ISSN 0321-4796 (Print)
ISSN 2782-3229 (Online)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2023

№ 54 (1)

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта

Immanuel Kant Baltic Federal University Press

2023

12+

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2023. — №54 (1). — 92 с.

Выходит с 1970 года.
Входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.
Изданию присвоена **первая категория (К1) Перечня ВАК.**
Периодичность — 2 раза в год (начиная с 2023 г.).

Учредитель
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Адрес редакции и издателя
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Адрес типографии
236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Тираж 300 экз.
Дата выхода в свет 01.11.2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 51(092)

М. В. Кретов, Ю. И. Шевченко
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
blta@mail.ru, ESkrydlova@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-1

Руководитель Калининградской геометрической школы Владислав Степанович Малаховский

Излагается краткая биография Владислава Степановича Малаховского — заслуженного деятеля науки Российской Федерации, члена-корреспондента Российской академии естествознания, доктора физико-математических наук, профессора Балтийского федерального университета им. И. Канта. Представлена информация о научной и педагогической работе ученого за 68 лет. Охарактеризована активная жизненная позиция Владислава Степановича в годы учебы в школе и Томском университете, а также во время работы в Томском университете и Калининградском государственном университете (Балтийском федеральном университете им. И. Канта) вплоть до 14 декабря 2022 года. Даны ссылки на отдельные статьи, в которых более подробно описана деятельность Владислава Степановича по всем направлениям, включая содержание последних публикаций по теории чисел.

Ключевые слова: В. С. Малаховский, Калининградская геометрическая школа, дифференциальная геометрия, научная деятельность

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.

Владислав Степанович Малаховский — основатель и руководитель Калининградской геометрической школы, к созданию которой он приступил с первого дня работы в Калининградском государственном университете — 10 марта 1968 года. Возглавив кафедру высшей алгебры и геометрии, Владислав Степанович сразу поставил цель создать научный математический коллектив, которого на тот момент в университете не было. Объединив вокруг себя молодых преподавателей и группу студентов, он с энтузиазмом начал обучать их современным разделам дифференциальной геометрии и приобщать к проведению научных исследований. Сразу же под его руководством начал работать научный семинар, на заседаниях которого сначала Владислав Степанович и приглашенные им ведущие ученые-геометры страны знакомили калининградцев со своими исследованиями. В 1969 году под руководством В. С. Малаховского при кафедре высшей алгебры и геометрии была открыта первая в Калининградском госуниверситете аспирантура. Теперь на заседаниях научного семинара регулярно обсуждались результаты собственных научных исследований аспирантов и преподавателей кафедры и факультета. Активное участие в работе семинара принимали также некоторые студенты. Со временем семинар, работающий под руководством В. С. Малаховского, приобрел всесоюзную известность, выступить на нем считали престижным не только геометры нашей страны, но и зарубежные ученые. Важное влияние на развитие Калининградской геометрической школы оказал межвузовский тематический сборник научных трудов «Дифференциальная геометрия многообразий фигур», издание первого выпуска которого В. С. Малаховский организовал в 1970 году. С тех пор этот сборник стал международным и издается ежегодно. В 2023 году выходит 54-й выпуск. Бессменным ответственным редактором всех выпусков указанного сборника был В. С. Малаховский.

Владислав Степанович Малаховский возглавлял Калининградскую геометрическую школу 54 года, до 14 декабря 2022 года, сохраняя ясность ума до последних своих дней.

В. С. Малаховский родился 14 марта 1929 года в семье преподавателей математики. В четыре года он знал таблицу умножения, в шесть лет выучил все формулы сокращенного умножения. В школе математику ему преподавал Владимир Никитич Усанов, благодаря педагогическому мастерству которого укрепилась любовь мальчика к математике. Закончил он элитную по тем временам среднюю школу №1 города Прокопьевска в Сибири с золотой медалью, сдав на отлично вместо одного два иностранных языка: английский и немецкий.

Двадцать восьмого августа 1948 года Владислав Степанович Малаховский был зачислен на первый курс механико-математического факультета Томского государственного университета. В сентябре того же года он записался в три научных студенческих кружка: по геометрии, математическому анализу и алгебре, в которых систематически делал доклады. На первом курсе получил почетную грамоту ЦК ВЛКСМ за отличную учебу и активное участие в общественной и научной работе. На втором курсе был избран председателем научного студенческого общества (НСО) факультета и одновременно заместителем председателя совета НСО всего Томского университета. На этом курсе за отличную учебу и успехи в научных исследованиях Владиславу Степановичу Малаховскому назначили стипендию имени Исаака Ньютона. На третьем курсе был избран председателем НСО всего университета, а также выдвинут депутатом Томского городского совета депутатов трудящихся. В 1951 и 1952 годах награжден двумя почетными грамотами ЦК ВЛКСМ за отличную учебу, успехи в науке и активное участие в работе НСО университета. За годы учебы в университете освоил третий иностранный язык — французский.

После окончания университета Владислав Степанович был оставлен ассистентом кафедры геометрии. Заведующий кафедрой Николай Георгиевич Туганов сразу же дал ему тему для работы над будущей кандидатской диссертацией. Без аспирантуры, выполняя большую преподавательскую нагрузку, Владислав Степанович Малаховский за два года подготовил кандидатскую диссертацию и 7 апреля 1958 года успешно защитил ее в Москве. Его оппонентами выступили ведущие ученые — профессора Герман Федорович Лаптев и Анатолий Михайлович Васильев.

После защиты кандидатской диссертации Владислав Степанович Малаховский продолжил интенсивно заниматься научными исследованиями в области современной дифференциальной геометрии. По результатам своих исследований сделал пять докладов на семинаре по дифференциальной геометрии при Московском университете, которым руководил Сергей Павлович Фиников — главный специалист в стране по локальной дифференциальной геометрии. По результатам этих докладов, в соответствии с рекомендациями С. П. Финикова, Владислав Степанович опубликовал три научные статьи в докладах Академии наук СССР. С материалами своих исследований он регулярно выступал на Всесоюзных и республиканских математических конференциях.

Седьмого мая 1964 года В. С. Малаховский успешно защитил докторскую диссертацию по дифференциальной геометрии. В 35 лет он был избран заведующим кафедрой алгебры и теории чисел ТГУ.

В марте 1967 года В. С. Малаховский по линии обмена учеными был направлен в Англию для чтения лекций. По результатам своих исследований он прочитал лекции в университетах Оксфорда, Манчестера и других учебных заведениях. Были налажены контакты с некоторыми ведущими математиками Англии. От предложения занять должность в Саутгемптонском университете он отказался. Позже Владислав Степанович отклонил и полученное по линии обмена настойчивое предложение занять должность профессора математики университета в Сан-Сальвадоре (Бразилия).

За работу в ТГУ В.С. Малаховский был награжден двумя грамотами ЦК ВЛКСМ и медалью «За трудовое отличие» (1967).

После отъезда из Томска Владислав Степанович Малаховский с 1968 года на протяжении 38 лет заведовал кафедрой высшей алгебры и геометрии Калининградского государственного университета. До последних дней он работал профессором Института физико-математических наук и информационных технологий БФУ им. И. Канта. За годы работы в Калининградском государственном университете — Балтийском федеральном университете В.С. Малаховский проявил себя как ученый с мировым именем и блестящий лектор. В 1996 году ему было присвоено звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации». В 2012 году был избран членом-корреспондентом Российской академии естествознания, а также получил почетное звание «Заслуженный деятель науки и образования». За лекторское мастерство и достижения в области развития образования в России Владислав Степанович Малаховский награжден дипломом и знаком «Золотая кафедра России», а в апреле 2016 года — золотой медалью «За заслуги перед Калининградской областью».

Владислав Степанович Малаховский — автор около 300 научных работ, в том числе 22 монографий. Почти 100 работ вышло в центральных и международных изданиях. Более 60 докладов было представлено Владиславом Степановичем на международных, всесоюзных и республиканских научных конференциях. За проделанную научную работу В.С. Малаховский трижды избирался Человеком года международными научными центрами США и Англии.

Владислав Степанович Малаховский много сделал для становления и развития математического факультета Калининградского университета. В течение двадцати лет избирался деканом факультета. Всегда проявлял принципиальность в решении всех вопросов, особенно по совершенствованию научно-исследовательской и педагогической работы. Владислав Степанович поддерживал научные связи с видными зарубежными учеными, такими как академик Германской академии наук Вильгельм Бляшке, директор Института математических наук в Кембридже Майкл Фрэнсис Атья, знаменитый математик Японии Кентаро Яно и др. С лекциями по современным проблемам геометрии на научный семинар в Калининград приглашались ведущие ученые страны: академик Н. В. Ефимов, профессора Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану, В. Т. Базылев, Л. Е. Евтушик из Москвы, В. Й. Близникас из Вильнюса, Ю. Г. Лумисте из Эстонии, В. И. Ведерников из Минска, Н. С. Синюков из Украины.

Первые четыре кандидатские диссертации аспирантуры Калининградского университета были подготовлены и защищены выпускниками аспирантуры кафедры высшей алгебры и геометрии под руководством Владислава Степановича Малаховского. Всего им подготовлено 20 кандидатов наук, еще 7 кандидатов наук подготовили его ученики. Многие из них успешно продолжают научную деятельность по сегодняшний день.

Благодаря хорошему знанию иностранных языков В. С. Малаховский читал лекции в восьми странах, в том числе в университетах Англии, Австрии, Болгарии, Венгрии и Италии на языке принимающей страны.

Профессор Владислав Степанович Малаховский всегда занимал активную жизненную позицию. Часто выступал с просветительскими лекциями в трудовых коллективах, работал по линии института усовершенствования учителей, неся математические знания ученикам и учителям школ. За 68 лет его педагогической деятельности десятки аспирантов, тысячи студентов и школьников, преподавателей математики школ, лицеев и гимназий прослушали лекции Владислава Степановича Малаховского.

Более подробная информация о научной, педагогической и общественной деятельности профессора В.С. Малаховского содержится в работах [1—6].

Владислав Степанович обладал уникальной памятью до последних дней, знал очень много стихотворений и песен, особенно застольных. Любил петь песни в кругу родных и друзей. Ему были присущи душевность и чуткость. Владиславу Степановичу повезло быть в этом мире 93 года и 9 месяцев.

Мы гордимся, что являемся учениками профессора Владислава Степановича Малаховского, в наших сердцах он всегда будет живым. В последний год жизни каждый телефонный разговор Владислав Степанович завершал словами: «будем держаться». И мы, его ученики, будем держаться, продолжая дело Владислава Степановича.

Список литературы

1. *Скрыдлова Е.В., Шевченко Ю.И.* Владислав Степанович Малаховский и его геометрия // ДГМФ. 1999. Вып. 30. С. 6—13.

2. *Кретов М.В., Фунтикова Т.П.* Наш выдающийся современник Владислав Степанович Малаховский: ученый, педагог, гражданин // ДГМФ. 2004. Вып. 35. С. 5—13.

3. *Кретов М.В., Фунтикова Т.П.* Мир математики Малаховского Владислава Степановича // ДГМФ. 2014. Вып. 45. С. 7—16.

4. *Кропоткин А.М.* Калининградский математик // Легенды Янтарного края. Калининград, 2018. С. 372—375.

5. *Кретов М.В., Фунтикова Т.П., Шевченко Ю.И.* Создатель Калининградской научной геометрической школы Владислав Степанович Малаховский (к 90-летию со дня рождения) // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 7—17.

6. *Малаховский В.С.* Автобиография. М., 2017.

Для цитирования: *Кретов М.В., Шевченко Ю.И.* Руководитель Калининградской геометрической школы Владислав Степанович Малаховский // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 5–13. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-1.

MSC 2010: 01A70

M. V. Kretov, Yu. I. Shevchenko
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia
blta@mail.ru, iushevchenko@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-1

The head of the Kaliningrad geometric school Vladislav Stepanovich Malakhovsky

Submitted on March 15, 2023

The article presents a very brief biography of a corresponding member of the Russian Academy of Natural Sciences, Honored Scientist of the Russian Federation, Honorary Doctor of Sciences of the I. Kant Baltic Federal University, professor-consultant of the Institute of Physical and Mathematical Sciences and Information Technologies of I. Kant BFU. The information about the scientific and pedagogical work of the scientist for 68 years is given. The article analyzes the active life position of Vladislav Stepanovich Malakhovsky during his years of study at school, at Tomsk University, as well as during his work at Tomsk University and the I. Kant Baltic Federal University up to December 14, 2022. Links are given to individual articles in which Vladislav Stepanovich's activities in all areas are described in more detail, including the content of recent publications on number theory.

Keywords: V. S. Malakhovsky, Kaliningrad geometric school, differential geometry, scientific activity

References

1. *Skrydlova, E. V., Shevchenko, Yu. I.:* Vladislav Stepanovich Malakhovsky and his geometry. DGMF, 30, 6—13 (1999).

2. *Kretov, M. V., Funtikova, T. P.:* Our outstanding contemporary Vladislav Malakhovsky Stepanovich: a scientist, teacher, citizen. DGMF, 35, 5—13 (2004).

