N.V.:* Bivariant cohomology with symmetries. PhD thesis. Moscow, 2003.

11. *Sharygin G.I.* Geometry of non-commutative principal bundle. PhD thesis. Moscow (2001).

12. *Shevchenko Yu.I.* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

13. *Coimbra, A.* Higher curvature Bianchi identities, generalized geometry. Physical review D, 100, 106001 (2019). 10.1103/PhysRevD.100.106001.

14. *Çivi, G.:* On the Bianchi identities in a generalized Weyl space. Second International Conference on Geometry, integrability and Quantization, June 7—15, 2000, Varna, Bulgaria. Coral Press, Sofia, 151—155 (2001).

15. *Dotsenko, V., Shadrin, S., Vallette, B.:* Maurer — Cartan Methods in Deformation Theory — The Twisting Procedure. London Math. Soc. Lecture Note, Ser. 488. Cambridge University Press, Cambridge (2024).

16. *Dotsenko, V., Shadrin, S., Vallette, B.:* Maurer — Cartan methods in deformation theory: the twisting procedure. arXiv: 2212.11323 [math.QA].

17. *Fernandez, O.E., Bloch, A.M.:* The Weitzenböck connection and time reparameterization in nonholonomic mechanics. J. Math. Phys., 52, 012901 (2011).

18. *Friedman, A., Schoaten, J.A.:* Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung. Math. Zeitschrift, 21, 211—223 (1924).

19. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection. Tensor N.S., 29, 249—254 (1975).

20. *Kahouadji, N.:* Conservation laws and generalized isometric embeddings. Mathematics [math]. Université Paris-Diderot — Paris VII (2009).

21. *Nieh, H.T.:* Torsional topological invariant. International Journal of Modern Physics A, **22**:29, 5237—5244 (2007).

22. *Nikiforova, V.* On the stability of self-accelerating Universe in modified gravity with dynamical torsion. arXiv:1705.00856v2 [hep-th] 2 Nov 2017.

23. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, 10, 46 (2021). https://doi.org/10.3390/axioms10020046.

24. *Wanas, M.I., Hassan, H.A.:* Torsion and problems of standard cosmology. arXiv:1209.6218v3 [gr-qc] 7 Nov 2012.

25. *Witten, E.:* Supersymmetry and Morse theory. J. Differential Geom. **17**:4, 661—692 (1982).

26. *Witten, E.:* A new look at the path integral of quantum mechanics. 78 p.arXiv:1009.6032v1 [hep-th] 30 Sep 2010

27. *Yano, K.:* On semi-symmetric metric connection. Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées, 15, 1579—1586 (1970).

For citation: Polyakova, K.V.: Generalized Ricci and Bianchi identities for a connection with torsion non-tensor and curvature non-tensor. DGMF, 56, 107—118 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-9.

MSC 2010: 53C20

S. E. Stepanov[1], **I. I. Tsyganok**[2]
[1, 2] Financial University under the Government of the Russian Federation,
49, Leningradsky Prosp., Moscow, 125993, Russia
[1] s.e.stepanov@mail.ru, [2] i.i.tsyganok@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-10

York decompositions for the Codazzi, Killing and Ricci tensors

The York decomposition of the space of symmetric two-tensors originated in theoretical physics and has found applications in Riemannian geometry, as illustrated by its use in Besse's famous monograph on Einstein manifolds. In this paper, we derive York decompositions for Codazzi, Killing and Rucci tensors on a closed Riemannian manifold. In particular, we derive the York decompositions for the Codazzi, Killing and Ricci tensors with constant trace.

