ISSN 0321-4796

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИММАНУИЛА КАНТА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 52

Межвузовский тематический сборник
научных трудов

Издательство Балтийского федерального университета
им. Иммануила Канта
2021

УДК 514.76
ББК 22.151.61я43
Д503

Д503 **Дифференциальная геометрия многообразий фигур :** межвуз. темат. сб. науч. тр. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2021. — Вып. 52. — 152 с. — Библиогр. 158 назв.

В сборнике, подготовленном секцией геометрии научного семинара Института физико-математических наук и информационных технологий, публикуются статьи, посвященные следующим разделам: римановы и субримановы многообразия, структуры на многообразиях, расслоения и связности, тензоры и квазитензоры кривизны-кручения, свойства плоскостей в пространстве проективной связности, распределения в аффинном и проективном пространствах, ассоциированные и внутренние связности, теория поверхностей, отображения многообразий фигур.

Сборник входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.

УДК 514.75(08)
ББК 22.151.61я43

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 514.764

***M. T. K. Abbassi*[1], *J. Mikeš*[2]**
***A. Vanžurová*[3], *C. L. Bejan*[4], *O. O. Belova*[5]**

[1] Sidi Mohamed Ben Abdellah University, Fès, Morocco
[2, 3] Palacky University, Olomouc, Czech Republic
[4] "Gh. Asachi" Technical University, Iasi, Romania
[5] Immanuel Kant Baltic Federal University
[1] mtkabbassi@yahoo.fr, [2] josef.mikes@upol.cz
[3] alena.vanzurova@upol.cz, [4] bejanliv@yahoo.com
[5] olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-1

Professor Oldřich Kowalski passed away

This paper is dedicated to the memory of Professor Kowalski who was one of the leading researchers in the field of differential geometry and especially Riemannian and affine geometry. He significantly contributed to raising the level of teaching differential geometry by careful and systematic preparation of lectures for students.

Prof. Kowalski is the author or co-author of more than 170 professional articles in internationally recognized journals, two monographs, text books for students.

Prof. Kowalski collaborated with many mathematicians from other countries, particularly from Belgium, Italy, Japan, Romania, Russia, Morocco, Spain and others.

Поступила в редакцию 14.06.2021 г.

With the death of Professor Oldřich Kowalský mathematical community are losing a significant personality and an exceptional colleague, a kind and dedicated teacher, a man of high moral qualities.

Keywords: Riemannian geometry, affine geometry, tangent bundle, affine connection, Riemannian manifold, affine manifold.

It was with great sadness to learn about the death of Professor Emeritus Oldřich Kowalski of Charles University in Prague, Czech Republic — one of the world‘s leading experts in Riemannian geometry. O. Kowalski died at the beginning of this year, on 2nd January 2021, at the age of 84 years.

O. Kowalski (or Olin, for friends) was born in Brno, in Moravian part of the Czech Republic, on June 19, 1936. He studied mathematics at the Masaryk University Brno and graduated in 1959. His first job was at the Technical University in Brno, Faculty of Civil Engineering, where he spent 10 years between 1959 and 1969 as assistant and associated professor. It was during this period when his scientific career took off. A crucial moment for his scientific work came when Prof. Alois Švec, another famous Czech geometer (the student of Prof. Eduard Čech) recognized his great talent and offered him a position. In 1970, Kowalski moved to Prague and became an Associated Professor at Mathematical Institute of the Charles University. In Prague, Kowalski entered a stimulating environment allowing him to focus on his scientific work. In his own country as well as abroad, he took part in numerous international conferences on differential geometry and its application, several of which he helped organize. Thus, he collaborated on various projects with many people from around the world. His courses on geometric methods of mathematical physics, foundations of Riemannian geometry, elements of mathematical analysis on manifolds, foundations of differential topology etc. attracted several students from abroad, some of which he supervised during their PhD.

Professor Kowalski belongs to the elite of Czech geometers. An important part of his work is devoted to the field of Riemannian geometry. This is a branch of differential geometry that deals with the study of differentiable manifolds, and in particular with the properties of surfaces of arbitrary dimension, for which a Riemannian metric is given. That is the tangent space at any point is endowed with a scalar product that varies from point to point differentiably. This enables one to make measurements on the surface, such as angles, lengths, areas etc. Although the topic is rather classical and many mathematicians worked on this subject for many years, O. Kowalski belongs to those who discovered new directions in this field. He posed and resolved new problems, he generalized previous results, and he suggested alternative easier proofs. His writing style was both aesthetic and exact. Among others, he was the first to explain explicitly the fundamental (and quite nontrivial) difference between local homogeneity and global homogeneity of a Riemannian manifold. This allowed him to improve and make precise some previous incomplete results from affine Riemannian differential geometry that were published originally by K. Nomizu and I. M. Singer. This part of geometry is still quite relevant nowadays as some of its generalizations are closely related to mechanics and physics, particularly to general theory of relativity.

Prof. Kowalski co-authored more than 170 scientific publications in mathematical international journals. He collaborated with many mathematicians from other countries, particularly from Belgium, Italy, Japan, Romania, Russia, Morocco, Spain and others, namely with M. Sekizawa [23; 24], L. Vanhecke [29—31], F. Tricerri [29], S. Nikčević [19; 20], M. T. K. Abbassi [1—3], T. Arias-Marco [4—6] etc. He published *Classification of generalized symmetric spaces of dimension* ≤ 5 [17]. He is world famous as an author of the monograph *Generalized symmetric spaces* [18] (translated also to Russian) and *Riemannian spaces of conullity two* [7].

We would like to mention that mathematicians and physicists who followed his talks during various international conferences as well as students who had an opportunity to attend his regular courses at the Charles University appreciated and enjoyed his excellent lectures. Thus, some of the excellent lectures of O. Kowalski for students were printed and published. Lecture notes *Základa-*

dy matematickéan alýzy na varietách (Elements of mathematical analysis on manifolds) was edited by the Charles University Prague (Univerzita Karlova, 1973 and 1975), a translation to German was published 1981 in the series Teubner-Texte zur Mathematik, row 39. Lecture notes *Úvod do Riemannovy geometrie* (Introduction to Riemannian geometry) was published by the Charles Unversity (1995 and 2001), and due to his friend and co-worker M. Sekizawa, also in Japanese translation (Nippon Hyoronsha Publishers, 2001).

Prof. Kowalski also helped with organizational duties in the mathematical community. Among others, he was a member of editorial boards of several journals, such as: *Annals of Global Analysis and Geometry* (Springer) — since 1983; *Archivum Math*. (MU Brno) — since 1991; *Comment. Math. Univ. Carolinae* — 1976—2007; *Differential Geometry and its Applications* (Elsevier) — since 1983, editor-in-chief 2002—2007; *Note di Matematica* (Lecce) — since 1997; *Pokroky matematiky, fyziky a Astronomie* (Advances of Mathematics, Physics and Astronomy) — since 1972, editor-in-chief 1972—2001. For the last one, he selected a series of interesting papers and contributions from foreign sources, and translated (from English) for Czech readers, to popularize mathematical work. He was a vice-dean of Faculty of Mathematics and Physics of Charles University (MFF UK) and a member of Scientific board of MFF UK for many years. He helped to organize regular international conferences *Differential Geometry and its Applications* where he was a head of the section of Riemannian geometry. For many yearshe was active in JČSMF (Jednota československých matematiků a fyziků — Union of Czechoslovak Mathematicians and Physicists). In 1998 he was elected as a member of Learned Society of Czech Republic (Učená Společnost České republiky). In 2002—2007 he was editor-in-chief of the international scientific journal *Differential Geometry and its Applications* (Elsevier). He was a member of Scientific board of the Silesian University in Opava. For his important work, he obtained Gold medals from both the Charles and the Silesian University.

Since 1990, Prof. Kowalski shifted his attention to projects that rely on the computer for search algorithms and simulations (particularly his joint work with Z. Vlášek [33; 34], and later on with PhD students Teresa Arias-Marco and Z. Dušek [9—12; 14—16; 22; 27]). This proved to be a very fruitful idea in both classical and modern directions, especially in classification problems, as it was necessary to prepare a more algebraic setting for solving certain geometrical problems. Together with Vlášek, they classified (locally) torsion-less locally homogeneous affine connections on 2-dimensional manifolds [35] via group-theoretical approach (which completed partial results of B. Opozda [21]). With Arias-Marco [4], they continued and succeeded in classification of such connections with arbitrary torsion.

In the frame-work of the scientific supports of the Grant Agency of Czech Republic, Prof. Kowalski cooperated with J. Mikeš [36] and A. Vanžurová since 1994 till the very end of his scientific work in 2019, and later, since 2003, also with his PhD student Z. Dušek.

A significant extent of his final explorations was devoted to homogeneous Riemannian and affine manifolds. We mention an interesting question concerning classification of homogeneous affine connections or investigation of homogeneous geodesics. A homogeneous geodesic is a geodesic which can be obtained as an orbit of one point under action of one-parameter group of isometries, or affine diffeomorphisms, respectively. There is an interesting class of homogeneous manifolds on which all geodesics admit this property. In all these topics, computer support was very helpful.

In 2000‘ O. Kowalski and A. Vanžurová [32] initiated the investigation of a quite new generalization of homogeneous Riemannian spaces, locally homogeneous manifolds and *k*-curvature homogeneity, originally called the class of curvature-homogeneous spaces of type (1,3) and later mentioned as homothety curvature homogeneous spaces. This study inspired P. Gilkey and his collaborators to make similar investigations in the pseudo-Riemannian case.

Another direction of research in which O. Kowalski had a major impact was the geometry of tangent bundles. He was the first to find a way to calculate the curvature of the Sasaki metric on the tangent bundle of Riemannian manifolds. Then, with M. Sakizawa [22; 25—28], he gave a classification of natural transformations of Reimannian metrics on a manifold to metrics on its tangent bundle, which gave rise to the so-called class of *g*-natural metrics, a concept that boosted research in the field of the geometry of tangent bundles.

During the last several years, O. Kowalski cooperated also with C. L. Bejan [8]. They studied special curves and their mappings, which naturally arise in the study of electro-magnetic fields.

Finally, a number of geometers from various countries acknowledge the role played by O. Kowalski in their academic lives. Through his active and kind nature, he not only contributed to the development of the subject, but he also influenced the careers of those around him. The network of collaborators that he built as well as the ideas and advice that he shared with them shall last and continue to have an impact on the mathematical community.

References

1. *Abbassi, M. T. K., Kowalski, O.*: On *g*-natural metrics with constant scalar curvature on unit tangent sphere bundles. *Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields*. World Sci. Publ., Hackensack, 1—29 (2005). doi: https://doi.org/10.1142/9789812701701_0001.

2. *Abbassi, M. T. K., Kowalski, O.*: Naturality of homogeneous metrics on Stiefel manifolds $SO\,(m+1)/SO\,(m-1)$. *Diff. Geom. and its Appl.*, **28**:2, 131—139 (2010).

3. *Abbassi, M. T. K., Kowalski, O.*: On Einstein Riemannian g-natural metrics on unit tangent sphere bundles. *Ann. Global Anal. Geom.*, **38**:1, 11—20 (2010).

4. *Arias-Marco, T., Kowalski, O.*: Classification of locally homogeneous affine connections with arbitrary torsion on 2-dimensional manifolds. *Monatsh. Math.*, **153**:1, 1—18 (2008).

5. *Arias-Marco, T., Kowalski, O.*: Classification of 4-dimensional homogeneous D'Atri spaces. *Czechoslovak Math. J.*, **58**:1, 203—239 (2008).

6. *Arias-Marco, T., Kowalski, O.*: Classification of 4-dimensional homogeneous weakly Einstein manifolds. *Czechoslovak Math. J.*, **65**:1, 21—59 (2015).

7. *Boeckx, E., Kowalski, O., Vanhecke, L.*: Riemannian manifolds of conullity two. World Sci. Publ., Singapore (1996).

8. *Bejan, C.-L., Kowalski, O.*: On some differential operators on natural Riemann extensions. *Ann. Global Anal. Geom.*, **48**:2, 171—180 (2015).

9. *Dušek, Z., Kowalski, O.*: Involutive automorphisms related with standard representations of *SL(2,R)*. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **19**, 523—533 (2012).

10. *Dušek, Z., Kowalski, O.*: Pseudo-Riemannian manifolds modelled on symmetric spaces. *Monatsh. Math.*, **165**, 319—326 (2012). https://doi.org/10.1007/s00605-010-0234-8.

11. *Dušek, Z., Kowalski, O.*: Involutive birational transformations of arbitrary complexity in Euclidean spaces. Comment. *Math. Univ. Carolinae*, **54**:1, 111—117 (2013).

12. *Dušek, Z., Kowalski, O.*: How many are affine connections with torsion. *Arch. Math.*, **50**:5, 257—264 (2014).

13. *Dušek, Z., Kowalski, O.*: How many are equiaffine connections with torsion. *Arch. Math.*, **51**, 265—271 (2015).

14. *Dušek, Z., Kowalski, O.*: Transformations between Singer-Thorpe bases in 4-dimensional Einstein manifolds. *Hokkaido Math. J.*, **44**, 441—457 (2015).

15. *Dušek, Z., Kowalski, O.*: How many are Ricci flat affine connections with arbitrary torsion. *Publ. Math. Debrecen*, **88**:3-4, 511—516 (2016).

16. *Dušek, Z., Kowalski, O.*: How many are torsion-free affine connections in general dimension. *Advances in Geom.*, **16**:1, 71—76 (2016). https://doi:10.1515/advgeom-2015-0033.

17. *Kowalski, O.*: Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension <= 5. *Rozpravy ČSAV*, Řada MPV, **8**:85 (1975).

18. *Kowalski, O.*: Generalized Symmetric Spaces. *Lecture Notes in Mathematics,* Vol. 805. Springer (1980); Russian translation, MIR, Moscow (1984).

19. *Kowalski, O., Nikčević, S.Ž.*: On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemannian 3-manifolds. *Geom. Dedicata*, **62**, 65—72 (1996). https://doi.org/10.1007/BF00240002.

20. *Kowalski, O., Nikčević, S.Ž.*: On geodesic graphs of Riemannian g.o. spaces (Arch. Math. 73 (1999)), appendix. *Arch. Math.*, **79**, 158—160 (2002).

21. *Kowalski, O., Opozda, B., Vlášek, Z.*: A classification of locally homogeneous connections on 2-dimensional manifolds via group-theoretical approach. *Centr. Eur. J. Math.*, **2**, 87—102 (2004). https://doi.org/10.2478/BF02475953.

22. *Kowalski, O., Sekizawa, M.*: Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on linear frame bundles — a classification. *Diff. Geom. and Appl.* (Proceedings, August 24—30, 1986, Brno). D. Reidel Publ., 149—178 (1987).

23. *Kowalski, O., Sekizawa, M.*: On Tangent Sphere Bundles with Small or Large Constant Radius. *Ann. Global Anal. Geom.* **18** (special issue dedicated to A. Gray), 207—219 (2000).

24. *Kowalski, O., Sekizawa, M.*: On curvatures of linear frame bundles with naturally lifted metrics. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **63**:3, 283—295 (2005).

25. *Kowalski, O., Sekizawa, M.*: Almost Osserman structures on natural Riemann extensions. *Diff. Geom. and its Appl.*, **31**, 1, 131—139 (2013).

26. *Kowalski, O., Sekizawa, M.*: Diagonalization of 3-dimensional pseudo-Riemannian metrics. *J. Geom. and Phys.*, **74**, 251—255 (2013).

27. *Kowalski, O., Sekizawa, M.*: The Riemann extensions with cyclic parallel Ricci tensor. *Math. Nachrichten*, **287**:8-9, 955—961 (2014).

28. *Kowalski, O., Sekizawa, M.*: Existence and classification of three-dimensional Lorentzian manifold with prescribed distinct Ricci eigenvalues. *J. Geom. and Phys.*, **99**, 232—238 (2016).

29. *Kowalski, O., Tricerri, F., Vanhecke, L.*: Curvature homogeneous Riemannian manifolds. *J. Math. Pures Appl.*, **71**, 471—501 (1992).

30. *Kowalski, O., Vanhecke, L.*: Opérateurs différentiels invariants et symmetries géodesiques préservant le volume. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **296**, Série I, 1001—1003 (1983).

31. *Kowalski, O., Vanhecke, L.*: *G*-deformations and some generalizations of H. Weyl's tube theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **294**:2, 799—811 (April 1986).

32. *Kowalski, O., Vanžurová, A.*: On a generalization of curvature homogeneous spaces. *Results in Math.*, **63**, 129—134 (2013).

33. *Kowalski, O., Vlášek, Z.*: Homogeneous Einstein metrics on Aloff-Wallach spaces. *Diff. Geom. and Appl.,* **3**, 157—167 (1993).

34. *Kowalski, O., Vlášek, Z.*: Classification of Riemannian 3-manifolds with distinct constant principal Ricci curvatures. *Bull. Belg. Math. Soc.*, **5**, 59—68 (1998).

35. *Kowalski, O., Vlášek, Z.*: Classification of Locally Projectively Homogeneous Torsion-less Affine Connections in the Plane Domains. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)*, **48**:1, 11—26 (2007).

36. *Mikeš, J., Stepanova, E., Vanžurová, A. et al.* Differential geometry of special mappings, Olomouc (2015).

М. Т. К. Аббасси[1], *Й. Микеш*[2], *А. Ванжурова*[3]
К. Л. Бежан[4], *О. О. Белова*[5]

[1] *Университет Сиди Мухаммеда Бен Абделлаха, Фес, Марокко*
[2, 3] *Университет Палацкого, Оломоуц, Чехия*
[4] *Ясский технический университет им. Георге Асаки, Яссы, Румыния*
[5] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[1] mtkabbassi@yahoo.fr, [2] josef.mikes@upol.cz
[3] alena.vanzurova@upol.cz, [4] bejanliv@yahoo.com
[5] olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-1

Ушел из жизни профессор Олдржих Ковальский

Поступила в редакцию 14.06.2021 г.

Данная статья посвящена памяти профессора Ковальского, который был одним из ведущих исследователей в области дифференциальной геометрии, особенно римановой и аффинной геометрии. Он внес значительный вклад в повышение уровня преподавания дифференциальной геометрии путем тщательной и систематической подготовки лекций для студентов.

Профессор Ковальский является автором или соавтором более 170 профессиональных статей во всемирно признанных журналах, двух монографий, учебников для студентов.

Профессор Ковальский сотрудничал со многими математиками из других стран (Бельгии, Италии, Японии, Румынии, России, Марокко, Испании и др.).

С уходом профессора Олдржиха Ковальского математическое сообщество теряет значительную личность и исключительного коллегу, доброго и преданного учителя, человека с высокими моральными качествами.

Ключевые слова: риманова геометрия, аффинная геометрия, касательное расслоение, аффинная связность, риманово многообразие, аффинное многообразие.

Список литературы

1. *Abbassi M. T. K., Kowalski O.* On *g*-natural metrics with constant scalar curvature on unit tangent sphere bundles // Topics in Almost Hermitian Geometry and Related Fields. World Scientific Publishers, 2005. P. 1—29. doi: https://doi.org/10.1142/9789812701701_0001.

2. *Abbassi M. T. K., Kowalski O.* Naturality of homogeneous metrics on Stiefel manifolds $SO\,(m+1)/SO\,(m-1)$ // Diff. Geom. and its Appl. 2010. Vol. 28, №2. P. 131—139.

3. *Abbassi M. T. K., Kowalski O.* On Einstein Riemannian *g*-natural metrics on unit tangent sphere bundles // Ann. Global Anal. Geom. 2010. Vol. 38, №1. P. 11—20.

4. *Arias-Marco T., Kowalski O.* Classification of locally homogeneous affine connections with arbitrary torsion on 2-dimensional manifolds // Monatsh. Math. 2008. Vol. 153, №1. P. 1—18.

5. *Arias-Marco T., Kowalski O.* Classification of 4-dimensional homogeneous D'Atri spaces // Czechoslovak Math. J. 2008. Vol. 58, №1. P. 203—239.

6. *Arias-Marco T., Kowalski O.* Classification of 4-dimensional homogeneous weakly Einstein manifolds // Czechoslovak Math. J. 2015. Vol. 65, №1. P. 21—59.

7. *Boeckx E., Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds of conullity two. World Scientific Publishers, 1996.

8. *Bejan C.-L., Kowalski O.* On some differential operators on natural Riemann extensions // Ann. Global Anal. Geom. 2015. Vol. 48, №2. P. 171—180.

9. *Dušek Z., Kowalski O.* Involutive automorphisms related with standard representations of *SL(2,R)* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2012. №19. P. 523—533.

10. *Dušek Z., Kowalski O.* Pseudo-Riemannian manifolds modelled on symmetric spaces // Monatsh. Math. 2012. Vol. 165. P. 319—326. doi: https://doi.org/10.1007/s00605-010-0234-8.

11. *Dušek Z., Kowalski O.* Involutive birational transformations of arbitrary complexity in Euclidean spaces // Comment. Math. Univ. Carolinae. 2013. Vol. 54, №1. P. 111—117.

12. *Dušek Z., Kowalski O.* How many are affine connections with torsion // Arch. Math. 2014. Vol. 50, №5. P. 257—264.

13. *Dušek Z., Kowalski O.* How many are equiaffine connections with torsion // Archivum Math. Brno. 2015. №51. P. 265—271.

14. *Dušek Z., Kowalski O.* Transformations between Singer-Thorpe bases in 4-dimensional Einstein manifolds // Hokkaido Math. J. 2015. №44. P. 441—457.

15. *Dušek Z., Kowalski O.* How many are Ricci flat affine connections with arbitrary torsion // Publ. Math. Debrecen. 2016. Vol. 88, №3-4. P. 511—516.

16. *Dušek Z., Kowalski O.* How many are torsion-free affine connections in general dimension // Advances in Geometry. 2016. Vol. 16, №1. P. 71—76. doi: https://doi:10.1515/advgeom-2015-0033.

17. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension <=5 // Rozpravy ČSAV, Řada MPV. 1975. Vol. 8, №85.

18. *Kowalski O.* Generalized Symmetric Spaces // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 805. Springer, 1980 (русское издание — M., 1984).

19. *Kowalski O., Nikčević S.Ž.* On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemannian 3-manifolds // Geom. Dedicata. 1996. №62. P. 65—72. doi: https://doi.org/10.1007/BF00240002.

20. *Kowalski O., Nikčević S.Ž.* On geodesic graphs of Riemannian g.o. spaces (Arch. Math. 73 (1999)), appendix // Archiv der Math. 2002. №79. P. 158—160.

21. *Kowalski O., Opozda B., Vlášek Z.* A classification of locally homogeneous connections on 2-dimensional manifolds via group-theoretical approach // Centr. Eur. J. Math. 2004. №2. P. 87—102. doi: https://doi.org/10.2478/BF02475953.

22. *Kowalski O., Sekizawa M.* Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on linear frame bundles — a classification // Diff. Geom. and Appl. (Proceedings, August 24—30, 1986, Brno). D. Reidel Publ., 1987. P. 149—178.

23. *Kowalski O., Sekizawa M.* On Tangent Sphere Bundles with Small or Large Constant Radius // Ann. Global Anal. Geom. 2000. №18 (special issue dedicated to A. Gray). P. 207—219.

24. *Kowalski O., Sekizawa M.* On curvatures of linear frame bundles with naturally lifted metrics // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. 2005. Vol. 63, №3. P. 283—295.

25. *Kowalski O., Sekizawa M.* Almost Osserman structures on natural Riemann extensions // Diff. Geom. and its Appl. 2013. Vol. 31, №1. P. 131—139.

26. *Kowalski O., Sekizawa M.* Diagonalization of 3-dimensional pseudo-Riemannian metrics // J. Geom. and Phys. 2013. №74. P. 251—255.

27. *Kowalski O., Sekizawa M.* The Riemann extensions with cyclic parallel Ricci tensor // Math. Nachrichten. 2014. Vol. 287, №8-9. P. 955—961.

28. *Kowalski O., Sekizawa M.* Existence and classification of three-dimensional Lorentzian manifold with prescribed distinct Ricci eigenvalues // J. Geom. and Phys. 2016. №99. P. 232—238.

29. *Kowalski O., Tricerri F., Vanhecke L.* Curvature homogeneous Riemannian manifolds // J. Math. Pures Appl. 1992. №71. P. 471—501.

30. *Kowalski O., Vanhecke L.* Opérateurs différentiels invariants et symmetries géodesiques préservant le volume // C.R. Acad. Sci. Paris. 1983. №296. Sér. I. P. 1001—1003.

31. *Kowalski O., Vanhecke L.* *G*-deformations and some generalizations of H. Weyl's tube theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 294, №2. P. 799—811.

32. *Kowalski O., Vanžurová A.* On a generalization of curvature homogeneous spaces // Results in Math. 2013. №63. P. 129—134.

33. *Kowalski O., Vlášek Z.* Homogeneous Einstein metrics on Aloff — Wallach spaces // Diff. Geometry and Appl. 1993. №3. P. 157—167.

34. *Kowalski O., Vlášek Z.* Classification of Riemannian 3-manifolds with distinct constant principal Ricci curvatures // Bull. Belg. Math. Soc. 1998. №5. P. 59—68.

35. *Kowalski O., Vlášek Z.* Classification of Locally Projectively Homogeneous Torsion-less Affine Connections in the Plane Domains // Beiträge zur Algebra und Geometrie = Contributions to Algebra and Geometry. 2007. Vol. 48, №1. P. 11—26.

36. *Mikeš J., Stepanova E., Vanžurová A. et al.* Differential geometry of special mappings. Olomouc, 2015.

УДК 514.76

***Г. А. Банару*[1]**
[1] *Смоленский государственный университет, Россия*
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-2
1

О приближенно келеровых многообразиях и аксиоме квазисасакиевых гиперплоскостей

Показано, что отличные от келеровых приближенно келеровы многообразия, классическим примером которых служит шестимерная сфера, не удовлетворяют аксиоме квазисасакиевых гиперплоскостей.

***Ключевые слова**:* почти эрмитово многообразие, приближенно келерово многообразие, почти контактная метрическая структура, аксиома квазисасакиевых гиперплоскостей.

В память о дорогом Вадиме Фёдоровиче Кириченко (1947—2021)

1. Известно, что почти контактная метрическая структура индуцируется на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Изучением почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий занимались такие известные математики, как Д. Блэр, С. Голдберг, С. Ишихара, В. Ф. Кириченко, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, Х. Янамото, К. Яно [1].

В настоящей заметке рассматриваются почти контактные метрические гиперповерхности приближенно келеровых многообразий. Отметим, что класс приближенно келеровых многообразий — один из самых важных классов Грея — Хервеллы почти эрмитовых многообразий. Его изучению посвящены

Поступила в редакцию 27.06.2021 г.

сотни работ. Не вдаваясь в подробности этого обширного вопроса, напомним лишь, что только шестимерная сфера S^6 с так называемой канонической приближенно келеровой структурой исследовалась такими геометрами, как Л. Вранкен, А. Грей, Р. Дещч, Ф. Диллен, Н. Ежири, Е. Калаби, В. Ф. Кириченко, Й.-С. Пак, К. Секигава, С. Тачибана, Ш. Фунабаши, Хайжонг Ли, Х. Хашимото [2].

Данная статья продолжает исследования автора, связанные с изучением почти контактных метрических структур на гиперповерхностях приближенно келеровых многообразий (см., например, [3; 4] и др.).

2. Напомним, что почти контактной метрической структурой на ориентируемом многообразии N^{2n-1} нечетной размерности называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются такие условия:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N^{2n-1}).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N^{2n-1})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N^{2n-1} [5].

Почти контактная метрическая структура $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ называется квазисасакиевой (quasi-Sasakian, qS-), если ее фундаментальная форма $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ замкнута и выполняется такое условие:

$$N_\Phi+\frac{1}{2}d\eta\otimes\xi=0,$$

где N_Φ — тензор Нейенхейса оператора Φ [5].

Напоминаем, что почти эрмитово многообразие M^{2n} удовлетворяет аксиоме квазисасакиевых гиперповерхностей, если

qS-гиперповерхность проходит через каждую точку этого многообразия. Данную терминологию сорок лет назад ввел в рассмотрение В. Ф. Кириченко [6].

3. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} приближенно келерова многообразия M^{2n} [7]:

$$d\,\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha\beta\gamma}\,\omega_{\beta} \wedge \omega_{\gamma} +$$

$$+\ i\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega + (-\sqrt{2}\,\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n} + i\,\sigma^{\alpha\beta})\,\omega_{\beta} \wedge \omega\ ;$$

$$d\,\omega_{\alpha} = -\,\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + B_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} +$$

$$-\ i\sigma^{\beta}_{\alpha}\,\omega_{\beta} \wedge \omega + (-\sqrt{2}\,\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n} - i\,\sigma_{\alpha\beta})\,\omega^{\beta} \wedge \omega\ ;$$

$$d\,\omega = \sqrt{2}\,B_{n\alpha\beta}\,\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + \sqrt{2}\,B^{n\alpha\beta}\,\omega_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} -$$

$$-2i\,\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha} + \left(\tilde{B}_{n\beta n} + i\,\sigma_{n\beta}\right)\omega \wedge \omega^{\beta} + \left(\tilde{B}^{n\beta n} - i\,\sigma^{\beta}_{n}\right)\omega \wedge \omega_{\beta}\,.$$

Здесь и далее $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$; $a, b, c = 1, \ldots, n$. Функции $\{B^{abc}\}, \{B_{abc}\}$ и $\{B^{ab}{}_{c}\}, \{B_{ab}{}^{c}\}$ являются компонентами структурных и виртуальных тензоров Кириченко соответственно [8], σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в приближенно келерово многообразие M^{2n}.

Сопоставляя эти уравнения с известными [5] структурными уравнениями квазисасакиевой структуры

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha}_{\beta}\omega \wedge \omega^{\beta};$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} - B^{\beta}_{\alpha}\omega \wedge \omega_{\beta};$$

$$d\omega = 2\,B^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha}\,,$$

мы приходим к следующему результату:

$$B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0.$$

Условие $B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0$ является критерием (в терминах тензоров Кириченко) принадлежности приближенно келерова многообразия классу келеровых многообразий [9].

Значит, мы установили, что если qS-гиперповерхность N^{2n-1} проходит через каждую точку приближенно келерова многообразия M^{2n}, то условие $B^{abc} + B^{bca} + B^{cab} = 0$ выполняется в каждой его точке, а следовательно, многообразие является келеровым. Таким образом, имеет место

Теорема. *Всякое приближенно келерово многообразие, удовлетворяющее аксиоме квазисасакиевых гиперповерхностей, является келеровым многообразием.*

Отметим, что при анализе тех или иных аксиом почти контактных метрических гиперповерхностей для различных типов почти эрмитовых многообразий часто возникают трудности с построением контрпримера, то есть примера почти эрмитова многообразия, *не* удовлетворяющего той или иной аксиоме. Поскольку упомянутая в начале нашей заметки каноническая приближенно келерова шестимерная сфера не является келеровым многообразием (более того, многие специалисты считаю сферу S^6 исторически первым примером отличного от келерова почти эрмитова многообразия), то, таким образом, перед нами простой пример многообразия, не удовлетворяющего аксиоме квазисасакиевых гиперповерхностей.

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф., Банару М. Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 127. С. 5—40.

2. *Банару М. Б.* О шестимерной сфере с приближенно кэлеровой структурой // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2018. Т. 146. С. 3—16.

3. *Banaru M., Banaru G.* A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2015. Vol. 8 (57), №2. P. 21—28.

4. *Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. №3 (85). P. 107—114.

5. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

6. *Кириченко В.Ф.* Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, №4. С. 795—799.

7. *Банару М.Б.* О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, вып. 2. С. 357—364.

8. *Banaru M.* On Kirichenko tensors of nearly-Kählerian manifolds // Journal of Sichuan University of Science and Engineering. 2012. Vol. 25, №4. P. 1—5.

9. *Банару М.Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

G.A. Banaru[1]

[1] Smolensk State University

4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia

mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-2

On nearly Kählerian manifolds and quasi-Sasakian hypersurfaces axiom

Submitted on June 27, 2021

It is known that an almost contact metric structure is induced on an arbitrary hypersurface of an almost Hermitian manifold. The case when the almost Hermitian manifold is nearly Kählerian and the almost contact

metric structure on its hypersurface is quasi-Sasakian is considered. It is proved that non-Kählerian nearly Kählerian manifolds (in particular, the six-dimensional sphere equipped with the canonical nearly Kählerian structure) do not satisfy to the quasi-Sasakian hypersurfaces axiom.