3. *Kretov, M.V., Funtikova, T.P.:* World of Mathematics Malakhovsky Vladislav Stepanovich. DGMF, 45, 7—16 (2014).
4. *Kropotkin, A.M.:* Kaliningrad mathematician. Legends of the Amber region. Kaliningrad. P. 372—375 (2018).
5. *Kretov, M.V., Funtikova, T.P., Shevchenko, Yu.I.:* Creator of the Kaliningrad scientific geometrical school Malakhovsky Vladislav Stepanovich (to the 90th birthday). DGMF, 50, 7—17 (2019).
6. *Malakhovsky, V.S.:* Autobiography. Moscow (2017).

For citation: Kretov, M.V., Shevchenko, Yu. I. The head of the Kaliningrad geometric school Vladislav Stepanovich Malakhovsky. DGMF, 54 (1), 5—13 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-1.

УДК 514.76

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-2

О постоянстве типа некоторых 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли

Рассматривается введенное Альфредом Греем понятие постоянства типа применительно к некоторым 6-мерным уплощающимся подмногообразиям алгебры Кэли. Доказано, что 6-мерные локально симметрические типа Риччи подмногообразия алгебры Кэли являются почти эрмитовыми многообразиями нулевого постоянного типа.

Ключевые слова*:* почти эрмитова структура, постоянство типа, 6-мерное уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли, подмногообразие типа Риччи

1. Понятие постоянства типа — одно из самых важных понятий эрмитовой геометрии. Его ввел в рассмотрение для приближенно келеровых многообразий известный американский геометр А. Грей [1]. Позже понятие постоянства типа различными способами было обобщено для некоторых других классов почти эрмитовых многообразий [2; 3], а в 2000 году в работе В. Ф. Кириченко и И. В. Третьяковой [4] это понятие было обобщено уже для произвольного почти эрмитова многообразия.

Напомним, что почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$,

Поступила в редакцию 02.05.2023 г.

где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым многообразием. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, определяемая равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется эрмитовой, если ее тензор Нейенхейса

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}(J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY])$$

обращается в нуль, и келеровой, если $\nabla F = 0$.

Также напомним, что первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединенной G-структуры, или, как обычно говорят, первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры, имеет следующий вид:

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c\,, \qquad (1)$$

где

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2} J^a_{\hat{b},c} \ ; B_{ab}{}^c = \frac{i}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} \ ;$$

$$B^{abc} = \frac{i}{2} J^a_{[\hat{b},\hat{c}]} \ ; B_{abc} = -\frac{i}{2} J^{\hat{a}}_{[b,c]} \ .$$

Системы функций $\{B^{ab}{}_c\}$, $\{B_{ab}{}^c\}$, $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ являются компонентами комплексных тензоров на многообразии M^{2n}, за которыми закрепилось название тензоров Кириченко.

Наконец, напомним [4], что почти эрмитово многообразие называется многообразием постоянного типа c, если

$$\|N(X,Y)\| = c\|X\|^2\|Y\|^2.$$

2. В данной заметке мы рассматриваем понятие постоянства типа применительно к некоторым 6-мерным уплощающимся подмногообразиям алгебры Кэли, изучению которых посвящено более 10 работ автора этой заметки (см., например, [5—9]). Отметим, что понятие уплощающегося подмногообразия алгебры Кэли ввели в рассмотрение В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару [10]. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся, например, все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав. При этом нужно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с почти эрмитовой структурой, отличной от келеровой [5; 6; 10]. Такие примеры содержатся и среди 6-мерных локально симметрических типа Риччи подмногообразий алгебры Кэли [5; 11; 12]. По нашему мнению, статья В. Ф. Кириченко [11] — самая интересная и значительная работа о таких подмногообразиях алгебры октав, в которой они и были введены в рассмотрение. Довольно сложное их определение мы приведем, используя упомянутые выше статьи [5; 11]. Пусть $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ — 6-мерное подмногообразие алгебры октав. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется специальной, если

$$T_p(M^6) \subset L(e_0)^\perp,$$

где $L(e_0)^\perp$ — ортогональное дополнение единицы алгебры октав. В противном случае точка p называется простой. Ясно, что совокупность всех простых точек M^6 представляет собой открытое подмногообразие $M_0^6 \subset M^6$, на котором канонически индуцируется распределение Z, порожденное ортогональными проекциями вектора e_0 на касательное пространство $T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$. Такое распределение Z, а также одномерное пространство $Z_p \in T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$, называют исключительными [11].

Определение [5; 11]. Подмногообразие $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ называется *подмногообразием типа Риччи*, если кривизна Риччи в каждой точке $p \in M_0^6$ в направлении исключительного пространства Z_p принимает минимальное значение.

В [11] получена полная классификация локально-симметрических типа Риччи подмногообразий $M^6 \subset \boldsymbol{O}$. Доказано, что локально-симметрическое типа Риччи подмногообразие $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ локально голоморфно изометрично либо C^3, либо произведению келеровых многообразий C^2 и CH^1, скрученному (warped) вдоль CH^1. Здесь через CH^1 обозначено комплексное гиперболическое пространство, а через C^2 и C^3 — двумерное и трехмерное комплексные евклидовы пространства соответственно.

Давно известны структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав [7; 8; 11]:

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]} \omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \qquad (2)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]}\, \omega^b \wedge \omega^c;$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D^g{}_{j]} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}[k}^{\varphi} T_{j]b}^{\varphi} \right) \omega^k \wedge \omega^j,$$

где через $\{\omega^k\}$ обозначены компоненты форм смещения, через $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности.

Здесь и далее

$$\varphi = 7,8;\ \ a,b,c,d,g,h = 1,2,3;$$

$$\hat{a} = a + 3;\ \ k,j = 1,2,3,4,5,6.$$

Как и в [5—7], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три; $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$ — кронекеровская дельта второго порядка;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, \qquad D_h{}^c = D_{h\hat{c}},\ \ D^h{}_c = D_{\hat{h}c};$$

$$D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7,\ \ D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7,$$

где $\left\{T_{kj}^{\varphi}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ [5].

В [11] было доказано, что матрица (D_{ab}) при особом выборе репера для локально-симметрического типа Риччи подмногообразия $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем для случая скрученного произведения C^2 и CH^1 выполняется условие $D_{11} \neq 0$.

Учитывая вид матрицы D_{ab}, мы можем переписать первую группу уравнений (1) так:

$$\begin{gathered} d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1; \\ d\omega_1 = -\omega_1^1 \wedge \omega_1; \\ d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{1\alpha\beta} D_{11} \omega^1 \wedge \omega_\beta; \\ d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{1\alpha\beta} D^{11} \omega_1 \wedge \omega^\beta. \end{gathered} \tag{3}$$

Теперь воспользуемся критерием постоянства типа в терминах тензоров Кириченко для произвольного почти эрмитова многообразия:

$$B^{hcd}B_{hab} = c\delta_{ab}^{cd}.$$

Принимая во внимание структурные уравнения (1) и (3), мы приходим к выводу, что локально-симметрическое типа Риччи подмногообразие $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ относится к многообразиям нулевого постоянного типа.

Теорема. *6-мерные локально симметрические типа Риччи подмногообразия алгебры Кэли являются почти эрмитовыми многообразиями нулевого постоянного типа.*

Отметим, что 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав (как и любые другие келеровы многообразия) являются почти эрмитовыми многообразиями нулевого постоянного типа [4]. Из доказанной нами теоремы вытекает, что 6-мерные локально симметрические типа Риччи подмногообразия алгебры Кэли обладают свойством, присущим келеровым подмногообразиям $M^6 \subset \boldsymbol{O}$. Результаты такого плана — совпадение или сходство каких-либо свойств 6-мерных уплощающихся и 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав — были получены и в других работах: [5—12]. При этом, как мы уже отмечали выше, существует немало примеров отличных от келеровых 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли.

Список литературы

1. *Gray A.* Nearly Kähler manifolds // J. Diff. Geom. 1970. Vol. 4. P. 283—309.

2. *Кириченко В. Ф.* K-пространства постоянного типа // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, №2. С. 282—289.

3. *Vanheche L., Bouten F.* Constant type for almost Hermitian manifolds // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Répub. Soc. Roum., Nouv. Sér. 1976—1977. Vol. 20. P. 415—422.

4. *Кириченко В. Ф., Третьякова И. В.* О постоянстве типа почти эрмитовых многообразий // Математические заметки. 2000. Т. 68, №5. С. 668—676.

5. *Banaru M. B., Banaru G. A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

6. *Banaru M. B., Banaru G. A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT Journal of Mathematics. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

7. *Банару М. Б. Банару Г. А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 21—25.

8. *Банару М. Б., Банару Г. А.* Об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 23—29.

9. *Банару Г. А.* О квазисасакиевой структуре на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры Кэли // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 17—22.

10. *Банару М. Б., Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. №1. С. 205—206.

11. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. 1994. №3. С. 6—13.

12. *Банару М. Б.* О локально симметрических 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 11—17.

Для цитирования: *Банару Г. А.* О постоянстве типа некоторых 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 14—22. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-2.

MSC 2010: 53B35, 53B50

G. A. Banaru
Smolensk State University
4, Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-2

On the type constancy of some six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra

Submitted on May 02, 2023

The notion of type constancy was introduced by Alfred Gray for nearly Kählerian manifolds and later generalized by Vadim F. Kirichenko and Irina V. Tret'yakova for all Gray — Hervella classes of almost Hermitian manifolds. In the present note, we consider the notion of type constancy for some six-dimensional almost Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. The almost Hermitian structure on such six-dimensional submanifolds is induced by means of so-called Brown — Gray three-fold vector cross products in Cayley algebra. We select the case when six-dimensional submanifolds of Cayley algebra are locally symmetric.

It is proved that six-dimensional locally symmetric submanifolds of Ricci type of Cayley algebra are almost Hermitian manifolds of zero constant type. This result means that six-dimensional locally symmetric submanifolds of Ricci type of Cayley algebra possess a property of six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra. However, there exist non-Kählerian six-dimensional locally symmetric submanifolds of Ricci type in Cayley algebra.

Keywords: almost Hermitian structure, type constancy, six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra, submanifold of Ricci type

References

1. *Gray, A.:* Nearly Kähler manifolds. J. Diff. Geom., 4, 283—309 (1970).

2. *Kirichenko, V.F.:* K-spaces of constant type. Siberian Math. J., **17**:2, 220—225 (1976).

3. *Vanheche, L., Bouten, F.:* Constant type for almost Hermitian manifolds. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Répub. Soc. Roum., Nouv. Sér., 20, 415—422 (1976—1977).

4. *Kirichenko, V.F., Tret'yakova, I.V.:* On the constant type of almost Hermitian manifolds. Math. Notes, **68**:5, 569—575 (2000).

5. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, **1**:74, 23—32 (2014).

6. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. SUT J. Math., **51**:1, 1—9 (2015).

7. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds Cayley algebra. DGMF, 48, 21—25 (2017).

8. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On stability of Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 52, 23—29 (2021).

9. *Banaru, G.A.:* On quasi-Sasakian structure on a totally umbilical hypersurface of a six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra. DGMF, 53, 17—22 (2022).

10. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Russian Mathematical Surveys, **49**:1, 223—225 (1994).

11. *Kirichenko, V.F.:* Hermitian geometry of six-dimensional symmetric submanifolds of Cayley algebra. Mosc. Univ. Math. Bull., **49**:3, 4—9 (1994).

12. *Banaru, M.B.:* On locally symmetric 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 47, 11—17 (2016).

For citation: Banaru, G.A. On the type constancy of some six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 54 (1), 14—22 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-2.

УДК 514.76

М.Б. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-3

Заметка о η-квазиомбилических гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий

Рассматривается введенное Л.В. Степановой понятие η-квазиомбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Показано, что это понятие связано с понятием минимальности для такой гиперповерхности. Установлено, что η-квазиомбилическая гиперповерхность приближенно келерова многообразия является минимальной в том и только том случае, если она является вполне омбилической.

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие, почти контактная метрическая структура, η-квазиомбилическая гиперповерхность, минимальная гиперповерхность

1. О том, что на всякой ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} почти эрмитова многообразия M^{2n} индуцируется почти контактная метрическая структура, известно с середины прошлого века. В конце XX века опубликовано несколько серьезных работ о почти контактных метрических гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий, среди которых мы выделим интереснейшую статью Р. Мишры [1] и фундаментальное исследование Л.В. Степановой [2]. В работе Л.В. Степановой было введено понятие η-квазиомбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия [2]. В настоящей заметке

Поступила в редакцию 02.05.2023 г.

будет показано, как это понятие соотносится с другим важнейшим понятием дифференциальной геометрии, а именно с понятием минимальной гиперповерхности.

2. Напомним [2], что под почти контактной метрической структурой на многообразии нечетной размерности N^{2n-1} понимают систему тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1; \Phi(\xi) = 0;\ \eta \circ \Phi = 0;\ \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \qquad X, Y \in \aleph(N^{2n-1}).$$

Здесь через Φ обозначено поле тензора типа (1,1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. Напомним также, что почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} [3].