Keywords: closed Riemannian manifold, York decomposition, Codazzi tensor, Killing tensor

1. Introduction

In the present paper we consider a closed (i. e., compact and without boundary) Riemannian manifold (M, g) of dimension $n \geq 2$. We denote by $S^pM := S^pT^*M$ the vector bundle of covariant symmetric p-tensors $(p \geq 1)$ on (M, g) and define the L^2 *global scalar product* of two covariant symmetric p-tensors φ and φ' on (M, g) by the formula

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle := \int_M g\,(\varphi, \varphi') dvol_g < +\infty$$

Submitted on November 14, 2024

where $dvol_g$ is the volume element of (M, g). Also $\delta^*: C^\infty(TM) \to$ $\to C^\infty(S^2M)$ will be the first-order differential operator defined by the formula $\delta^*\theta: = \frac{1}{2}L_\xi g$ for some smooth vector field ξ and it's g-dual one-form θ(see [1, p. 117, 514]). At the same time, we denote by the formula $\delta: C^\infty(S^2M) \to C^\infty(TM)$ the formal adjoint operator for δ^* which is called the *divergence of symmetric two-tensors*. In this case, we have $\langle\varphi, \delta^*\theta\rangle = \langle\delta\varphi, \theta\rangle$ for any $\varphi \in$ $\in C^\infty(S^2M)$ and $\theta \in C^\infty(T^*M)$.

We recall, that $\varphi \in C^\infty(S^2M)$ is called the *Codazzi tensor* if it satisfies the differential equation (see [1, p. 434; 2, p. 350])

$$(\nabla_X\varphi)(Y, Z) = (\nabla_Y\varphi)(X, Z) \tag{1}$$

for arbitrary $X, Y, Z \in TM$. Such tensors arise naturally in the study of Riemannian manifolds with harmonic curvature or harmonic Weyl tensor (see [1, p. 435]). For example, any Codazzi tensor φ on (M, g) with constant curvature C has the local expression (see [1, p. 436])

$$\varphi = Hess\,(f)\; + C\; \cdot f \cdot g$$

for the C^2 — function f on (M, g).

Let us also recall that a symmetric, divergence-free and traceless covariant two-tensor is called a *TT-tensor* (see, for instance, [3]). Any TT-tensor is denoted by φ^{TT} (see [3]). In this case, φ^{TT} satisfies the equations $trace_g\varphi^{TT} = 0$ and $\delta\;\varphi^{TT} = 0$. As a consequence of a result of Bourguignon — Ebin — Marsden (see [1, p. 132] and [4]) the space of TT-tensors is an infinite-dimensional R-vector space on any closed Riemannian manifold (M, g). Such tensors are of fundamental importance in stability analysis in General Relativity (see, for instance, [5; 7]) and in Riemannian geometry (see, e. g., [1, p. 346—347; 4; 8]).

Now, we are ready to formulate our first result.

Theorem 1. *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional* $(n \geq 3)$ *closed Riemannian manifold. Then any Codazzi tensor* $\varphi \in C^\infty(S^2M)$ *has the* L^2*-orthogonal decomposition*

$$\varphi = \left(\frac{1}{2}L_\xi g + \lambda\, g\right) + \varphi^{TT} \tag{2}$$

for some vector field $\xi \in C^\infty(TM)$, *some TT-tensor* $\varphi^{TT} \in$ $\in C^\infty(S^2M)$ *and some scalar function* $\lambda \in C^\infty(M)$. *Furthermore, if the inequality* $\int_M L_\xi(trace_g\varphi)\, dvol_g \geq 0$ *holds, then this decomposition can be rewritten as*

$$\varphi = \frac{1}{n}(trace_g\varphi)g + \varphi^{TT}. \tag{3}$$

Moreover, if $trace_g\varphi = const$, *then* φ^{TT} *is also a Codazzi tensor.*

Remark. Our theorem generalizes the result of Simons (see Theorem 5.4.1 and Theorem 5.4.2 from [9]): If φ is a traceless Codazzi tensor on a closed Riemannian manifold (M, g), then $\varphi = \lambda\, g + H$, where λ is a constant and H is another traceless Codazzi tensor.