Keywords: almost Hermitian manifold, nearly Kählerian manifold, almost contact metric structure, quasi-Sasakian hypersurfaces axiom.

References

1. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. *J. Math. Sci.*, **207**:4, 513—537 (2015).

2. *Banaru, M.B.:* On the six-dimensional sphere with a nearly Kählerian structure. *J. Math. Sci.*, **245**:5, 553—567 (2020).

3. *Banaru, M., Banaru, G.:* A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere. *Bull. of the Transilvania University of Brasov*. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. **8 (57)**:2, 21—28 (2015).

4. *Abu-Saleem, A., Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere. *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova. Mat.*, **3** (85), 107—114 (2017).

5. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa: Pechatnyi Dom (2013).

6. *Kirichenko, V.:* The axiom of holomorphic planes in generalized Hermitian geometry. Dokl. Akad. Nauk USSR, **24**, 336—341 (1981).

7. *Banaru, M.B.:* On the type number of nearly-cosymplectic hypersurfaces in nearly Kählerian manifolds. *Fundam. Prikl. Mat.*, **8**:2, 357—364 (2002).

8. *Banaru, M.:* On Kirichenko tensors of nearly-Kählerian manifolds. *J. Sichuan University of Science and Engineering*, **25**:4, 1—5 (2012).

9. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. *Math. Sci.*, **207**:3, 354—388 (2015).

УДК 514.76

М. Б. Банару[1]*, Г. А. Банару*[2]
[1, 2] *Смоленский государственный университет, Россия*
[1, 2] mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-3

Об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли

Установлено, что эрмитова структура на 6-мерном уплощающемся подмногообразии алгебры Кэли является устойчивой в том и только том случае, когда это подмногообразие является вполне геодезическим.

Ключевые слова: алгебра Кэли, 6-мерное уплощающееся подмногообразие алгебры октав, устойчивость почти эрмитовой структуры.

В память о дорогом Вадиме Фёдоровиче Кириченко (1947—2021)

1. Работы 60-х годов прошлого века, автором которых является выдающийся американский геометр Альфред Грей, задали целое направление в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых многообразий. А. Грей установил [1], что каждое из двух так называемых 3-векторных произведений в алгебре Кэли порождает на ее 6-мерном подмногообразии почти эрмитову структуру. Такие структуры исследовались многими математиками, среди которых мы выделим замечательного отечественного геометра Вадима Фёдоровича Кириченко, статьи которого в 1970—1990-х годах были написаны под влиянием

Поступила в редакцию 27.06.2021 г.

работ Альфреда Грея. В. Ф. Кириченко обратил внимание на следующий результат А. Грея: почти эрмитовы структуры, порожденные разными 3-векторными произведениями в алгебре октав на одном и том же подмногообразии, могут отличаться друг от друга. В частности, одна из таких почти эрмитовых структур может быть келеровой, а другая — нет [1]. В. Ф. Кириченко вполне естественным образом ввел понятие устойчивости для почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли. А именно, почти эрмитову структуру на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли он назвал устойчивой, если двойственная ей структура (то есть структура, порожденная другим 3-векторным произведением в алгебре октав) принадлежит тому же классу почти эрмитовых структур [2].

В данной статье мы рассматриваем вопрос об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли. Работа продолжает исследования авторов в данной области, начатые более 20 лет назад (см., например, [3—6] и др.).

2. Как известно, почти эрмитовой (almost Hermitian, *AH*-) структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^{∞}) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым многообразием. АН-многообразие называется эрмитовым, если почти комплексная структура интегрируема.

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R^8}$ — алгебра Кэли. В ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения [1]:

$$P_1(X, Y, Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y;$$

$$P_2(X, Y, Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X, Y\rangle Z + \langle Y, Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из указанных выше. Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке *p*, $X \in T_p(M^6)$. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [2]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа; 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся (planar, иногда flattening), если оно содержится в гиперплоскости алгебры октав [3].

В работе [7] В.Ф. Кириченко получил структурные уравнения произвольной почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли. Для случая эрмитовой структуры эти уравнения были уточнены. Оказалось, что они имеют следующий вид [4; 5]:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b;$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \qquad (1)$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2} \delta^{ah}_{bg} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}} T^{\varphi}_{bd} \right) \omega_c \wedge \omega^d,$$

где $\{\omega^k\}$ — компоненты форм смещения, $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности. Здесь и далее $\varphi = 7, 8$; *a, b, c, d, g, h* = 1, 2, 3; $\hat{a} = a + 3$; *k, j* = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Как и в [7], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$ — компоненты тензора Кронекера третьего порядка;

$$\delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b \delta^h_g - \delta^a_g \delta^h_b; \; D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}};$$

$$D_{cj} = \mp T^8_{cj} + i T^7_{cj}, \; D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - i T^7_{\hat{c}j},$$

где $\left\{T^{\varphi}_{kj}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия M^6.

Эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ является уплощающимся в том и только в том случае, если

$$T^8_{ab} = \mu T^7_{ab}; \quad T^8_{\hat{a}\hat{b}} = \overline{\mu} T^7_{\hat{a}\hat{b}}; \quad \mu \in C; \quad \mu - const. \qquad (2)$$

Отметим, что к числу уплощающихся относятся и 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав [4; 6].

Применив условие Кириченко [2] устойчивости почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}} = 0$$

и учитывая (2), мы приведем уравнения (1) к такому виду:

$$
\begin{aligned}
d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b\ ; \\
d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b; \\
d\omega^a_b &= \omega^a_c \wedge \omega^c_b\ .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Уравнения (3) соответствуют келеровой структуре на уплощающемся подмногообразии $M^6 \subset \mathbf{O}$, причем выполняются в самом простом частном случае, когда

$$T^{\varphi}_{kj} = 0\,,$$

то есть когда M^6 является вполне геодезическим подмногообразием алгебры Кэли. Это позволяет сформулировать такую теорему.

Теорема. *Эрмитова структура на уплощающемся 6-мерном подмногообразии алгебры октав устойчива в том и только в том случае, когда это подмногообразие является вполне геодезическим.*

Отметим, что данная теорема усиливает известный результат В.Ф. Кириченко об устойчивости келеровой структуры: келерова структура на M^6 устойчива тогда и только тогда, когда M^6 — вполне геодезическое подмногообразие [2, с. 65]. Как и в других наших работах (в том числе упомянутых выше [4—6]) об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли, оказалось, что такие подмногообразия практически всегда обладают свойствами, аналогичным свойствам келеровых M^6. При этом известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры октав с эрмитовой структурой, отличной от келеровой [8; 9].

Список литературы

1. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 141. P. 465—504.

2. *Кириченко В.Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Украинский геометрический сборник. 1982. Т. 25. С. 60—68.

3. *Банару М.Б., Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. №1. С. 205—206.

4. *Банару М.Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. 2002. Т. 193, №5. С. 3—16.

5. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

6. *Banaru M.B., Banaru G.A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

7. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Известия высших учебных заведений. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

8. *Банару М.Б.* Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2014. Т. 126. С. 10—61.

9. *Банару М.Б. Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 21—25.

M.B. Banaru[1], G.A. Banaru[2]
[1, 2] Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
[1, 2] mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-3

On stability of Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra

Submitted on June 27, 2021

We consider 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. As it is known, the so-called Brown — Gray three-fold vector cross products induce almost Hermitian structures on such submanifolds. We select the case when the almost Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra are Hermitian, i.e. these structures are integrable.

It is proved that the Hermitian structure on a 6-dimensional planar submanifold of Cayley algebra is stable if and only if such submanifold is totally geodesic.

Keywords: Cayley algebra, 6-dimensional planar submanifold of Cayley algebra, stability of the almost Hermitian structure.

References

1. *Gray, A.:* Vector cross products on manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141**, 465—504 (1969).

2. *Kirichenko, V.F.:* Stability of the almost Hermitian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Ukrain. Geom. Sbornik*, **25**, 60—68 (1982).

3. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Russian Mathematical Surveys*, **49**:1, 223—225 (1994).

4. *Banaru, M.B.:* Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra. *Sb. Math.*, **193**:5—6, 635—648 (2002).

5. *Banaru, M.B., Banaru G.A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova. Matem.*, **1**:74, 23—32 (2014).

6. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. *SUT J. Math.*, **51**:1, 1—9 (2015).

7. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. *Izvestia Vuzov. Math.*, **8**, 32—38 (1980).

8. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. *J. Math. Sci.*, **207**:3, 354—388 (2015).

9. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*. Kaliningrad. **48**, 21—25 (2017).

УДК 514.75

О. О. Белова[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-4

Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, когда центр описывает поверхность

Продолжается исследование грассманоподобного многообразия $Gr^*(m, n)$ центрированных m-плоскостей. Рассматривается частный случай, когда центр A описывает $(n-m)$-мерную поверхность S_{n-m}. Будем обозначать данное многообразие $\overset{0}{Gr}{}^*(m, n)$. Осуществлен аналог сильной нормализации Нордена многообразия $\overset{0}{Gr}{}^*(m, n)$. Доказано, что эта нормализация индуцирует связность в расслоении, ассоциированном с многообразием $\overset{0}{Gr}{}^*(m, n)$. Дана геометрическая характеристика данной связности с помощью параллельных перенесений.

Ключевые слова: проективное пространство, грассманоподобное многообразие, поверхность, связность, параллельные перенесения.

Метод внешних форм Э. Картана [1; 23] в локальной дифференциальной геометрии и теоретико-групповой метод Г. Ф. Лаптева используются многими геометрами (см., напр.,

---

Поступила в редакцию 10.05.2021 г.

[2; 3; 5; 7; 14; 19]), а также в физических теориях [17]. В настоящей работе данные методы применяются для исследования грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей [15], когда центр описывает поверхность.

Грассманоподобное многообразие тесно связано с таким широко известным и популярным многообразием, как многообразие Грассмана [9; 12; 13; 16; 18; 20]. Многообразие Грассмана $Gr(m, n)$ является примером однородного пространства и формирует важный фундаментальный класс проективных многообразий, причем проективное пространство само можно представить как многообразие Грассмана $Gr(1, n+1)$.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_i\}$ ($i, ... = 1, ..., n$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i, \; dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i, ω_j^i удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$:

$$\begin{gathered} D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \; D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j, \\ D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i. \end{gathered} \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ центрированных m-мерных плоскостей P_m^*. Помещаем вершины A, A_a на плоскость P_m^* и фиксируем центр A (здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $a, b, ... = 1, ..., m$; $\alpha, \beta, ... = m+1, ..., n$). Из формул (1) очевидны уравнения стационарности плоскости P_m^*

$$\omega^\alpha = 0, \; \omega_a^\alpha = 0, \; \omega^a = 0,$$

поэтому данные формы являются главными. Выбираем формы $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$ в качестве независимых, а остальные главные формы ω^a представляем линейными комбинациями базисных форм $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha . \qquad (3)$$

Уравнения (3) являются уравнениями грассманоподобного многообразия $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей [15]. Компоненты фундаментального объекта $\Lambda = \left\{ \Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab} \right\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм $\omega^\alpha, \omega_a^\alpha$

$$\Delta \Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0 , \; \Delta \Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0 .$$

Из последних сравнений видно, что компоненты Λ_α^{ab} фундаментального объекта Λ образуют тензор, поэтому можно приравнять их нулю, то есть из уравнений (3) получим

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha , \qquad (4)$$

следовательно, центр A описывает $(n-m)$-мерную поверхность S_{n-m}. Будем рассматривать данный случай и использовать обозначение для соответствующего многообразия $\overset{0}{G}r^*\left(m, n\right)$, то есть $\overset{0}{G}r^*\left(m, n\right)$ — это грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, когда центр описывает поверхность S_{n-m}.

При указанной специализации подвижного репера структурные уравнения (2) принимают вид (ср. [15]):

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\beta^a \omega^\beta \wedge \omega_a^\alpha ,$$

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \left(\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b \right) - \omega^\alpha \wedge \omega_a ,$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a - \omega^\alpha \wedge \omega_{b\alpha}^a - \omega_c^\alpha \wedge \omega_{b\alpha}^{ac} ,$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha - \omega^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^\alpha - \omega_a^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^{\alpha a},$$

$$D\omega_\alpha^a = \omega_\beta^b \wedge \left(\delta_\alpha^\beta \omega_b^a - \delta_b^a \omega_\alpha^\beta\right) - \omega^\beta \wedge \omega_{\alpha\beta}^a,$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + \omega_a^\alpha \wedge \omega_\alpha, \; D\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta,$$

где

$$\omega_{b\alpha}^a = \delta_b^a \Lambda_\alpha^c \omega_c + \delta_b^a \omega_\alpha + \Lambda_\alpha^a \omega_b, \; \omega_{b\alpha}^{ac} = -\delta_b^c \omega_\alpha^a,$$

$$\omega_{\beta\gamma}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^a \omega_a + \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta,$$

$$\omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} = \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a, \; \omega_{\alpha\beta}^a = \Lambda_\beta^a \omega_\alpha.$$

Над многообразием $\overset{0}{Gr}{}^*(m, n)$ возникает главное расслоение $G\left(\overset{0}{Gr}{}^*\right)$, типовым слоем которого является подгруппа G стационарности центрированной плоскости P_m^*. Главное расслоение $G\left(\overset{0}{Gr}{}^*\right)$ содержит следующие фактор-расслоения: плоскостных линейных реперов, нормальных линейных реперов, аффинное фактор-расслоение, типовым слоем которого служит аффинная факторгруппа группы G, расслоение коаффинных реперов.

В главном расслоении $G\left(\overset{0}{Gr}{}^*\right)$ зададим фундаментально-групповую связность способом Лаптева — Лумисте [6; 11]:

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^a \omega^\alpha - L_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha, \; \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - L_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - L_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \; \tilde{\omega}_a = \omega_a - L_{a\alpha} \omega^\alpha - \Pi_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - L_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta.$$

Согласно теореме Картана — Лаптева, связность в ассоциированном расслоении $G\left(\overset{0}{Gr}{}^{*}\right)$ определяется с помощью поля объекта связности

$$\Gamma=\{\Gamma^{a}_{b\alpha},L^{ac}_{b\alpha},\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},L^{\alpha a}_{\beta\gamma},\Gamma^{a}_{\alpha\beta},L^{ab}_{\alpha\beta},L_{a\alpha},\Pi^{b}_{a\alpha},L_{\alpha\beta},\Pi^{a}_{\alpha\beta}\}$$

на базе $\overset{0}{Gr}{}^{*}(m,n)$ следующими дифференциальными сравнениями:

$$\Delta\Gamma^{a}_{b\alpha}+L^{ac}_{b\alpha}\omega_{c}-\omega^{a}_{b\alpha}\equiv 0\,,\ \Delta L^{ac}_{b\alpha}-\omega^{ac}_{b\alpha}\equiv 0\,,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_{a}-\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}\equiv 0\,,\ \Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma}-\omega^{\alpha a}_{\beta\gamma}\equiv 0\,,$$

$$\Delta\Gamma^{a}_{\alpha\beta}+L^{ab}_{\alpha\beta}\omega_{b}+(\delta^{a}_{b}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}-\delta^{\gamma}_{\alpha}\Gamma^{a}_{b\beta})\omega^{b}_{\gamma}-\omega^{a}_{\alpha\beta}\equiv 0\,,$$

$$\Delta L^{ab}_{\alpha\beta}+(\delta^{a}_{c}L^{\gamma b}_{\alpha\beta}-\delta^{\gamma}_{\alpha}L^{ab}_{c\beta})\omega^{c}_{\gamma}\equiv 0\,,\ \Delta L_{a\alpha}+(\Pi^{b}_{a\alpha}+\Gamma^{b}_{a\alpha})\omega_{b}\equiv 0\,,$$

$$\Delta\Pi^{b}_{a\alpha}+L^{cb}_{a\alpha}\omega_{c}+\delta^{b}_{a}\omega_{\alpha}\equiv 0\,,\tag{5}$$

$$\Delta L_{\alpha\beta}+(\Pi^{a}_{\alpha\beta}+\Gamma^{a}_{\alpha\beta})\omega_{a}-L_{a\beta}\omega^{a}_{\alpha}+\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\omega_{\gamma}\equiv 0\,,$$

$$\Delta\Pi^{a}_{\alpha\beta}+L^{ba}_{\alpha\beta}\omega_{b}-\Pi^{a}_{b\beta}\omega^{b}_{\alpha}+L^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_{\gamma}\equiv 0\,,$$

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [8; 10] данного многообразия полями следующих геометрических образов: ($n-m-1$)-плоскостью C_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью P^{*}_{m}, и ($m-1$)-плоскостью N_{m-1}, принадлежащей плоскости P^{*}_{m} и не проходящей через ее центр. Плоскость C_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_{\alpha}=A_{\alpha}+\lambda^{a}_{\alpha}A_{a}+\lambda_{\alpha}A$, а плоскость N_{m-1} — точками $B_{a}=A_{a}+\lambda_{a}A$.

Теорема 1. *Аналог сильной нормализации Нордена многообразия* $\overset{0}{Gr}{}^{*}(m,n)$ *позволяет задать связность в ассоциированном расслоении.*

Доказательство. Находя дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей и требуя относительную инвариантность оснащающих плоскостей, получим

$$\Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a \equiv 0\,,\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0\,,\ \Delta\lambda_a + \omega_a \equiv 0\,. \qquad (6)$$

Данное оснащение, задаваемое полем квазитензора $\lambda = \left\{\lambda_\alpha^a,\, \lambda_\alpha,\, \lambda_a\right\}$ на многообразии $\overset{0}{Gr}{}^*(m,\, n)$, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ :

$$\Gamma_{b\alpha}^a = -\delta_b^a\lambda_\alpha + \mu_\alpha^a\lambda_b + \delta_b^a\mu_\alpha^c\lambda_c\,,$$

$$L_{b\alpha}^{ac} = \delta_b^c\lambda_\alpha^a\,,$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\delta_\gamma^\alpha\lambda_\beta - \delta_\beta^\alpha\lambda_\gamma + \delta_\beta^\alpha\mu_\gamma^a\lambda_a\,,\ L_{\beta\gamma}^{\alpha a} = -\delta_\gamma^\alpha\lambda_\beta^a\,,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^a = -\Lambda_\beta^a\lambda_\alpha - \mu_\beta^a\lambda_b\lambda_\alpha^b\,,\ L_{\alpha\beta}^{ab} = -\delta_\beta^a\lambda_\alpha^b\,, \qquad (7)$$

$$L_{a\alpha} = \mu_\alpha^b\lambda_a\lambda_b\,,\ \Pi_{a\alpha}^b = \delta_a^b\lambda_\alpha\,,$$

$$L_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha\lambda_\beta + \lambda_a\lambda_\alpha\mu_\beta^a - \lambda_a\lambda_b\lambda_\alpha^b\mu_\beta^a\,,\ \Pi_{\alpha\beta}^a = -\lambda_\alpha^a\lambda_\beta\,,$$

где $\mu_\alpha^a = \lambda_\alpha^a - \Lambda_\alpha^a$. Функции (7) в силу сравнений (4) и (6) удовлетворяют сравнениям (5).

Данную связность можно охарактеризовать геометрически с помощью параллельных перенесений (см.: [4; 21; 22]).

Теорема 2 (о параллельных перенесениях оснащающей плоскости). *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Оснащающую плоскость C_{n-m-1} в групповой связности $\overset{0}{\Gamma}$ переносить параллельно нельзя (нуль обозначает охваченный объект групповой связности).*

2. *Плоскость C_{n-m-1} переносится параллельно в связности, определяемой подобъектом* $\overset{0}{\Gamma}_2 = \{\overset{0}{\Gamma}{}_{b\alpha}^a, \overset{0}{L}{}_{c\alpha}^{ab}, \overset{0}{\Gamma}{}_{\beta\gamma}^\alpha, \overset{0}{L}{}_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \overset{0}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}^a, \overset{0}{L}{}_{\alpha\beta}^{ab}\}$

объекта связности $\overset{0}{\Gamma}$*, тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости* $P_{n-m}=[C_{n-m-1},A]$*, являющейся аналогом нормали 1-го рода Нордена* [8].

3. *Плоскость* C_{n-m-1} *переносится параллельно в линейной комбинации связности* $\overset{0}{\Gamma}$ *тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости* $P_{n-1}=N_{m-1}\oplus C_{n-m-1}$.

Доказательство следует из следующих соотношений:

$$dB_\alpha=\nu B_\alpha+\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^{\beta}_{\alpha}B_\beta\,, \tag{8}$$

$$dB_\alpha=(...)^{\beta}_{\alpha}B_\beta+\overset{0}{\nabla}\lambda^a_\alpha B_a+(\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha-\lambda_a\overset{0}{\nabla}\lambda^a_\alpha)A\,, \tag{9}$$

где $\nu=\theta-\left(\lambda_\alpha-\mu^a_\alpha\lambda_a\right)$.

Равенство (8) получается при приравнивании к нулю компонент ковариантных дифференциалов $\overset{0}{\nabla}\lambda^a_\alpha=0$, $\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha=0$ в выражениях дифференциалов и означает, что плоскость C_{n-m-1} остается на месте.

Дифференциалы точек B_α примут вид (9), если учесть в них охваты (7). Полученное равенство показывает, что обращение в нуль ковариантного дифференциала $\overset{0}{\nabla}\lambda^a_\alpha$ характеризует параллельный перенос плоскости C_{n-m-1} в связности, определяемой подобъектом $\overset{0}{\Gamma}_2$ объекта связности $\overset{0}{\Gamma}$, при котором плоскость C_{n-m-1} смещается в плоскости P_{n-m}.

Из выражений (9) также следует, что обращение в нуль линейной комбинации ковариантных дифференциалов $\overset{0}{\Omega}_\alpha=\overset{0}{\nabla}\lambda_\alpha-\lambda_a\overset{0}{\nabla}\lambda^a_\alpha$ характеризует параллельный перенос плоскости C_{n-m-1} в линейной комбинации связности, при котором плоскость C_{n-m-1} смещается в гиперплоскости P_{n-1}.

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А.* Дифференцируемое отображение ранга r аффинного Q_m и проективного P_n пространств // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324, №2. Математика и механика. Физика. С. 35—39.

3. *Аль-Хассани М.А., Молдованова Е.А.* Отображения аффинного пространства в многообразие нуль-пар проективного пространства // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, №2. Математика и механика. Физика. С. 24—28.

4. *Белова О.О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей // ДГМФ. Калининград, 2008. №39. С. 13—18.

5. *Бубякин И.В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства P_n, содержащих конечное число торсов // Матем. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, вып. 4. С. 3—16.

6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

7. *Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А.* Распределение двумерных площадок в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. 2012. Т. 320. №2. Математика и механика. Физика. С. 5—8.

8. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

9. *Степанов С.С.* Векторы, тензоры и формы: Инструкция по применению. М., 2020.

10. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

11. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. №37. С. 179—187.

12. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Projective differential geometry of submanifolds. Elsevier, 1993 (North-Holland Mathematical Library).

13. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalization. N. Y., 1996. doi: 10.1002/9781118032633.

14. *Akivis M.A., Shelekhov A.M.* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs // J. Math. Sci. 2011. Vol. 177, №522.

15. *Belova O. O.* The Grassmann-like manifold of centered planes // Math. Notes. Springer, 2018. Vol. 104, № 6. P. 789—798.

16. *Benini F.* Basics of Differential Geometry & Group Theory : PhD thesis. Trieste, 2018.

17. *Katanaev M. O.* Geometric Methods in Mathematical Physics. 2016. arXiv:1311.0733v3.

18. *Lakshmibai V., Brown J.* The Grassmannian Variety. Geometric and Representation-Theoretic Aspects. Springer, 2015 (Developments in Mathematics; vol. 42).

19. *Mansouri A.-R.* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions // Diff. Geom. and its Appl. 2009. Vol. 27. P. 635—646.

20. *Pfalzgraf J.* A short note on Grassmann manifolds with a view to noncommutative geometry // Petsche H. J., Lewis A., Liesen J., Russ S. (eds.). From Past to Future: Graßmann's Work in Context. Springer, 2011. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0405-5_29.

21. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, № 5. P. 675—709.

22. *Rahula M.* The G.F. Laptev method: fundamental objects of mappings // J. Math. Sci. 2011. Vol. 174, № 675.

23. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

O. O. Belova[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-4

The Grassmann-like manifold of centered planes when a surface is described by the centre

Submitted on May 10, 2021

We continue to study of the Grassmann-like manifold $Gr^*(m, n)$ of m-centered planes. A special case is considered when the center A de-

scribes an $(n-m)$-dimensional surface S_{n-m}. We will denote this manifold by $\overset{0}{Gr}{}^{*}(m, n)$. An analogue of the strong Norden normalization of the manifold $\overset{0}{Gr}{}^{*}(m, n)$ is realized. It is proved that this normalization induces a connection in the bundle associated with the manifold $\overset{0}{Gr}{}^{*}(m, n)$. A geometric characteristic of this connection is given with the help of parallel displacements.

In our research we use the Cartan method of external forms and the group-theoretical method of Laptev. These methods are used by many geometers and physicists.

The Grassmann-like manifold is closely related to such a well-known and popular manifold as the Grassmann manifold. The Grassmann manifold is an example of a homogeneous space and forms an important fundamental class of projective manifolds, and the projective space itself can be represented as a Grassmann manifold.

Keywords: projective space, the Grassmann-like manifold, surface, connection, parallel displacements.

References

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.*: Eli Cartan (1869—1951). Moscow: MCNMO (2014).

2. *Al-Hassani, M.A., Luchinin, A.A.*: Differentiable mapping of the rank r of affine Q_m and projective P_n spaces. *Izv. Tomsk Polytechnic University*, **324**:2, 35—39 (2014).

3. *Al-Hassani M.A., Moldovanova E.A.*: Mapping of an affine space into the manifold of zero pairs of a projective space. *Izv. Tomsk Polytechnic University*, **322**:2, 24—28 (2013).

4. *Belova, O.O.:* The geometrical characteristic of induced connections of Grassmann-like manifold of centered planes. *DGMF*. Kaliningrad. **39**, 13—18 (2008).

5. *Bubyakin, I. V.*: On the structure of complexes of m-dimensional planes of the projective space P_n containing finitely number of torsos. *Math. NEFU Notes*, **24**:4, 3—16 (2017).

6. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.:* Differential-geometric structures on manifolds. *J. Soviet Math.*, **14**:6, 1573—1719 (1980).

7. *Ivlev E. T., Moldovanova E. A.*: Distribution of two-dimensional areas in Euclidean space. *Izv. Tomsk Polytechnic University*, **320**:2, 5—8 (2012).

8. *Norden, A. P.:* Spaces with an affine connection. Moscow (1976).

9. *Stepanov, S. S.*: Vectors, tensors and forms. Instructions for use. Moscow (2020).

10. *Shevchenko, Yu. I.*: Clothings of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).

11. *Shevchenko, Yu. I.*: Laptev's and Lumiste's tricks for specifying a connection in a principal bundle. *DGMF*. Kaliningrad. **37**, 179—187 (2006).

12. *Akivis, M. A., Goldberg, V. V.*: Projective differential geometry of submanifolds. Elsevier, Amsterdam, North-Holland Math. Library (1993).

13. *Akivis, M. A., Goldberg, V. V.*: Conformal differential geometry and its generalization. Wiley, New York (1996). doi: 10.1002/97811180 32633.

14. *Akivis, M. A., Shelekhov, A. M.*: Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. *J. Math. Sci.,* **177**:522 (2011).

15. *Belova, O. O.*: The Grassmann-like manifold of centered planes. *Math. Notes.* Springer, New York, **104**:6, 789—798 (2018).

16. *Benini, F.*: Basics of Differential Geometry & Group Theory. PhD thesis. Trieste (2018).

17. *Katanaev, M. O.*: Geometric Methods in Mathematical Physics, arXiv:1311.0733v3 (2016).

18. *Lakshmibai V., Brown J.*: The Grassmannian Variety. Geometric and Representation-Theoretic Aspects. *Developments in Mathematics*, **42**. Springer, New York (2015).

19. *Mansouri, A.-R.*: An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions. *Diff. Geom. and its Appl.*, **27**, 635—646 (2009).

20. *Pfalzgraf, J.* A short note on Grassmann manifolds with a view to noncommutative geometry. In: Petsche H. J., Lewis A., Liesen J., Russ S. (eds.). *From Past to Future: Graßmann's Work in Context*. Springer, Basel (2011). https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0405-5_29.

21. *Polyakova, K. V.*: Parallel displacements on the surface of a projective space. *J. Math. Sci.*, **162**:5, 675—709 (2009).

22. *Rahula, M.*: The G.F. Laptev method: fundamental objects of mappings. *J. Math. Sci.,* **174**:675 (2011).

23. *Scholz, E.*: H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).

УДК 514.76

А. В. Букушева[1]
[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-5

Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки — Вебстера

Рассматривается неголономное многообразие Кенмоцу, оснащенное связностью, являющейся аналогом обобщенной связности Танаки — Вебстера. Изучаемая связность получается из обобщенной связности Танаки — Вебстера заменой первого структурного эндоморфизма на второй структурный эндоморфизм. Полученная связность также получает в работе название обобщенной связности Танаки — Вебстера.

В отличие от многообразия Кенмоцу структурная форма неголономного многообразия Кенмоцу не замкнута. Следствием этого единственного различия является значительное расхождение в свойствах таких многообразий. Так, например, в работе доказывается, что альтернация тензора Риччи — Схоутена неголономного многообразия Кенмоцу, являющегося трансверсальным аналогом тензора Риччи, пропорциональна внешнему дифференциалу структурной формы. В то же время в классическом случае многообразия Кенмоцу тензор Риччи — Схоутена является симметрическим тензором.

Доказывается, что связность Танаки — Вебстера является метрической связностью. Доказывается также,

Поступила в редакцию 30.06.2021 г.

что из того, что альтернация тензора Риччи — Схоутена пропорциональна внешнему дифференциалу структурной формы, выполняется следующее утверждение: если неголономное многообразие Кенмоцу есть многообразие Эйнштейна относительно обобщенной связности Танаки — Вебстера, то оно риччи-плоское относительно этой же связности.

Ключевые слова: неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связность, тензор Схоутена, тензор Риччи — Схоутена, обобщенная связность Танаки — Вебстера, многообразие Эйнштейна.

Введение

Неголономное многообразие Кенмоцу является обобщением многообразия Кенмоцу, открытого в 1972 году в работе [7]. Структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы [8], в то время как структуры неголономного многообразие Кенмоцу нормальны, но не интегрируемы. Неголономное многообразие Кенмоцу определено автором настоящей работы в статье [1]. Внутренняя геометрия неголономного многообразия Кенмоцу M обладает рядом замечательных свойств. Эти свойства удобно сформулировать в терминах адаптированных координат [2—4]. В частности, установлено, что тензорное поле Схоутена — Вагнера P, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P^c_{ad} = \partial_n \Gamma^c_{ad}$, обращается в нуль. В настоящей работе доказывается, что альтернация тензора Риччи — Схоутена, являющегося трансверсальным аналогом тензора Риччи, пропорциональна внешнему дифференциалу структурной формы. Неголономное многообразие Кенмоцу оснащается в настоящей работе аналогом обобщенной связности Танаки — Вебстера. Обобщенная связность Танаки — Вебстера введена для контактного метрического многообразия [8]. В нашем случае более эффективной является связность ∇_X^T, которую мы также будем называть обобщенной связностью Танаки — Вебстера и которая определяется с помощью равенства

$$\nabla_X^T Y = \tilde{\nabla}_X Y + \left(\left(\tilde{\nabla}_X \eta\right) Y\right)\vec{\xi} - \eta(Y)\tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X)\psi Y.$$

Здесь эндоморфизм ψ задается равенством

$$\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$$

и называется вторым структурным эндоморфизмом. Доказывается, во-первых, что связность ∇_X^T является метрической связностью, а во-вторых, что если неголономное многообразие Кенмоцу есть многообразие Эйнштейна относительно обобщенной связности Танаки — Вебстера, то оно риччи-плоское относительно той же связности.

Основные результаты

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n = 2m+1$, $m \geq 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g\right)$ [5; 6]. Здесь, в частности, η — 1-форма и $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающие, соответственно, распределение D: $D = \ker(\eta)$; и оснащение $D^{\perp}$ распределения D: $D^{\perp} = span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D называется распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где

$$N_{\varphi}(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \text{ —}$$

тензор Нейенхейса эндоморфизма φ.