Как мы уже упоминали выше, понятие η-квазиомбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия введено в рассмотрение Л.В. Степановой в [2]: гиперповерхность N^{2n-1} почти эрмитова многообразия M^{2n} называется η-квазиомбилической, если вторая квадратичная форма погружения N^{2n-1} в M^{2n} устроена таким образом:

$$\sigma(X, Y) = \lambda\langle X, Y \rangle + h\eta(X)\eta(Y),$$

где $h = \sigma(\xi, \xi)$, $\lambda - const$. Очевидно, что если $h = 0$, то $\sigma(X, Y) = \lambda\langle X, Y \rangle$; в этом случае N^{2n-1} будет вполне омбилической гиперповерхностью многообразия M^{2n}. Если же $h = 0$ и при этом $\lambda = 0$, то $\sigma(X, Y) = 0$; в этом случае гиперповерхность N^{2n-1} будет вполне геодезической.

В [2] также получен ряд результатов о η-квазиомбилических гиперповерхностях почти эрмитова многообразия. Например, доказано, что если через каждую точку квазикелерова многообразия M^{2n} проходит η-квазиомбилическая гиперповерхность N^{2n-1} с квазисасакиевой структурой, то многообразие является келеровым, а квазисасакиева структура является либо сасакиевой, либо гомотетичной сасакиевой.

Условие $h = \sigma(\xi, \xi) = 0$, однако, известно как необходимое и достаточное условие минимальности для специальных видов почти контактных метрических гиперповерхностей в почти эрмитовых многообразиях некоторых классов. Наверное, самый первый результат такого плана получен в [4]:

Теорема 1. *Сасакиева гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли минимальна в том и только том случае, если* $\sigma(\xi, \xi) = 0$.

Гораздо более ценные результаты указанного вида (они не привязаны к 6-мерным подмногообразиям алгебры октав) содержатся в [5; 6] и других источниках. Например, условие $\sigma(\xi, \xi) = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы слабо косимплектическая гиперповерхность приближенно келерова многообразия являлась минимальной [5].

3. Очевидная взаимосвязь между понятиями минимальности и η-квазиомбиличности гиперповерхности (конечно, ясно, что одно из них общегеометрическое, а другое присуще только почти контактным метрическим гиперповерхностям) позволяет пересмотреть, переоценить, а иногда и переформулировать некоторые результаты как из упомянутых выше статей, так и из исследования Л.В. Степановой [2]. Кроме того, можно получить целый ряд следствий, причем содержание некоторых из них представляется довольно интересным. Например, из упомянутого выше результата Л.В. Степановой из [2] и результата из [5] вытекает, что η-квазиомбилическая гиперповерхность приближенно келерова многообразия является минимальной в том и только том случае, если она является вполне омбилической. Естественно возникает задача, связанная с тем, что приближенно келеровы многообразия включаются в класс квазикелеровых многообразий: существуют ли минимальные η-квазиомбилические гиперповерхности квазисасакиевых многообразий, отличные от омбилических?

Если же говорить более определенно, то такое естественное свойство гиперповерхности — свойство минимальности — в довольно обширной теории почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий изучено явно недостаточно. Например, в обзоре [2], посвященном именно данной тематике, о таких вещах сказано совсем немного. Таким образом, вывод, который мы делаем в конце нашей заметки, звучит следующим образом: теория минимальных почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий может получить новые (возможно, неожиданные) результаты, причем задел для подобных результатов есть уже сейчас.

Список литературы

1. *Mishra R. S.* Normality of the hypersurfaces of almost Hermite manifolds // J. Indian Math. Soc. 1995. Vol. 61. P. 71—79.

2. *Степанова Л. В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

3. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

4. *Банару М. Б.* О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Матем. сб. 2003. Т. 194, №8. С. 13—24.

5. *Банару М. Б.* О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, №2. С. 357—364.

6. *Банару М. Б.* Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. №3. С. 60—62.

7. *Banaru M. B., Kirichenko V. F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, № 4. P. 513—537.

Для цитирования: *Банару М. Б.* Заметка о η-квазиомбилических гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // ДГМФ. 2023. № 54 (1). С. 23—28. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-3.

MSC 514.76

M. B. Banaru
Smolensk State University
4, Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-3

A note on η-quasi-umbilical hypersurfaces in almost Hermitian manifolds

Submitted on May 02, 2023

In the present note, we consider the introduced by Lidia Vasil'evna Stepanova notion of an η-quasi-umbilical hypersurface in an almost Hermitian manifold. We show that the notion of an η-quasi-umbilical hypersurface in an almost Hermitian manifold is connected with the notion of a minimal hypersurface in this manifold.

Using the classical theory of minimal hypersurfaces in Riemannian manifolds and Kirichenko — Stepanova general theory of almost contact metric hypersurfaces in almost Hermitian manifolds, we establish that an η-quasi-umbilical hypersurface of a nearly Kählerian manifold is minimal if and only if this hypersurface is totally umbilical.

Taking into account the connection between the notions of a minimal hypersurface and of an η-quasi-umbilical hypersurface in an almost Hermitian manifold, we conclude that some well-known results in the theory of almost contact metric hypersurfaces in almost Hermitian manifolds can be reformulated.

The problem of the existence of a non-umbilical minimal η-quasi-umbilical hypersurface of a quasi-Kählerian manifold is posed.

Keywords: almost Hermitian manifold, almost contact metric structure, η-quasi-umbilical hypersurface, minimal hypersurface

References

1. *Mishra, R.S.:* Normality of the hypersurfaces of almost Hermite manifolds. J. Indian Math. Soc., 61, 71—79 (1995).

2. *Stepanova, L.V.:* Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD Thesis. Moscow (1995).

3. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

4. *Banaru, M.B.:* On Sasakian hypersurfaces in 6-dimensional Hermitian submanifolds of the Cayley algebra. Sb. Math., **194**:8, 1125—1136 (2003).

5. *Banaru, M.B.:* On the type number of nearly-cosymplectic hypersurfaces in nearly-Kählerian manifolds. Fundam. Prikl. Math., **8**:2, 357—364 (2002).

6. *Banaru, M.B.:* Almost contact metric hypersurfaces with type number 0 or 1 in nearly-Kählerian manifolds. Mosc. Univ. Math. Bull., **69**:3, 132—134 (2014).

7. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci. (New York), **207**:4, 513—537 (2015).

For citation: Banaru, M.B. A note on η-quasi-umbilical hypersurfaces in almost Hermitian manifolds. DGMF, 54 (1), 23—28 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-3.

УДК 51(092)

М.Б. Банару, Г.А. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-4

Об основных достижениях В.Ф. Кириченко в теории дифференцируемых многообразий

Описаны основные результаты выдающегося отечественного геометра Вадима Фёдоровича Кириченко в теории почти эрмитовых и почти контактных метрических многообразий.

***Ключевые слова**:* дифференцируемое многообразие, почти эрмитово многообразие, почти контактное метрическое многообразие, многообразие Кенмоцу

1. В мае 2022 года исполнилось 75 лет со дня рождения отечественного геометра Вадима Фёдоровича Кириченко (1947—2021), профессора, доктора физико-математических наук. Научная карьера В.Ф. Кириченко была тесно связана с механико-математическим факультетом Московского государсвенного университета им. М.В. Ломоносова, где он получил образование и защитил кандидатскую и докторскую диссертации, а также с Московским энергетическим институтом и Московским педагогическим государственным университетом. В МПГУ В.Ф. Кириченко проработал пятнадцать лет в должности заведующего кафедрой геометрии.

2. Вадим Фёдорович Кириченко был разносторонним специалистом. Первой его значительной работой, которая не ут-

Поступила в редакцию 02.05.2023 г.

ратила актуальности и в настоящее время, была статья в «Вестнике МГУ» о 6-мерных приближенно келеровых подмногообразиях алгебры октав [1]. Этой тематикой в то время, в начале 70-х годов прошлого века, занимались многие известные геометры, среди которых особо выделялся американский специалист Альфред Грей. В. Ф. Кириченко удалось быстро освоить данную тематику (геометрию почти эрмитовых многообразий) и получить интересные и значительные результаты в данном направлении. Со временем научные интересы молодого отечественного геометра существенно расширились — Вадим Фёдорович стал получать результаты в области геометрии почти контактных метрических структур, почти кватернионных структур и др.

Если кратко охарактеризовать область, в которой В. Ф. Кириченко много лет плодотворно работал, то это многомерная дифференциальная геометрия, главным образом такой ее объемный и важнейший раздел, как геометрия дифференцируемых многообразий. Главные научные достижения В. Ф. Кириченко заключаются в разработке и применении методов исследования упомянутых выше и других дифференциально-геометрических структур, получении новых прорывных результатов в каждом из выбранных им направлений. Метод так называемых присоединенных G-структур был известен и ранее, но именно Вадим Фёдорович осуществил точное и результативное применение этого метода к изучению различных структур на многообразиях.

Отметим удивительную восприимчивость В. Ф. Кириченко ко всему новому, к достижениям коллег, а позже и к достижениям своих учеников. Особое место в его становлении как геометра мирового уровня занимает коллектив механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, где Вадим Фёдорович получил образование, окончил аспирантуру, защитил кандидатскую и докторскую диссертации. Значительную роль в судьбе В. Ф.Кириченко сыграл его научный руководитель — известнейший советский специалист в области дифференциальной геометрии Анатолий Михайлович Васильев. Школа мехмата МГУ внесла, на наш взгляд, существенный вклад в становление Вадима Фёдоровича не только как ученого; она стала той благодатной почвой, на которой поддержку и развитие получили и многие его человеческие качества, ярко проявившиеся в годы обучения в МГУ: чувство достоинства, независимость.

Работа референтом в отделе геометрии ВИНИТИ была полезна В. Ф. Кириченко в его собственной профессиональной деятельности, поскольку в ходе этой работы молодой специалист имел возможность оперативно знакомиться практически со всеми статьями и книгами, которые выходили по близкой ему тематике. Весьма существенное влияние на Вадима Фёдоровича оказали коллеги-геометры — и те, что окружали его на месте работы, и те, с кем он сотрудничал как ученый. Отметим, что Вадим Фёдорович имел разнообразные научные связи с представителями геометрических школ Казани, Минска, Одессы и других городов на советском и постсоветском пространстве.

В немалой степени своими успехами В. Ф. Кириченко был обязан своей супруге Ольге Евгеньевне Арсеньевой, которая была ему и добрым помощником, и верным другом. Она помогала ему в научной работе, во всем поддерживала.

3. В. Ф. Кириченко является автором большого числа научных работ по тематике проводившихся им исследований. В обзоре [2] указано более 140 его научных и учебно-методических работ; в ZbMATH выделены 122 статьи В. Ф. Кириченко, опубликованные в журналах высокого уровня.

На наш взгляд, монография «Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях» [3] — это тот труд, который будет еще в течение продолжительного времени востребован как начинающими исследователями, так и опытными специалистами в области дифференциальной геометрии. Тщательно и продуманно написанная книга содержит не только обширный набор вводных сведений, но и многие результаты, полученные Вадимом Фёдоровичем. Наиболее интересны, по нашему мнению, восьмая, девятая и двенадцатая главы этой монографии. В них излагаются основы геометрии почти эрмитовых, приближенно келеровых и почти контактных многообразий. Такого изложения этих современных и активно развивающихся разделов дифференциальной геометрии нет ни в одном другом отечественном издании. В. Ф. Кириченко формулирует основные определения и ключевые результаты по соответствующим темам, приводит краткие, но строгие доказательства. Собрав воедино и систематизировав результаты в каждом из перечисленных выше разделов дифференциальной геометрии, он дает специалисту, осваивающему его труд, основу для продвижения вперед, для получения новых результатов. Книга содержит все важнейшие достижения геометров различных школ и направлений, показывает взаимосвязь между их результатами. Остается лишь сожалеть, что монография В. Ф. Кириченко издана только на русском языке. Англоязычное издание, без сомнения, было бы востребовано во всем мире, особенно в Индии, Китае и других странах азиатско-тихоокеанского региона, куда медленно, но верно смещается центр развития мировой дифференциальной геометрии (а возможно, и математики в целом). Как ни печально признавать, но для развития мировой науки полезнее, когда серьезная монография по математике сразу выходит на английском языке. Если книгу В. Ф. Кириченко перевести на английский язык и опубликовать в хорошем издательстве, то она займет то место, которого достойна. Эта монография сопоставима по своему уровню и качеству с известнейшей книгой Яно и Кона [4].

Гораздо труднее выделить статьи В. Ф. Кириченко с самыми важными результатами. Как мы уже отмечали, Вадим Фёдорович был очень разносторонним математиком, который брался за самые сложные задачи; часто это были задачи на стыке различных направлений или связанные с глубокими обобщениями. Все же назовем пятерку его самых интересных, на наш взгляд, работ. Конечно, мы не претендуем на объективность, поскольку это в первую очередь работы по близкой нам тематике, хорошо нам знакомые.

Начнем с упомянутой выше первой значительной работы В. Ф. Кириченко [1]. Уже в ней были получены результаты такого уровня — прежде всего по вопросу классификации 6-мерных приближенно келеровых подмногообразий алгебры Кэли, — что статья эта поставила Вадима Фёдоровича в один ряд с ведущими геометрами в данной области. К тематике 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли В. Ф. Кириченко возвращался неоднократно — и в начале 80-х, и в начале 90-х годов; позднее он получил гораздо более мощные результаты в данной области, но именно эта первая его работа послужила основой значительной части его научных достижений как в данной области, так и во многих других.