We recall, that $\varphi \in C^\infty(S^2M)$ is called the *Killing tensor* if it satisfies the differential equation (see, for instance, [10])

$$(\nabla_X\varphi)(Y, Z) + (\nabla_Y\varphi)(Z, X) + (\nabla_Z\varphi)(X, Y) = 0 \tag{4}$$

for arbitrary $X, Y, Z \in TM$. In mathematics, a Killing tensor is a generalization of a *Killing vector*, for symmetric tensor fields. It is a concept in Riemannian and pseudo-Riemannian geometry, and is mainly used in the theory of general relativity. For example, if (M, g) is a Riemannian manifold of constant curvature, then any Killing tensorφ on (M, g) has the local expression (see [11; 12])

$$\varphi_{ij} = e^{2\omega}\left(A_{ijkl}\, x^k x^l + B_{ijk}x^l + C_{ij}\right)$$

for $\omega = (n+1)^{-1}\ln(\det g)$ with respect to a local coordinate system$\{x^1, \dots, x^n\}$of(M, g). The coefficients A_{ijkl}, B_{ijk}, and C_{ij} are constant and symmetric with respect to the first two subscripts and

$$A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0; B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij} = 0$$

for $i, j, k, l = 1, \dots, n$.

Now, we are ready to formulate our second result.

Theorem 2. *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional* $(n \geq 3)$ *closed Riemannian manifold. Then any Killing tensor* $\varphi \in C^{\infty}(S^2M)$ *has the* L^2*-orthogonal decomposition*

$$\varphi = \left(\frac{1}{2} L_{\xi} g + \lambda\, g\right) + \varphi^{TT}$$

for some vector field $\xi \in C^{\infty}(TM)$, *someTT-tensor* $\varphi^{TT} \in C^{\infty}(S^2M)$ *and some scalar function* $\lambda \ \in C^{\infty}(M)$. *Furthermore, if the equality* $\int_M L_{\xi}\left(trace_g \varphi\right) dvol_g \leq 0$ *holds, then this decomposition can be rewritten as:*

$$\varphi = \frac{1}{n}\left(trace_g \varphi\right) g + \varphi^{TT}. \tag{5}$$

Moreover, if $trace_g \varphi = const$, *then* φ^{TT} *is also a Killing tensor.*

The Ricci tensor $Ric$is an important mathematical object used in differential geometry, and it also appears frequently in general relativity (see [1]). It has the local expression $Ric = \ (s/n)\ g \ + \overset{\circ}{Ric},$ where Ric is its traceless part. Our next theorem is especially important.

Theorem 3. *Let* (M, g) *be an* n*-dimensional* $(n \geq 3)$ *closed Riemannian manifold. Then the traceless part* $\overset{\circ}{Ric}$ *of the Ricci tensor Ric of* (M, g) *has the* L^2*-orthogonal decomposition*

$$\overset{\circ}{Ric} = \ S\theta + \varphi^{TT}$$

for the Cauchy — Ahlfors operator $S\theta$, *some one-form* $\theta \in C^{\infty}(T^*M)$ *and some TT-tensor* $\varphi^{TT} \in C^{\infty}(S^2M)$. *Furthermore, if the inequality* $\int_M \left(L_{\xi}\ s\ \right) dvol_g \geq 0$ *holds, then this decomposition can be rewritten as*

$$Ric = \frac{1}{n} s\, g + \varphi^{TT},$$

where s *is constant.*

2. Proofs of theorems

For any n-dimensional $(n \geq 3)$ closed Riemannian manifold (M, g), the algebraic sum $\operatorname{Im}\delta^* + C^{\infty}(M) \cdot g$ is closed in S^2M, and we have the *York decomposition* (see [6; 7, p. 24—25])

$$S^2M = (\mathrm{Im}\delta^* + C^\infty M \cdot g) \oplus \left(\delta^{-1}(0) \cap \mathrm{trace}_g^{-1}(0)\right) \qquad (6)$$

where both factors on the right side are infinite-dimensional and orthogonal to each other with respect to the L^2 global scalar product (see [1, p. 130]). It's obvious that the second factor $\delta^{-1}(0) \cap \mathrm{trace}_g^{-1}(0)$ of (6) is the space of *TT*-tensors. Therefore, in particular, we have the L^2orthogonal decomposition (2) for any Codazzi and Killing tensors, respectively.