Нормальное почти контактное метрическое многообразие M называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$. Легко показать, что для многообразия M также выполняется условие

$$L_{\vec{\xi}} g = 2\left(g - \eta \otimes \eta\right).$$

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g в адаптированных координатах [5; 6]: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$; $a, b, c = 1, \ldots, n-1$).

Под внутренней линейной связностью на многообразии с контактной метрической структурой [4] понимается отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее обычным для ковариантной производной условиям.

Коэффициенты внутренней связности в адаптированных координатах определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$.

Пусть ψ: $D \to D$ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$. Имеет место следующее предложение [3].

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты неголономного многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right), \ \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - g_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = \delta^b_a + \psi^b_a, \ \tilde{\Gamma}^n_{na} = \tilde{\Gamma}^a_{nn} = 0.$$

Назовем обобщенной связностью Танаки — Вебстера связность ∇^T_X, которая определяется с помощью равенства

$$\nabla^T_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \left(\left(\tilde{\nabla}_X \eta\right) Y\right) \vec{\xi} - \eta(Y) \tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X) \psi Y.$$

Найдем компоненты $G^{\gamma}_{\alpha\beta}$ связности ∇^T_X в адаптированных координатах.

Положим $X=\vec{e}_a$, $Y=\vec{e}_b$. Получаем

$$\nabla^T_a\vec{e}_b=\tilde{\nabla}_a\vec{e}_b-\eta\left(\tilde{\nabla}_a\vec{e}_b\right), \text{ или } G^c_{ab}=\tilde{\Gamma}^c_{ab},\ G^n_{ab}=0.$$

Пусть теперь $X=\vec{e}_a$, $Y=\partial_n$.

Тогда $\nabla^T_a\partial_n=\tilde{\nabla}_a\partial_n-\tilde{\nabla}_a\partial_n=0.$

Отсюда $G^b_{an}=0$, $G^n_{an}=0.$

Пусть далее $X=\partial_n$, $Y=\vec{e}_b$. Тогда

$$\nabla^T_a\vec{e}_b=\tilde{\nabla}_n\vec{e}_b-\eta\left(\tilde{\nabla}_n\vec{e}_b\right)-\psi\vec{e}_b, \text{ или } G^a_{nb}=\delta^a_b.$$

Таким образом, отличные от нуля коэффициенты связности ∇^T_X в адаптированных координатах имеют следующий вид:

$$G^a_{bc}=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}\right),\ G^a_{nb}=\delta^a_b.$$

Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 2. *Обобщенная связность Танаки — Вебстера является метрической связностью.*

Вычислим необходимые нам для дальнейшего отличные от нуля компоненты тензора кривизны K связности ∇^T_X. Воспользуемся для этого формулой

$$K\left(X,Y\right)Z=\nabla^T_X\nabla^T_Y Z-\nabla^T_Y\nabla^T_X Z-\nabla^T_{[X,Y]}Z.$$

Имеем

$$K^d_{abc}=R^d_{abc}-2\omega_{ba}\delta^d_c,$$

$$K^c_{nab}=\partial_n\Gamma^c_{ab}-\nabla_a\delta^c_b.$$

Здесь ∇ — внутренняя связность, а R^{d}_{abc} — компоненты тензора Схоутена [3]. Учитывая, что $P^{c}_{ad} = \partial_n \Gamma^{c}_{ab} = 0$, получаем: $K^{c}_{nab} = 0$.

Пусть *K(X,Y)* — соответствующий тензору *K(X,Y)Z* тензор Риччи. Имеют место равенства

$$k_{ac} = r_{ac} + 2\omega_{ad}\delta^{d}_{c} = r_{ac} + 2\omega_{ac}.$$

Предложение 3. *Для неголономного многообразия Кенмоцу размерности* $n = 2m+1$ *выполняется следующее равенство:*

$$2m\omega_{ca} - r_{[ac]} = 0.$$

Доказательство. Как известно, в адаптированных координатах для любого почти контактного метрического многообразия выполняется следующее равенство:

$$\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^{d}_{eab} - g_{bd}R^{d}_{eac}.$$

В случае неголономного многообразия Кенмоцу это равенство перепишется в виде

$$0 = 4\omega_{ea}g_{bc} - g_{dc}R^{d}_{eab} - g_{bd}R^{d}_{eac}.$$

Проводя необходимые преобразования, приходим к равенству $2m\omega_{ca} = \frac{1}{2}\left(r_{ac} - r_{ca}\right)$.

Что и требовалось доказать.

Теорема. *Пусть неголономное многообразие Кенмоцу M является многообразием Эйнштейна относительно обобщенной связности Танаки — Вебстера, тогда оно риччи-плоское относительно этой связности.*

Доказательство. Пусть *M* — многообразие Эйнштейна. Отсюда, в частности, следует, что

$$k_{ac} = r_{ac} + 2\omega_{ac} = \lambda g_{ac}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда, с одной стороны, объект k_{ac} симметричен, так как $k_{ac}=\lambda g_{ac}$. С другой стороны, проальтернировав равенство

$$k_{ac}=r_{ac}+2\omega_{ac}=\lambda g_{ac}$$

и воспользовавшись равенством

$$2m\omega_{ca}=\frac{1}{2}\left(r_{ac}-r_{ca}\right),$$

получаем

$$k_{[ac]}=(-2m+2)\omega_{ac}.$$

Другими словами, если $m\neq 1,$ то $k_{[ac]}\neq 0.$

Теорема доказана.

Рассмотрим пример для случая $m=1$. Пусть $M\in\mathbb{R}^3$. $\left(\partial_\alpha\right)$ $\left(\alpha=1,2,3\right)$ — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму $\eta,$ полагая $\eta=dx^3+x^2dx^1.$ Пусть далее $\vec{e}_1=\partial_1-x^2\partial_3,$ $\vec{e}_2=\partial_2,$ $\vec{e}_3=\vec{\xi}=\partial_3,$ $D=span\left(\vec{e}_1,\partial_2\right).$ Определим метрический тензор, полагая $g(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=g(\vec{e}_2,\vec{e}_2)=e^{2x^3},$ $g(\vec{e}_3,\vec{e}_3)=1.$ Тем самым добиваемся выполнения равенства $L_{\vec{\xi}}g=2\left(g-\eta\otimes\eta\right).$ Структурный эндоморфизм зададим равенствами

$$\varphi(\vec{e}_1)=\vec{e}_2,\ \ \varphi(\vec{e}_2)=-\vec{e}_1,\ \ \varphi(\vec{e}_2)=0.$$

Отсюда непосредственно следует, что $L_{\vec{\xi}}\varphi=0$ и

$$\omega(\varphi(\vec{e}_1),\varphi(\vec{e}_2))=-\omega(\vec{e}_2,\vec{e}_1)=\omega(\vec{e}_1,\vec{e}_2).$$

Последнее означает выполнение равенства

$$\omega\left(\varphi X,\varphi Y\right)=\omega\left(X,Y\right).$$

Проводя непосредственные вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами внутренней связности являются следующие коэффициенты: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^1_{22} = -x^2$. Отсюда, в частности, следует справедливость равенства $\nabla\varphi = 0$. После необходимых вычислений получаем $R^2_{122} = 1$. Таким образом,

$$k_{12} = r_{12} + 2\omega_{12} = 1 - 1 = 0.$$

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О тензоре Схоутена — Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Тр. семин. по геометрии и математическому моделированию. 2019. №5. С. 15—19.

2. *Букушева А.В.* Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №64. С. 5—14.

3. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 32—41.

4. *Букушева А.В., Галаев С.В., Иванченко И.П.* О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Математика. Механика. 2011. №13. С. 10—14.

5. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, №2. С. 138—147.

6. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, №1. P. 71—76.

7. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24. P. 93—103.

8. *Pitis G.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov, 2007.

A. V. Bukusheva[1]
[1] *Saratov State University*
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-5

Non-holonomic Kenmotsu manifolds equipped with generalized Tanaka — Webster connection

Submitted on June 30, 2021

A non-holonomic Kenmotsu manifold equipped with a connection analogous to the generalized Tanaka — Webster connection, is considered. The studied connection is obtained from the generalized Tanaka — Webster connection by replacing the first structural endomorphism by the second structural endomorphism. The obtained connection is also called in the work the generalized Tanaka — Webster connection.

Unlike a Kenmotsu manifold, the structure form of a non-holonomic Kenmotsu manifold is not closed. The consequence of this single difference is a significant discrepancy in the properties of such manifolds. For example, it is proved in the paper that the alternation of the Ricci-Schouten tensor of a non-holonomic Kenmotsu manifold, which is a transverse analogue of the Ricci tensor, is proportional to the external differential of the structural form. At the same time, in the classical case of a Kenmotsu manifold, the Ricci — Schouten tensor is a symmetric tensor.

It is proved that a Tanaka — Webster connection is a metric connection. It is also proved that from the fact that the alternation of the Ricci-Schouten tensor is proportional to the external differential of the structural form, the following statement holds: if a non-holonomic Kenmotsu manifold is an Einstein manifold with respect to the generalized Tanaka — Webster connection, then it is Ricci-flat with respect to the same connection.

Keywords: non-holonomic Kenmotsu manifold, intrinsic connection, Schouten tensor, Ricci — Schouten tensor, generalized Tanaka — Webster connection, Einstein manifold.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On the Schouten — Wagner tensor of a nonholonomic Kenmotsu manifold. *Proceedings of the seminar on geometry and mathematical modeling*, **5**, 15—19 (2019).

2. *Bukusheva, A. V.:* Kenmotsu manifolds with a zero curvature distribution. *Journal of Mathematics and Mechanics. Tomsk State University*, **64**, 5—14 (2020).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Geometry of almost contact hyperkähler manifolds. *DGMF*. Kaliningrad. **48**, 32—41 (2017).

4. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V., Ivanchenko, I. P.*: On almost contact metric structures defined by a connection over a distribution with a Finsler metric. *Mathematics. Mechanics*, **13**, 10—14 (2011).

5. *Galaev, S. V.:* Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, **17**:2, 138—147 (2017).

6. *Galaev, S. V.:* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. *Lobachevskii J. Math.*, **39** (1), 71—76 (2018).

7. *Kenmotsu, K.:* A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.*, **24**, 93—103 (1972).

8. *Pitis, G.:* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov (2007).

УДК 514.75

***А. В. Вялова*[1], *Ю. И. Шевченко*[2]**
[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
vyalova.alexa@mail.ru, ESkrydlova@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-6

Композиционное оснащение многообразия гиперцентрированных плоскостей, размерность которого совпадает с размерностью образующей плоскости

В многомерном проективном пространстве рассматривается расслоение над семейством пар плоскостей, одна из которых является гиперплоскостью в другой. Доказано, что композиционное оснащение семейства индуцирует фундаментально-групповые связности двух типов в рассматриваемом расслоении.

Ключевые слова: проективное пространство, семейство гиперцентрированных плоскостей, фундаментально-групповая связность, кривизна, псевдотензор.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R=\{A, A_I\}$ $(I,...=\overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ \ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A, \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа $\omega^I, \omega_J^I, \omega_I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$ (см., напр., [1]):

Поступила в редакцию 10.05.2021 г.

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$
$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \tag{2}$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную плоскость P_m с многомерным центром P_{m-1}, которую обозначим P_m^{m-1}. Специализируем подвижной репер $\{A, A_i, A_\alpha\}$ $(i,... = \overline{1, m},\ \alpha,... = \overline{m+1, n})$, помещая вершины A, A_i на внешнюю плоскость P_m, а вершины A_i — в ее центр, на гиперплоскость P_{m-1}. Выбирая m форм в качестве базисных, запишем уравнения многообразия V_m — семейства гиперцентрированных плоскостей P_m^{m-1} в виде [2]

$$\omega^\alpha = \Lambda^{\alpha i}\omega_i,\ \ \omega_i^\alpha = \Lambda_i^{\alpha j}\omega_j. \tag{3}$$

Базисные формы удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_i = \theta_i^j \wedge \omega_j,\ \ \theta_i^j = \omega_i^j - \Lambda_i^{\alpha j}\omega_\alpha. \tag{4}$$

Фундаментальный объект 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda^{\alpha i}, \Lambda_i^{\alpha j}\}$ семейства V_m, компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Lambda^{\alpha(i)} - \Lambda_j^{\alpha i}\omega^j = \Lambda^{\alpha ij}\omega_j,\ \ \Delta\Lambda_i^{\alpha(j)} = \Lambda_i^{\alpha jk}\omega_k, \tag{5}$$

является псевдотензором в смысле [1], содержащим подпсевдотензор $\{\Lambda_i^{\alpha j}\}$. Здесь дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_i^{\alpha(j)} = d\Lambda_i^{\alpha j} + \Lambda_i^{\alpha k}\theta_k^j + \Lambda_i^{\beta j}\omega_\beta^\alpha - \Lambda_k^{\alpha j}\omega_i^k.$$

Отметим, что $\Lambda_i^{\alpha[jk]} = 0,\ \Lambda^{\alpha[ij]} = 0$, где квадратные скобки обозначают альтернирование.

Над многообразием V_m возникает главное расслоение $G_r(V_m)$ с типовым слоем — подгруппой G_r стационарности гиперцентрированной плоскости P_m^{m-1}, причем $r = n(n-m+1)+m^2$. Структурные уравнения ассоциированного с многообразием V_m расслоения $G_r(V_m)$ состоят из уравнений (4_1) и следующих:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega_j \wedge \omega^{ij}, \tag{6}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_\kappa \wedge \omega_j^{ik}, \tag{7}$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_i \wedge \omega_\beta^{\alpha i}, \tag{8}$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - \omega_i \wedge \omega_\alpha^i, \tag{9}$$

$$D\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^i + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^i + \omega_\alpha \wedge \omega^i, \tag{10}$$

где

$$\omega^{ij} = \Lambda^{\alpha j}\omega_\alpha^i, \;\; \omega_j^{ik} = \Lambda_j^{\alpha k}\omega_\alpha^i + \delta_j^i(\omega^k - \Lambda^{\alpha k}\omega_\alpha) + \delta_j^k\omega^i, \tag{11}$$
$$\omega_\beta^{\alpha i} = -\Lambda_j^{\alpha i}\omega_\beta^j + \delta_\beta^\alpha(\omega^i - \Lambda^{\gamma i}\omega_\gamma) - \Lambda^{\alpha i}\omega_\beta .$$

Расслоение $G_r(V_m)$ содержит 4 главных факторрасслоения со следующими структурными уравнениями [2]: 1) (4_1, 7) — расслоение плоскостных линейных кореперов $L_{m^2}(V_m)$ с типовым слоем $L_{m^2} = GL(m)$ — линейной факторгруппой, действующей неэффективно во внутренней плоскости P_{m-1}; 2) (4_1, 6, 7) — расслоение аффинных кореперов $L_{m(m+1)}(V_m)$ с типовым слоем $L_{m(m+1)} = GA(m)$ — аффинной факторгруппой, действующей в гиперцентрированной плоскости $P_m^{m-1} = (P_m, P_{m-1})$, где $P_{m-1} \subset P_m$; 3) (4_1, 8) — расслоение нормальных линейных кореперов $L_{(n-m)^2}(V_m)$ с типовым слоем — линейной факторгруппой, действующей неэффективно в проективном факторпространстве $\mathcal{P}_{n-m-1} = P_n / P_m$ (см., напр., [1]); 4) (4_1, 8, 9) — расслоение центропроективных кореперов $L_{(n-m)(n-m+1)}(V_m)$ с типовым слоем $L_{(n-m)(n-m+1)}$ — центропроективной факторгруппой, действующей в проективном гиперцентрированном факторпространстве $\mathcal{P}^{n-m-1}_{n-m} = (\mathcal{P}_{n-m}, \mathcal{P}_{n-m-1})$, где $\mathcal{P}_{n-m} = P_n / P_{m-1} \supset \mathcal{P}_{n-m-1}$.

Дифференцируя внешним образом формы (4_2) с учетом уравнений (7, 9) и дифференциальных уравнений (5_2) на компоненты подобъекта $\{\Lambda^{\alpha j}_i\}$, получим

$$D\theta^j_i = \theta^k_i \wedge \theta^j_k + \omega_k \wedge \theta^{jk}_i, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}\theta^{jk}_i = (\Lambda^{\alpha k}_i \omega^j_\alpha + \Lambda^{\alpha j}_i \omega^k_\alpha) + (\delta^j_i \omega^k + \delta^k_i \omega^j) - \\ - (\delta^j_i \Lambda^{\alpha k} \omega_\alpha + \delta^k_i \Lambda^{\alpha j} \omega_\alpha) - \Lambda^{\alpha jk}_i \omega_\alpha .\end{aligned} \tag{13}$$

Так как $\theta^{[jk]}_i = 0$, то справедлива

Теорема 1. *Многообразие V_m является голономным* [3] *гладким многообразием.*

Замечание. В работе [4] рассмотрено произвольное семейство гиперцентрированных плоскостей, но не показано, что оно является голономным многообразием.

Возьмем новые слоевые формы

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^i = \omega^i - \Gamma^{ij}\omega_j, \ \ \tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^{ik}_j \omega_k, \ \ \tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Gamma^{\alpha i}_\beta \omega_i , \\ \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma^i_\alpha \omega_i , \ \ \tilde{\omega}^i_\alpha = \omega^i_\alpha - L^{ij}_\alpha \omega_j .\end{aligned} \tag{14}$$

Дифференцируя их внешним образом с учетом (4_1, $6-10$) и используя теорему Картана — Лаптева [5], получим, что связность в главном расслоении $G_r(V_m)$ задается с помощью поля объекта связности $\Gamma = \{\Gamma^{ij}, \Gamma^{ik}_j, \Gamma^{\alpha i}_\beta, \Gamma^i_\alpha, L^{ij}_\alpha\}$. Компоненты объекта фундаментально-групповой связности Γ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\Gamma^{i(j)} - \Gamma^{ij}_k\omega^k + \omega^{ij} = \Gamma^{ijk}\omega_k,$$

$$\Delta\Gamma^{i(k)}_j + \omega^{ik}_j = \Gamma^{ikl}_j\omega_l, \ \Delta\Gamma^{\alpha(i)}_\beta + \omega^{\alpha i}_\beta = \Gamma^{\alpha ij}_\beta\omega_j, \tag{15}$$

$$\Delta\Gamma^{(i)}_\alpha + \Gamma^{\beta i}_\alpha\omega_\beta - \omega^i_\alpha = \Gamma^{ij}_\alpha\omega_j,$$

$$\Delta L^{i(j)}_\alpha + \Gamma^j_\alpha\omega^i - \Gamma^{ij}\omega_\alpha + \Gamma^{\beta j}_\alpha\omega^i_\beta - \Gamma^{ij}_k\omega^k_\alpha = L^{ijk}_\alpha\omega_k.$$

Теорема 2. *Объект фундаментально-групповой связности Γ, задающий связность в главном расслоении $G_r(V_m)$, содержит 2 простейших подобъекта ($\Gamma_1 = \{\Gamma^{ik}_j\}$ — объект плоскостной аффинной связности, $\Gamma_2 = \{\Gamma^{\alpha i}_\beta\}$ — объект нормальной линейной связности) и 2 простых подобъекта ($\Gamma_3 = \{\Gamma^{ij}, \Gamma_1\}$ — объект плоскостной общей аффинной связности, $\Gamma_4 = \{\Gamma^i_\alpha, \Gamma_2\}$ — объект нормальной центропроективной связности), задающие связности соответственно в фактор-расслоениях $L_{m^2}(V_m)$, $L_{(n-m)^2}(V_m)$, $L_{m(m+1)}(V_m)$, $L_{(n-m)(n-m+1)}(V_m)$*
.

Замечание. Объект связности Γ образует квазипсевдотензор лишь в совокупности с фундаментальным псевдотензором Λ. Названия объектам даны с учетом названий расслоений, их типовых слоев и размерности базы.

С учетом уравнений (15) запишем структурные уравнения для форм связности (14):

$$D\widetilde{\omega}^i = \widetilde{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + R^{ijk}\omega_j \wedge \omega_k,$$

$$D\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + R^{ikl}_j\omega_k \wedge \omega_l,$$

$$D\widetilde{\omega}^\alpha_\beta = \widetilde{\omega}^\gamma_\beta \wedge \widetilde{\omega}^\alpha_\gamma + R^{\alpha ij}_\beta\omega_i \wedge \omega_j,$$

$$D\widetilde{\omega}_\alpha = \widetilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \widetilde{\omega}_\beta + R^{ij}_\alpha \omega_i \wedge \omega_j ,$$

$$D\widetilde{\omega}^i_\alpha = \widetilde{\omega}^j_\alpha \wedge \widetilde{\omega}^i_j + \widetilde{\omega}^\beta_\alpha \wedge \widetilde{\omega}^i_\beta + \widetilde{\omega}_\alpha \wedge \widetilde{\omega}^i + R^{ijk}_\alpha \omega_j \wedge \omega_k .$$

Коэффициенты при внешних произведениях базисных форм $R = \{R^{ijk},\ R^{ikl}_j, R^{\alpha ij}_\beta, R^{ij}_\alpha, R^{ijk}_\alpha\}$ составляют объект кривизны групповой связности Γ:

$$R^{ijk} = \Gamma^{i[jk]} - \Gamma^{l[j}\Gamma^{ik]}_l ,\ \ R^{ikl}_j = \Gamma^{i[kl]}_j - \Gamma^{m[k}_j \Gamma^{il]}_m ,$$

$$R^{\alpha ij}_\beta = \Gamma^{\alpha[ij]}_\beta - \Gamma^{\gamma[i}_\beta \Gamma^{\alpha j]}_\gamma , R^{ij}_\alpha = \Gamma^{[ij]}_\alpha - \Gamma^{\beta[i}_\alpha \Gamma^{j]}_\beta , \qquad (16)$$

$$R^{ijk}_\alpha = L^{i[jk]}_\alpha - L^{l[j}_\alpha \Gamma^{ik]}_l - \Gamma^{\beta[j}_\alpha L^{ik]}_\beta - \Gamma^{[j}_\alpha \Gamma^{ik]} ,$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках. Продолжая уравнения (15), получим дифференциальные сравнения:

$$\Delta\Gamma^{i(j)(k)} + \Gamma^{il}\theta^{jk}_l + \Gamma^{lj}\omega^{ik}_l - \Gamma^{ijk}_l \omega^l - \Gamma^{ij}_l \omega^{lk} + \omega^{ijk} \equiv 0 ,$$

$$\Delta\Gamma^{i(k)(l)}_j + \Gamma^{mk}_j \omega^{il}_m + \Gamma^{im}_j \theta^{kl}_m - \Gamma^{ik}_m \omega^{ml}_j + \omega^{ikl}_j \equiv 0 ,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha(i)(j)}_\beta + \Gamma^{\alpha k}_\beta \theta^{ij}_k + \Gamma^{\gamma i}_\beta \omega^{\alpha j}_\gamma - \Gamma^{\alpha i}_\gamma \omega^{\gamma j}_\beta + \omega^{\alpha ij}_\beta \equiv 0 , \qquad (17)$$

$$\Delta\Gamma^{(i)(j)}_\alpha + \Gamma^k_\alpha \theta^{ij}_k - \Gamma^i_\beta \omega^{\beta j}_\alpha + \Gamma^{\beta ij}_\alpha \omega_\beta - \Gamma^{\beta i}_\alpha \omega^j_\beta \equiv 0 ,$$

$$\Delta L^{i(j)(k)}_\alpha + L^{il}_\alpha \theta^{jk}_l + L^{lj}_\alpha \omega^{ik}_l - L^{ij}_\beta \omega^{\beta k}_\alpha + \Gamma^{jk}_\alpha \omega^i + \Gamma^j_\alpha \omega^{ik} -$$

$$- \Gamma^{ijk}\omega_\alpha + \Gamma^{ij}\omega^k_\alpha + \Gamma^{\beta jk}_\alpha \omega^i_\beta - \Gamma^{ijk}_l \omega^l_\alpha \equiv 0 ,$$

где символ «$\equiv$» означает сравнение по модулю базисных форм ω_i и введены обозначения

$$\omega^{ijk} = \Lambda^{\alpha jk}\omega^i_\alpha , \quad \omega^{ikl}_j = \Lambda^{\alpha kl}_j \omega^i_\alpha + \delta^i_j(\omega^{kl} - \Lambda^{\alpha kl}\omega_\alpha) + \delta^k_j \omega^{il} ,$$

$$\omega^{\alpha ij}_\beta = \Lambda^{\alpha ij}_k \omega^k_\beta - \delta^\alpha_\beta \omega^{ij} + \delta^\alpha_\beta(\Lambda^{\gamma ij}\omega_\gamma - \Lambda^{\gamma i}\omega^j_\gamma) + \Lambda^{\alpha ij}\omega_\beta - \Lambda^{\alpha i}\omega^j_\beta .$$

Дифференцируя (16) с использованием уравнений (15) и сравнений (17), получим сравнения на компоненты объекта кривизны R:

$$\Delta R^{i(j)(k)} - R_l^{ijk}\omega^l \equiv 0\,,\ \Delta R_j^{i(k)(l)} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R_\beta^{\alpha(i)(j)} \equiv 0\,, \Delta R_\alpha^{(i)(j)} + R_\alpha^{\beta ij}\omega_\beta \equiv 0\,,$$

$$\Delta R_\alpha^{i(j)(k)} + R_\alpha^{jk}\omega^i - R^{ijk}\omega_\alpha + R_\alpha^{\beta jk}\omega_\beta^i - R_l^{ijk}\omega_\alpha^l \equiv 0\,.$$

Теорема 3. *Объект кривизны R фундаментально-групповой связности Γ является псевдотензором, содержащим 2 простейших $\{R_j^{ikl}\}$, $\{R_\beta^{\alpha ij}\}$ и 2 простых $\{R^{ijk}, R_j^{ikl}\}$, $\{R_\alpha^{ij}, R_\beta^{\alpha ij}\}$ подпсевдотензора, которые являются объектами кривизны соответствующих подсвязностей $\Gamma_1 - \Gamma_4$.*

Определение. *Композиционным оснащением* [1] семейства V_m гиперцентрированных плоскостей P_m^{m-1} назовем присоединение к каждой плоскости P_m^{m-1} двух фигур — точки и плоскости:

1) $B \in P_m,\ B \notin P_{m-1} : B \oplus P_{m-1} = P_m$;
2) $N_{n-m-1} : P_m \oplus N_{n-m-1} = P_n$.

Зададим оснащающие фигуры совокупностями точек

$$B = A + \lambda^i A_i,\quad C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^i A_i + \lambda_\alpha A\,.$$

Продифференцируем их и, переходя к сравнениям по модулю базисных форм, получим

$$dB \equiv \theta B + (\Delta\lambda^i + \omega^i)A,$$

$$dC_\alpha \equiv \theta C_\alpha + \omega_\alpha^\beta C_\beta + (\Delta\lambda_\alpha^i + \lambda_\alpha\omega^i + \omega_\alpha^i)A_i + (\Delta\lambda_\alpha + \omega_\alpha)A\,.$$

Условия, обеспечивающие инвариантность оснащающих плоскостей, позволяют найти уравнения на компоненты объекта $\lambda = \{\lambda^i, \lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha\}$:

$$\Delta\lambda^i+\omega^i=\lambda^{ij}\omega_j,\ \ \Delta\lambda_\alpha+\omega_\alpha=\overline{\lambda}^i_\alpha\omega_i,\ \ \Delta\lambda^i_\alpha+\lambda_\alpha\omega^i+\omega^i_\alpha=\lambda^{ij}_\alpha\omega_j\,. \quad (18)$$

Композиционное оснащение, задаваемое полем квазитензора $\lambda=\{\lambda^i,\lambda^i_\alpha,\lambda_\alpha\}$ на многообразии V_m, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ по формулам

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{ij}=\eta^i_\alpha\Lambda^{\alpha j}-\lambda^i\eta^j\,,\overset{0}{\Gamma}{}^{ik}_{j}=\eta^i_\alpha\Lambda^{\alpha k}_j+\delta^i_j\eta^k+\delta^k_j\lambda^i\,,$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta}=-\Lambda^{\alpha i}_j\lambda^j_\beta-\Lambda^{\alpha i}\lambda_\beta+\delta^\alpha_\beta\eta^i\,,\overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{\alpha}=\lambda_\alpha(\eta^i-\lambda^i)-\eta^i_\alpha\,, \quad (19)$$

$$\overset{1}{L}{}^{ij}_{\alpha}=-\lambda^i\eta^j_\alpha-\Lambda^{\beta j}_k(\eta^i_\beta\lambda^k_\alpha+\lambda^i\lambda_\alpha\lambda^k\lambda_\beta)-\Lambda^{\beta j}\lambda_\alpha\lambda^i_\beta\,,$$

где

$$\eta^i_\alpha=\lambda^i_\alpha-\lambda_\alpha\lambda^i,\ \eta^i=\lambda^i-\lambda_\alpha(\Lambda^{\alpha i}+\lambda^j\Lambda^{\alpha i}_j)\,.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Композиционное оснащение семейства гиперцентрированных плоскостей индуцирует фундаментально-групповую связность 1-го типа в ассоциированном расслоении* $G_r(V_m)$ *с объектом* $\overset{1}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^{ik}_{j},\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta},\overset{1}{\Gamma}{}^{ij},\ \overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{\alpha},\overset{1}{L}{}^{ij}_{\alpha}\}$.

В дифференциальные уравнения для компонент оснащающего квазитензора λ (18) вместо слоевых форм подставим их выражения через соответствующие формы связности и линейные комбинации базисных форм из (14). Перенося слагаемые с базисными формами вправо и вводя обозначения, получим

$$\nabla\lambda^i=\nabla^j\lambda^i\omega_j,\ \ \nabla\lambda_\alpha=\nabla^i\lambda_\alpha\omega_i,\ \ \nabla\lambda^i_\alpha=\nabla^j\lambda^i_\alpha\omega_j, \quad (20)$$

где выражения

$$\nabla\lambda^i=d\lambda^i+\lambda^j\widetilde{\omega}^i_j+\widetilde{\omega}^i\,,$$

$$\nabla\lambda_\alpha=d\lambda_\alpha-\lambda_\beta\widetilde{\omega}^\beta_\alpha+\widetilde{\omega}_\alpha\,, \quad (21)$$

$$\nabla\lambda^i_\alpha=d\lambda^i_\alpha+\lambda^j_\alpha\widetilde{\omega}^i_j-\lambda^j_\beta\widetilde{\omega}^\beta_\alpha+\lambda_\alpha\widetilde{\omega}^i+\widetilde{\omega}^i_\alpha$$

называются ковариантными дифференциалами компонент оснащающего квазитензора λ относительно связности Γ, а коэффициенты при базисных формах

$$\nabla^j \lambda^i = \lambda^{ij} - \lambda^k \Gamma^{ij}_k - \Gamma^{ij},$$

$$\nabla^i \lambda_\alpha = \overline{\lambda}^i_\alpha + \lambda_\beta \Gamma^{\beta i}_\alpha - \Gamma^i_\alpha, \tag{22}$$

$$\nabla^j \lambda^i_\alpha = \lambda^{ij}_\alpha - \lambda^k_\alpha \Gamma^{ij}_k + \lambda^i_\beta \Gamma^{\beta j}_\alpha - \lambda_\alpha \Gamma^{ij} - L^{ij}_\alpha$$

называются ковариантными производными относительно Γ.

Продолжения компонент оснащающего квазитензора λ имеют вид

$$\Delta\lambda^{i(j)} + \lambda^k \omega^{ij}_k + \omega^{ij} \equiv 0,$$

$$\Delta\overline{\lambda}^{(i)}_\alpha - \lambda_\beta \omega^{\beta i}_\alpha - \omega^i_\alpha \equiv 0, \tag{23}$$

$$\Delta\lambda^{i(j)}_\alpha + \lambda^k_\alpha \omega^{ij}_k - \lambda^i_\beta \omega^{\beta j}_\alpha + \overline{\lambda}^j_\alpha \omega^i + \lambda_\alpha \omega^{ij} \equiv 0.$$

Построены охваты

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{ij} = \lambda^{ij} - \lambda^k \overset{0}{\Gamma}{}^{ij}_k,$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^i_\alpha = \overline{\lambda}^i_\alpha + \lambda_\beta \overset{0}{\Gamma}{}^{\beta i}_\alpha, \tag{24}$$

$$\overset{2}{L}{}^{ij}_\alpha = \lambda^{ij}_\alpha - \lambda^k_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^{ij}_k + \lambda^i_\beta \overset{0}{\Gamma}{}^{\beta j}_\alpha - \lambda_\alpha \overset{2}{\Gamma}{}^{ij}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Фундаментально-групповая связность Γ может быть сведена к плоскостной общей аффинной и нормальной линейной связностям с помощью формул (24).*

Следствие. *Композиционное оснащение семейства гиперцентрированных плоскостей индуцирует фундаментально-групповую связность 2-го типа в ассоциированном расслоении $G_r(V_m)$ с объектом* $\overset{2}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^{ik}_j, \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha i}_\beta, \overset{2}{\Gamma}{}^{ij}, \overset{2}{\Gamma}{}^i_\alpha, \overset{2}{L}{}^{ij}_\alpha\}$.