Обзор [5] представляет особую ценность как труд, глубоко связывающий эрмитову и контактную геометрии, под которыми мы понимаем геометрии почти эрмитовых и почти контактных многообразий, соответственно. О разнообразных связях между этими важнейшими разделами современной дифференциальной геометрии было известно давно — наверное, с 50-х годов прошлого века. Однако именно работа [5] показала, что разработанные В. Ф. Кириченко универсальные методы позволяют как получать значительные результаты в каждой из этих областей, так и открывать новые направления для плодотворных исследований. Если мы говорим о статье [1] как о серьезной заявке В. Ф. Кириченко стать большим геометром, то выход в печать обзора [5] — это своего рода подтверждение этой заявки. Можно сказать, что именно данный обзор стал тем рубежом, переход через который превратил молодого многообещающего исследователя в Ученого с большой буквы.

Статьи [6] и [7] посвящены контактной геометрии, под которой обычно понимают геометрию почти контактных метрических структур. Они написаны в то время, когда Вадим Фёдорович был, на наш взгляд, в наилучшей «научной форме». Речь идет о рубеже XX и XXI веков. Уже миновали хлопоты, связанные с защитой докторской диссертации, организацией аспирантуры, разработкой сложных спецкурсов. В. Ф. Кириченко получал новые сильные результаты, публиковал статьи и пособия, выступал на конференциях и семинарах; под его руководством один за другим защищали диссертации его ученики.

Статья [6] в «Докладах Академии наук» была подготовлена Вадимом Фёдоровичем на основе выступления на семинаре по дифференциальной геометрии и ее приложениям на мехмате МГУ (руководитель — академик А. Т. Фоменко). Там он представил новые результаты в области геометрии многообразий Кенмоцу, которые вместе с различными их обобщениями были в то время, пожалуй, самыми популярными объектами исследования в контактной геометрии. Эти результаты ставят его в первый ряд специалистов в данном разделе дифференциальной геометрии. Среди прочего В. Ф. Кириченко доказал следующие замечательные теоремы [6]:

Теорема 1. *Класс многообразий Кенмоцу совпадает с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием косимплектической структуры.*

Теорема 2. *Многообразие Кенмоцу является пространством постоянной кривизны –1 тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию* $C^n \times R$, *снабженному канонической косимплектической структурой. Не существует многообразий Кенмоцу постоянной кривизны, отличной от –1.*

Теорема 3. *Многообразие Кенмоцу* M^{2n+1} *является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны –1 тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий:*

$$1)\ CP^n \times R;\quad 2)\ C^n \times R;\quad 3)\ CH^n \times R;\quad 4)\ M^{2n} \times R,$$

снабженных канонической косимплектической структурой. При этом оно является многообразием глобально постоянной *голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно является многообразием постоянной кривизны –1, то есть только во втором случае.*

Статья [7], написанная Вадимом Фёдоровичем в соавторстве с А. Р. Рустановым, одним из самых талантливых его учеников, является, по нашему мнению, самым глубоким исследованием в области квазисасакиевых многообразий. Эти многообразия ввел в рассмотрение и детально изучал выдающийся американский специалист в области контактной геометрии Дэвид Блэр. Но именно объемная и глубокая работа В. Ф. Кириченко и А. Р. Рустанова стала самой значительной в данной области; эта статья — образец для многих исследователей в различных областях современной дифференциальной геометрии.

К теме взаимосвязи почти эрмитовых и почти контактных метрических структур, глубоко проработанной в [5], Вадим Фёдорович планировал вернуться в середине 2010-х годов. Отправной точкой должна была стать открытая и разработанная им совместно с его ученицей Л. В. Степановой теория почти контактных метрических структур на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. О существовании почти эрмитовых структур на таких гиперповерхностях было кое-что известно с середины прошлого века — опубликовано несколько небольших работ японских геометров в этом направлении. Но В. Ф. Кириченко задумал создать стройную теорию по данной тематике. По ряду причин (тяжелая болезнь Вадима Фёдоровича и семейные обстоятельства Лидии Васильевны) участие в подготовке обзора [8] принял в итоге один из авторов настоящей заметки.

Освещая вклад В. Ф. Кириченко в науку, нельзя не сказать о более чем тридцати аспирантах, защитивших под его руководством кандидатские диссертации. Их достижения, отраженные в выступлениях на конференциях, статьях и диссертациях, в очень большой степени можно назвать и достижениями их научного руководителя. Кроме А.Р. Рустанова и Л.В. Степановой, учениками В.Ф. Кириченко являются такие талантливые геометры, как Х. Абоуд, А. Абу-Салим, И.П. Борисовский, Б.В. Заятуев, Л.А. Игнаточкина, А.В. Никифорова, С.В. Харитонова.

Список литературы

1. *Кириченко В.Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер. Математика. Механика. 1973. №3. С. 70—75.

2. *Арсеньева О.Е., Банару М.Б., Бурлаков М.П. и др.* Вадим Федорович Кириченко // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 3—16.

3. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

4. *Yano K., Kon M.* Structures on manifolds. Singapore, 1984.

5. *Кириченко В.Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. 1986. Т. 18. С. 25—71.

6. *Кириченко В.Ф.* О геометрии многообразий Кенмоцу // Доклады Академии наук. 2001. Т. 380, №5. С. 585—587.

7. *Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р.* Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Матем. сб. 2002. Т. 193, №8. С. 71—100.

8. *Banaru M.B., Kirichenko V.F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, №4. P. 513—537.

Для цитирования: *Банару М.Б., Банару Г.А.* Об основных достижениях В.Ф. Кириченко в теории дифференцируемых многообразий // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 29—38. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-4.

MSC 2010: 01A70

M. B. Banaru, G. A. Banaru
Smolensk State University
4, Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-4

On the most important achievements of V. F. Kirichenko in Theory of differentiable manifolds

Submitted on May 02, 2023

We mark out the most important results obtained by outstanding Russian geometer Vadim Feodorovich Kirichenko in the theory of almost Hermitian and almost contact metric manifolds.

Keywords: differentiable manifold, almost Hermitian manifold, almost contact metric manifold, Kenmotsu manifold

References

1. *Kirichenko, V. F.:* On nearly-Kählerian structures induced by means of 3-vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Mosc. Univ. Math. Bull., 3, 70—75 (1973).

2. *Arsen'eva, O. E., Banaru, M. B., Burlakov, M. P. et al.:* Vadim Fedorovich Kirichenko. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 220, 3—16 (2023).

3. *Kirichenko, V. F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

4. *Yano, K., Kon, M.:* Structures on manifolds. Singapore (1984).

5. *Kirichenko, V. F.:* Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost contact manifolds. J. Soviet Math., **42**:5, 1885—1919 (1988).

6. *Kirichenko, V. F.:* On the geometry of Kenmotsu manifolds. Dokl. Math., **64**:2, 230—232 (2001).

7. *Kirichenko, V. F., Rustanov, A. R.:* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. Sb. Math., **193**:8, 1173—1202 (2002).

8. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci. (New York), **207**:4, 513—537 (2015).

For citation: Banaru, G. A., Banaru, M. B. On the most important achievements of V. F. Kirichenko in Theory of differentiable manifolds. DGMF, 54 (1), 29—38 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-4.

УДК 514.75

О. О. Белова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

olgaobelova@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-5

Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$

В n-мерном проективном пространстве исследуется коконгруэнция m-мерных плоскостей. Расширенное композиционное оснащение данной коконгруэнции полями $(n-m-1)$-мерных плоскостей и точками C на m-мерных плоскостях позволяет задать связности трех типов в ассоциированном расслоении, причем одна из трех связностей является средней по отношению к двум другим. Рассмотрена деформация связностей и показано, что объект деформации является псевдотензором. Работа выполнена методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева с заданием связностей в главном расслоении.

Ключевые слова: проективное пространство, коконгруэнция m-мерных плоскостей, связность, деформация связности

Продолжается исследование коконгруэнции m-мерных плоскостей [2] с использованием метода Картана — Лаптева [1; 11; 12; 15; 17; 18].

Интерес к изучению подмногообразий многообразия Грассмана демонстрируют многие геометры [3; 4; 13; 14].

В проективном пространстве P_n будем использовать подвижной репер $\{A, A_i\}$ $(i, \ldots = 1, \ldots, n)$. Инфинитезимальные перемещения данного репера определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i, dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A,$$

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.

ω^i, ω_i, ω_j^i — формы Пфаффа — удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j,$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i. \tag{1}$$

Многообразие Грассмана $G(m,n)$ — множество всех m-мерных плоскостей n-мерного проективного пространства, причем $\dim G(m,n) = (n-m)(m+1)$. Одним из подмногообразий многообразия Грассмана является комплекс m-плоскостей, если размерность комплекса превышает разность $n-m$ (см.: [7]).

В своей статье [3] В. И. Близникас дал классификацию подмногообраий многообразия Грассмана, назвав комплекс $K_{(n-m)m}$ плоскостей размерности $m \, (1 \leq m < n)$ коконгруэнцией m-мерных плоскостей.

Коконгруэнция $K_{(n-m)m}$ задается уравнениями (см.: [2])

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta,$$

$a, \ldots = 1, \ldots, m;$ $\alpha, \ldots = m+1, \ldots, n,$ причем компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\beta^{\alpha a}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω_a^α

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a \equiv 0,$$

причем дифференциальный оператор Δ действует по закону (см., напр., [16])

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} = d\Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_\gamma^\alpha + \Lambda_\beta^{\alpha b} \omega_b^a - \Lambda_\gamma^{\alpha a} \omega_\beta^\gamma.$$

Замечание. Если $m = 1$, то коконгруэнция совпадает с конгруэнцией прямых [5; 6].

В главном расслоении $G_s(K)$, где

$$s = n(n+1) - m(n-m-1),$$

задается связность способом Лаптева — Лумисте [2; 8; 9]:

$$\widetilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^{ac}\omega_c^\alpha, \quad \widetilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_\alpha^{ab}\omega_b^\alpha,$$

$$\widetilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b^\beta, \quad \widetilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a^\gamma, \tag{2}$$

$$\widetilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha}^b\omega_b^\alpha, \widetilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^a\omega_a^\beta.$$

Вычисляя внешние дифференциалы форм (2), используя структурные уравнения (1) и применяя теорему Картана — Лаптева, находим

$$\Delta\Gamma_{b\alpha}^{ac} + (\delta_b^a\Gamma_{e\alpha}^c + \delta_e^a\Gamma_{b\alpha}^c)\omega^e + \left(\Gamma_{b\beta}^{ae}\Lambda_\alpha^{\beta c} - \delta_b^a\Gamma_\alpha^{ec} - \delta_b^e\Gamma_\alpha^{ac}\right)\omega_e +$$

$$+\delta_b^c\omega_\alpha^a - \delta_b^a\Lambda_\alpha^{\beta c}\omega_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_\alpha^{ab} - \Gamma_{e\alpha}^{ab}\omega^e + \Gamma_\beta^{ac}\Lambda_\alpha^{\beta b}\omega_c + \Lambda_\alpha^{\beta b}\omega_\beta^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{ac}\Lambda_\beta^{\gamma b}\omega_c + \left(\delta_c^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma\Gamma_{c\beta}^{ab}\right)\omega_\gamma^c - \Gamma_\beta^{ab}\omega_\alpha +$$

$$+\Gamma_{\alpha\beta}^b\omega^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + \left(\Gamma_{\beta\mu}^{ab}\Lambda_\gamma^{\mu a} - \delta_\beta^\alpha\Gamma_\gamma^{ba}\right)\omega_b + \delta_\beta^\alpha\Gamma_{b\gamma}^a\omega^b -$$

$$-\left(\delta_\beta^\mu\Lambda_\gamma^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha\Lambda_\gamma^{\mu a}\right)\omega_\mu - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{a\alpha}^b + \left(\Gamma_{a\alpha}^{cb} + \Gamma_{a\beta}^c\Lambda_\alpha^{\beta b}\right)\omega_c + \delta_a^b\omega_\alpha \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a + \left(\Gamma_{\alpha\gamma}^b\Lambda_\beta^{\gamma a} + \Gamma_{\alpha\beta}^{ba}\right)\omega_b - \Gamma_{b\beta}^a\omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma \equiv 0.$$

Осуществляя расширенное композиционное оснащение ко-конгруэнции $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой m-мерной плоскости L_m аналог плоскости Картана — плоскость C_{n-m-1}, не имеющую общих точек с плоскостью L_m, и точку $C \in L_m$, причем

$$C = A + \lambda^a A_a, \ C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A,$$

получим дифференциальные уравнения компонент оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda^a,\ \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$

$$\begin{gathered}\Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a = \lambda^{ab}_\alpha\omega^\alpha_b,\\ \Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha = \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b,\\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a,\end{gathered} \tag{3}$$

причем

$$\Delta\lambda^{ab}_\alpha + F^{\beta b}_\alpha\omega^a_\beta - \lambda^a F^{\beta b}_\alpha\omega_\beta + \left(\Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda^{ac}_\beta - \lambda^{ab}_\alpha\lambda^c - \lambda^{cb}_\alpha\lambda^a\right)\omega_c \equiv 0,$$

$$\begin{gathered}\Delta\lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_\beta\omega^a_\alpha + \left(\Lambda^{\gamma a}_\beta\lambda^b_{\alpha\gamma} + \lambda^{ba}_{\alpha\beta}\right)\omega_b +\\ + \left(-M^{\gamma a}_{\alpha\beta} + \delta^\gamma_\alpha\Lambda^{\mu a}_\beta\lambda_\mu\right)\omega_\gamma \equiv 0,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\Delta\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \left(-\delta^a_c M^{\gamma b}_{\alpha\beta} + \delta^b_c\delta^\gamma_\alpha\lambda^a_\beta\right)\omega^c_\gamma + \Lambda^{\gamma b}_\beta\lambda^a_\gamma\omega_\alpha + \Lambda^{\gamma b}_\beta\lambda^{ac}_{\alpha\gamma}\omega_c +\\ +\lambda^b_{\alpha\beta}\omega^a \equiv 0,\end{gathered}$$

где $F^{\beta b}_\alpha = \Lambda^{\beta b}_\alpha + \delta^\beta_\alpha\lambda^b$,$M^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\left(\delta^\alpha_\gamma\lambda^a_\beta + \Lambda^{\alpha a}_\gamma\lambda_\beta\right)$.