Let us consider equation (4) of a symmetric Killing tensor φ. From (4) we obtain

$$\delta\, \varphi = \frac{1}{2}\, d\big(trace_g \varphi\big). \qquad (7)$$

At the same time, from (5) we can conclude that $trace_g\varphi = = \delta\, \theta + n\lambda$, where $\delta\, \theta = -\, div\, \xi$ for $\theta^\# = \xi$. In this case, if $\overset{\circ}{\varphi}$ denotes the traceless part of φ, then

$$\overset{\circ}{\varphi} = \varphi + \frac{1}{n}(\delta\, \theta - n\lambda)g = \left(\frac{1}{2}L_\xi g + \frac{1}{n}\delta\, \theta\, g\right) + \varphi^{TT}$$

and hence

$$\overset{\circ}{\varphi} = 2S\theta + \varphi^{TT}, \qquad (8)$$

where $S\theta = L_\xi g + 2/n\ \delta\, \theta\, g$ is the *Cauchy — Ahlfors operator*. Next, applying δ to both sides of (8), we obtain

$$\delta\overset{\circ}{\varphi} = S^*S\theta, \qquad (9)$$

for the *Ahlfors Laplacian* S^*S for $S^* \coloneqq 2\delta$ (see details in [13]). Using (7), equation (9) can be rewritten in the form

$$\delta\overset{\circ}{\varphi} = \frac{n+2}{n}\, d\big(trace_g\varphi\big). \qquad (10)$$

From (9) and (10) we deduce the following integral formula

$$\langle S\theta, S\theta\rangle = \frac{n+2}{n}\int_M L_\xi\big(trace_g\varphi\big)dvol_g. \qquad (11)$$

If we assume that $\int_M L_\xi\big(trace_g\varphi\big)dvol_g \leq 0$, then from (11) we obtain that $S\theta = 0$ and $\int_M L_\xi\big(trace_g\varphi\big)dvol_g = 0$. In this case, we have $\overset{\circ}{\varphi} = \varphi^{TT}$ and hence (5) holds. Furthermore, it is obvious if $trace_g\varphi = const,$ then φ^{TT} is also a Killing tensor. Theorem 2 is proven.

Next, let us consider equation (1) of a Codazzi tensor φ. From (1) we obtain

$$\delta\,\varphi = -\,d\big(trace_g\varphi\big).$$

In this case equation (10) has the form

$$\delta\overset{\circ}{\varphi} = -\,\frac{n-1}{n}\,d\big(trace_g\varphi\big).$$

In turn, the integral formula (11) can be rewritten in the form

$$\langle S\theta, S\theta\rangle = -\frac{n-1}{n}\int_M L_\xi\big(trace_g\varphi\big)dvol_g.$$

If we assume that $\int_M L_\xi\big(trace_g\varphi\big)dvol_g \geq 0$, then from the last formula we obtain that $S\theta = 0$ and $\int_M L_\xi\big(trace_g\varphi\big)dvol_g = 0$. In this case, we have $\overset{\circ}{\varphi} = \varphi^{TT}$ and hence (3) holds. Furthermore, it is obvious if $trace_g\varphi = const,$ then φ^{TT} is also a Codazzi tensor. Theorem 1 is proven.

In conclusion, we consider the Ricci tensor Ric. As can be seen from the well-known second Bianchi identity, one has

$$\delta\,Ric = -\frac{1}{2}\,ds.$$

where $s$is the scalar curvature, defined as $s = trace_g Ric$. In this case (8) can be rewritten in the form

$$\overset{\circ}{Ric} = \;S\theta + \varphi^{TT}$$

and hence

$$\langle S\theta, S\theta\rangle = -\frac{n-2}{n}\int_M\big(L_\xi\;s\;\big)dvol_g,$$

respectively. Therefore, if we assume that $n \geq 3$ and $\int_M\big(L_\xi\;s\;\big)dvol_g \geq 0$, then from the last formula we obtain $S\theta = 0$

and $\int_M L_\xi \, s \, dvol_g = 0$. Therefore, ξ is a conformal Killing vector field and $Ric = \frac{1}{n} s \, g + \varphi^{TT}$, where s must be constant.