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.
2. *Вялова А.В.* Псевдотензоры кривизны и кручения коаффинной связности в касательном расслоении к многообразию гиперцентрированных плоскостей // ДГМФ. Калининград, 2020. Вып. 51. С. 49—57.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.
4. *Башашина К.В*. Фундаментально-групповые связности и композиционное оснащение семейства гиперцентрированных плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 19—28.
5. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

A. V. Vyalova[1], *Yu. I. Shevchenko*[2]
[1] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
[2] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] vyalova.alexa@mail.ru, [2] ESkrydlova@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-6

The composite equipment for manifold of hypercentered planes, whose dimension coincides with dimension of generating plane

Submitted on May 10, 2021

In n-dimensional projective space P_n a manifold V_m , i.e., a family of pairs of planes one of which is a hyperplane in the other, is considered. A principal bundle $G_r(V_m)$ arises over it, $r = n(n-m+1)+m^2$. A typi-

cal fiber is the stationarity subgroup G_r of the generator of pair of planes: external plane and its multidimensional center — hyperplane. The principal bundle contains four factor-bundles.

A fundamental-group connection is set by the Laptev — Lumiste method in the associated fibering. It is shown that the connection object contains four subobjects that define connections in the corresponding factor-bundles. It is proved that the curvature object of fundamental-group connection forms pseudotensor. It contains four subpseudotensors, which are curvature objects of the corresponding subconnections.

The composite equipment of the family of hypercentered planes set by means of a point lying in the plane and not belonging to its hypercenter and an $(n-m-1)$-dimensional plane, which does not have common points with the hypercentered plane. It is proved, that composite equipment induces the fundamental-group connections of two types in the associated fibering.

Keywords: projective space, family of hypercentered planes, fundamental-group connection, curvature, pseudotensor.

References

1. *Shevchenko, Yu. I.:* Clothing of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).

2. *Vyalova, A. V.:* Curvature and torsion pseudotensorsof coaffine connection intangent bundle of hypercentred planes manifold. *DGMF*. Kaliningrad. **51**, 49—57 (2020).

3. *Shevchenko, Yu. I.:* The equipment of holonomic and nonholonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

4. *Bashashina, K. V.:* Fundamental-group connection andcomposite clothing for hypercentred planes family in projective space. *DGMF*. Kaliningrad. **49**, 19—28 (2018).

5. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.*: Differential-geometric structures on manifolds. *J. Soviet Math.*, **14**:6, 1573—1719 (1980).

УДК 514.76

С. В. Галаев[1]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

sgalaev@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-7

Продолженные почти квазисасакиевы структуры

Вводится понятие почти квазисасакиева многообразия. Многообразие с почти квазисасакиевой структурой является обобщением квазисасакиева многообразия и отличается от него тем, что оно почти нормально. Сформулирован характеристический признак почти квазисасакиева многообразия. Найдены условия, при которых почти квазисасакиевы многообразия являются квазисасакиевыми многообразиями, в частности тогда и только тогда, когда первый и второй структурные эндоморфизмы коммутируют. На распределении почти контактного метрического многообразия определяется продолженная почти контактная метрическая структура. Из определения продолженной структуры следует, что она является квазисасакиевой структурой лишь тогда, когда исходная структура является косимплектической с нулевым тензором кривизны Схоутена. Доказывается, что построенная продолженная почти контактная метрическая структура является структурой почти квазисасакиева многообразия тогда и только тогда, когда тензор Схоутена исходного многообразия равен нулю. Находятся соотношения между вторыми структурными эндоморфизмами исходной и продолженной структур.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, внутренняя связность, почти квазисасакиево многообразие, продолженная почти квазисасакиева структура.

Поступила в редакцию 30.06.2021 г.

Введение

Квазисасакиевы структуры являются обобщающими по отношению к сасакиевым и косимплектическим структурам [7; 10; 11]. Еще более широкий класс составляют почти квазисасакиевы структуры (AQS-структуры). Начало изучению AQS-структур положено в работах [4; 9], где мы ввели понятие почти контактного кэлерова многообразия — почти нормального почти контактного метрического многообразия с замкнутой фундаментальной формой. В настоящей работе почти квазисасакиевы структуры возникают в результате уточнения понятия почти контактного кэлерова многообразия.

Многообразие Сасаки представляет собой нормальное контактное метрическое многообразие. «Нормальность» означает выполнение условия

$$N_{\varphi}+2d\eta\otimes\vec{\xi}=0\,,$$

где $N_{\varphi}\left(X,Y\right)=\left[\varphi X,\varphi Y\right]+\varphi^{2}\left[X,Y\right]-\varphi\left[\varphi X,Y\right]-\varphi\left[X,\varphi Y\right]$ — тензор Нейенхейса структурного эндоморфизма φ. Квазисасакиево многообразие — это нормальное почти контактное метрическое многообразие с замкнутой фундаментальной формой: $d\Omega=0$. Фундаментальной формой структуры называется кососимметрический тензор $\Omega\left(X,Y\right)=g\left(X,\varphi Y\right)$.

Почти контактное кэлерово многообразие — это почти нормальное почти контактное метрическое многообразие с замкнутой фундаментальной формой: $d\Omega=0$. Почти контактная структура названа нами почти нормальной структурой, если эндоморфизм φ удовлетворяет условию

$$\tilde{N}_{\varphi}=N_{\varphi}+2\varphi^{*}d\eta\otimes\vec{\xi}=0.$$

AQS-структура — это почти контактная кэлерова структура, удовлетворяющая дополнительному условию: $d\eta\left(\vec{\xi},\cdot\right)=0.$

Основные результаты

Рассмотрим почти контактное метрическое многообразие M нечетной размерности $n = 2m+1$. Пусть $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D\right)$ — заданная на многообразии M почти контактная метрическая структура, где φ — тензор типа (1,1), называемый первым структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо)риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$,

2) $\eta\left(\vec{\xi}\right) = 1$,

3) $g\left(\varphi X, \varphi Y\right) = g\left(X, Y\right) - \eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)$,

где $X, Y \in \Gamma(TM)$. Здесь $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M.

Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1)—3) получаем

4) $\varphi\vec{\xi} = \vec{0}$, 5) $\eta \circ \varphi = 0$, 6) $\eta\left(X\right) = g\left(X, \vec{\xi}\right)$, $X \in \Gamma(TM)$.

Кососимметрический тензор $\Omega\left(X, Y\right) = g\left(X, \varphi Y\right)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^{\perp} = span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Многообразие Сасаки — контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию

$$N_\varphi^{(1)} = N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0,$$

где

$$N_\varphi(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \text{ —}$$

тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_\varphi^{(1)} = N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Назовем почти контактное метрическое многообразие почти контактным кэлеровым многообразием, если выполняются следующие условия: $d\Omega = 0$, $\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$. Многообразие, для которого выполняется условие

$$\tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0,$$

названо нами почти нормальным многообразием. Очевидно, что почти нормальное почти контактное метрическое многообразие является нормальным многообразием тогда и только тогда, когда $d\eta = \varphi^* d\eta$.

Пусть $P\colon TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$. Тогда имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *Для любого почти контактного метрического многообразия выполняется следующее равенство:* $PN_\varphi^{(1)} = \tilde{N}_\varphi$.

Доказательство.

$$PN_\varphi^{(1)}(X,Y) = P([\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] +$$

$$+2d\eta(X,Y)\vec{\xi}) = P[\varphi X, \varphi Y] - P[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] =$$

$$= [\varphi X, \varphi Y] - \eta([\varphi X, \varphi Y])\vec{\xi} - [X,Y] + \eta([X,Y])\vec{\xi} - \varphi[\varphi X, Y] -$$

$$-\varphi\left[X,\varphi Y\right]=\left[\varphi X,\varphi Y\right]+\varphi^{2}\left[X,Y\right]-\varphi\left[\varphi X,Y\right]-\varphi\left[X,\varphi Y\right]+$$

$$+2d\eta\left(\varphi X,\varphi Y\right)\vec{\xi}=\tilde{N}_{\varphi}\left(X,Y\right).$$

Предложение доказано. Заметим, что из только что доказанного предложения следует соотношение

$$N_{\varphi}^{(1)}\left(X,Y\right)=\tilde{N}_{\varphi}\left(X,Y\right)+2\left(d\eta\left(X,Y\right)-d\eta\left(\varphi X,\varphi Y\right)\right)\vec{\xi}.$$

Приведем два простейших примера почти контактных кэлеровых многообразий.

Пример 1. Пусть $M=\left\{(x,y,z,u,v)\in\mathbb{R}^{5}:y\neq 0\right\}$ — гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти контактной метрической структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$. Здесь:

1) $D=\left\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right\rangle$, где $\vec{e}_1=\partial_1-y\partial_5$, $\vec{e}_2=\partial_2$, $\vec{e}_3=\partial_3$, $\vec{e}_4=\partial_4$, $\left(\partial_1,\partial_2,\partial_3,\partial_4,\partial_5\right)$ — естественный базис пространства $\mathbb{R}^{5}$,

2) $\vec{\xi}=\partial_5$,

3) $\eta=dz+ydx$,

4) $\varphi\vec{e}_1=\vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_2=\vec{e}_4$, $\varphi\vec{e}_3=-\vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_4=-\vec{e}_2$, $\varphi\vec{\xi}=0$,

5) базис $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{\xi}\right)$ состоит из ортонормированных векторов. Непосредственно проверяется, что почти контактное метрическое многообразие *M* не является нормальным, но является почти нормальным многообразием. Действительно,

$$N_{\varphi}^{(1)}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\varphi^{2}[\vec{e}_1,\vec{e}_2]+[\vec{e}_3,\vec{e}_4]-\varphi[\vec{e}_3,\vec{e}_2]-\varphi[\vec{e}_1,\vec{e}_4]+$$

$$+2d\eta(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\vec{\xi}=\varphi^{2}\vec{\xi}-\eta(\vec{\xi})\vec{\xi}=-\vec{\xi}.$$

С другой стороны, $\tilde{N}_{\varphi}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=2d\eta(\vec{e}_3,\vec{e}_4)\vec{\xi}=0.$

Для рассматриваемой структуры выполняется равенство

$$d\eta\left(\vec{\xi}, X\right) = 0, \quad X \in \Gamma\left(TM\right).$$

Таким образом, $\omega = d\eta$ в рассматриваемом примере является допустимым тензорном полем, к которому применима внутренняя связность ∇. При этом $\nabla\omega = 0$. Пусть, далее, ψ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega\left(X,Y\right) = g\left(\psi X, Y\right)$. Координатное представление эндоморфизма ψ выглядит следующим образом: $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$. Тем самым для случая многообразия M след квадрата эндоморфизма ψ является постоянной величиной: $tr\left(\psi^2\right) = const$.

Пример 2. В этом примере рассматривается то же самое многообразие M с той лишь разницей, что $\vec{e}_1 = \partial_1 - yz\partial_5$, $\eta = dz + yzdx$. Однако, в отличие от предыдущего случая, условие $d\eta\left(\vec{\xi}, \cdot\right) = 0$ не выполняется. Действительно,

$$2d\eta\left(\vec{\xi}, \vec{e}_1\right) = -\eta\left(\left[\vec{\xi}, \vec{e}_1\right]\right) = y \neq 0.$$

Назовем почти контактное метрическое многообразие почти квазисасакиевым многообразием (AQS-многообразием), если выполняются следующие условия:

$$d\Omega = 0, \quad \tilde{N}_\varphi = N_\varphi + 2\varphi^* d\eta \otimes \vec{\xi} = 0, \quad d\eta\left(\vec{\xi}, \cdot\right) = 0.$$

Заметим, что из примера 1 следует, что существуют такие почти квазисасакиевы многообразия, для которых выполняются условия: $\nabla\omega = 0$, $tr\left(\psi^2\right) = const$. При этом равенство $\nabla\omega = 0$ эквивалентно равенству $\nabla\psi = 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Почти контактная метрическая структура является почти квазисасакиевой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\left(\tilde{\nabla}_X\varphi\right)Y = g\left((\psi\circ\varphi)Y, X\right)\vec{\xi} - \eta(Y)(\varphi\circ\psi)(X) -$$

$$-\eta(X)(\varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi)Y.$$

Следующие предложения являются непосредственными следствиями теоремы 1.

Предложение 2. *Почти контактная метрическая структура является квазисасакиевой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\left(\tilde{\nabla}_X\varphi\right)Y = g(AY, X)\vec{\xi} - \eta(Y)AX,\ \ A = \varphi\circ\psi.$$

Предложение 3. *Почти квазисасакиево многообразие является квазисасакиевым многообразием тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1) $d\eta = \varphi^* d\eta$,

2) $\varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi = 0$,

3) $g(X, AY) = g(AX, Y)$, $A = \varphi\circ\psi$.

Введем на распределении D почти контактного метрического многообразия структуру гладкого многообразия следующим образом. Поставим в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ [1—3] многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на распределении D, полагая, что

$$\tilde{K}(X) = (x^\alpha, x^{n+a}),$$

где x^{n+a} — координаты допустимого вектора X в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n\partial_n$: $X = x^{n+a}\vec{e}_a$. Задание внутренней связности ∇ влечет разложение распределения $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где

$\pi: D \to M$ — естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D, HD — горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями

$$\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b},$$

где $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a) x^{n+c}$, Γ_{bc}^a — коэффициенты внутренней связности.

Пусть, далее, $N: D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1). N-продолженной связностью [5; 6; 8] назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \tilde{H}\tilde{D} \oplus VD$, где $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span(\vec{u})$, $\vec{u}_X = \vec{\varepsilon} - (NX)^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $X \in D$, $(NX)^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$. Если не оговорено противное, будем считать, что $N = 0$. В этом случае $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span(\partial_n)$.

Формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$$

определяют поле кобазисов, сопряженное к полю базисов

$$(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}).$$

Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] = 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n\right] = x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}.$$

Всякому векторному полю $X \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии *M*, обычным образом соответствует его горизонтальный лифт X^h, при этом $X^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда X — допустимое векторное поле: $X \in \Gamma(D)$.

Справедливость следующей теоремы вытекает из полученных выше структурных уравнений.

Теорема 2. *Пусть* ∇ *— внутренняя симметричная связность с тензором кривизны Схоутена R(X,Y)Z. Тогда для всех* $X, Y \in \Gamma(D)$ *и* $\vec{p} \in D$ *имеют место следующие равенства:*

$$\left[X^h, Y^h\right] = [X,Y]^h - \{R(X,Y)\vec{p}\}^v,$$

$$\left[X^h, \vec{\xi}^h\right] = \left[X, \vec{\xi}\right]^h + \{P(X,\vec{p})\}^v,$$

$$\left[X^h, Y^v\right] = (\nabla_X Y)^v,$$

$$\left[X^h, \vec{\xi}^h\right] = \left[X, \vec{\xi}\right]^v.$$

Определим на распределении *D* многообразия Сасаки *M* продолженную почти контактную метрическую структуру $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, полагая

$$\tilde{g}(X^h, Y^h) = \tilde{g}(X^v, Y^v) = g(X,Y),$$

$$\tilde{g}(X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^v, Y^h) = \tilde{g}(X^h, \vec{u}) = \tilde{g}(X^v, \vec{u}) = 0,$$

$$JX^h = X^v,\ JX^v = -X^h,\ J(\vec{u}) = \vec{0},\ X, Y \in \Gamma(D),\ \vec{u} = \partial_n = \vec{\xi}^h.$$

Легко проверить, что построенная выше структура действительно является почти контактной метрической структурой. Разные аспекты геометрии продолженных почти контактных метрических структур освещались в работах [6; 8].

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура* $(D, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, *определяемая на распределении D почти контактного метрического многообразия, является AQS-структурой тогда и только тогда, когда D — распределение нулевой кривизны.*

Доказательство. Имеем

$$d\lambda\left(X^h, Y^h\right) = d\eta\left(X, Y\right),\ d\lambda\left(X^v, Y^h\right) = 0,$$

$$d\lambda\left(X^v, Y^v\right) = 0,\ d\lambda\left(Z, \vec{\xi}^h\right) = 0,\ X, Y \in \Gamma\left(D\right),\ Z \in \Gamma\left(TD\right).$$

Проверим выполнение следующего условия:

$$[JX, JY] + J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] + 2d\eta\left(JX, JY\right)\vec{u} = 0,$$

$$X, Y \in \Gamma\left(TM\right).$$

Ограничимся случаем $X = \vec{\varepsilon}_a,\ X = \vec{\varepsilon}_b$. Имеем

$$[J\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b] + J^2[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] - J[J\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] - J\left[\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b\right] +$$

$$+2d\lambda\left(J\vec{\varepsilon}_a, J\vec{\varepsilon}_b\right)\vec{u} = \left[\partial_{n+a}, \partial_{n+b}\right] + J^2\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] -$$

$$-J\left[\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b\right] - J\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] + 2d\lambda\left(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}\right)\vec{u} =$$

$$= -x^{n+d} R^c_{bad}\partial_{n+c} + \Gamma^c_{ab}\vec{\varepsilon}_c - \Gamma^c_{ab}\vec{\varepsilon}_c = -x^{n+d} R^c_{bad}\partial_{n+c}.$$

Справедливость предложения 4 проверяется непосредственно.

Предложение 4. *Пусть* ψ *— второй структурный эндоморфизм исходной структуры, а* $\tilde{\psi}$ *— второй структурный эндоморфизм продолженной AQS-структуры. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\tilde{\psi} X^h = \left(\psi X\right)^h,\ \tilde{\psi} X^v = 0,\ \tilde{\psi}\vec{u} = 0.$$

Список литературы

1. *Букушева А.В.* Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №64. С. 5—14.

2. *Букушева А.В.* Многообразия Кенмоцу с нулевым тензором Риччи — Схоутена // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2020. №4 (208). С. 10—16.

3. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 32—41.

4. *Галаев С.В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. №8. С. 42—52.

5. *Галаев С.В., Гохман А.В.* Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика. 2001. №3. С. 28—31.

6. *Bukusheva A.V., Galaev S.V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), №2. P. 13—22.

7. *Blair D.E.* The theory of Quasi-Sasakian structures // J. Diff. Geom. 1967. Vol. 1, №4. P. 331—345.

8. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, №1. P. 71—76.

9. *Galaev S.V.* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31, №1. P. 35—46.

10. *Kirichenko V.F., Rustanov A.R.* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds // Math. Sb. 2002. Vol. 193, №8. P. 71—100.

11. Tanno S. Quasi-Sasakian structures of rank $2p+1$ // J. Diff. Geom. 1971. №5. P. 317—324.

S. V. Galaev[1]
[1] *Saratov State University*
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
sgalaev@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-7

Prolonged almost quazi-Sasakian structures

Submitted on June 30, 2021

The notion of an almost quasi-Sasakian manifold is introduced. A manifold with an almost quasi-Sasakian structure is a generalization of a quasi-Sasakian manifold; the difference is that an almost quasi-Sasakian manifold is almost normal. A characteristic criterion for an almost quasi-Sasakian manifold is formulated. Conditions are found under which almost quasi-Sasakian manifolds are quasi-Sasakian manifolds. In particular, an almost quasi-Sasakian manifold is a quasi-Sasakian manifold if and only if the first and second structure endomorphisms commute. An extended almost contact metric structure is defined on the distribution of an almost contact metric manifold. It follows from the definition of an extended structure that it is a quasi-Sasakian structure only if the original structure is cosymplectic with zero Schouten curvature tensor. It is proved that the constructed extended almost contact metric structure is the structure of an almost quasi-Sasakian manifold if and only if the Schouten tensor of the original manifold is equal to zero. Relationships are found between the second structure endomorphisms of the original and extended structures.

Keywords: almost contact metric manifold; internal connection; almost quasi-Sasakian manifold; extended almost quasi-Sasakian structure.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* Kenmotsu manifolds with a zero curvature distribution. *J. Math. and Mech. Tomsk State University*. **64**, 5—14 (2020).

2. *Bukusheva, A. V.:* Kenmotsu Manifolds with Zero Ricci-Schouten Tensor. *Bulletin of higher educational institutions. North Caucasus region*. **4** (208), 10—16 (2020).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Geometry of almost contact hyperkähler manifolds. *DGMF*. Kaliningrad. **48**, 32—41 (2017).

4. *Galaev, S. V.:* Almost contact Kählerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.*, **58** (8), 35—42 (2014).

5. *Galaev, S. V., Gokhman A. V.*: Almost symplectic connections on a nonholonomic manifold. *Mathematics. Mechanics*, **3**, 28—31 (2001).

6. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bull. of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics*, **4** (53):2, 13—22 (2011).

7. *Blair, D. E.:* The theory of Quasi-Sasakian structures. *J. Diff. Geom.*, **1**:4, 331—345 (1967).

8. *Galaev, S. V.:* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. *Lobachevskii J. Math.*, **39**:1, 71—76 (2018).

9. *Galaev, S. V.:* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, **39**:1, 35—46 (2015).

10. *Kirichenko, V. F., Rustanov, A. R.:* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. *Math. Sb.*, **193**:8, 71—100 (2002).

11. *Tanno, S.:* Quasi-Sasakian structures of rank $2p+1$. *J. Diff. Geom.*, **5**, 317—324 (1971).

УДК 514.75

М. В. Кретов [1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
blta@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-8

Комплексы эллипсоидов с индикатрисами координатных векторов в виде поверхностей

Продолжается исследование в трехмерном аффинном пространстве комплексов (трехпараметрических семейств) эллипсоидов, рассмотренных ранее в ряде работ автора. Изучается многообразие эллипсоидов, когда концы координатных векторов совпадают с фокальными точками, а первая координатная прямая описывает цилиндрическую поверхность, при этом на образующем элементе имеются по крайней мере три фокальные точки, не лежащие на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяющие три сопряженных направления. Из указанного многообразия выделяется комплекс эллипсоидов при условии, когда индикатрисы второго и третьего координатных векторов будут описывать поверхности с касательными плоскостями, параллельными третьей координатной плоскости, а конец второго координатного вектора описывает линию с касательной, параллельной первому координатному вектору. Доказана теорема существования исследуемого многообразия. Найдены геометрические свойства рассматриваемого комплекса.

Доказано, что конец первого координатного вектора, точки первой координатной прямой, а также первой координатной плоскости описывают двупараметрическое семейство плоскостей, конец третьего координат-

---

Поступила в редакцию 17.02.2021 г.

ного вектора описывает двупараметрическое семейство цилиндрических плоскостей, точка третьей координатной плоскости описывает однопараметрическое семейство линий с касательными, параллельными первому координатному вектору.

Характеристическое многообразие образующего элемента состоит из шести точек: вершины репера, трех концов координатных векторов и двух концов: суммы первого и второго координатных векторов, а также суммы первого и третьего координатных векторов. Фокальное многообразие эллипсоида, пробегающего исследуемый комплекс, состоит только из трех точек, являющихся концами координатных векторов.

Ключевые слова: комплекс, конгруэнция, репер, эллипсоид, аффинное пространство, индикатриса вектора, характеристическое многообразие, фокальное многообразие.

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) эллипсоидов, изучение которых было начато в работах [1—5], в репере $r = \{A, \bar{e}_i\}$, $i, j, k, ... = \overline{1,3}$, построенном в работе [2].

Обозначим через A_i концы векторов $\bar{e}_i$, M_i — текущие точки координатных осей $(A, \bar{e}_i)$, M_{3+i} — текущие точки соответственно первой, второй и третьей координатных плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ и $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Репер r в работе [2] специализирован следующим образом: концы векторов $\bar{e}_i$ совпадают с фокальными точками A_i [6], при этом репер будет каноническим. В этой же работе рассмотрен комплекс эллипсоидов K_3^0, когда прямая (AA_1) описывает цилиндрическую поверхность и на эллипсоиде q имеются по крайней мере три фокальные точки A_i, которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяют три сопряженных направления. При этом уравнение эллипсоида q и система уравнений Пфаффа комплекса K_3^0 соответственно имеют вид

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \qquad (1)$$

$$\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = 0,\ \omega_2^1 = \alpha\omega^2 + \beta\omega^3,\ \omega_1^3 = 0, \qquad (2)$$

$$\omega_3^1 = \beta\omega^2 + \gamma\omega^3,\ \omega_2^3 = \lambda\omega_3^2 - \omega^3,\ \omega_3^2 = (\lambda в_{33}^2 - 1)\omega^2 + в_{33}^2\omega^3.$$

Для комплексов K_3^0 справедливы условия

$$dA = \omega^1\overline{e}_1 + \omega^2\overline{e}_2 + \omega^3\overline{e}_3,\ d\overline{e}_1 = -\omega^1\overline{e}_1, \qquad (3)$$

$$d\overline{e}_2 = (\alpha\omega^2 + \beta\omega^3)\overline{e}_1 - \omega^2\overline{e}_2 + (\lambda(\lambda в_{33}^2 - 1)\omega^2 + в_{33}^2\omega^3) - \omega^3)\overline{e}_3,$$

$$d\overline{e}_3 = (\beta\omega^2 + \gamma\omega^3)\overline{e}_1 + ((\lambda в_{33}^2 - 1)\omega^2 + в_{33}^2\omega^3)\overline{e}_2 - \omega^3\overline{e}_3.$$

В настоящей работе будем исследовать комплексы эллипсоидов $\overline{K}$, выделенные из многообразия K_3^0 при условии, что индикатрисы второго и третьего координатных векторов будут описывать поверхности с касательными плоскостями, параллельными координатной плоскости $(A, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, а конец координатного вектора $\overline{e}_2$ будет описывать линию с касательной прямой, параллельной вектору $\overline{e}_1$. Тогда в системе уравнений Пфаффа (2) коэффициенты α, β, γ и λ обратятся в нуль. При этом

$$d\overline{e}_2 = -\omega^2\overline{e}_2 - \omega^3\overline{e}_3,\ d\overline{e}_3 = (\mu\omega^3 - \omega^2)\overline{e}_2 - \omega^3\overline{e}_3, \qquad (4)$$

$$dA_2 = \omega^1\overline{e}_1, \text{ где } \mu = в_{33}^2.$$

Система уравнений Пфаффа комплекса эллипсоидов $\overline{K}$ запишется в виде

$$\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = 0,\ \omega_2^3 = -\omega^3, \qquad (5)$$

$$\omega_3^2 = -\omega^2 + \mu\omega^3.$$

Теорема 1. *Комплексы эллипсоидов $\overline{K}$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.*

Доказательство. Чистое замыкание [7] системы (5) имеет вид

$$d\mu \wedge \omega^3 - 2\mu(\omega^2 \wedge \omega^3) = 0\,. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $N = Q = 1$. Система (5, 6) в инволюции и определяет комплексы эллипсоидов $\overline{K}$ с произволом одной функции одного аргумента. Теорема доказана.

Теорема 2. *Комплексы эллипсоидов $\overline{K}$ обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) конец первого координатного вектора, точки первой координатной прямой, а также первой координатной плоскости описывают конгруэнции плоскостей;

2) конец третьего координатного вектора описывает конгруэнцию цилиндрических поверхностей;

3) точки третьей координатной плоскости описывают однопараметрическое семейство линий с касательными прямыми, параллельными первому координатному вектору.

Доказательство. Для исследуемого комплекса эллипсоидов найдем следующие дифференциалы:

$$\begin{gathered}
dA_1 = \omega^2 \overline{e}_2 - \omega^3 \overline{e}_3\,, \\
dA_2 = \omega^1 \overline{e}_1\,, \\
dA_3 = \omega^1 \overline{e}_1 - \mu\omega^3 \overline{e}_3\,, \\
dM_1 = \omega^2 \overline{e}_2 + \omega^3 \overline{e}_3\,, \\
dM_2 = \omega^1 \overline{e}_1 + x^3(\omega^2 - \mu\omega^3)\overline{e}_2 + \omega^3(1 - x^2)\overline{e}_3\,, \qquad (7) \\
dM_3 = \omega^1 \overline{e}_1 + (\omega^2 - x^3\omega^2 + \mu x^3\omega^3)\overline{e}_2 + x^2\omega^3 \overline{e}_3\,, \\
dM_4 = x^3(\omega^2 - \mu\omega^3)\overline{e}_2 + \omega^3(1 - x^2)\overline{e}_3\,, \\
dM_5 = x^1(1 - \omega^1)\overline{e}_1 + (\omega^2 - x^3\omega^2 + \mu\omega^3 x^3)\overline{e}_2 + x^2\omega^3 \overline{e}_3\,, \\
dM_6 = \omega^1 \overline{e}_1\,.
\end{gathered}$$

Анализируя и дифференцируя формулы (7) согласно методике исследования, изложенной в книге [8], убеждаемся в справедливости теоремы.

Характеристическое многообразие [6] эллипсоида q задается системой уравнений

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_3 = 0, \tag{8}$$

где F_k удовлетворяют уравнению $-\frac{1}{2}dF = F_k\omega^k$.

Для исследуемого комплекса эллипсоидов система (8) примет вид

$$x^1(x^1 - 1) = 0,\ x^2(x^2 + x^3 - 1) = 0,\ x^3(x^2 + x^3 - \mu x^2 - 1) = 0. \tag{9}$$

Из системы уравнений (9) следует

Теорема 3. *Характеристическое многообразие эллипсоида q, описывающего рассматриваемый комплекс $\overline{K}$, состоит из концов всех координатных векторов и сумм первого и второго координатных векторов, а также первого и третьего координатных векторов и из вершины репера.*

Фокальное многообразие [6] эллипсоида q изучаемого трехпараметрического семейства определяется уравнением (1) и системой уравнений (9), откуда следует, что оно состоит только из трех точек, являющихся концами координатных векторов.

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве // ДГМФ. Калининград, 1979. Вып. 10. С. 41—47.

2. *Кретов М.В.* О комплексах центральных квадрик в аффинном пространстве // ДГМФ. Калининград, 1980. Вып. 11. С. 51—60.

3. *Кретов М.В.* О трехпараметрическом семействе квадрик в аффинном пространстве // Вестник РГУ им. И. Канта. 2008. Вып. 10. С. 95—98.

4. *Кретов М.В.* Трехпараметрическое семейство эллипсоидов, допускающее конструирование // Вестник БФУ им. И. Канта. 2014. Вып. 10. С. 68—71.

5. *Кретов М.В.* О полях геометрических объектов, связанных с комплексом центральных невырожденных гиперквадрик // Вестник БФУ им. И. Канта. 2015. Вып. 10. С. 76—80.

6. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в *n*-мерном проективном пространстве // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ АН СССР. М., 1974. Вып. 6. С. 113—133.

7. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

8. *Малаховский В.С.* Краткий курс дифференциальной геометрии. Калининград, 2010.

M. V. Kretov[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
kretov1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-8

Complexes of ellipsoids with indicatrices of coordinate vectors in the form of surfaces

Submitted on February 17, 2021

The study continues in a three-dimensional affine space of complexes of three-parameter families of ellipsoids, considered earlier in a number of works by the author. A variety of ellipsoids is studied when the ends of the coordinate vectors coincide with the focal points, and the first coordinate straight line describes a cylindrical surface, while on the generating element there are at least three focal points that do not lie on one straight line and on one plane passing through center, and defining three conjugate directions. A complex of ellipsoids is distinguished from the indicated manifold provided that the indicatrices of the second and third coordinate vectors describe surfaces with tangent planes parallel to the third coordinate plane, and the end of the second coordinate vector describes a line with a tangent parallel to the first coordinate vector. An existence theorem for the variety under study is proved. The geometric properties of the complex under consideration are found. It is proved that the end of the

first coordinate vector, points of the first coordinate line, and also the first coordinate plane describe a two-parameter family of planes, the end of the third coordinate vector describes a two-parameter family of cylindrical planes, a point of the third coordinate plane describes a one-parameter family of lines with tangents parallel to the first coordinate vector. The characteristic manifold of a generating element consists of six points: the vertex of the frame, three ends of the coordinate vectors, and two ends: the sum of the first and second coordinate vectors, as well as the sum of the first and third coordinate vectors. The focal manifold of the ellipsoid, the complex under study, consists of only three points, which are the ends of the coordinate vectors.