Данное расширенное композиционное оснащение позволяет охватить компоненты объекта связности следующим образом:

$$\begin{gathered}\overset{0}{\Gamma}{}^b_{a\alpha} = \delta^b_a\lambda_\alpha,\\ \overset{0}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha} = \delta^c_b\lambda^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_\alpha\lambda_\beta,\\ \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma} = M^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_\gamma\lambda_\mu,\\ \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_\alpha = \Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda^a_\beta,\\ \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^a_\gamma M^{\gamma b}_{\alpha\beta},\\ \overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma M^{\gamma a}_{\alpha\beta}.\end{gathered}$$

Ковариантные дифференциалы

$$\nabla\lambda^a = d\lambda^a + \lambda^b\widetilde{\omega}_b^a - \lambda^a\lambda^b\widetilde{\omega}_b + \widetilde{\omega}^a,$$

$$\nabla\lambda_\alpha^a = d\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha^b\widetilde{\omega}_b^a - \lambda_\beta^a\widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha\widetilde{\omega}^a + \widetilde{\omega}_\alpha^a,$$

$$\nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a\widetilde{\omega}_a + \widetilde{\omega}_\alpha$$

выражаются через ковариантные производные

$$\nabla_\alpha^b\lambda^a = \lambda_\alpha^{ab} - \lambda^c\Gamma_{c\alpha}^{ab} + \lambda^a\lambda^c\Gamma_{c\alpha}^b - \Gamma_\alpha^{ab},$$

$$\nabla_\beta^b\lambda_\alpha^a = \lambda_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_\alpha^c\Gamma_{c\beta}^{ab} + \lambda_\gamma^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \lambda_\alpha\Gamma_\beta^{ab} - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab},$$

$$\nabla_\beta^a\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}^a + \lambda_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a} - \lambda_\alpha^b\Gamma_{b\beta}^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a$$

следующим образом:

$$\nabla\lambda^a = \nabla_\alpha^b\lambda^a\omega_b^\alpha, \quad \nabla\lambda_\alpha^a = \nabla_\beta^b\lambda_\alpha^a\omega_b^\beta, \nabla\lambda_\alpha = \nabla_\beta^a\lambda_\alpha\omega_b^\beta.$$

С использованием тензорности ковариантных производных

$$\Delta\nabla_\alpha^b\lambda^a + \left(\Lambda_\alpha^{\beta b}\nabla_\beta^c\lambda^a - \lambda^a\nabla_\alpha^b\lambda^c - \lambda^c\nabla_\alpha^b\lambda^a\right)\omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta\nabla_\beta^b\lambda_\alpha^a + \nabla_\beta^b\lambda_\alpha\omega^a + \Lambda_\beta^{\gamma b}\nabla_\gamma^c\lambda_\alpha^a\omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta\nabla_\beta^a\lambda_\alpha + \left(\nabla_\beta^a\lambda_\alpha^b + \Lambda_\beta^{\gamma a}\nabla_\gamma^b\lambda_\alpha\right)\omega_b \equiv 0$$

строится второй охват:

$$\overset{02}{\Gamma}{}_\alpha^{ab} = \lambda_\alpha^{ab} + \Lambda_\alpha^{\beta b}\lambda_\beta\lambda^a - \lambda^b\mu_\alpha^a,$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}^{ab} = \lambda_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_\alpha\lambda_\beta^{ab} - 2\lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b - \Lambda_\beta^{\gamma b}\lambda_\alpha(\lambda_\gamma^a + \lambda_\gamma\lambda^\alpha) + \lambda_\alpha\lambda^b\mu_\beta^a,$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}^a = \lambda_{\alpha\beta}^a + 2M_{\alpha\beta}^{\gamma a}\lambda_\gamma,$$

где $\mu_\alpha^a = \lambda_\alpha^a - \lambda^a\lambda_\alpha$.

По аналогии с работой [13] третий охват находится так, чтобы первая связность являлась средней [9] по отношению к двум другим, то есть

$$\overset{01}{\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\overset{02}{\Gamma} + \overset{03}{\Gamma}\right).$$

Таким образом,

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = -\lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\left(\lambda^{a}_{\beta} + \mu^{a}_{\beta}\right) + \lambda^{b}\mu^{a}_{\alpha},$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha}\lambda^{ab}_{\beta} - \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda_{\alpha}\mu^{a}_{\gamma} - \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu^{a}_{\beta},$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = -\lambda^{a}_{\alpha\beta}.$$

Замечание. Для построения первого охвата было бы достаточно рассмотреть не расширенное композиционное оснащение, а оснащение, заданное аналогом плоскости Картана. Для остальных двух охватов одной плоскости Картана было бы недостаточно.

Введем объект деформации σ связности второго типа по отношению к связности первого типа, то есть $\sigma = \overset{02}{\Gamma} - \overset{01}{\Gamma}$.

Замечание. Деформация связности третьего типа по отношению к связности первого типа равна $-\sigma$, а деформация связности третьего типа по отношению к связности второго типа равна -2σ.

Компоненты объекта деформации $\sigma = \{\sigma^{ab}_{\alpha}, \sigma^{ab}_{\alpha\beta}, \sigma^{a}_{\alpha\beta}\}$ имеют вид

$$\sigma^{ab}_{\alpha} = \lambda^{ab}_{\alpha} - \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\mu^{a}_{\beta} - \lambda^{b}\mu^{a}_{\alpha},$$

$$\sigma^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^{ab}_{\beta}\lambda_{\alpha} - \lambda^{b}_{\alpha}\lambda^{a}_{\beta} - \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda_{\alpha}\lambda_{\gamma}\lambda^{a} + \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu^{a}_{\beta},$$

$$\sigma^{a}_{\alpha\beta} = \lambda^{a}_{\alpha\beta} + \mathrm{M}^{\gamma a}_{\alpha\beta}\lambda_{\gamma}.$$

Находим дифференциальные сравнения этих компонент, учитывая сравнения (3), (4):

$$\Delta\sigma^{ab}_{\alpha} + \left(\Lambda^{\beta b}_{\alpha}\sigma^{ac}_{\beta} - \lambda^{a}\sigma^{cb}_{\alpha} - \lambda^{c}\sigma^{ab}_{\alpha}\right)\omega_{c} \equiv 0,$$

$$\Delta\sigma^{ab}_{\alpha\beta} + \sigma^{b}_{\alpha\beta}\omega^{a} + \left(\Lambda^{\gamma b}_{\beta}\sigma^{ac}_{\alpha\gamma} - \mu^{c}_{\alpha}\sigma^{ab}_{\beta} + \lambda^{a}\lambda_{\alpha}\sigma^{cb}_{\beta}\right)\omega_{c} -$$
$$-\sigma^{ab}_{\beta}\omega_{\alpha} \equiv 0,$$

$$\Delta\sigma^{a}_{\alpha\beta} + (\sigma^{ba}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\gamma a}_{\beta}\sigma^{b}_{\alpha\gamma} + \lambda_{\alpha}\sigma^{ba}_{\beta})\omega_{b} \equiv 0.$$

В полученных дифференциальных сравнениях у компонент объекта деформации стоят множители (компоненты фундаментального объекта 1-го порядка Λ и оснащающего квазитензора λ), поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. *Объект деформации σ связности является псевдотензором [10], то есть объектом, обращение которого в нуль инвариантно.*

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Белова О.О.* Дифференциальная геометрия $(n-m)m$-мерных комплексов в n-мерном проективном пространстве // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 17—27.

3. *Близникас В.И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Труды Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 43—111.

4. *Борисенко А.А., Николаевский Ю.А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // УМН. 1991. Т. 46, вып. 2 (278). С. 41—83.

5. *Гусева О.О.* Прямолинейные конгруэнции с вырождающейся в линию фокальной поверхностью // ДГМФ. 1993. Вып. 24. С. 46—48.

6. *Гусева О.О.* Специальные классы конгруэнций с вырождающейся в линию фокальной поверхностью // ДГМФ. 1994. Вып. 25. С. 37—41.

7. *Кругляков Л.З.* О некоторых комплексах многомерных плоскостей в проективном пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16, вып. 3. С. 66—67.

8. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

9. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

10. *Шевченко Ю.И.* Связность в продолжении главного расслоения // ДГМФ. 1991. Вып. 22. С. 117—127.

11. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 179—187.

12. *Akivis M. A., Shelekhov A. M.* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs // J. Math. Sci. 2011. Vol. 177, № 4. P. 522—540.

13. *Belova O. O.* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, № 5. P. 605—632.

14. *Belova O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Maths. MDPI. 2021. Vol. 9 (7), № 782.

15. *Mansouri A.-R.* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions // Differential Geometry and its Applications. 2009. № 27. P. 635—646.

16. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, № 5. P. 675—709.

17. *Rahula M.* The G.F. Laptev method: fundamental objects of mappings // J. Math. Sci. 2011. Vol. 174. P. 675—697.

18. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

Для цитирования: *Белова О.О.* Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2023. № 54 (1). С. 39—48. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-5.

MSC 2010: 58A05, 53A20, 53A35

O. O. Belova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-5

The deformation pseudotensor of connections in cocongruence $K_{(n-m)m}$

Submitted on December 15, 2022

The Grassmann manifold $G(m,n)$ is the set of all m-dimensional planes of an n-dimensional projective space, with

$$\dim G(m,n) = (n-m)(m+1).$$

One of the submanifolds of the Grassmann manifold is a complex of m-planes if the dimension of the complex exceeds the difference $n - m$.

We continue to study the cocongruence of m-dimensional planes using the Cartan — Laptev method. In an n-dimensional projective space, the cocongruence of m-dimensional planes can be given by the following equations $\omega^\alpha = \Lambda^{\alpha a}_{\beta}\omega^\beta_a$.

Compositional equipment of a given cocongruence by fields of

$$(n-m-1)\text{-planes } C_{n-m-1}{:}L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$$

$$\text{and points } C = A + \lambda^a A_a$$

allows one to define connections of three types in the associated bundle, and one of the three connections is average with respect to the other two. The deformation of these connections is considered and it is shown that the object of deformation is a pseudotensor.

We introduce the deformation object σ of the connection of the second type with respect to the connection of the first type. The deformation of the connection of the third type with respect to the connection of the first type is $-\sigma$, and the deformation of the connection of the third type with respect to the connection of the second type is -2σ.

In the present paper, we use the method of continuations and coverages of G. F. Laptev with assignment of connections in the principal bundle.

Keywords: projective space, cocongruence of *m*-dimensional planes, connection, deformation of connection

References

1. *Akivis, M. A., Rosenfeld, B. A.:* Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Belova, O. O.:* Differential geometry of (*n-m*)*m*-dimensional complexes in *n*-dimensional projective space // Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 220, 17—27 (2023).

3. *Bliznikas, V. I.:* Some problems in the geometry of hypercomplexes of lines // Tr. Geom. Sem. 6, 43—111 (1974).

4. *Borisenko, A. A., Nikolaevskii, Yu. A.:* Grassmann manifolds and the Grassmann image of submanifolds. Russian Math. Surveys, **46**:2, 45—94 (1991).

5. *Guseva, O. O.:* Rectilinear congruences with a focal surface degenerating into a line. DGMF, 24, 46—48 (1993).

6. *Guseva, O. O.:* Special classes of congruences with focal surface degenerating into a line. DGMF, 25, 37—41 (1994).

7. *Kruglyakov, L. Z.:* On some complexes of multidimensional planes in projective space // Functional analysis and its applications. **16**:3, 66—67 (1982).

8. *Polyakova, K. V., Shevchenko, Yu. I.:* Laptev — Lumiste′s methods of giving connection and geometrical vectors. DGMF, 43, 114—121 (2012).

9. *Norden, A. P.:* Spaces with affine connection. Moscow (1976).

10. *Shevchenko, Yu. I.:* Connection in continuation of a principal bundle. DGMF, 22, 117—127 (1991).

11. *Shevchenko, Yu. I.:* Laptev's and Lumiste's tricks for specifying a connection in a principal bundle. DGMF, 37, 179—187 (2006).

12. *Akivis, M. A., Shelekhov, A. M.:* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. J. Math. Sci., 177, 522 (2011).