References

1. *Besse, A.L.:* Einstein manifolds. Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg (2008).

2. *Petreson, P.:* Riemannian Geometry. Springer International Publishing AG (2016).

3. *Gicquaud, R., Ngo, Q.A.:* A new point of view on the solutions to the Einstein constraint equations with arbitrary mean curvature and small *TT*-tensor. Class. Quant. Grav., **31**:19, 195014 (2014).

4. *Bourguignon, J.P., Ebin, D.G., Marsden, J.E.:* Sur le noyau des opérateurs pseudo-differentiels á symbole surjectif et non injectif. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Sér. A et B, Sciences mathématiques et Sciences physiques, 282, 867—870 (1976).

5. *Garattini, R.:* Self sustained tranversable wormholes? Class. Quant. Grav., **22**:6, 2673—2682 (2005).

6. *York, J.W.:* Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation. Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.), **21**:4, 319—332 (1974).

7. *Carlotto, A.:* The general relativistic constraint equations. Living Reviews in Relativity, **24**:2, 1—170 (2021).

8. *Stepanov, S.E., Tsyganok, I.I.:* Pointwise orthogonal splitting of the space of TT-tensors. DGMF, 54 (2), 45—53 (2023).

9. *Simons, J.:* Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann. Math., **88**:1, 62—105 (1968).

10. *Penrose, R., Walker, M.:* On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {22} spacetimes. Commun. Math. Phys., 18, 265—274 (1970).

11. *Stepanov, S.E., Smol'nikova, M.V.:* Affine differential geometry of Killing tensors. Russian Math. (Izvestia Vuzov), **48**:11, 74—78 (2004).

12. *Stepanov, S.E., Tsyganok, I., Khripunova, M.:* The Killing tensor on an n-dimensional manifold with $SL(n, R)$-structure. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica, **55**:1, 121—131 (2016).

13. *Branson, T.:* Stein-Weiss operators and ellipticity. J. Funct. Anal., 151, 334—383 (1997).

For citation: Stepanov, S.E., Tsyganok, I.I.: York decompositions for the Codazzi, Killing and Ricci tensors. DGMF, 56, 119—127 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-10.

УДК 514.764

С. Е. Степанов[1], *И. И. Цыганок*[2]
[1, 2] *Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия*
[1] s.e.stepanov@mail.ru, [2] i.i.tsyganok@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-10

Разложения Йорка для тензоров Кодацци, Киллинга и Риччи

Поступила в редакцию 15.12.2024 г.

Разложение Йорка пространства симметричных 2-тензоров возникло в теоретической физике и нашло применение в римановой геометрии, как это показано в известной монографии Бессе о многообразиях Эйнштейна. В этой статье мы выводим разложения Йорка для тензоров Кодацци, Киллинга и Риччи на замкнутом римановом многообразии. В частности, мы выводим разложения Йорка для 2-тензоров Кодацци, Киллинга и Кодацци с постоянными следами.

Ключевые слова: замкнутое риманово многообразие, разложение Йорка, тензор Кодацци, тензор Киллинга

Список литературы

1. *Besse A. L.* Einstein manifolds. Berlin ; Heidelberg, 2008.
2. *Petreson P.* Riemannian Geometry. Springer International Publishing AG, 2016.
3. *Gicquaud R., Ngo Q. A.* A new point of view on the solutions to the Einstein constraint equations with arbitrary mean curvature and small TT-tensor // Class. Quant. Grav. 2014. Vol. 31, № 19. P. Art № 195014.