Keywords: complex, congruence, frame, ellipsoid, affine space, vector indicatrix, characteristic manifold, focal manifold.

References

1. *Kretov, M. V.:* Complexes of ellipsoids in affine space. *DGMF*. Kaliningrad. **10**, 41—47 (1979).
2. *Kretov, M. V.:* On complexes of central quadrics in an affine space. *DGMF*. Kaliningrad. **11**, 51—60 (1980).
3. *Kretov, M. V.:* On a three-parameter family of quadrics in an affine space. *IKRGU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and Technology*, **10**, 95—98 (2008).
4. *Kretov, M. V.:* Three-parameter family of ellipsoids that can be constructed. *IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and Technology*, **10**, 68—71 (2014).
5. *Kretov, M. V.:* On the fields of geometric objects associated with a complex of central nondegenerate hyperquadrics. *IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and Technology*, **10**, 76—80 (2015).
6. *Malakhovsky, V. S., Makhorkin, V. V.:* Differential geometry of manifolds of hyperquadrics in an n-dimensional projective space. *Tr. Geom. Sem*. **6**, 113—133 (1974).
7. *Malakhovsky, V. S.:* Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978).
8. *Malakhovsky, V. S.:* A short course in differential geometry. Kaliningrad (2010).

УДК 514.76

К. В. Полякова[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

[1] polyakova_@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-9

О тензоре кручения аффинной связности на двумерном и трехмерном многообразиях

Основой данного исследования аффинных связностей в расслоении линейных реперов над гладким многообразием являются структурные уравнения этого расслоения. В данном расслоении способом Лаптева — Лумисте задана аффинная связность. Найдены дифференциальные уравнения на компоненты тензора деформации от произвольной аффинной связности к канонической связности. Найдены выражения на компоненты тензора кручения в случае двумерного и трехмерного многообразий. Для двумерного многообразия кручение представляет собой дробь, числителем которой является линейная комбинация двух слоевых координат с коэффициентами — двумя функциями, зависящими от базисных координат, а знаменателем — определитель, составленный из слоевых координат. Для трехмерного многообразия произвольность числителя определяется девятью функциями, зависящими от базисных координат.

Ключевые слова: двумерное многообразие, трехмерное многообразие, расслоение линейных реперов, структурные уравнения, базисные и слоевые координаты, кручение аффинной связности.

Поступила в редакцию 21.05.2021 г.

1. Ковариантное задание аффинной связности 1-го порядка

Рассмотрим окрестность m-мерного гладкого многообразия X_m, в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i ($i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m$). Формы инвариантного корепера $\{\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx^i_j, dx^i_{jk}\}$ выражаются по формулам [3]

$$\omega^i = x^i_j dx^j,$$
$$\omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k, \qquad (1)$$
$$\omega^i_{jk} = dx^i_{jk} + x^l_{jk}\omega^i_l - x^i_{lk}\omega^l_j - x^i_{jl}\omega^l_k + (x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl})\omega^l.$$

Слоевые координаты 1-го порядка x^i_j образуют невырожденную матрицу, для которой $\left(\overset{*}{x}{}^i_j\right)$ — обратная матрица, то есть $\overset{*}{x}{}^i_j x^j_k = \delta^i_k$. Слоевые координаты 2-го и 3-го порядков x^i_{jk}, x^i_{jkl} симметричны по нижним индексам, в остальном слоевые координаты произвольны и рассматриваются как независимые переменные [3].

В расслоении $L(X_m)$ касательных линейных реперов над многообразием X_m способом Лаптева — Лумисте [2, с. 62; 5; 6; 8] посредством форм $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$ зададим аффинную связность с компонентами Γ^i_{jk}, удовлетворяющими уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l}\omega^l, \qquad (2)$$

где $\Gamma^i_{jk,l}$ — это пфаффовы, или обобщенные частные, производные. В уравнениях (2) рассмотрим действие тензорного дифференциального оператора Δ [1]

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^s_{jk}\omega^i_s - \Gamma^i_{sk}\omega^s_j - \Gamma^i_{js}\omega^s_k ,$$

переходя к натуральному кореперу по формулам (1), а также учитывая, что $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^l, x^l_s, x^l_{sp})$ — это функции базисных x^l и слоевых координат x^l_s, x^l_{sp}, получим [4]

$$\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}dx^l + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_s}dx^l_s + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_{sp}}dx^l_{sp} = -\delta^i_l\delta^s_j\delta^p_k dx^l_{sp} +$$

$$+\left(\delta^i_l(\Gamma^p_{jk} + x^p_{jk})\overset{*}{x}{}^s_p - (\Gamma^i_{lk} + x^i_{lk})\overset{*}{x}{}^s_j - (\Gamma^i_{jl} + x^i_{jl})\overset{*}{x}{}^s_k\right)dx^l_s + \qquad (3)$$

$$+(...)^i_{jkl}dx^l .$$

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах dx^l_{sp} в (3) дает равенства $\dfrac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l_{sp}} = -\delta^i_l\delta^s_j\delta^p_k$, откуда следует разложение (ср. [7])

$$\Gamma^i_{jk} = -x^i_{jk} + \gamma^i_{jk}$$

с помощью слоевых координат 2-го порядка x^i_{jk} и тензора *деформации* (генератор [7]) $\gamma^1 = \{\gamma^i_{jk}\}$ от аффинной связности Γ^i_{jk} к канонической плоской связности $\overset{c}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$. Тензор деформации $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$ зависит только от базисных координат x^l и слоевых координат 1-го порядка x^p_q.

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах dx_s^l дает

$$\frac{\partial \gamma_{jk}^i}{\partial x_s^l} = \delta_l^i \gamma_{jk}^p \overset{*}{x}{}_p^s - \gamma_{lk}^i \overset{*}{x}{}_j^s - \gamma_{jl}^i \overset{*}{x}{}_k^s . \qquad (4)$$

Объект кручения T_{jk}^i аффинной связности выражается по формуле $T_{jk}^i = \Gamma_{[jk]}^i$ и удовлетворяет уравнениям $\Delta T_{\mathrm{jk}}^{\mathrm{i}} = T_{\mathrm{jkl}}^{\mathrm{i}} \omega^l$. Кручение выражается через тензор деформации по формуле

$$T_{jk}^i = \gamma_{[jk]}^i \qquad (5)$$

и не зависит от слоевых координат x_{jk}^i.

2. Кручение аффинной связности в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2

Рассмотрим дифференциальные уравнения (4) для двумерного многообразия X_2, то есть при $i, j, k, \ldots = 1, 2$. Выпишем систему дифференциальных уравнений на функции $\gamma_{12}^1, \gamma_{21}^1$ и $\gamma_{12}^2, \gamma_{21}^2$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \gamma_{12}^1}{\partial x_s^1} = (\gamma_{12}^2 - \gamma_{11}^1)\overset{*}{x}{}_2^s , \ \frac{\partial \gamma_{21}^1}{\partial x_s^1} = (\gamma_{21}^2 - \gamma_{11}^1)\overset{*}{x}{}_2^s , \\
\frac{\partial \gamma_{12}^1}{\partial x_s^2} = -\gamma_{22}^1 \overset{*}{x}{}_1^s - \gamma_{12}^1 \overset{*}{x}{}_2^s , \ \frac{\partial \gamma_{21}^1}{\partial x_s^2} = -\gamma_{21}^1 \overset{*}{x}{}_2^s - \gamma_{22}^1 \overset{*}{x}{}_1^s , \\
\frac{\partial \gamma_{12}^2}{\partial x_s^1} = -\gamma_{12}^2 \overset{*}{x}{}_1^s - \gamma_{11}^2 \overset{*}{x}{}_2^s , \ \frac{\partial \gamma_{21}^2}{\partial x_s^1} = -\gamma_{21}^2 \overset{*}{x}{}_1^s - \gamma_{11}^2 \overset{*}{x}{}_2^s , \qquad (6) \\
\frac{\partial \gamma_{12}^2}{\partial x_s^2} = (\gamma_{12}^1 - \gamma_{22}^2)\overset{*}{x}{}_1^s , \ \frac{\partial \gamma_{21}^2}{\partial x_s^2} = (\gamma_{21}^1 - \gamma_{22}^2)\overset{*}{x}{}_1^s ,
\end{gathered}$$

Теорема 1. *Тензор кручения* T^i_{jk} $(i, j, k, ... = 1, 2)$ *аффинной связности, заданной в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием* X_2*, в общем случае имеет вид*

$$T^i_{12} = a^j \cdot \frac{x^i_j}{\Delta},$$

где $a^j = a^j(x^k)$*,* $\Delta = \det(x^i_j) = x^1_1 x^2_2 - x^2_1 x^1_2$.

Таким образом, две компоненты тензора кручения T^i_{jk} *существенно зависят от двух функций* a^j*, зависящих от базисных координат* x^k.

Замечание. Хотя связность Γ^i_{jk} задается в расслоении, но «слоевое» выражение $\frac{x^i_j}{\Delta}$ кручения T^i_{jk} не зависит от связности; от связности зависят только «базисные» коэффициенты $a^j(x^k)$.

Доказательство. Используя дифференциальные уравнения (6) для нахождения дифференциальных уравнений компонент $T^1_{12} = \frac{1}{2}(\gamma^1_{12} - \gamma^1_{21})$ и $T^2_{12} = \frac{1}{2}(\gamma^2_{12} - \gamma^2_{21})$ (5), получим

$$\frac{\partial T^1_{12}}{\partial x^1_s} = T^2_{12} \overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial T^2_{12}}{\partial x^1_s} = -T^2_{12} \overset{*}{x}{}^s_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T^1_{12}}{\partial x^2_s} = -T^1_{12} \overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial T^2_{12}}{\partial x^2_s} = T^1_{12} \overset{*}{x}{}^s_1, \tag{8}$$

Из уравнений (7_2) и (8_1) найдем

$$T^1_{12} = \frac{F^1(x^1_1, x^1_2, x^k)}{\Delta}, \quad T^2_{12} = \frac{F^2(x^2_1, x^2_2, x^k)}{\Delta}, \tag{9}$$

где F^1, F^2 — некоторые функции, $\Delta = \det(x^i_j) = x^1_1 x^2_2 - x^2_1 x^1_2$, Подставляя ($9_1$) в ($7_1$), а ($9_2$) в ($8_2$), получим

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial F^1}{\partial x_1^1}\cdot\Delta - F^1 x_2^2\right)\cdot\frac{1}{\Delta^2} = \frac{F^2}{\Delta}\cdot\frac{-x_2^1}{\Delta},\\ \left(\frac{\partial F^2}{\partial x_1^2}\cdot\Delta + F^2 x_2^1\right)\cdot\frac{1}{\Delta^2} = \frac{F^1}{\Delta}\cdot\frac{x_2^2}{\Delta},\end{gathered}\tag{10}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial F^1}{\partial x_2^1}\cdot\Delta + F^1 x_1^2\right)\cdot\frac{1}{\Delta^2} = \frac{F^2}{\Delta}\cdot\frac{x_1^1}{\Delta},\\ \left(\frac{\partial F^2}{\partial x_2^2}\cdot\Delta - F^2 x_1^1\right)\cdot\frac{1}{\Delta^2} = \frac{F^1}{\Delta}\cdot\frac{-x_1^2}{\Delta}.\end{gathered}\tag{11}$$

Приравнивая результаты (10_1) и (10_2), а также (11_1) и (11_2), получим $\dfrac{\partial F^1}{\partial x_1^1} = \dfrac{\partial F^2}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial F^1}{\partial x_2^1} = \dfrac{\partial F^2}{\partial x_2^2}$, или более подробно

$$\frac{\partial F^1(x_1^1, x_2^1, x^k)}{\partial x_1^1} = \frac{\partial F^2(x_1^2, x_2^2, x^k)}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial F^1(x_1^1, x_2^1, x^k)}{\partial x_2^1} = \frac{\partial F^2(x_1^2, x_2^2, x^k)}{\partial x_2^2},$$

откуда

$$F^1 = a^1(x^k)\cdot x_1^1 + a^2(x^k)\cdot x_2^1,\ F^2 = a^1(x^k)\cdot x_1^2 + a^2(x^k)\cdot x_2^2,$$

или более компактно

$$F^i = a^j(x^k)\cdot x_j^i.$$

Тогда согласно (9) имеем выражения

$$T_{12}^{1}=\frac{a^{1}(x^{k})\cdot x_{1}^{1}+a^{2}(x^{k})\cdot x_{2}^{1}}{\Delta},$$

$$T_{12}^{1}=\frac{a^{1}(x^{k})\cdot x_{1}^{2}+a^{2}(x^{k})\cdot x_{2}^{2}}{\Delta}.$$

Замечание. Если коэффициенты $a^{j}(x^{k})$ равны нулю, то кручение нулевое, $T_{12}^{i}=0$, и связность симметрична.

3. Кручение аффинной связности в расслоении линейных реперов над трехмерным многообразием X_3

Рассматривая дифференциальные уравнения (4) при $i, j, k, ...=1, 2, 3$ и решая систему уравнений, аналогичную системе (7, 8), можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Тензор кручения* T_{jk}^{i} $(i, j, k, ...=1, 2, 3)$ *аффинной связности, заданной в расслоении линейных реперов над трехмерным многообразием* X_3*, в общем случае имеет вид*

$$T_{12}^{i}=\frac{1}{\varDelta}\left(a^{j}x_{j}^{i}\cdot b^{k}x_{k}^{3}+c^{j}x_{j}^{3}\right),$$

$$T_{31}^{i}=\frac{1}{\varDelta}\left(a^{j}x_{j}^{i}\cdot b^{k}x_{k}^{2}+c^{j}x_{j}^{2}\right),$$

$$T_{23}^{i}=\frac{1}{\varDelta}\left(a^{j}x_{j}^{i}\cdot b^{k}x_{k}^{1}+c^{j}x_{j}^{1}\right),$$

где $\varDelta=\det(x_{j}^{i})$, $a^{j}=a^{j}(x^{k})$, $b^{k}=b^{k}(x^{l})$, $c^{j}=c^{j}(x^{k})$.

Таким образом, все девять компонент тензора кручения T_{jk}^{i} *существенно зависят от девяти функций* a^{j}, b^{k}, c^{j}, *зависящих от базисных координат* x^{k}.

4. Аффинная связность в расслоении линейных реперов над двумерным многообразием X_2

Уравнения (4) для компонент объекта деформации

$$\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x^l, x^p_q)$$

имеют вид

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^1_s} = -2\gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_1, \quad \frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{11} - \gamma^2_{21} - \gamma^2_{12})\overset{*}{x}{}^s_1 + \gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \gamma^1_{22}}{\partial x^2_s} = -2\gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial \gamma^1_{22}}{\partial x^1_s} = \gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_1 + (\gamma^2_{22} - \gamma^1_{12} - \gamma^1_{21})\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial x^1_s} = -\gamma^1_{11}\overset{*}{x}{}^s_1 + \gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial \gamma^1_{11}}{\partial x^2_s} = -(\gamma^1_{12} + \gamma^1_{21})\overset{*}{x}{}^s_1, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \gamma^2_{22}}{\partial x^2_s} = -\gamma^2_{22}\overset{*}{x}{}^s_2 + \gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_1, \quad \frac{\partial \gamma^2_{22}}{\partial x^1_s} = -(\gamma^2_{12} + \gamma^2_{21})\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \gamma^1_{12}}{\partial x^2_s} = -\gamma^1_{12}\overset{*}{x}{}^s_2 - \gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_1, \quad \frac{\partial \gamma^1_{12}}{\partial x^1_s} = (\gamma^2_{12} - \gamma^1_{11})\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \gamma^1_{21}}{\partial x^1_s} = -\gamma^1_{21}\overset{*}{x}{}^s_2 - \gamma^1_{22}\overset{*}{x}{}^s_1, \quad \frac{\partial \gamma^1_{21}}{\partial x^1_s} = (\gamma^2_{21} - \gamma^1_{11})\overset{*}{x}{}^s_2, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \gamma^2_{12}}{\partial x^1_s} = -\gamma^2_{12}\overset{*}{x}{}^s_1 - \gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial \gamma^2_{12}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{12} - \gamma^2_{22})\overset{*}{x}{}^s_1, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \gamma^2_{21}}{\partial x^1_s} = -\gamma^2_{21}\overset{*}{x}{}^s_1 - \gamma^2_{11}\overset{*}{x}{}^s_2, \quad \frac{\partial \gamma^2_{21}}{\partial x^2_s} = (\gamma^1_{21} - \gamma^2_{22})\overset{*}{x}{}^s_1, \tag{19}$$

Теорема 3. *Компоненты аффинной связности* Γ^i_{jk} $(i, j, k, ... = 1, 2)$ *в общем случае имеют вид* $\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - x^i_{jk}$, *где*

$$\gamma^1_{22} = \frac{1}{\Delta^2} F^1_{22}(x^1_s, x^i),\ \gamma^2_{11} = \frac{1}{\Delta^2} G^2_{11}(x^2_s, x^i),$$

$$\gamma^2_{22} = \frac{F^2_{22}}{\Delta} + \frac{F^1_{22}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^2_2}{x^1_2},\ \gamma^1_{11} = \frac{G^1_{11}}{\Delta} + \frac{G^2_{11}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^1_2}{x^2_2},$$

$$\gamma^1_{12} = \frac{F^1_{12}}{\Delta} - \frac{F^1_{22}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^2_2}{x^1_2},\ \gamma^2_{12} = \frac{G^2_{12}}{\Delta} - \frac{G^2_{11}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^1_2}{x^2_2},$$

$$\gamma^1_{21} = \frac{F^1_{21}}{\Delta} - \frac{F^1_{22}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^2_2}{x^1_2},\ \gamma^2_{21} = \frac{G^2_{21}}{\Delta} - \frac{G^2_{11}}{\Delta^2} \cdot \frac{x^1_2}{x^2_2},$$

$$\Delta = \det(x^i_j) = x^1_1 x^2_2 - x^2_1 x^1_2.$$

Функции

$$F = \{ F^1_{22},\ F^2_{22},\ F^1_{12},\ F^1_{21} \} = \{ F^1_{22}(x^1_s, x^i),\ F^2_{22}(x^1_s, x^i),$$

$$F^1_{12}(x^1_s, x^i),\ F^1_{21}(x^1_s, x^i) \} \text{ и } \mathrm{G} = \{ G^2_{11},\ G^1_{11},\ G^2_{12},\ G^2_{21} \} =$$

$$= \{ G^2_{11}(x^2_s, x^i),\ G^1_{11}(x^2_s, x^i),\ G^2_{12}(x^2_s, x^i),\ G^2_{21}(x^2_s, x^i) \}$$

удовлетворяют соотношениям

$$x^2_1 \frac{\partial G^2_{11}}{\partial x^2_1} + x^2_2 \frac{\partial G^2_{11}}{\partial x^2_2} = 3G^2_{11},\ x^1_1 \frac{\partial F^1_{22}}{\partial x^1_1} + x^1_2 \frac{\partial F^1_{22}}{\partial x^1_2} = 3F^1_{22}, \quad (20)$$

$$x^2_1 \frac{\partial G^1_{11}}{\partial x^2_1} + x^2_2 \frac{\partial G^1_{11}}{\partial x^2_2} = G^1_{11},\ x^1_1 \frac{\partial F^2_{22}}{\partial x^1_1} + x^1_2 \frac{\partial F^2_{22}}{\partial x^1_2} = F^2_{22}, \quad (21)$$

$$x^1_1 \frac{\partial F^1_{12}}{\partial x^1_1} + x^1_2 \frac{\partial F^1_{12}}{\partial x^1_2} = F^1_{12},\ x^1_1 \frac{\partial F^1_{21}}{\partial x^1_1} + x^1_2 \frac{\partial F^1_{21}}{\partial x^1_2} = F^1_{21}, \quad (22)$$

$$x_1^2 \frac{\partial G_{12}^2}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial G_{12}^2}{\partial x_2^2} = G_{12}^2,\; x_1^2 \frac{\partial G_{21}^2}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial G_{21}^2}{\partial x_2^2} = G_{21}^2. \quad (23)$$

$$F_{12}^1 - F_{21}^1 = a^1 x_1^1 + a^2 x_2^1,\; G_{12}^2 - G_{21}^2 = a^1 x_1^2 + a^2 x_2^2. \quad (24)$$

Функции $a^i = a^i(x^j)$ *зависят от базисных координат.*

Доказательство. Из уравнений (12_1—19_1) можно найти общий вид компонент тензора деформации $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x_q^p)$:

$$\gamma_{11}^2 = \frac{1}{\Delta^2} G_{11}^2(x_s^2, x^i),$$

$$\gamma_{22}^1 = \frac{1}{\Delta^2} F_{22}^1(x_s^1, x^i),$$

$$\gamma_{11}^1 = \frac{G_{11}^1(x_s^2, x^i)}{\Delta} + \frac{G_{11}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2},$$

$$\gamma_{22}^2 = \frac{F_{22}^2(x_s^1, x^i)}{\Delta} + \frac{F_{22}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1},$$

$$\gamma_{12}^1 = \frac{F_{12}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta} - \frac{F_{22}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1},$$

$$\gamma_{21}^1 = \frac{F_{21}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta} - \frac{F_{22}^1(x_s^1, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^2}{x_2^1},$$

$$\gamma_{12}^2 = \frac{G_{12}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta} - \frac{G_{11}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2},$$

$$\gamma_{21}^2 = \frac{G_{21}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta} - \frac{G_{11}^2(x_s^2, x^i)}{\Delta^2} \cdot \frac{x_2^1}{x_2^2}.$$

Теперь найдем вид функций, входящих в эти выражения.

Из уравнений (12_2) следует

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_{11}^2}{\partial x_1^2} = (G_{11}^1 - G_{21}^2 - G_{12}^2)x_2^2, \\ \dfrac{\partial G_{11}^2}{\partial x_2^2} = \dfrac{3G_{11}^2}{x_2^2} - (G_{11}^1 - G_{21}^2 - G_{12}^2)x_1^2, \end{cases} \Rightarrow x_1^2 \dfrac{\partial G_{11}^2}{\partial x_1^2} + x_2^2 \dfrac{\partial G_{11}^2}{\partial x_2^2} = 3G_{11}^2.$$

Тогда $U\left(\dfrac{G_{11}^2}{(x_1^2)^3}; \dfrac{x_2^2}{x_1^2}\right) = 0$, при этом

$$G_{11}^1 - G_{21}^2 - G_{12}^2 = \frac{1}{x_2^2}\frac{\partial G_{11}^2}{\partial x_1^2},\ G_{11}^1 - G_{21}^2 - G_{12}^2 = \frac{3G_{11}^2}{x_1^2 x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\frac{\partial G_{11}^2}{\partial x_2^2},$$

Из уравнений (13_2) следует

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{22}^1}{\partial x_1^1} = -(F_{22}^2 - F_{12}^1 - F_{21}^1)x_2^1, \\ \dfrac{\partial F_{22}^1}{\partial x_2^1} = \dfrac{3F_{22}^1}{x_2^1} - (F_{22}^2 - F_{12}^1 - F_{21}^1)x_1^1, \end{cases} \Rightarrow x_1^1 \dfrac{\partial F_{22}^1}{\partial x_1^1} + x_2^1 \dfrac{\partial F_{22}^1}{\partial x_2^1} = 3F_{22}^1.$$

Тогда $V\left(\dfrac{F_{22}^1}{(x_1^1)^3}; \dfrac{x_2^1}{x_1^1}\right) = 0$, при этом

$$F_{22}^2 - F_{12}^1 - F_{21}^1 = -\frac{1}{x_2^1}\frac{\partial F_{22}^1}{\partial x_1^1},$$

$$F_{22}^2 - F_{12}^1 - F_{21}^1 = -\frac{3F_{22}^1}{x_1^1 x_2^1} + \frac{1}{x_1^1}\frac{\partial F_{22}^1}{\partial x_2^1},$$

Из уравнений (14_2—19_2) следует (21—23). Кроме того,

$$\frac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_1^1} = \frac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_2^1} = \frac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_2^2},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_1^1} = \dfrac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_1^2}, \\ \dfrac{\partial(F_{12}^1 - F_{21}^1)}{\partial x_2^1} = \dfrac{\partial(G_{12}^2 - G_{21}^2)}{\partial x_2^2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{12}^1 - F_{21}^1 = a^1 x_1^1 + a^2 x_2^1, \\ G_{12}^2 - G_{21}^2 = a^1 x_1^2 + a^2 x_2^2, \end{cases}$$

откуда следует (24).

Следствие. *Равенства* $G_{11}^2(x_s^2, x^i) = 0$, $F_{22}^1(x_s^1, x^i) = 0$ *выделяют класс аффинных связностей* $\Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - x_{jk}^i$ $(i, j, k, ... = 1, 2)$ *с тензором деформации следующего вида:*

$$\gamma_{22}^1 = 0\,,\ \gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\gamma_{12}^1 = \frac{a^i + \xi^i}{2\Delta} x_i^1,\ \gamma_{21}^1 = \frac{-a^i + \xi^i}{2\Delta} x_i^1,\ \gamma_{22}^2 = \gamma_{12}^1 + \gamma_{21}^1 = \frac{\xi^i}{\Delta} x_i^1,$$

$$\gamma_{12}^2 = \frac{a^i - \xi^i}{2\Delta} x_i^2,\ \gamma_{21}^2 = \frac{-a^i - \xi^i}{2\Delta} x_i^2,\ \gamma_{11}^1 = \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 = -\frac{\xi^i}{\Delta} x_i^2,$$

где $\Delta = \det(x_j^i) = x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1$*;* $a^i = a^i(x^j)$, $\xi^i = \xi^i(x^j)$.

Замечание. Хотя все связности Γ_{jk}^i этого класса задаются в расслоении, но их «слоевое» выражение $\dfrac{x_j^i}{\Delta}$ не зависит от связности; от связности зависят только «базисные» коэффициенты $a^i(x^j)$, $\xi^i(x^j)$. Таким образом, компоненты Γ_{jk}^i существенно зависят от функций a^i, ξ^i, выражающихся через базисные координаты x^j.

Список литературы

1. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—246.

3. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

4. *Полякова К.В.* Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 114—128.

5. *Полякова К.В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 105, №1. С. 84—94.

6. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, №2. С. 279—290.

7. *Рыбников А.К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. №1. С. 73—80.

8. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 179—187.

9. *Belova O.O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Mathematics. 2021. Vol. 9, №7. doi: https://doi.org/10.3390/math9070782.

K. V. Polyakova[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-9

About the torsion tensor of an affine connection on two-dimensional and three-dimensional manifolds

Submitted on May 21, 2021

The basis for this study of affine connections in linear frame bundle over a smooth manifold is the structure equations of the bundle. An affine connection is given in this bundle by the Laptev — Lumiste method. The differential equations are written for components of the deformation ten-

sor from an affine connection to the symmetrical canonical one. The expressions for the components of the torsion tensor for two-dimensional and three-dimensional manifolds were found.

For a two-dimensional manifold, the affine torsion is a fraction, in the numerator there is a linear combination of two fiber coordinates which coefficients are two functions depending on the base coordinates (the coordinates on the base), and in the denominator there is the determinant composed of the fiber coordinates (the coordinates in a fiber). For a three-dimensional manifold, the arbitrariness of the numerator is determined by nine functions depending on the base coordinates.

Keywords: two-dimensional manifold, three-dimensional manifold, linear frame bundle, structure equations, base and fiber coordinates, affine torsion.

References

1. *Akivis, M.A.:* Multidimensional differential geometry. Kalinin (1977).

2. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. *J. Soviet Math.* **14**:6, 1573—1719 (1980).

3. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. *Tr. Geom. Sem.*, **1**, 139—189 (1966).

4. *Polyakova, K.V.:* Special affine connection of the 1st and 2nd orders. *DGMF*. Kaliningrad. **46**, 114—128 (2015).

5. *Polyakova, K.V.:* Second-Order Tangent-Valued Forms. *Math. Notes*, **105**:1, 71—79 (2019).

6. *Rybnikov, A.K.:* Affine connections of second order. *Math. Notes*, **29**:2, 143—149 (1981).

7. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. *Soviet Math*. (Izv. Vuzov), **27**:1, 84—93 (1983).

8. *Shevchenko, Yu. I.:* Laptev and Lumiste methods for the specifcation of a connection in a principal bundle. *DGMF*. Kaliningrad. **37**, 179—187 (2006).

9. *Belova, O.O.:* Generalized affine connections associated with the space of centered planes. *Mathematics*, **9** (7), 782 (2021). https://doi.org/10.3390/math9070782.

УДК 514.76

Ю. И. Попов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
yurij.popoff2015@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-5840-6447
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-10

Касательно *r*-оснащенные гиперполосы проективного пространства

Дано задание в репере 1-го порядка касательно r-оснащенной гиперполосы проективного пространства. Для простоты изложения адаптируем репер полю нормалей 1-го рода. Вводится в рассмотрение тензор неголономности поля оснащающих Λ-плоскостей. Обращение тензора неголономности в нуль приводит к трем различным интерпретациям гиперполосы. Рассматриваются фокальные образы, ассоциированные с гиперполосой, с помощью которых построена плоскость Нордена — Тимофеева указанной гиперполосы.

В заключение рассматриваются π-структуры поля касательных плоскостей базисной поверхности гиперполосы.

Ключевые слова: касательно r-оснащенная гиперполоса, тензор неголономности, $T\Lambda$-виртуальная нормаль, алгебраическое многообразие, фокальное многообразие, плоскость Нордена — Тимофеева, аффинор, неголономная композиция Нордена.

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.

§ 1. Поля фундаментальных и геометрических объектов касательно *r*-оснащенной гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$

1. Дифференциальные уравнения регулярной *r*-оснащенной гиперполосы

В работе используется следующая схема индексов:

$$i, j, k = \overline{1, m};\ \ p, q, t = \overline{1, r};\ s = m - r,\ \widetilde{A} = \{n; \alpha; \varepsilon\};$$
$$\alpha, \beta = \overline{m+1, n-m-1};\ u = \{\varepsilon, n\};\ \varepsilon, \sigma, \eta = \overline{r+1, m}.$$

1. Рассмотрим регулярную гиперполосу H_m [1], базисная поверхность V_m которой оснащена полем касательных плоскостей $\Lambda(A_0) \overset{def}{=} \Pi_r(A_0)$ (Λ-плоскостей, $r < m$), удовлетворяющих условиям

$$A_0 \in \Lambda(A_0) \subset T(A_0)\,. \tag{1}$$

Поверхность V_m, удовлетворяющая условиям (1), называется касательно *r*-оснащенной [2; 3].

Определение. *Гиперполоса* H_m называется *касательно r-оснащенной*, если ее базисная поверхность V_m является касательно *r*-оснащенной поверхностью $V_{m,r}$ [4].