13. *Belova, O. O.:* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

14. *Belova, O.:* Generalized affine connections associated with the space of centered planes. Maths. MDPI, 9 (7), 782 (2021).

15. *Mansouri, A.-R.:* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions. Diff. Geom. and its App., 27, 635—646 (2009).

16. *Polyakova, K. V.:* Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci., **162**:5, 675—709 (2009).

17. *Rahula, M.:* The G. F. Laptev method: fundamental objects of mappings. J. Math. Sci., 174, 675—697 (2011).

18. *Scholz, E.:* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).

For citation: Belova, O. O. The deformation pseudotensor of connections in cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54 (1), 39—48 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-5.

УДК 514.76

А. В. Букушева
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-6

О связностях с кручением на неголономных пара-Кенмоцу многообразиях

Вводится понятие неголономного пара-Кенмоцу многообразия. Неголономное пара-Кенмоцу многообразие является естественным обобщением пара-Кенмоцу многообразия — от распределения неголономного пара-Кенмоцу многообразия не требуется выполнения свойства инволютивности. Выделяются собственно неголономные пара-Кенмоцу многообразия — неголономные пара-Кенмоцу многообразия с неинволютивным распределением. На почти (пара)контактном метрическом многообразии вводится метрическая связность с кручением, названная в работе связностью типа Леви-Чивиты. В случае неголономного пара-Кенмоцу многообразия такая связность имеет более простое строение, чем связность Леви-Чивиты, и в ряде случаев оказывается предпочтительнее с прикладной точки зрения. Связность типа Леви-Чивиты совпадает со связностью Леви-Чивиты тогда и только тогда, когда неголономное пара-Кенмоцу многообразие сводится к пара-Кенмоцу многообразию. Доказывается, что собственно неголономное пара-Кенмоцу многообразие не может нести на себе структуру многообразия Эйнштейна относительно связности типа Леви-Чивиты.

***Ключевые слова*:** неголономное пара-Кенмоцу многообразие, связность типа Леви-Чивиты, многообразие Эйнштейна, параконтактное метрическое многообразие

Поступила в редакцию 30.04.2023 г.

Введение

Понятие почти параконтактного многообразия было введено И. Сато [13]. После публикации [16] параконтактные метрические многообразия изучались многими авторами. Структура пара-Кенмоцу была введена Дж. Величко в [15] для трехмерных нормальных почти параконтактных метрических структур. Аналогичное понятие, называемое структурой P-Кенмоцу, появляется в статье Б. Б. Синхи и К. Л. Саи Прасада [14]. В последние годы значение геометрии пара-Кенмоцу было особо отмечено в нескольких статьях, подчеркивающих важность использования пара-Кенмоцу многообразий в полуримановой геометрии и математической физике [7; 8].

Ранее автором настоящей работы было введено понятие неголономного многообразия Кенмоцу — обобщения многообразия Кенмоцу, открытого в 1972 году в работе [11]. Структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы [11], в то время как структуры неголономного многообразия Кенмоцу нормальны, но не интегрируемы. Неголономное многообразие Кенмоцу определено в статье [1]. Внутренняя геометрия неголономного многообразия Кенмоцу M обладает рядом замечательных свойств [1; 3]. Эти свойства удобно сформулировать в терминах адаптированных координат [2; 9]. В частности, установлено, что тензорное поле Схоутена — Вагнера P, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P_{ad}^{c} = \partial_n \Gamma_{ad}^{c}$, обращается в нуль.

В настоящей статье рассматриваются неголономные пара-Кенмоцу многообразия. Такие многообразия устроены более сложно, чем пара-Кенмоцу многообразия. Аналитически сложность возрастает за счет появления эндоморфизма $\psi: TM \to TM$, определяемого с помощью равенства $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Назовем эндоморфизм ψ вторым структурным эндоморфизмом. Если характеристическим уравнением для пара-Кенмоцу многообразия является уравнение вида $(\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y =$

$= g(\varphi X, Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi X$, то таковым для неголономного пара-Кенмоцу многообразия является уравнение

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \varphi\right) Y = (\omega(\varphi Y, X) + g(\varphi X, Y))\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi(X + \psi X).$$

Здесь $\widetilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты.

На многообразиях с почти (пара)контактной метрической структурой наряду со связностью Леви-Чивиты рассматриваются связности с кручением [6]. В частности, на пара-Кенмоцу многообразиях исследовались такие связности, как связность Схоутена — ван Кампена, связность Голаба и другие связности [10; 12; 16]. Перечисленные выше связности выводились из связности Леви-Чивиты с использованием подходящих конструкций. Подобные конструкции можно применить для получения связностей с кручением и для неголономных пара-Кенмоцу многообразий. Однако наличие эндоморфизма $\psi: TM \to TM$ усложняет строение полученных связностей, делает их менее гибкими по сравнению со случаем пара-Кенмоцу многообразия. В настоящей работе определяется метрическая связность с кручением на неголономных пара-Кенмоцу многообразиях, максимально сохраняющая свойства связности Леви-Чивиты. Изучаются свойства полученной связности.

Основные результаты

Рассмотрим почти параконтактное метрическое многообразие M нечетной размерности $n = 2m + 1$. Пусть $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D\right)$ — заданная на многообразии M почти параконтактная метрическая структура, где φ — тензор типа (1,1), называемый первым структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g — псевдориманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = I - \eta \otimes \vec{\xi}$,

2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$,

3) $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$,

где $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D = \ker(\eta)$ называется *распределением почти параконтактной структуры*.

Для параконтактных метрических многообразий выполняются также следующие условия:

4) $\varphi\vec{\xi} = \vec{0}$, 5) $\eta \circ \varphi = 0$, 6) $\eta(X) = g(X, \vec{\xi}), X \in \Gamma(TM)$.

Кососимметрический тензор $\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ называется фундаментальной формой структуры. Почти параконтактная метрическая структура называется параконтактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Гладкое распределение $D^{\perp} = Span(\vec{\xi})$, ортогональное распределению *D,* называется оснащением распределения *D*. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^{\perp}$.

Карту $k(x^i)$ $(i, j, k = 1, \dots, n;\ a, b, c = 1, \dots, n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_{\mathrm{n}} = \vec{\xi}$ [4; 5]. Пусть $P: TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^i)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$.

Для адаптированных карт $k(x^i)$ и $k'(x^{i'})$ выполняются следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{a'}), \quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле *t* типа (p, q), заданное на почти (пара)контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D) или трансверсальным, если *t* обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$

или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'},$$

где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Имеет место равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Отсюда, в частности, вытекает важное для дальнейшего утверждение: условие $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Внутренней линейной связностью ∇ [4; 5] на многообразии с почти (пара)контактной метрической структурой называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,
2) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
3) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где $\Gamma(\mathrm{D})$ — модуль допустимых векторных полей.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b.$$

Отсюда, в частности, следует, что производные $\partial_n \Gamma^d_{ac}$ являются компонентами допустимого тензорного поля.

Ранг параконтактной структуры полагается равным $2p$, если $(d\eta)^p \neq 0$, $\eta \wedge (d\eta)^p = 0$, и равным $2p+1$, если $\eta \wedge (d\eta)^p \neq 0$, $(d\eta)^{p+1} = 0$. Легко проверяется, что ранг параконтактной структуры равен $2p+1$ тогда и только тогда, когда $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты и $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ — ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений, основанных на применении равенства

$$2\tilde{\Gamma}_{ij}^m = g^{km}\left(\vec{e}_i g_{jk} + \vec{e}_j g_{ik} - \vec{e}_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}\right) + \Omega_{ij}^m \times$$
$$\times \left(\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba},\ \Omega_{an}^n = \partial_n \Gamma_a^n\right),$$

убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности Леви-Чивиты почти параконтактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \qquad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},\ \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b,$$
$$\tilde{\Gamma}_{na}^n = -\partial_n \Gamma_a^n,\ \tilde{\Gamma}_{nn}^a = g^{ab}\partial_n \Gamma_b^n,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right),\quad \psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac},$$
$$C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C_a^b = g^{bc} C_{ac}.$$

Здесь эндоморфизм $\psi: TM \to TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$. Будем называть эндоморфизм ψ вторым структурным эндоморфизмом. Выполняются также следующие соотношения:

$$C(X,Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\, g)(X,Y),\quad g(CX,Y) = C(X,Y).$$

Из условия $d\eta\left(\vec{\xi}, X\right) = 0$ следует, что на самом деле ненулевых компонент $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ меньше:

$$\tilde{\Gamma}_{na}^n = -\partial_n \Gamma_a^n = 0 \text{ и } \tilde{\Gamma}_{nn}^a = g^{ab}\partial_n \Gamma_b^n = 0.$$

Почти параконтактное метрическое многообразие M называется нормальным многообразием, если выполняется условие

$$N_{\varphi}^{(1)} = N_{\varphi} - 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0,$$

где

$$N_{\varphi}(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

— тензор Нейенхейса эндоморфизма φ.

Почти параконтактное метрическое многообразие называется пара-Кенмоцу многообразием, если выполняется следующее условие [16]:

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \varphi\right)Y = g(\varphi X, Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi X.$$

Рассматривая последнее уравнение в адаптированных координатах, приходим к предложению 2.

Предложение 2. *Почти параконтактное метрическое многообразие является пара-Кенмоцу многообразием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) внутренняя производная от первого структурного эндоморфизма равна нулю: $\nabla\varphi = 0$*;*

2) производная Ли от первого структурного эндоморфизма вдоль структурного векторного поля $\vec{\xi}$ *равна нулю:* $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$*;*

3) распределение D *многообразия* M *инволютивно;*

4) выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$.

Следующее предложение является непосредственным следствием предложения 1 применительно к пара-Кенмоцу многообразию.

Предложение 3. *Коэффициенты* $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ *связности Леви-Чивиты пара-Кенмоцу многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{c} = \Gamma_{ab}^{c}, \qquad \tilde{\Gamma}_{ab}^{n} = -g_{ab}, \ \tilde{\Gamma}_{an}^{b} = \tilde{\Gamma}_{na}^{b} = \delta_a^b,$$

где

$$\Gamma_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Почти параконтактное метрическое многообразие M назовем неголономным пара-Кенмоцу многообразием, если выполняются следующие условия:

1) внутренняя производная от первого структурного эндоморфизма равна нулю: $\nabla\varphi = 0$;

2) производная Ли от первого структурного эндоморфизма φ вдоль структурного векторного поля $\vec{\xi}$ равна нулю: $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$;

3) выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$.

Если распределение неголономного пара-Кенмоцу многообразия неинволютивно, то такое многообразие будем называть собственно неголономным пара-Кенмоцу многообразием.

Предложение 4. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности Леви-Чивиты неголономного пара-Кенмоцу многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,\ \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - g_{ab},\ \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = \delta_a^b + \psi_a^b,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), \quad \psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}.$$

Теорема 1. *Почти параконтактное метрическое многообразие является неголономным пара-Кенмоцу многообразием тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

$$\left(\tilde{\nabla}_X\varphi\right)Y = (\omega(\varphi Y, X) + g(\varphi X, Y))\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi(X + \psi X).$$

Если распределение почти параконтактного метрического многообразия инволютивно, мы получаем характеристические равенства для пара-Кенмоцу многообразия.

Известно, что для пара-Кенмоцу многообразия выполняются соотношения

$$\tilde{\nabla}_X\vec{\xi} = X - \eta(X)\vec{\xi}, \tag{1}$$

$$(\tilde{\nabla}_X\eta)Y = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{2}$$

$$\eta\big(\tilde{R}(X,Y)Z\big) = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X), \qquad (3)$$

$$\tilde{R}(X,Y)\vec{\xi} = \eta(X)Y - \eta(Y)X. \qquad (4)$$

Пусть M — почти параконтактное метрическое многообразие. Назовем связность $D_X Y$, определяемую равенством

$$D_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y - \eta(X)\psi Y - \eta(Y)\psi X + \omega(X,Y)\vec{\xi},$$

связностью типа Леви-Чивиты.

Предложение 5. *Коэффициенты G_{ij}^k связности типа Леви-Чивиты почти параконтактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,\ G_{ab}^n = -C_{ab},\ \ G_{an}^b = G_{an}^b = C_a^b,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),$$

$$C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C_a^b = g^{bc} C_{ac}.$$

Предложение 5 для случая почти параконтактного метрического многообразия уточняется следующим образом:

Предложение 6. *Коэффициенты G_{ij}^k связности типа Леви-Чивиты почти параконтактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,\ G_{ab}^n = -g_{ab},\ \ G_{an}^b = G_{an}^b = \delta_a^b,$$

где

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Предложение 7. *Коэффициенты G_{ij}^k связности типа Леви-Чивиты неголономного пара-Кенмоцу многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,\ G_{ab}^n = -g_{ab},\ \ G_{an}^b = G_{na}^b = \delta_a^b,$$

где

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Опираясь на предложение 7, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Теорема 2. *Почти параконтактное метрическое многообразие является неголономным пара-Кенмоцу многообразием тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

$$(D_X\varphi)Y = g(\varphi X, Y)\vec{\xi} - \eta(Y)\varphi X.$$

Используя теорему 2, можно показать, что равенства (1)—(4) останутся справедливыми для неголономного пара-Кенмоцу многообразия, если в них заменить производную $\widetilde{\nabla}_X$ на производную D_X.