4. *Bourguignon, J.P., Ebin D. G., Marsden J.E.* Sur le noyau des opérateurs pseudo-differentiels á symbole surjectif et non injectif // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences. Sér. A et B, Sciences mathématiques et Sciences physiques. 1976. Vol. 282. P. 867—870.

5. *Garattini R.* Self sustained tranversable wormholes? // Class. Quant. Grav. 2005. Vol. 22, №6. P. 2673—2682.

6. *York J.W.* Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.). 1974. Vol. 21, №4. P. 319—332.

7. *Carlotto A.* The general relativistic constraint equations // Living Reviews in Relativity. 2021. Vol. 24, №2. P. 1—170.

8. *Степанов С.Е., Цыганок И.И.* Поточечное расщепление пространства ТТ-тензоров // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 45—53.

9. *Simons J.* Minimal varieties in Riemannian manifolds // Ann. Math. 1968. Vol. 88, №1. P. 62—105.

10. *Penrose R., Walker M.* On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {22} spacetimes // Commun. Math. Phys. 1970. Vol. 18. P. 265—274.

11. *Степанов С.Е., Смольникова М.В.* Аффинная дифференциальная геометрия тензоров Киллинга // Изв. вузов. Математика. 2004. №11. С. 82—86.

12. *Stepanov S.E., Tsyganok I., Khripunova M.* The Killing tensor on an n-dimensional manifold with $SL(n,R)$-structure // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Mathematica. 2016. Vol. 55, №1. P. 121—131.

13. *Branson T.* Stein-Weiss operators and ellipticity // Journal of Functional Analysis. 1997. Vol. 151. P. 334—383.

Для цитирования: *Степанов С.Е., Цыганок И.И.* Разложения Йорка для тензоров Кодацци, Киллинга и Риччи // ДГМФ. 2025. №56. С. 119—127. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-10.

Editorial Board

Dr Olga O. Belova, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia) — *Editor-in-chief*; Dr Katerina V. Polyakova, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia) — *Executive secretary*; Dr Yuri I. Shevchenko, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia); Prof. Sándor Bácsó, University of Debrecen (Debrecen, Hungary); Prof. Vladimir Balan, Politehnica University of Bucharest (Bucharest, Romania); Dr Vitaly V. Balashchenko, Belarusian State University (Minsk, Republic of Belarus); Dr Ruzinazar Beshimov, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan); Dr Tengiz Bokelavadze, Akaki Tsereteli State University (Kutaisi, Georgia); Dr Giovanni Falcone, University of Palermo (Palermo, Italy); Prof. Graham Hall, University of Aberdeen (Aberdeen, United Kingdom); Dr Ágota Figula, University of Debrecen (Debrecen, Hungary); Dr Irena Hinterleitner, Brno University of Technology (Brno, Czech Republic); Prof. Vladimir A. Igoshin, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia); Dr Bahar Kirik Rácz, Marmara University (Istanbul, Turkey); Dr Mikhail V. Kretov, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia); Prof. Josef Mikeš, Palacký University Olomouc (Olomouc, Czech Republic); Prof. Vanya A. Mirzoyan, State Engineering University of Armenia (Yerevan, Armenia); Prof. Péter Nagy, Obuda University (Budapest, Hungary); Prof. Vladimir Yu. Rovenski, University of Haifa (Haifa, Israel); Dr Liudmila L. Sabinina, Autonomous University of the State of Morelos (Cuernavaca, Mexico); Prof. Sergey Ye. Stepanov, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow, Russia); Prof. Alexander M. Shelekhov, Moscow Pedagogical State University (Moscow, Russia); Prof. Ljubica Velimirovic, University of Niš (Niš, Serbia)

Published since 1970.
Indexing: MathSciNet (American Mathematical Society),
ZBMATH — The database Zentralblatt MATH.
Frequency — twice a year (from 2023)

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2025

Том / Vol. 56

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 28.08.2025 г.
Формат 60×90$^1/_{16}$. Усл. печ. л. 8,1
Тираж 50 экз. Заказ 84

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14