Касательно *r*-оснащенные гиперполосы будем обозначать символом $H_{m,r}(\Lambda)$. Отнесем гиперполосу к реперу 1-го порядка R^1:

$$A_0 \in V_m\,,\ \{A_i\} \subset T_m(A_0)\,,\ \{A_\alpha\} \subset X_{n-m-1}(A_0)\,,\ A_n \notin H_{n-1}\,,$$

причем точки $\{A_p\}$ репера поместим в Λ-плоскость. Тогда гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ в выбранном репере 1-го порядка задается уравнениями

$$
\begin{gathered}
\omega_0^n = \omega_0^\alpha = \omega_\alpha^n = 0, \\
\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j,\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha j}^i \omega_0^j, \\
\nabla \Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \Lambda_{ijk}^n \omega_0^k, \\
\nabla \Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{ij}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha \omega_0^k, \\
\nabla \Lambda_{\alpha i}^s + \Lambda_{\alpha i}^s \omega_0^0 - \delta_i^s \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha ij}^s \omega_0^j, \\
\nabla \Lambda_{ijk}^n + 2\Lambda_{ijk}^n \omega_0^0 + \Lambda_{(ij}^n \omega_{k)}^0 - \Lambda_{(ij}^n \Lambda_{k)s}^n \omega_n^s = \Lambda_{ijkt}^n \omega_0^t,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

причем $\Lambda_{[ij]}^n = \Lambda_{[ij]}^\alpha = 0,\ \Lambda_{s[i}^n \Lambda_{|\alpha|j]}^s = 0$, а также уравнениями

$$
\omega_p^n = \Lambda_{pi}^\varepsilon,\ \nabla \Lambda_{pi}^\varepsilon + \Lambda_{pi}^\varepsilon \omega_0^0 + \Lambda_{pi}^n \omega_n^\varepsilon - \delta_i^\varepsilon \omega_p^0 = \Lambda_{pij}^\varepsilon \omega_0^j . \tag{3}
$$

Для простоты изложения адаптируем репер R^1 полю нормалей первого рода. Такой репер назовем репером $R^1(N)$. В этом репере имеем

$$
\omega_n^i = N_{nk}^i \omega_0^k , \tag{4}
$$

$$
\nabla N_{nk}^i + N_{nk}^i \omega_0^0 - \Lambda_{\alpha k}^i \omega_n^\alpha - \delta_k^i \omega_n^0 = N_{nks}^i \omega_0^s , \tag{5}
$$

а уравнения (3) примут вид

$$
\nabla \Lambda_{pq}^\varepsilon + \Lambda_{pq}^\varepsilon \omega_0^0 = \Lambda_{pqk}^\varepsilon \omega_0^k , \tag{6}
$$

$$
\nabla \Lambda_{p\sigma}^\varepsilon - \Lambda_{pq}^\varepsilon \omega_\sigma^q - \delta_\sigma^\varepsilon \omega_p^0 = \Lambda_{p\sigma k}^\varepsilon \omega_0^k . \tag{7}
$$

Поле квазитензора 2-го порядка $\{\Lambda_{pq}^\varepsilon\}$, определенное уравнениями (6), (7), задает поле касательно оснащающих Λ-плоскостей в репере $R^1(N)$. Отметим, что те геометрические объекты (факты), которые будут получены при использовании компонент объекта $\{\Lambda_{pi}^\varepsilon\}$, характерны лишь для геометрии касательно r-оснащенной гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$.

2. Система дифференциальных уравнений

$$
\omega_0^\varepsilon = 0, \tag{8}
$$

ассоциированная с полем касательно оснащенных Λ-плоскостей гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор 2-го порядка $\{r_{pq}^\varepsilon\}$:

$$r^{\varepsilon}_{pq} \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\varepsilon}_{pq} - \Lambda^{\varepsilon}_{qp}\right),\ \nabla r^{\varepsilon}_{pq} + r^{\varepsilon}_{pq}\omega^{0}_{0} = r^{\varepsilon}_{pqk}\omega^{k}_{0}\,, \tag{9}$$

то есть когда тензор $\{\Lambda^{\varepsilon}_{pq}\}$ симметрический.

Тензор $\{r^{\varepsilon}_{pq}\}$ (9) называется тензором неголономности поля оснащающих Λ-плоскостей. Поле Λ-плоскостей (распределение Λ-плоскостей) будем называть голономным, если его тензор неголономности $\{r^{\varepsilon}_{pq}\}$ тождественно равен нулю. При $r^{\varepsilon}_{pq} = 0$ базисная поверхность $V_{m,r}$ расслаивается на $(m-r)$-параметрическое многообразие r-мерных поверхностей V_r (плоскости Λ огибаются r-мерными поверхностями $(m-r)$-параметрического семейства). При смещении точки A_0 вдоль фиксированной поверхности V_r уравнения (2, 4, 8) относительно репера $R^1(N)$ можно записать в следующем виде (здесь мы не выписываем замыкания этих уравнений):

$$\begin{cases} \omega^{\tilde{A}}_{0} = 0,\ \omega^{u}_{\varepsilon} = \Lambda^{u}_{\varepsilon p}\omega^{p}_{0}\,, \\ \omega^{\tilde{A}}_{p} = \Lambda^{\tilde{A}}_{pq}\omega^{q}_{0},\ \Lambda^{\tilde{A}}_{pq} = \Lambda^{\tilde{A}}_{qp}\,, \end{cases} \tag{10}$$

$$\omega^{n}_{\alpha} = 0,\ \omega^{i}_{\alpha} = \Lambda^{i}_{\alpha j}\omega^{j}_{0},\ \omega^{i}_{n} = N^{i}_{nk}\omega^{k}_{0}\,. \tag{11}$$

Отсюда с использованием результатов работ [4; 5, I, § 3] следует, что обращение в нуль тензора неголономности Λ-распределения:

1) есть условие, при котором гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ расслаивается на $(m-r)$-параметрическое семейство оснащенных полос $V_{m,r}(H)$;

2) показывает, что гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ расслаивается на $(m-r)$-параметрическое семейство касательно m-оснащенных гиперполос $H_r(M)$;

3) означает, что гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ расслаивается на $(m-r)$-параметрическое многообразие вырожденных нераспадающихся гиперполос ранга r [6—8].

2. *TΛ*-виртуальные нормали 1-го и 2-го рода оснащенных *Λ*-плоскостей

Определение. *s-мерная плоскость* $L(A_0) \subset T_m(A_0)$, *удовлетворяющая условиям*

$$L(A_0) \cap \Lambda(A_0) = A_0, \ [L(A_0), \Lambda(A_0)] = T_m(A_0), \quad A_0 \in L(A_0),$$

называется *TΛ-виртуальной нормалью 1-го рода данной Λ-плоскости.*

Плоскость $N_{r-1}(A_0) \subset \Lambda(A_0)$, не проходящая через точку A_0, называется *TΛ*-виртуальной нормалью 2-го рода *Λ*-плоскости [9; 10].

TΛ-виртуальную нормаль 1-го рода $L(A_0)$ (*L*-плоскость) зададим точкой A_0 и точками $T_\varepsilon = A_\varepsilon + \nu_\varepsilon^p A_p$, то есть $L(A_0) = [A_0, T_\varepsilon]$. Поле *L*-плоскостей в репере $R^1(N)$ определяется системой дифференциальных уравнений

$$\nabla \nu_\varepsilon^p + \omega_\varepsilon^p = \nu_{\varepsilon k}^p \omega_0^k . \tag{12}$$

Каждая нормаль $N_{m-1}(A_0)$ 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ порождает *TΛ*-виртуальную нормаль 2-го рода

$$N_{r-1}(A_0) = N_{m-1}(A_0) \cap \Lambda(A_0) = [N_p] = [A_p + \nu_p^0 A_0] \tag{13}$$

и *TL*-виртуальную нормаль 2-го рода

$$\begin{gathered} N_{s-1}(A_0) = N_{m-1}(A_0) \cap L(A_0) = \\ = [M_\varepsilon] = [A_\varepsilon + \nu_\varepsilon^p A_p + \nu_\varepsilon^0 A_0], \end{gathered} \tag{14}$$

где $\hat{\nu}_\varepsilon^0 = \nu_\varepsilon^0 + \nu_p^0 \nu_\varepsilon^p$, $\nabla \hat{\nu}_\varepsilon^0 + \nu_\varepsilon^p \omega_p^0 + \omega_\varepsilon^0 = \hat{\nu}_{\varepsilon k}^0 \omega_0^k$.

Плоскости $N_{r-1}(A_0)$ (12) и $N_{s-1}(A_0)$ (13) задаются соответственно следующими конечными уравнениями:

$$N_{r-1}(A_0):\ \begin{cases} x^{\tilde{A}}=0, \\ x^0-\nu^0_p x^p=0; \end{cases} \quad N_{s-1}(A_0):\ \begin{cases} x^0-\nu^0_\varepsilon x^\varepsilon=0, \\ x^p-\nu^p_\varepsilon x^\varepsilon=0, \\ x^u=0. \end{cases}$$

В общем случае при $m-r\le\dfrac{r(r+1)}{2}$ из компонент объекта $\{\Lambda^\varepsilon_{pq}\}$ может быть построен относительный инвариант $J\neq 0$ [11], а затем обращенный тензор

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{pq}_{\varepsilon}=\frac{\partial \ln J}{\partial \Lambda^\varepsilon_{pq}}$$

для тензора Λ^ε_{pq} (6), где

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\varepsilon}_{pq}=\frac{1}{2}(\Lambda^\varepsilon_{pq}+\Lambda^\varepsilon_{qp}),$$

$$\lambda^\varepsilon_{pq}\,\overset{*}{\lambda}{}^{qt}_{\varepsilon}=(m-r)\delta^t_p,\ \Lambda^\sigma_{pq}\,\overset{*}{\Lambda}{}^{qp}_{\eta}=r\delta^\sigma_\eta .$$

Следуя работе [12], рассмотрим биекцию между $T\Lambda$-виртуальными нормалями 1-го и 2-го рода, определяемую по формуле

$$\nu^p_\varepsilon=-(\Lambda^\sigma_{q\varepsilon}+\delta^\sigma_\varepsilon\nu^0_q)\,\overset{*}{\Lambda}{}^{qt}_{\sigma}\,\overset{*}{T}{}^p_t, \qquad (15)$$

где $\overset{*}{T}{}^p_t$ — обратный тензор для тензора

$$T^t_p=\Lambda^\sigma_{pq}\,\overset{*}{\Lambda}{}^{qt}_{\sigma}.$$

Пучок нормалей 2-го рода $\nu_i^0(\tau) = \tau F_i^0 - (\tau - 1)W_i^0$ гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ индуцирует (высекает) пучок $T\Lambda$-виртуальных нормалей 2-го рода (f, w):

$$\nu_p^0(\tau) = \tau F_p^0 - (\tau - 1)W_p^0 . \tag{16}$$

Относительно $R^1(\nu)$ уравнения его $(r-2)$-мерной вершины C_{r-2} имеют вид

$$x^u = 0,\ x^\varepsilon = 0,\ x^0 - F_p^0 x^p = 0,\ x^0 - W_p^0 x^p = 0 .$$

$T\Lambda$-виртуальным нормалям 2-го рода $F_{r-1}\{F_p^0\}$ и $W_{r-s}\{W_p^0\}$, порождающим пучок *(f, w)* (16), в биекции (15) соответствуют $T\Lambda$-виртуальные нормали 1-го рода F_s и W_s, определяемые квазитензорами

$$F_s :\ F_\eta^p = -(\Lambda_{qn}^\sigma + \delta_\eta^\sigma F_q^0)\overset{*}{\Lambda}{}_\sigma^{qt}\overset{*}{T}{}_t^p ,$$

$$W_s :\ W_\eta^p = -(\Lambda_{q\eta}^\sigma + \delta_\eta^\sigma W_q^0)\overset{*}{\Lambda}{}_\sigma^{qt}\overset{*}{T}{}_t^p .$$

Таким образом, в каждой точке $A_0 \in V_m$ плоскости $F_s(A_0)$ и $W_s(A_0)$ задают однопараметрический пучок $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода

$$\Phi_\varepsilon^p(\sigma) = F_\varepsilon^p + \sigma(W_\varepsilon^p - F_\varepsilon^p) , \tag{17}$$

где σ — абсолютный инвариант.

Величины $W_\varepsilon^p - F_\varepsilon^p \overset{def}{=} \Phi_\varepsilon^p$ являются компонентами тензора 3-го порядка.

Кроме того, отметим, что в каждой $T\Lambda$-виртуальной нормали 1-го рода пучок нормалей 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ индуцирует (высекает) пучок TL-виртуальных нормалей 2-го рода, $(s-2)$-мерная ось которого определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^u = 0,\ x^0 - \hat{F}^0_\varepsilon(\nu)x^\varepsilon = 0, \\ x^p - \nu^p_\varepsilon x^\varepsilon = 0,\ [\hat{W}^0_\varepsilon(\nu) - \hat{F}^0_\varepsilon(\nu)]x^\varepsilon = 0, \end{cases} \qquad (18)$$

где $\hat{F}^0_\varepsilon(\nu) = F^0_\varepsilon + F^0_p \nu^p_\varepsilon$, $\hat{W}^0_\varepsilon(\nu) = W^0_\varepsilon + W^0_p \nu^p_\varepsilon$.

В результате приходим к следующему выводу:

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка пучок нормалей 2-го рода гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ порождает однопараметрические пучки (16, 17) $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го и 2-го рода, соответствующих друг другу в биекции (15), а в каждой $T\Lambda$-виртуальной нормали — однопараметрический пучок TL-виртуальных нормалей 2-го рода с осью (18).*

§ 2. Фокальные образы, ассоциированные с гиперполосой $H_{m,r}(\Lambda)$. Плоскость Нордена — Тимофеева

1. Поле нормалей 1-го рода N_{n-m} и поле касательно оснащающих Λ-плоскостей определяют на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ поле $(n-s)$-плоскостей $\pi_{n-s} = [\mathcal{N}_{n-m}, \Lambda]$ (поле π-плоскостей, $s = m - r$). Относительно локального репера $R^1(N)$ уравнения, определяющие плоскость $\pi(A_0)$ поля π-плоскостей, имеют вид

$$x^\varepsilon = 0.$$

При смещении точки A_0 вдоль произвольной кривой

$$\omega^u_0 = 0,\ \omega^i_0 = \rho^i\theta,\ d\theta = \theta\wedge\theta_1,$$

лежащей на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$, координаты точек фокального многообразия π-плоскости удовлетворяют уравнениям

$$(\delta^\varepsilon_k x^0 + \Lambda^\varepsilon_{pk}x^p + \Lambda^\varepsilon_{\alpha k}x^\alpha + N^\varepsilon_{nk}x^n)\rho^k = 0,\ x^\varepsilon = 0\ (\rho^u = 0). \qquad (19)$$

Пусть квазитензор $\{V_{\varepsilon}^{p}\}$ задает произвольную инвариантную $T\Lambda$-виртуальную нормаль 1-го рода ν_s (ν_s-плоскость). При смещении точки A_0 вдоль кривых

$$\omega_0^{\alpha} = 0,\ \rho^{p} - \nu_{\varepsilon}^{p}\,\rho^{\varepsilon} = 0\,,$$

принадлежащих полю ν_s-плоскостей, система уравнений (19) примет вид

$$\begin{cases} x^{\varepsilon} = 0\ (\rho^{u} = 0), \\ [\delta_{\eta}^{\varepsilon} x^{0} + (\Lambda_{p\eta}^{\varepsilon} + \Lambda_{pq}^{\varepsilon}\nu_{\eta}^{q})x^{p} + (\Lambda_{\alpha\eta}^{\varepsilon} + \Lambda_{\alpha p}^{\varepsilon}\nu_{\eta}^{p})x^{\alpha} + \\ + (N_{n\eta}^{\varepsilon} + N_{np}^{\varepsilon}\nu_{\eta}^{p})x^{n}]\rho^{\eta} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Так как ρ^{η} не все равны нулю, то из (20) следует

$$\begin{cases} x^{\varepsilon} = 0, \\ \det\left\| \delta_{\eta}^{\varepsilon} x^{0} + (\Lambda_{p\eta}^{\varepsilon} + \Lambda_{pq}^{\varepsilon}\nu_{\eta}^{q})x^{p} + (\Lambda_{\alpha\eta}^{\varepsilon} + \Lambda_{\alpha p}^{\varepsilon}\nu_{\eta}^{p})x^{\alpha} + \right. \\ \left. + (N_{n\eta}^{\varepsilon} + N_{np}^{\varepsilon}\nu_{\eta}^{p})x^{n} \right\| = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Уравнения (21) в общем случае определяют алгебраическое многообразие размерности $(n-s-1)$ порядка $s=m-r$, которое обозначим $\Phi_{n-s-1}(\pi,\nu)$. Это многообразие лежит в π-плоскости. Соответствующая Λ-плоскость пересекает многообразие $\Phi_{n-s-1}(\pi,\nu)$ по алгебраическому многообразию $\Phi_{r-1}(\Lambda,\nu)$ порядка и размерности $(r-1)$:

$$\begin{cases} x^{\varepsilon} = 0,\ x^{u} = 0, \\ \det\left\| \delta_{\sigma}^{\varepsilon} x^{0} + (\Lambda_{p\sigma}^{\varepsilon} + \nu_{\sigma}^{q}\Lambda_{pq}^{\varepsilon})x^{p} \right\| = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия (22) есть плоскость $\varepsilon_{r-1}(A_0) \subset \Lambda(A_0)$, которая задается уравнениями

$$x^{\tilde{A}} = 0,\ x^{0} - \varepsilon_{p}^{0} x^{p} = 0\,,$$

где

$$\varepsilon_p^0 = -\frac{1}{s}(\Lambda_{p\sigma}^{\sigma} + \nu_{\sigma}^{q}\Lambda_{pq}^{\sigma}), \tag{23}$$

$$\nabla\varepsilon_p^0 + \omega_p^0 = \varepsilon_{pk}^0\omega_0^k. \tag{24}$$

Таким образом, поле квазитензора $\{\varepsilon_p^0\}$ (23), определяемое уравнениями (24), задает поле *ТΛ*-виртуальных нормалей 2-го рода, соответствующих полю *ТΛ*-виртуальных нормалей 1-го рода $\nu_s\{\nu_{\sigma}^{q}\}$ в проективитете Бомпьяни — Пантази (23).

2. С другой стороны, поле внутренних инвариантных нормалей 1-го рода N_{n-m} и поле ν_s -плоскостей порождают на базисной поверхности V_m гиперполосы поле внутренних инвариантных $(n-r)$-плоскостей Ω_{n-r} (поле Ω-плоскостей), то есть- $\Omega_{n-r}(A_0) = [N_{n-m}(A_0), \nu_s(A_0)]$, $\forall A_0 \in V_m$. Конечные уравнения плоскости $\Omega_{n-r}(A_0)$ (нормаль 1-го рода соответствующей Λ-плоскости) имеют вид

$$x^p - \nu_{\varepsilon}^{p}x^{\varepsilon} = 0.$$

Аналогично (см. п. 1) находим, что система уравнений

$$\begin{cases} x^p = \nu_{\varepsilon}^{p}x^{\varepsilon}, \\ \det\left\| \delta_q^p x^0 + (\nu_{\varepsilon q}^{p} + \nu_{\sigma}^{p}\nu_{\varepsilon}^{t}\Lambda_{tq}^{\sigma})x^{\varepsilon} + (\Lambda_{\alpha q}^{p} - \nu_{\sigma}^{p}\Lambda_{\alpha q}^{\sigma})x^{\alpha} + \right. \\ \left. + (N_{nq}^{p} - \nu_{\sigma}^{p}N_{np}^{\sigma})x^n \right\| = 0 \end{cases} \tag{25}$$

определяет фокальное многообразие $\Psi_{n-r-1}(\Omega, \Lambda)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим полю Λ-плоскостей. В общем случае это алгебраическое многообразие размерности $(n-r-1)$ порядка r. Многообразие

$\Psi_{n-r-1}(\Omega,\Lambda)$ (25) лежит в Ω-плоскости и пересекается с соответствующей ν_s-плоскостью по алгебраическому многообразию $\Psi_{s-1}(\nu_s,\Lambda)$ порядка r и размерности $s-1$:

$$\begin{cases} x^u = 0,\ x^p = \nu^p_\varepsilon x^\varepsilon, \\ \det\left\|\delta^p_q x^0 + (\nu^p_{\varepsilon q} - \nu^p_\sigma \nu^t_\varepsilon \Lambda^\sigma_{tq})x^\varepsilon\right\| = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, в каждой ν_s-плоскости некоторого пучка $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода, определяемой квазитензором $\{\nu^p_\varepsilon\}$, уравнения (26) задают фокальное многообразие $\Psi_{s-1}(\nu_s,\Lambda)$, соответствующее смещениям точки A_0 по кривым, принадлежащим полю Λ-плоскостей. Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия $\Psi_{s-1}(\nu_s,\Lambda)$ есть $(s-1)$-плоскость $\zeta_{s-1}\subset\nu_s(A_0)$, которая задается конечными уравнениями

$$x^0 - \rho^0_\sigma x^\sigma = 0,\ x^p - \nu^p_\varepsilon x^\varepsilon = 0,\ x^u = 0,$$

$$\rho^0_\sigma = -\frac{1}{r}(\nu^p_{\sigma p} - \nu^p_\sigma \nu^t_\varepsilon \Lambda^\varepsilon_{tp}).$$

Плоскость, натянутая на линейные поляры точки A_0 относительно фокальных многообразий $\Psi_{r-1}(\Lambda,\nu)$ (27) и $\Psi_{s-1}(\nu_s,\Lambda)$ (26), то есть плоскость $\rho_{m-1}(A_0)=[\zeta_{r-1}(A_0),\ \zeta_{s-1}(A_0)]$ (ρ-плоскость), является плоскостью Нордена — Тимофеева [13] неголономной композиции $(\Lambda,\ \nu_s)$ [14]. Относительно локального репера $R^1(N)$ уравнения плоскости Нордена — Тимофеева $\rho_{m-1}(A_0)$ имеют вид

$$y^0 - p^0_i y^i = 0,\quad y^u = 0, \tag{27}$$

где $p^0_\varepsilon = \rho^0_\varepsilon - \varepsilon^0_\rho \nu^p_\varepsilon$, $p^0_p = \varepsilon^0_p$.

Геометрическая интерпретация объекта $\{\rho_{m-1}\}$ была найдена Р. Ф. Домбровским [15] для касательно r-оснащенных поверхностей проективного пространства.

Теорема 2. *Поле $T\Lambda$-виртуальных нормалей 1-го рода $\nu_s\{\nu_\varepsilon^p\}$ индуцирует поле плоскостей Нордена — Тимофеева p (27) — поле нормалей 2-го рода регулярной гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$. Порядок дифференциальной окрестности, в которой внутренним образом определено поле плоскостей Нордена — Тимофеева, на единицу выше порядка дифференциальной окрестности квазитензора $\{\nu_\varepsilon^p\}$ (12).*

Нормаль 1-го рода N_{n-m} пересекает многообразие $\Phi_{n-s-1}(\pi,\nu)$ (21) по алгебраическому многообразию $\Phi_{n-m-1}(\pi,\nu)$ размерности $(n-m-1)$ порядка s:

$$\begin{cases} x^i = 0, \\ \det\left\| \delta_\sigma^\varepsilon x^0 + (\Lambda_{\alpha\sigma}^\varepsilon + \nu_\sigma^q \Lambda_{\alpha q}^\varepsilon) x^\alpha + (N_{n\sigma}^\varepsilon + \nu_\sigma^q N_{nq}^\varepsilon) x^n \right\| = 0, \end{cases} \tag{28}$$

а многообразие $\Psi_{n-r-1}(\Omega,\Lambda)$ (25) — по алгебраическому многообразию $\Psi_{n-m-1}(N,\Lambda)$ размерности $(n-m-1)$ порядка r:

$$\begin{cases} x^i = 0, \\ \det\left\| \delta_q^p x^0 + (\Lambda_{\alpha q}^p - \nu_\sigma^p \Lambda_{\alpha q}^\sigma) x^\alpha + (N_{nq}^p - \nu_\sigma^p N_{nq}^\sigma) x^n \right\| = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Уравнения линейных поляр A_0 относительно многообразий (28), (29) представим соответственно в виде

$$x^i = 0, \;\; x^0 - \varepsilon_u^0 x^u = 0, \tag{30}$$

$$x^i = 0, \;\; x^0 - \rho_u^0 x^u = 0. \tag{31}$$

Уравнения (30), (31) задают соответственно $(n-m-1)$-мерные плоскости $\varepsilon_{n-m-1}(A_0)$ и $\zeta_{n-m-1}(A_0)$, принадлежащие нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$ гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ и не проходящие через точку A_0, то есть являющиеся оснащающими плоскостями Картана гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ [5]. В общем случае плоскости $\varepsilon_{n-m-1}(A_0)$ (30) и $\zeta_{n-m-1}(A_0)$ (31) различны и поэтому образуют пучок плоскостей Картана гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$, осью которого является плоскость $\widehat{\varepsilon}_{n-m-2}(A_0)$:

$$x^u = 0, \; x^0 - \varepsilon_u^0 x^u = 0, \; x^0 - \rho_u^0 x^u = 0 . \tag{32}$$

Следовательно, имеет место

Теорема 3. *С каждой TΛ-виртуальной нормалью 1-го рода* $\nu_s\{\nu_i^p\}$ *индуцируется в нормали 1-го рода* $N_{n-m}(A_0)$ *гиперполосы* $H_{m,r}(\Lambda)$ *пучок плоскостей Картана, осью которого является плоскость* $\widehat{\varepsilon}_{n-m-2}(A_0)$ *(32).*

§ 3. π-структуры поля касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$

1. Пусть на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ задано внутренним инвариантным образом поле *TΛ*-виртуальных нормалей 1-го рода ν_s (в § 1, например, найдено однопараметрическое семейство таких полей (19)). Поле оснащающих *Λ*-плоскостей (*T*-структура [16]) и поле *TΛ*-виртуальных нормалей ν_s (вторая *T*-структура) порождают π-структуру в расслоении касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$. Действительно, в каждой точке $A_0 \in V_m$ имеем

$$[\nu_s(A_0), \; \Lambda(A_0)] = T_m(A_0); \;\; \nu_s(A_0) \cap \Lambda(A_0) = A_0 . \tag{33}$$

Известно [17], что всякая π-структура вполне определяется полем аффинора $\{\mathcal{A}_j^i\}$, удовлетворяющего соотношениям

$$\mathcal{A}_k^j \mathcal{A}_i^k = \delta_i^j . \tag{34}$$

Найдем компоненты аффинора $\mathcal{A}_j^i$, удовлетворяющего условиям (34) и (33). В силу выбора репера $R^1(N)$ можем написать следующие разложения:

$$T_i = \Lambda_i^k A_k \text{, где } \left\| \Lambda_i^k \right\| = \left\| \begin{matrix} \delta_q^p & 0 \\ \nu_\eta^p & \delta_\eta^\varepsilon \end{matrix} \right\|. \tag{35}$$

Так как точки T_i линейно независимы, то матрица Λ_i^k невырождена и, следовательно, для нее существует обратная матрица

$$\left\| \overset{*}{\Lambda}{}_i^k \right\| = \left\| \begin{matrix} \delta_q^f & 0 \\ -\nu_\varepsilon^f & \delta_\varepsilon^\sigma \end{matrix} \right\| \tag{36}$$

такая, что выполняются равенства

$$\Lambda_k^j \cdot \overset{*}{\Lambda}{}_i^k = \delta_i^j, \; \Lambda_i^k \cdot \overset{*}{\Lambda}{}_k^j = \delta_i^j .$$

Введем в рассмотрение тензор типа (1.1) (аффинор)

$$\mathcal{A}_j^i = \delta_j^i - 2\Lambda_p^i \overset{*}{\Lambda}{}_j^p, \; \nabla\mathcal{A}_j^i = \mathcal{A}_{jk}^i \omega_0^k, \tag{37}$$

где

$$\mathcal{A}_{jk}^i = -2(\Lambda_p^i \overset{*}{\Lambda}{}_{jk}^p - \overset{*}{\Lambda}{}_j^p \Lambda_{pk}^i), \tag{38}$$

компоненты которого в силу (35), (36) имеют следующую структуру

$$\mathcal{A}_p^q = -\delta_p^q, \; \mathcal{A}_p^\sigma = 0, \; \mathcal{A}_\sigma^p = 2\nu_\sigma^p, \; \mathcal{A}_\sigma^\varepsilon = \delta_\sigma^\varepsilon . \tag{39}$$

Таким образом, аффинор $\mathcal{A}_j^i$ (37), (39) охватывается объектами T-структур, индуцирующих данную π-структуру, и удовлетворяет условиям (34). Следствием теоремы 1 и приведенных исследований (§ 3, п. 1) является

Теорема 4. *Поле касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ несет однопараметрическое семейство π-структур, внутренне связанных с данной гиперполосой и определенных пучком аффиноров* $\mathcal{A}^i_j(\sigma)$, *где*

$$\left\|\mathcal{A}^i_j(\sigma)\right\| = \left\|\begin{matrix} -\delta^p_q & 0 \\ 2\nu^q_\varepsilon(\sigma) & \delta^\eta_\varepsilon \end{matrix}\right\|. \tag{40}$$

2. Установим критерий интегрируемости π-структуры (*Λ, ν*), определенной аффинором $\mathcal{A}^i_j$ (37). Известно [16], что интегрируемость π-структуры характеризуется обращением в нуль тензора кручения данной π-структуры. В свою очередь, так как тензор кручения π-структуры только постоянным множителем отличается от тензора Нейенхейса $\{\mathcal{T}^i_{kj}\}$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^i_{kj} &= \mathcal{A}^p_j(\mathcal{A}^i_{pk} - \mathcal{A}^i_{kp}) - \mathcal{A}^p_k(\mathcal{A}^i_{pj} - \mathcal{A}^i_{jp}) + \\ &+ \mathcal{A}^\varepsilon_j(\mathcal{A}^i_{\varepsilon k} - \mathcal{A}^i_{k\varepsilon}) + \mathcal{A}^\varepsilon_k(\mathcal{A}^i_{\varepsilon j} - \mathcal{A}^i_{j\varepsilon}), \end{aligned} \tag{41}$$

то интегрируемость π-структуры (*Λ, ν*) сводится к обращению в нуль компонент тензора Нейенхейса в репере $R^1(N,\nu)$, адаптированном полю ν_s-плоскостей (ν_s-расслоению). В этом репере $\omega^p_\varepsilon = \nu^p_{\varepsilon k}\omega^k_0$ и $\nu^p_\varepsilon(\underline{\sigma}) = 0$ ($(\underline{\sigma})$ — фиксированное значение параметра σ). Предварительно, продифференцировав равенства (34), получим следующие связи на компоненты аффинора $\mathcal{A}^i_j$ (37):

$$\mathcal{A}^j_{kl}\mathcal{A}^k_i + \mathcal{A}^j_k\mathcal{A}^k_{il} = 0\,. \tag{42}$$

Теперь, учитывая соотношения (34, 38, 39, 42), вычисляем компоненты тензора Нейенхейса π-структуры (*Λ, ν*):

$$\begin{cases} \mathcal{T}^i_{p\varepsilon} = 0,\ \mathcal{T}^p_{qt} = 0,\ \mathcal{T}^\varepsilon_{\sigma\eta} = 0, \\ \mathcal{T}^\varepsilon_{pq} = -4(\Lambda^\varepsilon_{pq} + \Lambda^\varepsilon_{qp}) = -8r^\varepsilon_{pq}, \\ \mathcal{T}^p_{\varepsilon\eta} = -4(\nu^p_{\varepsilon\eta}(\underline{\sigma}) + \nu^p_{\eta\varepsilon}(\underline{\sigma})) = -8r^\varepsilon_{pq}(\underline{\sigma}). \end{cases} \tag{43}$$

Из (43) следует, что обращение в нуль всех компонент тензора Нейенхейса равносильно равенству нулю тензоров неголономности r^{ε}_{pq} и $r^{\varepsilon}_{pq}(\underline{\sigma})$ соответственно Λ-распределения и ν-распределения на базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$. Таким образом, π-структура $(\Lambda,\ \nu(\underline{\sigma}))$, определенная аффинором $\mathcal{A}^i_j(\underline{\sigma})$, интегрируема тогда и только тогда, когда обращаются в нуль тензоры неголономности r^{ε}_{pq} и $r^{\varepsilon}_{pq}(\underline{\sigma})$ соответственно базовых распределений (Λ-распределения и ν_s-распределения) данной π-структуры. С другой стороны, интегрируемость π-структуры означает расслоение базисной поверхности V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ на два семейства подмногообразий:

а) на s-параметрическое семейство r-мерных поверхностей, огибающих элементы (плоскости Λ) Λ-распределения;

б) на r-параметрическое семейство s-мерных поверхностей, огибающих элементы (плоскости $\nu_s(\underline{\sigma})$) $\nu_s(\underline{\sigma})$-распределения. Другими словами, через каждую точку $A_0 \in V_m$ проходит по одной поверхности каждого из семейств. Многообразие элементов π-структуры, касательных к этим поверхностям (V_r, V_s), образует голономную композицию, а интегральные многообразия голономной композиции — композицию А.П. Нордена [19]. Учитывая эту связь, Р.Ф. Домбровский [15] вводит для неинтегрируемых (интегрируемых) π-структур названия неголономной (голономной) композиции А.П. Нордена.