Теорема 3. *Неголономное пара-Кенмоцу многообразие не может нести на себе структуру многообразия Эйнштейна относительно связности типа Леви-Чивиты.*

Доказательство. Найдем в адаптированных координатах необходимые для дальнейшего компоненты тензора кривизны K связности типа Леви-Чивиты. Имеем:

$$K^d_{abc} = R^d_{abc} - \delta^d_a g_{cb} + \delta^d_b g_{ca} + 2\omega_{ab}\delta^d_c,$$

$$K^n_{anc} = -g_{ca},\ K^a_{nbn} = \delta^a_b.$$

Здесь R^d_{abc} — компоненты тензора Схоутена [9]:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]}Z - P[Q[X,Y],Z],$$

$$Q = 1 - P.$$

Пусть теперь $k(X,Y)$ — тензор Риччи, $\mathrm{r}(X,Z) = \mathrm{tr}(Y \to R(X,Y)Z)$, $X,Y,Z \in \Gamma(\mathrm{D})$ — тензор Схоутена — Риччи внутренней связности [2].

В адаптированных координатах получаем:

$$k_{ac} = r_{ac} + 2mg_{ca} - 2g_{ca} + 2\omega_{ac}.$$

Предположим, что неголономное пара-Кенмоцу многообразие является многообразием Эйнштейна относительно связности типа Леви-Чивиты. Тогда выполняется следующее равенство:

$$k_{ac} = r_{ac} + 2mg_{ca} - 2g_{ca} + 2\omega_{ac} = \mu g_{ca},$$

или

$$r_{ac} + 2mg_{ca} - \mu g_{ca} - 2g_{ca} = 2\omega_{ca}.$$

Отсюда в качестве следствия получаем:

$$r_{ac} - r_{ca} = 2\omega_{ca} - 2\omega_{ac} = 4\omega_{ca}.$$

Последнее равенство сравним с равенством

$$r_{ac} - r_{ca} = 4m\omega_{ca},$$

которое легко выводится из равенства

$$\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}.$$

Отсюда следует, что при $m > 1$ неголономное пара-Кенмоцу многообразие не может нести на себе структуру многообразия Эйнштейна относительно связности типа Леви-Чивиты. В случае $m = 1$ получаем $k_{ac} = 0$, но $k_{nn} = 2$. Что и доказывает теорему.

Пример неголономного пара-Кенмоцу многообразия. Пусть $M = R^3$, (∂_α) $(\alpha = 1,2,3)$ — стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η, полагая $\eta = dx^3 + x^2dx^1$. Пусть далее

$$\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_3,\ \vec{e}_2 = \partial_2, \vec{e}_3 = \vec{\xi} = \partial_3,\ D = Span(\vec{e}_1, \partial_2).$$

Определим метрический тензор, полагая базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ортогональным и

$$g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = -g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = e^{2x^3},\ g(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1.$$

Тем самым добиваемся выполнения равенства

$$L_{\vec{\xi}}\, g = 2(g - \eta \otimes \eta).$$

Первый структурный эндоморфизм зададим равенствами

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_2,\ \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1,\ \ \varphi(\vec{e}_3) = \vec{0}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$. Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в том, что ненулевыми компонентами внутренней связности являются следующие коэффициенты: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -x^2$. Отсюда, в частности, следует справедливость равенства $\nabla\varphi = 0$.

Список литературы

1. *Букушева А. В.* О тензоре Схоутена — Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2019. №5. С. 15—19.

2. *Букушева А. В.* Многообразия Кенмоцу с распределением нулевой кривизны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №64. С. 5—14.

3. *Букушева А. В.* К геометрии неголономных многообразий Кенмоцу // Известия Алтайского государственного университета. 2021. №1 (117). С. 84—87.

4. *Галаев С. В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, №3. С. 551—555.

5. *Галаев С. В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

6. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, №3. С. 258—263.

7. *Cappelletti-Montano B., Erken I.K., Murathan C.* Nullity conditions in paracontact geometry // Diff. Geom. Appl. 2012. Vol. 30. P. 665—693.

8. *Erken I.K., Murathan C.* A complete study of three-dimensional paracontact *k*-spaces // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2017. Vol. 14, №7. Art. №1750106.

9. *Galaev S.V.* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31, №1. P. 35—46.

10. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor. New series. 1975. Vol. 29. P. 249—254.

11. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24. P. 93—103.

12. *Olszak Z.* The Schouten-van Kampen affine connection adapted to an almost (para)contact metric structure // Publ. Inst. Math. Nouv. ser. 2013. Vol. 94 (108). P. 31—42.

13. *Sato I.* On a structure similar to the almost contact structure // Tensor. New series. 1976. Vol. 30. P. 219—224.

14. *Sinha B.B., Sai Prasad K.L.* A class of almost para contact metric manifolds // Bull. Cal. Math. Soc. 1995. Vol. 87. P. 307—312.

15. *Wełyczko J.* Slant curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds // Mediterr. J. Math. 2014. Vol. 11. P. 965—978.

16. *Zamkovoy S.* Canonical connections on paracontact manifolds // Ann. Glob. Anal. Geom. 2009. Vol. 36. P. 37—60.

Для цитирования: *Букушева А.В.* О связностях с кручением на неголономных пара-Кенмоцу многообразиях // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 49—63. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-6.

MSC 2010: 53C17

A. V. Bukusheva
Saratov State University
83, Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-6

On connections with torsion on nonholonomic para-Kenmotsu manifolds

Submitted on April 30, 2023

The concept of a nonholonomic para-Kenmotsu manifold is introduced. A nonholonomic para-Kenmotsu manifold is a natural generalization of a para-Kenmotsu manifold; the distribution of a nonholonomic para-Kenmotsu manifold does not need to be involutive. Properly nonholonomic para-Kenmotsu manifolds are singled out, these are nonholonomic para-Kenmotsu manifolds with non-involutive distribution. On an almost (para-)contact metric manifold, we introduce a metric connection with torsion, which is called a connection of Levi-Civita type in this paper. In the case of a nonholonomic para-Kenmotsu manifold, such a connection has a simpler structure than the Levi-Civita connection, and in some cases it turns out to be preferable from an applied point of view. A Levi-Civita type connection coincides with a Levi-Civita connection if and only if a nonholonomic para-Kenmotsu manifold reduces to a para-Kenmotsu manifold. It is proved that a proper nonholonomic para-Kenmotsu manifold cannot carry the structure of an Einstein manifold with respect to a connection of the Levi-Civita type.

Keywords: nonholonomic para-Kenmotsu manifold, Levi-Civita type connection, Einstein manifold, para-contact metric manifold

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On the Schouten — Wagner tensor of a nonholonomic Kenmotsu manifold. Proceedings of the seminar on geometry and mathematical modeling, 5, 15—19 (2019).

2. *Bukusheva, A. V.:* Kenmotsu manifolds with a zero curvature distribution. Tomsk State Univ. J. Math. Mech., 64, 5—14 (2020).

3. *Bukusheva, A. V.:* Geometry of nonholonomic Kenmotsu manifolds. Izv. of Altai State Univ., 1 (117), 84—87 (2021).

4. *Galaev, S. V.:* Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-Hermitian structure. Bulletin of Bashkir Univ., **21**:3, 551—555 (2016).

5. *Galaev, S. V.:* Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **16**:3, 263—272 (2016).

6. *Galaev, S. V.:* Almost contact metric spaces with N-connection. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform, **15**:3, 258—263 (2015).

7. *Cappelletti-Montano, B., Erken, K. I., Murathan, C.:* Nullity conditions in paracontact geometry. Differ. Geom. Appl., 30, 665—693 (2012).

8. *Erken, K. I., Murathan, C.:* A complete study of three-dimensional paracontact (k,μ,ν)-spaces. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **14:**7, 1750106 (2017).

9. *Galaev, S. V.:* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, **31**:1, 35—46 (2015).

10. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. Tensor (N. S.), 29, 249—254 (1975).

11. *Kenmotsu, K.:* A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 24, 93—103 (1972).

12. *Olszak, Z.:* The Schouten-van Kampen affine connection adapted to an almost (para)contact metric structure. Publ. Inst. Math. Nouv. ser., **94**:108, 31—42 (2013).

13. *Sato, I.*: On a structure similar to the almost contact structure. Tensor (N. S.), 30, 219—224 (1976).

14. *Sinha, B. B., Sai Prasad, K. L.:* A class of almost paracontact metric manifolds. Bull. Cal. Math. Soc., 87, 307—312 (1995).

15. *Wełyczko, J.:* Slant curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds. Mediterr. J. Math., 11, 965—978 (2014).

16. *Zamkovoy, S.:* Canonical connections on paracontact manifolds. Ann. Glob. Anal. Geom., 36, 37—60 (2009).

For citation: Bukusheva, A. V. On connections with torsion on nonholonomic para-Kenmotsu manifolds. DGMF, 54 (1), 49—63 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-6.

УДК 514.76

С. В. Галаев
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
sgalaev@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1129-7159
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-7

К геометрии субримановых многообразий, канонической четверть-симметрической связностью

В настоящей статье под субримановым многообразием контактного типа понимается риманово многообразие, оснащенное регулярным распределением коразмерности один и ортогональным этому распределению единичным векторным полем, называемым структурным векторным полем. На субримановом многообразии контактного типа определяется четверть-симметрическая связность, ассоциируемая с эндоморфизмом, сохраняющим распределение субриманова многообразия. Доказывается, что в случае метричности изучаемой связности ассоциируемый с ней эндоморфизм определен однозначно. Находится строение ассоциируемого эндоморфизма. В случае, когда структурное векторное поле представляет собой поле инфинитезимальных изометрий, четверть-симметрическая связность получает название канонической N-связности. Находится выражение тензора кривизны канонической N-связности через тензор кривизны Римана. Исследуются свойства тензора кривизны Схоутена, обеспечивающие, в частности, необходимые симметрии тензора кривизны N-связности для корректного определения ее секционной кривизны. Найдена связь секционной кривизны канонической N-связности и секционной кривизны связ-

Поступила в редакцию 02.04.2023 г.

ности Леви-Чивиты. Находятся необходимые и достаточные условия для совпадения секционной кривизны N-связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты.

Ключевые слова: субримановы многообразия контактного типа, четверть-симметрическая связность, секционная кривизна, тензор Схоутена

Введение

Изучению почти контактных метрических многообразий, оснащенных четверть-симметрической и, в частности, полуметрической связностью, посвящено большое количество работ [8—10; 14; 15]. Э. Картан [11] первым рассмотрел линейную метрическую связность с кручением вместо связности Леви-Чивиты. Среди метрических связностей с кручением наибольшее внимание ученых привлекает полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено К. Яно в работе [14]. Четверть-симметрическая связность определена в 1975 г. С. Голабом [13]. Большое количество работ посвящено как метрическим, так и не метрическим связностям с кручением, заданным на многообразиях с почти контактной метрической структурой.

В настоящей работе на субримановом многообразии рассматривается четверть-симметрическая связность D_X, ассоциируемая с тройкой (∇, C, S), где ∇ — внутренняя метрическая связность, а C, S — эндоморфизмы распределения D. Причем эндоморфизм C задается равенствами

$$C(X,Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y),\ g(CX,Y) = C(X,Y),$$

а S — произвольный эндоморфизм. Одной из задач настоящей статьи является определение такого эндоморфизма S, для которого D_X — метрическая связность. Если при этом $(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y) = 0$, то метрическая четверть-симметрическая связность D_X получает название канонической N-связности. Решается задача сравнения секционной кривизны канонической N-связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты. Находятся необходимые и достаточные условия для совпадения секционной кривизны N-связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты.

Основные результаты

Пусть M — риманово многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем субримановой структурой $(\vec{\xi}, \eta, g, D)$ контактного типа, где g — метрический тензор, заданный на многообразии M, η и $\vec{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$. Потребуем, чтобы $\omega(\vec{\xi}, \cdot) = d\eta(\vec{\xi}, \cdot) = 0$, $rk(\omega) \geq 2$. Будем называть в дальнейшем M субримановым многообразием.

Внутренней линейной связностью ∇ [3] на субримановом многообразии называется отображение $\nabla\colon \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} = f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y$,

2) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

3) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

где Γ(D) — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

На протяжении всей статьи мы активно используем адаптированные координаты. Карту $k(x^i)$ $(i, j, k = 1, \dots, n;\ a, b, c = 1, \dots, 2m)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_{\mathrm{n}} = \vec{\xi}$. Пусть $P\colon TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^i)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы в каждой точке и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$.

Адаптированные координаты играют роль «голономных» координат для неинволютивного распределения. Имеет место равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}$. Отсюда, в частности, вытекает важное для дальнейшего утверждение: условие $d\eta(\vec{\xi},\cdot) = 0$ эквивалентно справедливости равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем, соответственно, допустимые тензорные поля:

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - P[X,Y],$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P[Q[X,Y],Z],$$

где $Q = I - P$,$X, Y, Z \in \Gamma(D)$.