Определение. *Неголономной композицией А.П. Нордена* на дифференцируемом многообразии X_m называется дифференциально-геометрическая структура, индуцированная парой полей геометрических объектов, порождающих два распределения плоскостных элементов Λ_r и ν_s (в общем случае не инволютивных) таких, что в каждой точке $x \in X_m : [\Lambda_r, \nu_s] = T_x$, $\Lambda_r \cap \nu_s = x$. Распределения Λ_r и ν_s называются *базовыми распределениями неголономной композиции* $(\Lambda,\ \nu)$.

Из результатов исследований (§ 3, п. 2) и теоремы 4 следует

Теорема 5. *Регулярная гиперполоса $H_{m,r}(\Lambda)$ внутренним инвариантным образом порождает в поле касательных плоскостей T_m базисной поверхности V_m однопараметрический пучок неголономных композиций А.П. Нордена $(\Lambda,\ \nu(\sigma))$, базовыми распределениями каждой из которых являются распределения Λ-плоскостей и $\nu_s(\underline{\sigma})$-плоскостей. Обращение тензоров неголономности r^{ε}_{pq} и $r^{\varepsilon}_{pq}(\underline{\sigma})$ соответствующих базовых распределений данной π-структуры $(\Lambda,\ \nu(\underline{\sigma}))$ в нуль есть необходимое и достаточное условие, чтобы базисная поверхность V_m гиперполосы $H_{m,r}(\Lambda)$ представляла собой голономную композицию А.П. Нордена $(V_r, V_s(\underline{\sigma}))$, а соответствующая π-структура $(\Lambda,\ \nu(\underline{\sigma}))$ была голономной.*

Список литературы

1. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1950. Вып. 8. С. 197—272.
2. *Малаховский В.С.* К геометрии касательно оснащенных подмногообразий // Изв. вузов. Матем., 1972. № 9. С. 54—65.
3. *Домбровский Р.Ф.* К геометрии касательно оснащенных поверхностей в P_n // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1974. Т. 6. С. 171—188.
4. *Попов Ю.И.* О голономности $H(M(\Lambda))$-распределения // ДГМФ. Калининград, 1984. Вып. 15. С. 71—77.
5. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. Калининград, 1990. 181 с. Деп. в ВИНИТИ 05.11.90, № 5625-В90Деп.
6. *Попов Ю.И.* Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n // ДГМФ. Калининград, 1970. Вып. 1. С. 27—46.
7. *Попов Ю.И.* Вырожденные гиперполосы многомерного проективного пространства // Тез. докл. 6-й Всесоюз. конф. по совр. проблемам геометрии. Вильнюс, 1975. С. 195—196.
8. *Попов Ю.И.* Внутреннее оснащение вырожденной m-мерной гиперполосы H^r_m ранга r многомерного проективного пространства // ДГМФ. Калининград, 1975. Вып. 6. С. 102—142.

9. *Попов Ю. И.* Инвариантные пространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. Калининград, 1984. 93 с. Деп. в ВИНИТИ 02.07.84, №4481-84Деп.

10. *Попов Ю. И.* Инвариантные пространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением // Тез. докл. VI Прибалтийской геометрической конференции. Таллин, 1984. С. 96—97.

11. *Остиану Н. М.* О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 239—263.

12. *Домбровский Р. Ф.* Поля геометрических объектов на многомерных касательно оснащенных поверхностях в P_n // Проблемы геометрии. 1975. Т. 7. С. 153—171.

13. *Попов Ю. И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. IV. Калининград, 1986. 93 с. Деп. в ВИНИТИ 22.07.86, №5371-1386Деп.

14. *Домбровский Р. Ф.* О неголономных композициях на поверхностях $M_{n,r}$ в P_n // Всесоюз. науч. конф. по неевклидовой геометрии «150 лет геометрии Лобачевского» : тез. докл. М., 1976. Т. 7. С. 69.

15. *Legrand G.* T-structures homogenes // Comptes Rendus Acad. Sci. 1964. Vol. 258, №19. P. 4648—4650.

16. *Широков А. П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях // Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНИТИ. 1974. Т. 2. С. 153—207.

17. *Норден А. П.* Теория композиций // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. 1978. Т. 10. С. 117—145.

Yu. I. Popov[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-10

Fields of geometric objects associated with compiled hyperplane $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-distribution in affine space

Submitted on May 11, 2021

In the first-order frame a tangentially *r*-framed hyperband is given in the projective space. For simplicity of presentation, we adapt the frame by the field of the 1st kind normals. The tensor of nonholonomicity of clothing Λ-planes field is introduced. The vanishing the nonholonomic tensor leads to three different interpretations of the hyperband. With the help of $T\Lambda$-virtual normals of the 1st and 2nd kind of framed Λ-planes, we come to the following conclusion: in a third order differential neighborhood the bundle of the hyperband second kind normals generates a one-parameter bundle of $T\Lambda$-virtual first and second kind normals, which correspond to each other in bijection. We consider focal images associated with the hyperband, with the help of which the Norden — Timofeev plane of the indicated hyperband is constructed. The geometric interpretation of the object defining the Norden — Timofeev surface was found by R. F. Dombrovsky for tangentially r-framed surfaces in the projective space. We note that the field of $T\Lambda$-virtual first kind normals induces the field of the Norden — Timofeev planes, this is the field of the 2nd kind regular hyperband normals. It is proved that with each the 1st kind $T\Lambda$-virtual normal is induced a bundle of Cartan planes in the 1st kind normal at a fixed point of the hyperband.

In conclusion, we consider the π-structures of the tangent planes field at the base surface of the hyperband.

Keywords: tangentially r-framed hyperband, nonholonomic tensor, $T\Lambda$-virtual normal, algebraic variety, focal manifold, Norden — Timofeev plane, affinor, nonholonomic Norden composition.

References

1. *Vagner, V. V.:* The field theory of local hyperbands. *Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis*, **8**, 197—272 (1950).

2. *Malakhovsky, V. S.:* On the geometry of relatively equipped submanifolds. *Izvestiya Vuzov. Math.*, **9**, 54—65 (1972).

3. *Dombrovsky, R. F.:* On the geometry of tangentially equipped surfaces in P_n. *Tr. Geom. Sem.*, **6**, 171—188 (1974).

4. *Popov, Yu. I.:* On the holonomicity of the H(M (Λ))-distribution. *DGMF*. Kaliningrad. **15**, 71—77 (1984).

5. *Popov, Yu. I.:* Fundamentals of the theory of three-component distributions in projective space. Kaliningrad, 181 p. Dep. VINITI 5.11.90, No. 5625-V90Dep (1990).

6. *Popov, Yu. I.:* Introduction of an invariant framing on the degenerate hyperband Γ_m of the multidimensional projective space P_n. *DGMF*. Kaliningrad. **1**, 27—46 (1970).

7. *Popov, Yu. I.:* Degenerate hyperbundle of multidimensional projective space. *Tez. dokl. 6*[th] *Union. conf. on modern probl. geom*. Vilnius. 195—196 (1975).

8. *Popov, Yu. I.:* The interior equipment of a degenerate *m*-dimensional hyperband of rank r in a multidimensional projective space. *DGMF*. Kaliningrad. **6**, 102—142 (1975).

9. *Popov, Yu. I.:* Invariant spaces associated with H(M(Λ))-distribution of projective space. Kaliningrad, 93 p. Dep. VINITI 2.07.84, No. 4481-84Dep (1984).

10. *Popov, Yu. I.:* Invariant spaces associated with the H(M(Λ))-distribution. *Tez. docl. VI Baltic Geometric Conference*. Tallinn. 96—97 (1984).

11. *Ostianu, N.M.:* Geometry of a multi-dimensional surface in a projective space. *Tr. Geom. Sem*. **1**, 239—263 (1966).

12. *Dombrovsky, R.F.:* Fields of geometric objects on multidimensional tangentially framed surfaces in P_n. *Problems of Geometry*, **7**, 153—171 (1975).

13. *Popov, Yu. I.:* Invariant subspaces associated with H(M(Λ))-distribution of the projective space. IV. Kaliningrad, 93 p. Dep. VINITI 07.22.86, No. 5371-1386Dep (1986).

14. *Dombrovsky, R.F.:* On nonholonomic compositions on surfaces $M_{n,r}$ in P_n. *Tez. Dokl. Vses. scientific. conf. by neevklead. geom. "150 years of Lobachevsky's geometry*". Moscow. **7**, 69 (1976).

15. *Legrand, G.:* T-structures homogenes. *C. r. Acad. Sci.* **258**:19, 4648—4650 (1964).

16. *Shirokov, A.P.:* Structures on differentiable manifolds. *Algebra. Topol. Geom.*, **2**, 153—207 (1974).

17. *Norden, A.P.:* The theory of compositions. *Probl. Geom.*, **10**, 117—145 (1978).

УДК 514.763.35

***S. E. Stepanov*[1], *I. I. Tsyganok*[2], *V. Rovenski*[3]**
[1, 2] *Financial University under the Government of the Russian Federation*
[3] *Department of Mathematics, University of Haifa, Israel*
[1,2] s.e.stepanov@mail.ru, [3] vrovenski@univ.haifa.ac.il
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-11

On conformal transformations of metrics of Riemannian paracomplex manifolds

A $2n$-dimensional differentiable manifold M with $O(n,\mathbf{R})\times O(n,\mathbf{R})$-structure is a Riemannian almost paracomplex manifold. In the present paper, we consider conformal transformations of metrics of Riemannian paracomplex manifolds. In particular, a number of vanishing theorems for such transformations are proved using the Bochner technique.

Keywords: almost paracomplex manifold, conformal transformations, Bochner technique, mixed scalar curvature.

§ 1. Introduction and results

A Riemannian almost product structure on an m-dimensional Riemannian manifold (M,g) is a (1, 1)-tensor field J on M such that $J^2=\mathrm{id}$ and $g(J,J)=g$. The triplet (M,J,g) is called a Riemannian almost product manifold (see [1]). As a result, at every point $x\in M$, the horizontal subspace H_x and the vertical subspace V_x of the tangent space T_xM that correspond to the eigenvalues -1 and $+1$ of the tensor J must be orthogonal. A Riemanni-

Поступила в редакцию 09.03.2021 г.

an almost paracomplex manifold is a Riemannian almost product manifold (M,J,g) such that $trace\,J=0$ (see [2]). In this case, the two eigenbundles H and V of the tangent bundle TM have the same rank, i. e., $\dim H_x=\dim V_x$ at any point $x\in M$. Note that the dimension of an almost paracomplex manifold (M,J,g) is necessarily even, i. e., $m=2n$.

A Riemannian almost paracomplex structure on $2n$-dimensional differentiable manifold M may alternatively be defined as a $O(2n,\mathbf{R})$-structure on M with structural orthogonal group $O(2n,\mathbf{R})=O(n,\mathbf{R})\times O(n,\mathbf{R})$. This structure is the antipode of an *almost complex structure* (see [3]).

There are three kinds of sectional curvature for a Riemannian almost product manifold (M,J,g): horizontal, vertical, and mixed. The mixed plane is spanned by two vectors such that the first vector is horizontal and the second vector is vertical at an arbitrary $x\in M$. Mixed curvatures stand for the sectional curvatures of mixed planes. This concept has a long history and many applications (see, e. g., [4] and [5]).

Let $\{e_1,\dots,e_p\}$ be an adapted local orthonormal frame of H and $\{e_{p+1},\dots,e_m\}$ be an adapted local orthonormal frame of V. Then *mixed scalar curvature* of a Riemannian almost product manifold (M,J,g) is an averaged mixed sectional curvature, i. e., the following function on M:

$$s_{mix}=\sum_{i=1,\dots,p}\ \sum_{\alpha=p+1,\dots,m} g\left(R(e_i,e_\alpha)e_a,e_i\right),$$

where R is the curvature tensor of the metric g.

We will assume below that there is a *conformal transformation* $f:(M,J,g)\to(M,J,\bar{g})$ of a Riemannian almost paracomplex manifold (M,J,g) such that the metrics g and $\bar{g}$ are conformally equivalent, that is, the following ordinary condition $f^{*}\overline{g} = e^{2\sigma} g$ for some smooth scalar function σ is satisfied (see [6, p. 269]). This transformation preserves the angles between any pair of curves (see [6, p. 267]). Therefore, the almost paracomplex structure of (M, J, g) is also preserved. In particular, if σ is constant then *f* is called *homothetic transformation*. In this case, the following theorem holds.

Theorem 1. *Let (M, J, g) be a 2n-dimensional parabolic Riemannian almost paracomplex manifold with the mixed scalar curvature $s_{\mathrm{mix}} \le 0$. Then there are no non-homothetic conformal transformations of the metric g such that $\overline{s}_{\mathrm{mix}} \ge 0$.*

A complete Riemannian manifold of finite volume is an example of *parabolic manifolds* (see [7]). Using this fact, we can formulate a corollary of Theorem 1.

Corollary 1. *Let (M, J, g) be a 2n-dimensional complete noncompact Riemannian almost paracomplex manifold of finite volume. If the mixed scalar curvature $s_{\mathrm{mix}} \le 0$, then there are no non-homothetic conformal transformations of the metric g such that $\overline{s}_{\mathrm{mix}} \ge 0$.*

In particular, if *M* is a compact manifold, then the following statements hold.

Theorem 2. *Let (M, J, g) be a 2n-dimensional compact Riemannian almost paracomplex manifold with the mixed scalar curvature $s_{\mathrm{mix}} \le 0$ (resp. $s_{\mathrm{mix}} \ge 0$). Then there are no non-homothetic conformal transformations of the metric g such that $\overline{s}_{\mathrm{mix}} \ge 0$ (resp. $\overline{s}_{\mathrm{mix}} \le 0$).*

Theorem 3. *Let (M, J, g) and $(M, J, \overline{g})$ be two 2n-dimensional compact almost paracomplex manifolds with conformally equivalent metrics g and $\overline{g}$. If their mixed scalar curvatures s_{mix} and $\overline{s}_{\mathrm{mix}}$ are not equal to zero everywhere on M, then these curvatures have the same sing.*

§ 2. Proofs of Theorems

Let (M, J, g) be a 2*n*-dimensional Riemannian almost para-complex manifold. We will assume that *f* is a conformal transformation such that $\bar{g} = u^{4/(m-2)} g$, i.e., $\sigma = (2/(m-2)) \ln u$, for some smooth function $u > 0$ and *f*-adjusted common coordinates on *M* (see [5, p. 269]). In this case, we get (see [8])

$$\Delta u = \frac{m-2}{m}\left(u\, s_{mix} - u^{\frac{m+2}{m-2}} \bar{s}_{mix}\right), \tag{1}$$

where $\Delta u = div(grad\, u)$ is the *Beltrami Laplacian*. Therefore, if $s_{\mathrm{mix}} \le 0$ and $\bar{s}_{\mathrm{mix}} \ge 0$ then $\Delta u \le 0$, i.e., *u* is *a superharmonic function*. We recall here that a complete Riemannian manifold is *parabolic* if it does not admit non-constant positive superharmonic functions (see e.g., [9, p. 313]). Using this fact, we prove our Theorem 1.

If a manifold *M* is compact, then integrating (1) over (*M, g*) and using *Green theorem* $\int_M \Delta u\, dv_g = 0$ gives

$$\int_M u\, s_{mix}\, dv_g = \int_M u^{\frac{m+2}{m-2}} \bar{s}_{mix}\, dv_g\ . \tag{2}$$

Using (2), we prove our Theorems 2 and 3.

References

1. *Stepanov, S.E.:* Riemannian almost product manifolds and submersions. *J. Math. Sci.*, **99**:6, 1788—1810 (2000).

2. *Cruceanu, V., Fortuny, P., Gadea, P.M.:* A survey on paracomplex geometry. *Rocky Mountain J. Math.*, **26**:1, 83—115 (1996).

3. *Hsiung, C.C.:* Almost complex and complex structures. World Scientific Publishing Co., Singapore (1995).

4. *Rovenski, V.:* Foliations on Riemannian Manifolds and Submanifolds. Birkhäuser (1998).

5. *Stepanov, S.E., Tsyganok, I.I.:* A remark on the mixed scalar curvature of a manifold with two orthogonal totally umbilical distributions. *Advance in Geom.*, **19**:3, 291—296 (2019).

6. *Mikeš, J., Stepanova, E., Vanžurová, A. et al.:* Differential geometry of special mappings. Olomouc, Palacky University Press (2019).

7. *Adams, S.R.:* Superharmonic functions on foliations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **330**:2, 625—635 (1992).

8. *Rovenski, V.:* On solutions to equations with partial Ricci curvature. *J. Geom. and Physics*, **86**, 370—382 (2014).

9. *Grigor'yan, A.:* Heat kernel and analysis on manifolds. AMS/IP, Boston (2009).

С. Е. Степанов[1], *И. И. Цыганок*[2], *В. Ровенский*[3]
[1, 2] *Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия*
[3] *Хайфский университет, Израиль*
[1, 2] s.e.stepanov@mail.ru, [3] vrovenski@univ.haifa.ac.il
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-11

О конформных преобразованиях метрик римановых паракомплексных многообразий

Поступила в редакцию 09.03.2021 г.

2*n*-мерное дифференцируемое многообразие M с $O(n,\mathbf{R})\times O(n,\mathbf{R})$-структурой называется римановым паракомплексным многообразием. В статье изучаются конформные преобразования метрик паракомплексных многообразий. В частности, доказывается с помощью техники Бохнера ряд теорем исчезновения для таких преобразований.

Ключевые слова: почти паракомплексное многообразием, конформные преобразования, техника Бохнера, смешанная скалярная кривизна.

Список литературы

1. *Stepanov S.E.* Riemannian almost product manifolds and submersions // J. Math. Sci. 2000. Vol. 99, №6. P. 1788—1810.

2. *Cruceanu V., Fortuny P., Gadea P.M.* A survey on paracomplex geometry // Rocky Mountain J. Math. 1996. Vol. 26, №1, 83—115.

3. *Hsiung C.C.* Almost complex and complex structures. Singapore, 1995.

4. *Rovenski V.* Foliations on Riemannian Manifolds and Submanifolds. Birkhäuser, 1998.

5. *Stepanov S.E., Tsyganok I.I.* A remark on the mixed scalar curvature of a manifold with two orthogonal totally umbilical distributions // Advance in Geom. 2019. Vol. 19, №3. P. 291—296.

6. *Mikeš J., Stepanova E., Vanžurová A. et al.* Differential geometry of special mappings. Olomouc, 2019.

7. *Adams S.R.* Superharmonic functions on foliations // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 330, №2. P. 625—635.

8. *Rovenski V.* On solutions to equations with partial Ricci curvature // J. Geom. and Physics. 2014. Vol. 86. P. 370—382.

9. *Grigor'yan A.* Heat kernel and analysis on manifolds. Boston, 2009.

УДК 514.76

А. Я. Султанов[1], М. В. Глебова[2], О. В. Болотникова[3]
[1, 2, 3] Пензенский государственный университет, Россия
[1, 2, 3] mvmorgun@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-12

Алгебры Ли дифференцирований линейных алгебр над полем

В работе исследуется система линейных уравнений, задающих алгебру Ли дифференцирований $DerA$ произвольной конечномерной линейной алгебры A над полем. Получена система уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного дифференцирования относительно фиксированного базиса алгебры A. Эта система является системой линейных однородных уравнений. Доказан закон преобразования матрицы этой системы. Доказана инвариантность ранга матрицы системы при переходе к новому базису в алгебре A. Далее рассматривается возможность применения полученных результатов в дифференциальной геометрии при оценки сверху размерностей групп аффинных преобразований. В качестве примера приведен разработанный И. П. Егоровым метод исследования размерностей алгебр Ли аффинных векторных полей на гладких многообразиях, снабженных линейными связностями, имеющими ненулевые тензорные поля кручения.

Ключевые слова: линейная алгебра над полем, дифференцирование линейной алгебры, алгебра Ли, алгебра Ли дифференцирований.

Введение

Пусть P — поле, W — векторное пространство над этим полем.

Поступила в редакцию 29.06.2021 г.

Определение 1. *Билинейной операцией*, заданной на векторном пространстве W, называется отображение

$$\varphi : W \times W \to W,$$

удовлетворяющее условиям

$$(1)\ \varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z),$$

$$(2)\ \varphi(z, \alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(z, x) + \beta\varphi(z, y)$$

для любых $\alpha, \beta \in P$ и любых $x, y, z \in W$.

Условие (1) выражает линейность операции φ по первому аргументу, а условие (2) — линейность по второму аргументу. Билинейная операция φ называется иначе операцией умножения, а выражение $\varphi(x, y)$ обозначается символом xy и называется произведением векторов x и y.

Условия (1) и (2) в принятых обозначениях примут вид

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xy) + \beta(yz),$$

$$z(\alpha x + \beta y) = \alpha(zx) + \beta(zy).$$

Определение 2. Векторное пространство W, на котором задана билинейная операция, называется *линейной алгеброй над полем* P.

Обозначим эту пару через A: $A = (W, \varphi)$. Векторное пространство W называется носителем алгебры A, а векторы из W — элементами алгебры A. Обычно алгебру A отождествляют с W. Если векторное пространство W является конечномерным, то алгебра A называется алгеброй конечного ранга, причем рангом алгебры A называется размерность векторного пространства W над полем P. Ранг алгебры A часто называют размерностью линейной алгебры.

Определение 3. Отображение f: $W \to W$ называется *линейным* (иначе — *эндоморфизмом*), если для любых $\alpha, \beta \in P$ и любых $x, y \in W$ выполняется условие

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(x).$$

Множество всех линейных отображений векторного пространства W в себя обозначается через $End\ W$. Для любых $f, g \in End\ W$ сумма $f+g$ и произведение $\gamma f, \gamma \in P$, определяются условиями

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\gamma f)(x) = \gamma(f(x)).$$

Множество $End\ W$ с введенными операциями сложения линейных отображений и умножения их на скаляры из поля P становится векторным пространством. В полученном векторном пространстве можно определить операцию композиции $\circ$ по следующему правилу:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

для всех $x \in W$ и для всех $f, g \in End\ W$.

Эта операция является билинейной, значит, пара $(End\ W, \circ)$ является линейной алгеброй, называемой линейной алгеброй эндоморфизмов векторного пространства W. В силу того что операция $\circ$ является ассоциативной операцией, алгебра $(End\ W, \circ)$ называется ассоциативной. Условием $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ определим в алгебре $(EndW, \circ)$ новую операцию $[,]$. В результате получим новую алгебру $gl(W)$, являющуюся алгеброй Ли. Эта алгебра называется полной линейной алгеброй.

Определение 4. Линейный оператор D называется *дифференцированием алгебры* $A = (W, \varphi)$, если выполняется следующее условие:

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

Совокупность всех дифференцирований линейной алгебры A обозначается символом $Der\ A$. На множестве $Der\ A$ естественным образом вводится операция коммутирования по правилу

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

для всех $D_1, D_2 \in DerA$.

Операция композиции над дифференцированиями, вообще говоря, не проводит к дифференцированию алгебры A, а операция коммутирования $(D_1, D_2) \to [D_1, D_2]$ приводит к дифференцированию алгебры A. Более того, пара $(Der, [,])$ является алгеброй, и эта алгебра называется алгеброй Ли дифференцирований линейной алгебры A.

1. О размерности алгебры Ли $DerA$

Теорема 1. *Пусть алгебра* A *имеет конечный ранг, равный* m*, тогда* $\dim_P (DerA) \le m^2$.

Для доказательства этого утверждения выберем какой-нибудь базис алгебры A: $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$ и для каждого дифференцирования $D \in DerA$ образы $D(\varepsilon_i)$ базисных элементов разложим по элементам базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$. Тогда получим $D(\varepsilon_i) = x_i^j \varepsilon_j$, $x_i^j \in P$.

Матрица

$$M(D) = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & ... & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & .... & x_m^2 \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_m^n \end{pmatrix}$$

называется матрицей дифференцирования D в базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$. Заметим, что верхний индекс элементов этой матрицы является номером строки, а нижний индекс — номером столбца.

Совокупность $gl(m, P)$ всех квадратных матриц порядка m образует векторное пространство над полем P относительно естественных операций сложения матриц и умножения их на скаляры из поля P. Размерность этого векторного пространства равна m^2 Операцию коммутирования в $gl(m,P)$ определим условием $[A,B]=AB-BA$ для любых $A,B\in gl(m,P)$.

Выражения AB и BA выражают произведения матриц. Алгебра $gl(m,P)$ с операцией [,] называется *полной матричной алгеброй Ли над полем P*. Размерность алгебры $gl(m,P)$ равна m^2.

Отображение h: $DerA\to gl(m,P)$, определенное условием $h(D)=M(D)$, является изоморфизмом. Следовательно, $\dim_P DerA=m^2$.

Теорема 2. $\dim_P DerA=m^2$ *тогда и только тогда, когда умножение в алгебре A — нулевое, то есть $xy=0_A$ для всех $x,y\in A$.*

Доказательство. Пусть $\dim_P DerA=m^2$ и $D(\varepsilon_i)=x_i^k\varepsilon_k$. Тогда, действуя на произведение $\varepsilon_i\varepsilon_j$ дифференцированием D, получим $D(\varepsilon_i\varepsilon_j)=D(\varepsilon_i)\varepsilon_j+\varepsilon_i D(\varepsilon_j)$. Учитывая, что $\varepsilon_i\varepsilon_j=C_{ij}^k\varepsilon_k$, где $C_{ij}^k\in P$ и называются структурными постоянными алгебры A, находим

$$C_{ij}^k D(\varepsilon_k)=D(\varepsilon_i)\varepsilon_j+\varepsilon_i D(\varepsilon_j).$$

Отсюда

$$C_{sj}^h x_i^s+C_{is}^h x_j^s-C_{ij}^k x_k^h=0. \tag{1.1}$$

Эти соотношения можно представить, используя символ Кронекера $\delta_j^i=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$ следующим образом:

$$(C_{sj}^h\delta_i^k+C_{is}^h\delta_j^k-C_{ij}^k\delta_s^h)x_h^s=0. \tag{1.2}$$

Они представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно переменных x_h^s. По предположению, каждый набор x_i^k является решением полученной системы (1.1). Значит, все элементы матрицы системы (1.2) должны быть равны нулю:

$$C_{sj}^h \delta_i^k + C_{is}^h \delta_j^k - C_{ij}^k \delta_s^h = 0.$$

Свернув эти соотношения по индексам k и s, получим

$$C_{ij}^h + C_{ij}^h - C_{ij}^h = 0.$$

Отсюда $C_{ij}^h = 0,$ что приводит к равенствам $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ для всех $i, j = 1, 2, ..., m$. Значит, $xy = 0$ для всех $x, y \in A.$ Обратное утверждение очевидно.

2. Закон преобразования элементов матрицы системы (1.2)

Матрица C системы (1.2) имеет элементы

$$C\begin{pmatrix} h & \big| & k \\ ij & \big| & s \end{pmatrix} = \delta_i^k C_{sj}^h + \delta_j^k C_{is}^h - \delta_s^h C_{ij}^k .$$

Мультииндекс $\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}$ соответствует строке, а мультииндекс $\begin{pmatrix} h \\ ij \end{pmatrix}$ — столбцам матрицы C. При переходе к новому базису $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_m)$ в алгебре A элементы матрицы C будут подвергаться преобразованиям по тензорному закону. Покажем это.

Пусть $\varepsilon_i = a_i^s \varepsilon'_s$, где матрица $\left\| a_i^s \right\|$ — невырожденная, $\varepsilon'_k = b_k^t \varepsilon_t$. Из этих равенств следует $\varepsilon_i = a_i^s b_s^t \varepsilon_t$. Отсюда $a_i^s b_s^t \varepsilon_t = \delta_i^t \varepsilon_t$. Следовательно, $a_i^s b_s^t = \delta_i^t$.

Аналогично $\varepsilon'_k = b_k^t a_t^s \varepsilon'_s$, поэтому $a_t^s b_k^t = \delta_k^s$. Обозначим через C'^k_{ij} структурные постоянные алгебры A относительно базиса $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_m)$. Значит, $\varepsilon'_i \varepsilon'_j = C'^k_{ij} \varepsilon'_k$. Заменив элементы нового базиса на их разложения по элементам старого базиса, получим

$$b_i^t b_j^s \varepsilon_t \varepsilon_s = C'^k_{ij} b_k^p \varepsilon_p.$$

Поскольку $\varepsilon_t \varepsilon_s = C_{ts}^p \varepsilon_p$, то предыдущие равенства дают

$$C_{ts}^p b_i^t b_j^s = C'^k_{ij} b_k^p.$$

Отсюда $C'^k_{ij} = C_{ts}^p a_p^k b_i^t b_j^s$.

Аналогично $C_{ij}^k = C'^p_{i_1 i_2} b_p^k a_i^{i_1} a_j^{i_2}$.

На основании приведенных равенств получим

$$C\begin{pmatrix} i_1 & \Big| i_2 \\ j_1 j_2 & \Big| j_3 \end{pmatrix} b_{k_1}^{j_1} b_{k_2}^{j_2} b_{k_3}^{j_3} a_{i_1}^{h_1} a_{i_2}^{h_2} = C'\begin{pmatrix} h_1 & \Big| h_2 \\ k_1 k_2 & \Big| k_3 \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Таким образом, элементы матриц C и C' связаны тензорным законом.

3. Инвариантность размерности пространства решений системы (1.2)

Система линейных однородных уравнений (1.2) относительно нового базиса $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_m)$ примет вид

$$C'\begin{pmatrix} h_1 & \Big| h_2 \\ k_1 k_2 & \Big| k_3 \end{pmatrix} y_{h_2}^{k_2} = 0. \qquad (1.4)$$

Докажем, что размерность пространства решений системы однородных линейных уравнений (1.2) не зависит от выбора базиса в алгебре A, что равносильно условию инвариантности ранга матрицы C при переходе к новому базису.

Предположим, что система (1.4) имеет ненулевое решение. Тогда пространство всех решений системы (1.4) имеет базис. Пусть упорядоченные наборы элементов поля P

$$u_{\alpha t}^{s} \quad (\alpha = 1, 2, ..., m^2 - \rho),$$

где ρ — ранг матрицы C', составляют базис пространства решений системы (1.4). Тогда имеем верные равенства

$$C'\begin{pmatrix} h_1 & \Big| t \\ k_1 k_2 & \Big| s \end{pmatrix} u_{\alpha t}^{s} = 0,$$

где по индексам s и t ведется суммирование от 1 до m. Заменив в этих соотношениях коэффициенты по формулам (1.3) с последующими свертываниями, получим

$$C\begin{pmatrix} t & \Big| i_2 \\ l_1 l_2 & \Big| j_3 \end{pmatrix} \upsilon_{\alpha i_2}^{j_3} = 0$$

для всех $\alpha \in \{1, 2, ..., m^2 - \rho\}$, причем $\upsilon_{\alpha i_2}^{j_3} = b_s^{j_3} a_{i_2}^{t} u_{\alpha t}^{s}$. Следовательно, наборы $\upsilon_{\alpha i_2}^{j_3}$ являются решениями системы линейных однородных уравнений

$$C\begin{pmatrix} t & \Big| i_2 \\ l_1 l_2 & \Big| i_3 \end{pmatrix} x_{i_2}^{i_3} = 0 \tag{1.5}$$

для каждого $\alpha \in \{1, 2, ..., m^2 - \rho\}$.

Эта система решений линейно независима. Действительно, пусть $\lambda^{\sigma} \upsilon_{\sigma i_2}^{j_3} = 0$. Тогда $\lambda^{\sigma} b_s^{j_3} a_{i_2}^{t} u_{\sigma t}^{s} = 0$. Свернув эти соотношения с $a_{j_3}^k, b_t^{i_2}$, получим $\lambda^\sigma u_{\sigma t}^k = 0.$ Отсюда в силу линейной независимости системы решений $u_{\sigma t}^k$ следует $\lambda^\sigma = 0.$ Утверждение доказано.

Пусть упорядоченный набор элементов υ_t^s — произвольное решение системы (1.5). Тогда

$$C\begin{pmatrix} h & \Big| & t \\ l_1 l_2 & \Big| & s \end{pmatrix}\upsilon_t^s = 0$$

представляет собой верное равенство.

Рассмотрим упорядоченный набор u_q^t, где $(t, q = 1, 2, ..., m)$, определенный формулами

$$u_q^p = a_s^p b_q^t \upsilon_t^s.$$

Тогда $\upsilon_t^s = b_p^s a_t^q u_q^p.$ Поэтому получим

$$C'\begin{pmatrix} h & \Big| & t \\ l_1 l_2 & \Big| & s \end{pmatrix} b_p^s a_t^q u_q^p = 0.$$

Свернем эти равенства последовательно с $b_{k_1}^{l_1}, b_{k_2}^{l_2}, a_h^i.$ Тогда получим следующие равенства:

$$C\begin{pmatrix} h & \Big| & t \\ l_1 l_2 & \Big| & s \end{pmatrix} b_{k_1}^{l_1} b_{k_2}^{l_2} b_p^s a_h^i a_t^q u_q^p = 0.$$

Учитывая равенства (1.3), эти соотношения примут вид

$$C'\begin{pmatrix} i & \Big| & q \\ k_1 k_2 & \Big| & p \end{pmatrix} u_q^p = 0.$$

Значит, упорядоченный набор u_q^p элементов поля P является решением системы (1.1). Это решение можно разложить по базисным решениям $u_{\alpha t}^s$:

$$u_q^p = \mu^\sigma u_{\sigma q}^p.$$

Поскольку $u_q^p = a_s^p b_q^t \upsilon_t^s$, $u_{\sigma q}^p = a_s^p b_q^t \upsilon_{\sigma t}^s$, имеем

$$a_s^p b_q^t \upsilon_t^s = \mu^\sigma a_s^p b_q^t \upsilon_{\sigma t}^s.$$

Следовательно, $\upsilon_t^s = \mu^\sigma \upsilon_{\sigma t}^s$.

Таким образом, решения $\upsilon_{\sigma t}^s$ $(\sigma = 1, 2, ..., m^2 - \rho)$ линейно независимы и порождают пространство решений системы (1.2). Поэтому размерность пространства решений системы (1.2) равна $m^2 - \rho$, то есть такая же, как размерность пространства решений системы (1.4).

Если система (1.4) имеет только нулевое решение, то система (1.2) будет иметь также одно нулевое решение. Действительно, если предположить, что система (1.2) имеет ненулевое решение, то аналогичными рассуждениями получим, что система (1.4) тоже имеет ненулевое решение.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Ранг системы (1.2) линейных однородных уравнений не зависит от выбора базиса пространства* W.

Исследования размерностей алгебр дифференцирований линейных алгебр тесно связаны с изучением групп аффинных преобразований многообразий, снабженных линейной связностью. Опишем эту связь вкратце.

Пусть M_n — гладкое связное многообразие класса $C^{\infty,}$ ∇ — линейная связность, заданная в нем. Связность ∇ порождает два тензорных поля: R — тензорное поле кривизны и T — тензорное поле кручения. Эти тензорные поля определяются тождествами

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

соответственно.

В этих равенствах X, Y, Z представляют собой произвольные векторные поля.

Векторное поле X называется инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства (M_n, ∇), если $L_X \nabla = 0$, где L_X — символ производной Ли вдоль векторного поля X [2; 6].

Известно, что совокупность всех инфинитезимальных аффинных преобразований образует относительно операции коммутирования векторных полей алгебру Ли, которую обозначим $aff(\nabla)$. Известно также, что $L_X R = 0$ и $L_X T = 0$ для любого $X \in aff(\nabla)$. Зафиксируем некоторую точку $q \in M_n$ и выберем карту (U, x^i) таким образом, чтобы $q \in U$. Тогда линейная связность будет задаваться компонентами Γ^i_{jk}, определенными условиями $\Gamma^i_{jk}\partial_i = \nabla_{\partial_j}\partial_k$. Тензорное поле кручения T будет иметь составляющие $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$. На касательном пространстве $T_q(M)$ возникает структура линейной алгебры $A = (T_q(M), \circ)$ с операцией умножения касательных векторов $a = a^i e_i$, $b = b^i e_i$, где $e_i = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_q$ определены по формуле $ab = (T^i_{jk}(q))e_i$. Положим $T^i_{jk}(q) = C^i_{jk}$. Эта алгебра антикоммутативна: $ab = -ba$. Изучим алгебру Ли дифференцирований введенной алгебры A с алгеброй Ли $aff(\nabla)$. Для этого сначала запишем уравнения $L_X \nabla = 0$ в координатах. Пусть $X = X^i \partial_i$ — локальное представление векторного поля X. Тогда для любых ∂_j, ∂_k будем иметь

$$L_X \nabla(\partial_j, \partial_k) = 0. \tag{1.6}$$

Эти соотношения равносильны следующей системе уравнений:

$$\partial_{jk} X^i + \Gamma^i_{mk}\partial_j X^m + \Gamma^i_{jm}\partial_k X^m - \Gamma^m_{jk}\partial_m X^m + X^m \partial_m \Gamma^i_{jk} = 0. \tag{1.7}$$

Поменяем местами индексы j и k, затем из соотношения (1.7) вычтем полученные соотношения. В результате имеем следующие равенства:

$$X^m \partial_m T^i_{jk} + T^i_{mk} \partial_j X^m + T^i_{jm} \partial_k X^m - T^m_{jk} \partial_m X^i = 0.$$

Выразив частные производные через ковариантные производные, получим

$$X^m \nabla_m T^i_{jk} + T^i_{mk} \nabla_j X^m + T^i_{jm} \nabla_k X^m - T^m_{jk} \nabla_m X^i = 0.$$

В точке $q \in U$ эти соотношения будут задавать нам систему линейных однородных уравнений относительно переменных $x^m = X^m(q)$, $x^m_j = \partial_j X^m(q)$ с коэффициентами

$$C^i_{jkm} = (\nabla_m T^i_{jk})(q), \;\; C^i_{jk} = (T^i_{jk}(q)):$$

$$x^m C^i_{jkm} + C\left(\begin{array}{c|c} i & s \\ jk & m \end{array}\right) x^m_s = 0, \tag{1.8}$$

где $C\left(\begin{array}{c|c} i & s \\ jk & m \end{array}\right) = \delta^s_j C^i_{mk} + \delta^s_k C^i_{jm} - \delta^i_m C^s_{jk}$. Число неизвестных в системе (1.8) равно $n^2 + n$.

Матрица C с элементами $C\left(\begin{array}{c|c} i & s \\ jk & m \end{array}\right)$ представляет собой матрицу системы линейных однородных уравнений, определяющих дифференцирование D, с условиями $D(e_i) = x^i_i e_j$.

Она является подматрицей матрицы системы (1.8). Поэтому если $rank\ C \geq \rho$, то размерность r пространства решений системы (1.8) будет удовлетворять неравенству $r \leq n^2 + n - \rho$.

При исследовании размерности алгебры Ли аффинных векторных полей важно знать оценку размерности алгебры дифференцирований линейной алгебры A. И. П. Егоров предложил следующий прием оценки размерности алгебры дифференцирований линейной алгебры A (используя инвариантность ранга матрицы относительно выбора базиса векторного пространства).

Выделим случаи:

а) существует карта (U, x^i), $q \in U$, такая, что $T^1_{23}(q) \neq 0$, то есть $C^1_{23} \neq 0$;

б) в каждой карте (U, x^i), $q \in U$, компоненты вида $T^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (α, β, γ попарно различны) в точке q равны 0, но существует карта, относительно которой $T^1_{12}(q) \neq 0$, то есть $C^1_{12} \neq 0$.

В случае а) он доказал, что $rank\ C \geq 3n - 6$. Следовательно, размерность алгебры Ли $aff(\nabla) \leq n^2 - 2n + 6$.

В случае б) $rank\ A \geq n$, поэтому размерность алгебры Ли $aff(\nabla) \leq n^2$.

Идеи И.П. Егорова использовались в работах К. Яно, Ш. Кобаяси и учеников И.П. Егорова.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами : учеб. пособие. Казань, 1985.

2. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. записки Пенз. пед. ин-та им. В.Г. Белинского. Казань, 1965. С. 5—179.

3. *Картан Э., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. М., 1960.

4. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии / пер. с англ. М., 1986.

5. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М., 1970.

6. *Yano K.* The theory of Lie derivaruves and its applications. Amsterdam, 1957.

A. Ya. Sultanov[1], M. V. Glebova[2], O. V. Bolotnikova[3]
[1, 2, 3] Penza State University
37 Lermontova St., Penza, 440026, Russia
[1, 2, 3] mvmorgun@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-12

Lie algebras of differentiations of linear algebras over a field

Submitted on June 29, 2021

In this paper, we study a system of linear equations that define the Lie algebra of differentiations *DerA* of an arbitrary finite-dimensional linear algebra over a field. A system of equations is obtained, which is satisfied by the components of an arbitrary differentiation with respect to a fixed basis of algebra *A*. This system is a system of linear homogeneous equations. The law of transformation of the matrix of this system is proved. The invariance of the rank of the matrix of this system in the transition to a new basis in algebra is proved. Next, we consider the possibility of applying the obtained results in differential geometry when estimating the dimensions of groups of affine transformations from above. As an example, the method of I. P. Egorov is given for studying the dimensions of Lie algebras of affine vector fields on smooth manifolds equipped with linear connections having non-zero torsion tensor fields.

Keywords: linear algebra over a field, differentiations of linear algebra, Lie algebra, Lie algebra of differentiations.

References

1. *Vishnevskij, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V.:* Spaces over algebras. Kazan' (1985).
2. *Egorov, I. P.:* Movements in spaces of affine connectivity. *Scientific Notes Penza Ped. Univ*. Kazan'. 5—179 (1965).
3. *Cartan, E., Ejlenberg, S.:* Homologous algebra. Moscow (1960).
4. *Kobayashi, Sh.:* Groups of transformations in differential geometry. Moscow (1986).
5. *Malcev, A. I.*: Fundamentals of Linear algebra. Moscow (1970).
6. *Yano, K.:* The theory of Lie derivaruves and its applications. Amsterdam (1957).

УДК 514.76

А. Я. Султанов[1], Г. А. Султанова[2], Н. В. Садовников[3]
[1] Пензенский государственный университет, Пенза
[2, 3] Пензенский филиал Военной академии
материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулева
Министерства обороны РФ, Пенза
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru, [3] sadovnikovnv@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-13

О максимальной размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательных расслоений с синектической связностью А. П. Широкова

В настоящей работе получена точная оценка сверху размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях первого порядка, снабженных синектическими связностями А. П. Широкова.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, касательное расслоение, синектическая связность, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли.

Теория касательных расслоений над дифференцируемым многообразием M принадлежит области геометрии и топологии многообразий и является интенсивно развивающимся направлением теории расслоенных пространств. Основы теории расслоенных пространств были заложены в работах С. Эресмана, А. Вейля, А. Моримото, Ш. Сасаки, К. Яно, С. Ишихара. Среди отечественных ученых касательные расслоения исследовали А. П. Широков, В. В. Вишневский, В. В. Шурыгин, Б. Н. Шапуков и их ученики.

Поступила в редакцию 28.06.2021 г.

При исследовании автоморфизмов обобщенных пространств важное значение имеет вопрос об инфинитезимальных преобразованиях связностей в этих пространствах. Движениями в различных пространствах занимались К. Яно, Г. Вранчану, П. А. Широков, И. П. Егоров, А. З. Петров, А. В. Аминова и др. Движениям и автоморфизмам касательных расслоений посвящены работы К. Сато и Ш. Танно. Инфинитезимальные аффинные коллинеации в касательных расслоениях с синектической связностью были предметом исследований Х. Шадыева.

В настоящее время вопрос о движениях расслоенных пространств рассматривается в работах А. Я. Султанова, исследующего инфинитезимальные преобразования расслоения линейных реперов со связностью полного лифта, алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей в произвольных расслоениях Вейля.

1. Основные определения и факты

Касательное расслоение первого порядка представляет собой расслоение А. Вейля над гладким класса C^{∞} многообразием *M*, возникающим при помощи алгебры $A = R(\varepsilon)$ дуальных чисел со стандартным базисом $(\varepsilon^0, \varepsilon^1)$. Из определения базисных элементов следует, что они перемножаются по следующему правилу: $\varepsilon^{\alpha} \cdot \varepsilon^{\beta} = \varepsilon^{\alpha+\beta}$, причем $\varepsilon^{\gamma} = 0$ при $\gamma \geq 2$. Обозначим через A^* векторное пространство линейных форм над полем действительных чисел *R*, заданных на *A* и принимающих значения в *R*.

Пусть $C^{\infty}(M)$ — вещественная алгебра гладких класса C^{∞} функций, заданных на *M* и принимающих значения в *R*. Обозначим через $T_q M$ множество всевозможных гомоморфизмов $t_q : C^\infty(M) \to A$, где $q \in M$, удовлетворяющих условию $t_q(f) \equiv f(q)(\mathrm{mod}\, I)$, где I — идеал алгебры A, порожденный элементом ε^1. Множество $TM = \bigcup\limits_{q\in M} T_q M$ можно естественным образом наделить структурой гладкого многообразия над алгеброй A и гладкой структурой над R [1]. Отображение $\pi : TM \to M$, определенное условием $\pi(t_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка (TM, π, M) — расслоением А. Вейля, в нашем случае — касательным расслоением первого порядка.

Для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ можно построить ее естественный лифт $f_{(1)}$, называемый ее полным лифтом, с базы M в его касательное расслоение TM следующим образом: $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$. Функции $f_{(0)}$ и $f_{(1)}$ позволяют определить на TM функцию f^A со значениями в A формулой $f^A = f_\alpha \varepsilon^\alpha$ $(\alpha = 0,1)$. Функция f^A называется естественным продолжением функции f из M в TM. Композицию $a^* \circ f^A$ обозначим через $f_{(a^*)}$. Если $a^* = a^\alpha \varepsilon_\alpha$, то $f_{(a^*)} = a^\alpha f_{(\varepsilon_\alpha)}$, причем $f_{(\varepsilon_0)} = f_{(0)}, f_{(\varepsilon_1)} = f_{(1)}$.

Пусть $a \in A$ — произвольный фиксированный элемент алгебры A, X — произвольное гладкое векторное поле на M. На касательном расслоении TM существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(a^* \cdot b)}$$

для любой функции $f \in C^\infty(M)$. В этом равенстве $a^* \cdot b \in A^*$ определяется по правилу $a^* \cdot b(c) = a^*(bc)$. Для векторного поля X можно построить его естественное продолжение X^A на

TM. Оно задается условием $X^A f^A = (Xf)^A$ для любой функции $f \in C^\infty(M)$. Векторное поле $\tilde{X}$ на *A* называется голоморфным тогда и только тогда, когда $\tilde{X} = \varepsilon^\alpha X^A_\alpha$ $(\alpha = 0,1)$.

Линейная связность $\tilde{\nabla}$, заданная на *TM*, называется голоморфной, если векторное поле $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ является голоморфным для любых голоморфных векторных полей $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, заданных на *TM*. А. П. Широковым доказано, что любая голоморфная связность $\tilde{\nabla}$ на касательном расслоении первого порядка может быть представлена в виде $\tilde{\nabla} = \nabla^A + \varepsilon \cdot \Gamma^A_1$, где $\nabla = \Gamma_0$ — линейная связность, а Γ_1 — тензорное поле типа (1,2) на *M* [1]. Вещественную реализацию ∇^{Sh} голоморфной связности $\tilde{\nabla}$ будем называть синектической связностью А. П. Широкова.

Имеет место тождество

$$\nabla^{Sh}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\Gamma_\alpha(X,Y))^{(\varepsilon^\alpha ab)}.$$

Известно, что линейная связность ∇^{Sh} без кручения, заданная на *TM* при условии $\dim A \ge 2$ и $\dim M \ge 2$ с отличным от нуля тензорным полем кривизны R^{Sh}, имеет отличное от нуля тензорное поле Г. Вейля проективной кривизны W^{Sh} [3]. На основании теоремы И. П. Егорова о максимальной размерности алгебры Ли аффинных векторных полей заключаем, что размерность алгебры Ли аффинных векторных полей связности ∇^{Sh} на касательном расслоении *TM*, где $\dim M \ge 2$, не больше, чем $(2n)^2 - 2(2n) + 5 = (2n-1)^2 + 4$ [2]. Покажем точность этой оценки. Для этого рассмотрим касательное расслоение R^A_n $(n \ge 2)$, снабженное связностью А. П. Широкова ∇^{Sh} $\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \varepsilon_\sigma(\varepsilon^\nu \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \varepsilon^\mu)\left(\Gamma^i_{\nu jk}\right)_{(\mu)}$, причем $\Gamma^i_{\nu jk} = 0$ для всех $\nu = 0,1$, а $\Gamma^1_{123} = \Gamma^1_{132} = x^2, \Gamma^{i_1}_{\nu j_1 k_1} = 0$ в остальных случаях. Тогда

$\Gamma^{001}_{231} = x_0^2, \Gamma^{001}_{321} = x_0^2$, а остальные коэффициенты $\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = 0$. Вычислив компоненты тензорного поля кривизны $R^{\alpha\beta\gamma i}_{jkl\sigma}$, получим, что $R^{0001}_{2231} = 1$, $R^{0001}_{2321} = -1$, все другие компоненты тензорного поля R^{Sh} равны 0. Так как $R^{Sh} \neq 0$, то $W^{Sh} \neq 0$. Во множестве мультииндексов $\begin{pmatrix} i \\ \alpha \end{pmatrix}$, где $i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha \in \{0,1\}$, введем отношение линейного порядка следующими условиями:

(а) если $i < j$, то $\begin{pmatrix} i \\ \alpha \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} j \\ \beta \end{pmatrix}$ для любых $\alpha, \beta \in \{0,1\}$;

(б) если $i = j$, то $\begin{pmatrix} i \\ \alpha \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} i \\ \beta \end{pmatrix}$ для всех α, β, удовлетворяющих условию $\alpha < \beta$.

Тогда рассматриваемый случай будет представлять пример, приведенный И.П. Егоровым для доказательства точности $d^2 - 2d + 5$ алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства R^d с линейной связностью ∇ с компонентами $\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = x^2$, другие $\Gamma^i_{jk} = 0$ [2].

Таким образом, доказана

Теорема. *Максимальная размерность алгебры Ли аффинных векторных полей касательных расслоений первого порядка гладкого многообразия, снабженного синектической связностью А.П. Широкова, равна точно* $(2n-1)^2 + 4$.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами : учеб. пособие. Казань, 1985.

2. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. записки Пенз. пед. ин-та им. В.Г. Белинского. Казань, 1965. С. 5—179.

3. *Султанов А.Я.* О вещественной реализации голоморфной линейной связности над алгеброй // ДГМФ. Калининград, 2007. Вып. 38. С. 136—139.

A. Ya. Sultanov[1], *G. A. Sultanova*[2], *N. V. Sadovnikov*[2]
[1] *Penza State University*
[2] *Federal State-Owned Logistic Military Educational Institution named after general A. V. Khrulov of the Ministry of Defence of the Russian Federation, Penza*
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru, [3] sadovnikovnv@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-52-13

Affine transformations of the tangent bundle with a complete lift connection over a manifold with a linear connection of special type

Submitted on Juny 28, 2021

The theory of tangent bundles over a differentiable manifold M belongs to the geometry and topology of manifolds and is an intensively developing area of the theory of fiber spaces. The foundations of the theory of fibered spaces were laid in the works of S. Eresman, A. Weil, A. Morimoto, S. Sasaki, K. Yano, S. Ishihara. Among Russian scientists, tangent bundles were investigated by A.P. Shirokov, V.V. Vishnevsky, V.V. Shurygin, B.N. Shapukov and their students.

In the study of automorphisms of generalized spaces, the question of infinitesimal transformations of connections in these spaces is of great importance. K. Yano, G. Vrancianu, P.A. Shirokov, I.P. Egorov, A.Z. Petrov, A.V. Aminova and others have studied movements in different spaces. The works of K. Sato and S. Tanno are devoted to the motions and automorphisms of tangent bundles. Infinitesimal affine collineations in tangent bundles with a synectic connection were considered by H. Shadyev.

At present, the question of the motions of fibered spaces is considered in the works of A. Ya. Sultanov, in which infinitesimal transformations of a bundle of linear frames with a complete lift connection, the Lie algebra

of holomorphic affine vector fields in arbitrary Weyl bundles are investigated. In this paper we obtain exact upper bounds for the dimensions of Lie algebras of infinitesimal affine transformations in tangent bundles with a synectic connection A. P. Shyrokov.

Keywords: differentiable manifold, tangent bundle, synectic connection, infinitesimal affine transformation, Lie algebra.

References

1. *Vishnevskiy, V. V., Shirokov A. P., Shurygin V. V.:* Spaces over algebras. Kazan' (1984).

2. *Egorov, I. P.:* Movements in spaces of affine connectivity. *Scientific Notes Penza Ped. Univ*. Kazan'. 5—179 (1965).

3. *Sultanov, A. Ya.:* On the real realization of a holomorphic path connection over an algebra. *DGMF*. Kaliningrad. **38**, 136—139 (2007).

УДК 514.75

М. А. Чешкова[1]

[1] *Алтайский государственный университет, Барнаул*

[1] cma@math.asu.ru, [1] cma41@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-14

Деформация односторонних поверхностей

Работа посвящена изучению деформации односторонних поверхностей, к которым относятся скрещенный колпак, римская поверхность, бутылка Клейна. Первые две являются моделями проективной плоскости.

Доказано, что если поверхность представляет собой модель либо листа Мёбиуса, либо бутылки Клейна, либо проективной плоскости, то деформация поверхности будет моделью листа Мёбиуса, бутылки Клейна или проективной плоскости соответственно.

С использованием математического пакета построены графики рассматриваемых поверхностей.

Ключевые слова: скрещенный колпак, римская поверхность, лист Мёбиуса, бутылка Клейна.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π -периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической.

Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, то функция

$$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi))$$

Поступила в редакцию 26.12.2020 г.

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(u)=\frac{1}{2}(\rho(u)-\rho(u+2\pi))$$

есть 2π -антипериодическая.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор.

Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным направлением нормали независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

С помощью этих функций построим примеры односторонних поверхностей.

Модель листа Мёбиуса

Определим поверхность M уравнением

$$r(u,v)=s(u)+vl(u),\ u\in[-\pi,\pi], v\in[-1,1]. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Поверхность M есть модель листа Мёбиуса, для которого кривая $\rho=\rho(u)$ есть край.*

Доказательство. Рассмотрим поверхность M как фактор-пространство [1, с. 75]

$$M=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]/[-\pi,-v]\approx[\pi,v].$$

Так как

$$r(-\pi,-v)=s(-\pi)-vl(-\pi),\quad s(-\pi)=s(\pi),\quad l(-\pi)=-l(-\pi),$$

имеем $r(-\pi,-v)=r(\pi,v)$.

Следовательно [1, с. 25], поверхность M есть модель листа Мёбиуса.

Следствие. Кривая dk : $r(u,0)=s(u)$ — дезориентирующий контур поверхности M .

Доказательство. Определим вектор нормали $n(u,v)$ вдоль кривой $r(u,0)=s(u)$. Имеем $r_u(u,0)=s'(u)$, $r_v(u,0)=l(u)$.

Поскольку $s'(u+2\pi)=s'(u),\ \ l(u+2\pi)=-l(u)$, получим

$$n(u,0)=[s'(u),l(u)]=-n(u+2\pi,0).$$

Модель бутылки Клейна

Рассмотрим замкнутую поверхность KL

$$\begin{aligned}&r(u,v)=(p+\cos(v))s(u)+\sin(v)l(u),\ \ p\neq\pm1,\\&u\in[-\pi,\pi],\ \ v\in[-\pi,\pi].\end{aligned}\tag{2}$$

Теорема 2. *Поверхность KL определяет модель бутылки Клейна.*

Доказательство. Рассмотрим бутылку Клейна как фактор-пространство [1, с. 25, 75]

$$KL=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]/[-\pi,-v]\approx[\pi,v],\ \ [u,-\pi]\approx[u,\pi].$$

Действительно,

$$r(u,-\pi)=(p-1)s(u)=r(u,\pi),$$
$$r(-\pi,-v)=(p+\cos(-v))s(-\pi)+\sin(-v)l(-\pi)=r(\pi,v).$$

Поверхность KL имеет два дезориентирующих контура

$$r(u,0)=(p+1)s(u),\ \ r(u,\pi)=(p-1)s(u).$$

Разрежем KL вдоль кривой $r=r(u,v_0)$, $u\in[-2\pi,2\pi]$, $v_0=const\neq0,\neq\pm\pi$. Получим два листа Мёбиуса (криволинейных) со средними линиями

$$r(u,0)=(p+1)s(u),\quad r(u,\pi)=(p-1)s(u).$$

Если $p+1=0$ $(p-1=0)$, то средняя линия

$$r(u,0)=(p+1)s(u)\ \ (r(u,\pi)=(p-1)s(u))$$

вырождается в точку. Один из листов Мёбиуса вырождается в конус, гомеоморфный сфере с дырой. Поверхность в этом случае гомеоморфна сфере с дырой, заклеенной листом Мёбиуса. Имеем модель проективной плоскости [1, с. 25].

Модели проективной плоскости

Определим поверхность P уравнением

$$\begin{gathered} r(u,v)=(1+\cos(v))s(u)+\sin(v)l(u), \\ u\in[-\pi,\pi],\ \ v\in[-\pi,\pi]. \end{gathered} \tag{4}$$

Теорема 3. *Поверхность P есть модель проективной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим проективную плоскость как факторпространство [1, с. 75]

$$P=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]/[(-\pi,-v)\approx(\pi,v),(-u,-\pi)\approx(u,\pi)].$$

Поскольку

$$r(\pi,v)=(1+\cos(v))s(\pi)+\sin(v)l(\pi),$$

$$r(-\pi,-v)=((1+\cos(v))s(-\pi)+\sin(-v)l(-\pi),$$

$$s(-\pi)=s(\pi),\ \ l(-\pi)=-l(\pi),$$

$$r(-u,-\pi)=(1+\cos(\pi))s(-u)+\sin(-\pi)l(-u)=0,$$

$$r(u,\pi)=(1+\cos(\pi))s(u)+\sin(\pi)l(u)=0,$$

имеем $r(\pi,v)=r(-\pi,-v),\ \ r(u,\pi)=r(-u,-\pi)$.

Следовательно, поверхность P [1, с. 25] есть модель проективной плоскости.

Деформация односторонних поверхностей

Рассмотрим деформацию поверхности $r=r_1(u,v)$ в поверхность $r=r_2(u,v)$:

$$r=ar_2(u,v)+(1-a)r_1(u,v),\quad a\in[0,1]. \tag{5}$$

Пусть даны две 4π -периодические функции $\rho = \rho_1(u)$, $\rho = \rho_2(u)$. Тогда функция

$$\rho = a\rho_2(u) + (1-a)\rho_1(u),\ \ a = const,$$

будет также 4π -периодической. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если поверхности* $r = r_1(u,v)$ *и* $r = r_2(u,v)$ *есть модели либо листа Мёбиуса, либо бутылки Клейна, либо проективной плоскости, то поверхность (5) есть модель листа Мёбиуса, бутылки Клейна или проективной плоскости соответственно.*

В [2—5] изучаются односторонние поверхности.

Построим пример поверхности (5).

Рассмотрим тор

$$\mathrm{r(u,v) = (5+\cos(v))e(u) + \sin(v)k},$$

$$\mathrm{e(u) = (\cos(u), \sin(u), 0),\ \ k = (0,0,1)},$$

и линию $\rho(\mathrm{u}) = r(\mathrm{u}, \mathrm{u}/2) = (5+\cos(\mathrm{u}/2))\mathrm{e}(\mathrm{u}) + \sin(\mathrm{u}/2)\mathrm{k}$.

Назовем ее обмоткой тора первого типа.

Рассмотрим также обмотку тора

$$\rho(\mathrm{u}) = (5+\cos(\mathrm{u}))\mathrm{e}(\mathrm{u}/2) + \sin(\mathrm{u})\mathrm{k}\ .$$

Назовем ее обмоткой тора второго типа. Построим поверхности P (4) (рис. 1, 2).

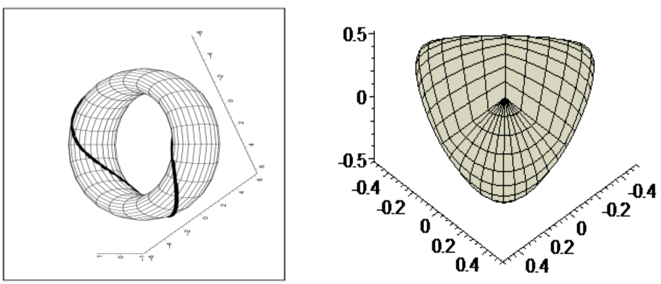

Рис. 1. Обмотка тора второго типа и римская поверхность

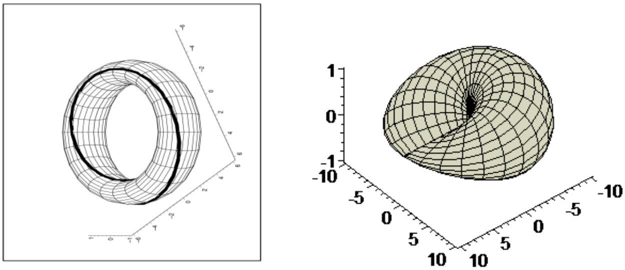

Рис. 2. Обмотка тора первого типа и скрещенный колпак

Если кривая $\rho = \rho(u)$ есть обмотка тора первого типа, то поверхность P есть скрещенный колпак [4, с. 304]. Если кривая $\rho = \rho(u)$ есть обмотка тора второго типа, то поверхность P есть римская поверхность [4, с. 305; 5, с. 302].

Построим поверхность (5) (рис. 3).

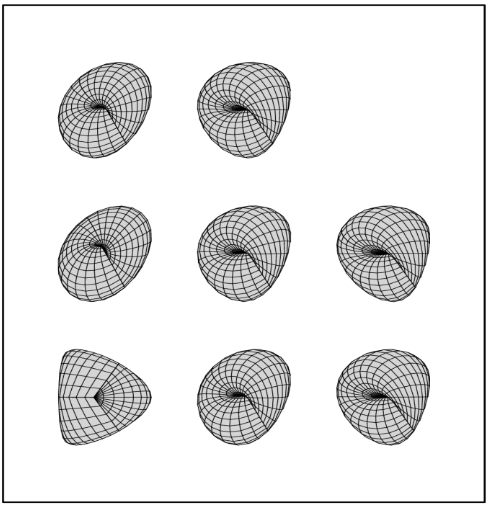

Рис. 3. Деформация римской поверхности в поверхность скрещенного колпака

Список литературы

1. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М., 1995.

2. *Чешкова М.А.* К геометрии односторонней поверхности // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 162—168.

3. *Чешкова М.А.* Модель проективной плоскости // ДГМФ. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 148—157.

4. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М.* Аналитические поверхности. М., 2006.

5. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М., 1981.

M. A. Cheshkova

[1] Altai State University

61 Prosp. Lenina, Barnaul, 656049, Russia

[1] cma@math.asu.ru, [1] cma41@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-14

Deformation of one-sided surfaces

Submitted on December 26, 2020

The work is devoted to the study of the deformation of one-sided surfaces. Let a normal vector be drawn along a closed curve on the surface. If, when returning to the original point, the direction of the normal coincides with the original direction of the normal, then the surface is called two-sided. Otherwise, we have a one-sided surface. Unilateral surfaces include: crossed cap, Roman surface, Boya surface, Klein bottle. Roman surface, Boya surface and crossed hood are a model of the projective plane.

It is proved that if the surface is a model of a Moebius strip, of a Klein bottle, of projective plane, then the surface deformation is a Moebius strip model, a Klein bottle model, projective plane model respectively.

Using a mathematical package, graphs are built the surfaces under consideration.

Keywords: crossed cap, Roman surface, Moebius strip, Klein bottle.

References

1. *Borisovich, Yu. G., Bliznyakov, N. M., Izrailevich, Ya. A., Fomenko, T. N.:* Introduction to topology. Moscow (1995).

2. *Cheshkova, M. A.:* To the geometry of a one-sided surface. *DGMF*. Kaliningrad. **46**, 162—168 (2015).

3. *Cheshkova, M. A.:* Projective plane model. *DGMF*. Kaliningrad. **47**, 148—157 (2016).

4. *Krivoshapko, S. N., Ivanov, V. N., Halabi, S. M.:* Analytical surfaces. Moscow (2006).

5. *Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.:* Visual geometry. Moscow (1981).

Abstracted in:
Zentralblatt für Mathematik, Mathematical Reviews

ISSN: 0321-4796

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia)

Put to the Press:

August 28, 2021

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 52

Межвузовский тематический сборник
научных трудов

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 27.01.2021 г.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 9,6
Тираж 150 экз. (1-й завод 48 экз.). Заказ

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236001, г. Калининград, ул. Гайдара, 6