Тензор $R(X,Y)Z$ носит название тензора кривизны Схоутена субриманова многообразия. Компоненты тензора кривизны Схоутена в адаптированных координатах определяются равенством

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Имеет место

Предложение 1. *На субримановом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением, такая, что*

$$\nabla_X g(Y,Z) = 0, X, Y, Z \in \Gamma(D).$$

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}).$$

Далее пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты.

Предложение 2. *Коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \qquad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a + \psi^b_a,$$

$$\tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a, \qquad \tilde{\Gamma}^a_{nn} = g^{ab}\partial_n \Gamma^n_b,$$

где

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}),$$

$$\psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac},$$

$$C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C^b_a = g^{bc}C_{ac}.$$

Здесь эндоморфизм $\psi: TM \to TM$ определяется из равенства $\omega(X,Y) = g(\psi X, Y)$. Выполняются также следующие соотношения: $C(X,Y) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(X,Y)$,$g(CX,Y) = C(X,Y)$. Коэффициенты $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ примут более простой вид, если потребовать, чтобы $d\eta(\vec{\xi}, X) = 0$. В этом случае

$$\tilde{\Gamma}^n_{na} = -\partial_n \Gamma^n_a = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}^a_{nn} = g^{ab}\partial_n \Gamma^n_b = 0.$$

Внутренняя связность обеспечивает параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В то же время для решения ряда проблем возникает необходимость расширения внутренней связности до связности на всем многообразии. Иногда достаточно промежуточной конструкции — связности в векторном расслоении (M, π, D). Существуют разные способы продолжения внутренней связности. В ряде статей [1; 2; 4—6] обсуждается так называемая N-связность ∇^N. На почти субримановом многообразии M N-связность ∇^N определяемую парой (∇, N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, $N: TM \to TM$ — эндоморфизм касательного расслоения многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. В настоящей статье мы выделяем четверть-симметрические N-связности.

Определим четверть-симметрическую связность D_X на субримановом многообразии с помощью следующего равенства:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + C(X,Y)\vec{\xi} - \eta(X)\psi Y - \eta(Y)(C + \psi - S)X.$$

Имеет место

Предложение 3. *Ненулевые коэффициенты* G_{ij}^{k} *связности* D_X *субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{ab}^{c} = \tilde{\Gamma}_{ab}^{c},\ G_{ab}^{n} = \omega_{ba},\ G_{an}^{b} = S_{a}^{b},\ G_{na}^{b} = C_{a}^{b}.$$

Из определения четверть-симметрической связности D_X следует, что участвующий в ее определении эндоморфизм S определен произвольным образом. Сформулированная ниже теорема утверждает, что эндоморфизм S будет определен однозначно, если потребовать от связности D_X свойство метричности.

Теорема 1. *Заданная на субримановом многообразии четверть-симметрическая связность* D_X *будет метрической тогда и только тогда, когда* $S = \psi$.

Используя предложение 1, непосредственно убеждаемся в том, что $D_a g_{bc} = 0$ и $D_n g_{bc} = 0$. Найдем условия, при которых $D_a g_{nb} = 0$. Имеем:

$$D_a g_{nb} = -G_{an}^{c} g_{bc} - G_{ab}^{n} = -S_{a}^{c} g_{bc} - \omega_{ba} = 0.$$

Отсюда и из равенства $\psi_a^b = g^{bc}\omega_{ac}$ следует, что теорема справедлива.

Из доказанной теоремы следует, что связность, определяемая посредством следующего равенства:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + C(X,Y)\vec{\xi} - \eta(X)\psi Y - \eta(Y)CX,$$

является метрической четверть-симметрической связностью.

К введению четверть-симметрической связность D_X можно подойти следующим образом.

Теорема 2. *Пусть на субримановом многообразии* M *определена пара* (∇, N), *где* ∇ *— внутренняя метрическая связность,* $N: TM \to TM$ *— эндоморфизм касательного расслоения* *многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии M существует, причем единственная, связность D_X такая, что:*

1) $D_X\vec{\xi} = NX$,

2) $(D_X\eta)(Y) = \omega(X, Y)$,

3) $S(X, Y) = \eta(Y)NX - \eta(X)NY$,

4) $P(D_XY) = \nabla_XY$.

Здесь $S(X, Y)$ — тензор кручения связности D_X. В последнем равенстве $X, Y \in \Gamma(D)$, во всех остальных случаях $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Доказательство. Предположим, что связность D_X существует, найдем ее компоненты G_{ij}^k в адаптированных координатах. После некоторых вычислений получаем следующие ненулевые компоненты:

$$G_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a, \quad G_{bc}^n = \omega_{cb}, \quad G_{bn}^a = N_b^a.$$

Обратным образом можно убедиться в том, что связность с обозначенными выше компонентами удовлетворяет требованиям, предъявляемым к связности D_X.

Легко убедиться в том, что четверть-симметрическая N-связность выражается через связность Леви-Чивиты следующим образом:

$$D_XY = \widetilde{\nabla}_XY + C(X, Y)\vec{\xi} - \eta(Y)(C + \psi - N)X - \eta(X)(C + \psi)Y.$$

Метрическую четверть-симметрическую N-связность, удовлетворяющую требованиям теоремы 2, будем называть канонической связностью, и предполагать, что до конца статьи выполняется условие $\left(L_{\vec{\xi}}g\right)(X, Y) = 0$. Если D_X — каноническая связность, то

$$D_XY = \widetilde{\nabla}_XY - \eta(X)\psi Y.$$

В работе П. Н. Клепикова, Е. Д. Родионова и О. П. Хромовой «О секционной кривизне связностей с векторным кручением» [7] решается задача о связи секционной кривизны полусимметрической связности и секционной кривизны связности Леви-Чивиты. Авторами построена математическая модель, позволяющая вычислять секционную кривизну метрической связности с векторным кручением через секционную кривизну связности Леви-Чивиты в случае локально однородных (псевдо)римановых многообразий.

В своем исследовании мы рассматриваем схожие задачи применительно к субримановым многообразиям с четверть-симметрической связностью.

Предложение 4. *Пусть* $\tilde{R}(X,Y)Z$ *и* $K(X,Y)Z$ *— тензоры кривизны связностей* $\tilde{\nabla}_X Y$ *и* $D_X Y$ *соответственно. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\tilde{R}(X,Y,Z,U) = K(X,Y,Z,U) + 2\omega(X,Y)\omega(Z,U),$$
$$X,Y,Z,U \in \Gamma(D);$$
$$\tilde{R}(X,Y)Z = K(X,Y)Z + 2\omega(X,Y)\psi Z,\ \ X,Y,Z \in \Gamma(D).$$

Известно, что в адаптированных координатах $\left(L_{\vec{\xi}}g\right)_{ab} = \partial_n g_{ab}$, $(L_{\vec{\xi}}g)_{an} = 0$. Таким образом, до конца статьи мы полагаем, что $\partial_n g_{ab} = 0$.

Покажем, что при сделанных предположениях тензор кривизны Схоутена обладает теми же свойствами симметрии, что и тензор кривизны Римана, позволяющими применить к тензору Схоутена процедуру разложения на неприводимые компоненты. Как известно, тензор кривизны Схоутена

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]}Z - P[Q[X,Y],Z],$$
$$X,Y,Z \in \Gamma(D)$$

в адаптированных координатах имеет вид

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}.$$

Условие $\partial_n g_{ab} = 0$ влечет равенство $\partial_n \Gamma^a_{bc} = 0$. В этом случае

$$R^d_{abc} = 2\partial_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}.$$

Тензор кривизны Схоутена возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^c = R^c_{abe}v^e + 4\omega_{ba}\partial_n v^c.$$

Как мы видим, координатное представление тензора Схоутена идентично координатному представлению тензора кривизны Римана. Это позволяет быть уверенным в том, что к тензору Схоутена применима теорема о разложении тензора кривизны на неприводимые компоненты. Тем не менее сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Тензор кривизны $R(X,Y)Z$ Схоутена удовлетворяет следующим тождествам:*

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$$

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0,$$

$$g(R(X,Y)Z,U) = -g(R(X,Y)U,Z),$$

$$g(R(X,Y)Z,U) = g(R(Z,U)X,Y).$$

Доказательство. Из условия $d\eta(\vec{\xi},\cdot) = 0$ следует, что для доказательства указанных тождеств можно ограничиться такими векторными полями $X, Y, Z \in \Gamma(D)$, скобки Ли которых принадлежат распределению $D^\perp$. Будем полагать, что $X = \vec{e}_a,\ Y = \vec{e}_b,\ Z = \vec{e}_c$.

Для таких полей будем иметь

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z,\ \ \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0.$$

В этом случае первые два тождества выполняются очевидным образом, четвертое тождество является алгебраическим следствием первых трех. Докажем третье тождество, которое имеет место тогда и только тогда, когда

$$g(R(X,Y)Z,Z) = 0.$$

Из равенства

$$Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

следует, что

$$Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) = 0.$$

Используя равенство

$$g(\nabla_Y Z, Z) = \frac{1}{2} Yg(Z,Z),$$

получаем

$$g(R(X,Y)Z,Z) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) =$$
$$= \frac{1}{2}(YX - XY)g(Z,Z) = \omega_{ab}\, \partial_{\mathrm{n}} g(Z,Z) = 0.$$

Третье тождество доказано. Тем самым теорема доказана.

Теорема 3 может быть использована для доказательства того, что, как и в случае тензора кривизны Римана, тензор кривизны Схоутена распадается на три части, соответствующие скалярной кривизне, бесследовой части тензора Риччи — Схоутена и тензору кривизны Вейля (при $2m \geq 4$).

Из теоремы 3 и равенства

$$\tilde{R}(X,Y,Z,U) = K(X,Y,Z,U) + 2\omega(X,Y)\omega(Z,U),$$
$$X,Y,Z,U \in \Gamma(D),$$

следует справедливость предложения 5.

Предложение 5. *Тензор кривизны $K(X,Y)Z$ удовлетворяет следующим тождествам:*

$$K(X,Y)Z = -K(Y,X)Z,$$
$$K(X,Y,Z,U) = -K(X,Y,U,Z),$$
$$K(X,Y,Z,U) = K(Z,U,X,Y), X,Y,Z,U \in \Gamma(D).$$

Определим на многообразии M секционную кривизну относительно канонической связности в направлении линейно независимых векторов $X, Y \in \Gamma(D)$:

$$K(X,Y) = \frac{K(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2}.$$

Сравним компоненты тензоров $\tilde{R}(X,Y)Z$ и $K(X,Y)Z$ в адаптированных координатах. Имеем:

$$\tilde{R}^d_{abc} = K^d_{abc} + 2\omega_{ab}\psi^d_c = R^d_{abc} + 2\omega_{ab}\psi^d_c,$$
$$\tilde{R}^n_{abc} = K^n_{abc} = \nabla_a\omega_{cb} - \nabla_b\omega_{ca},$$
$$\tilde{R}^a_{ncb} = K^a_{ncb} = -\nabla_c\psi^a_b.$$

Используя полученные соотношения, получаем равенство

$$\tilde{R}_{ab} = K_{ab} + \frac{2\omega^2_{ab}}{g_{aa}g_{bb} - g^2_{ab}}.$$

Теорема 4. *Секционные кривизны канонической связности и связности Леви-Чивиты в направлении линейно независимых векторов $X, Y \in \Gamma(D)$ равны тогда и только тогда, когда распределение D инволютивно.*

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О геометрии многообразий Кенмоцу с N-связностью // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 48—60.

2. *Букушева А.В.* Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки — Вебстера // ДГМФ. 2021. №52. С. 42—51.

3. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

4. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, №3. С. 258—263.

5. *Галаев С.В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, №3. С. 53—63.

6. *Галаев С.В., Гохман А.В.* Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика. 2001. №3. С. 28—31.

7. *Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.* О секционной кривизне связностей с векторным кручением // Изв. вузов. Матем. 2020. №6. С. 86—92.

8. *Agricola I., Kraus M.* Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 46. P. 130—146.

9. *Barua B., Ray A. Kr.* Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. Pure App. Math. 1985. Vol. 16, iss. 7. P. 736—740.

10. *Biswas S. C., De U. C.* Quarter-symmetric metric connection in an SP-Sasakian manifold // Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1. 1997. Vol. 46. P. 49—56.

11. *Cartan E.* Sur les varieties a connexion affine et la theorie de la relative generalisee. Part II // Ann. Ec. Norm. 1925. Vol. 42. P. 17—88.

12. *Galaev S. V.* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31, №1. P. 35—46.

13. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor. New series. 1975. Vol. 29. P. 249—254.

14. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Rev. Roum. Math. Pure Appl. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.

15. *Yano K., Imai T.* Quarter-symmetric metric connections and their curvature tensors // Tensor. New series. 1982. Vol. 38. P. 13—18.

Для цитирования: *Галаев С.В.* К геометрии субримановых многообразий, оснащенных канонической четверть-симметрической связностью // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 64—77. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-7.

MSC 2010: 53C17

S. V. Galaev
Saratov State University
83, Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
sgalaev@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-7

On the geometry of sub-Riemannian manifolds equipped with a canonical quarter-symmetric connection

Submitted on April 2, 2023

In this article, a sub-Riemannian manifold of contact type is understood as a Riemannian manifold equipped with a regular distribution of codimension-one and by a unit structure vector field orthogonal to this distribution. This vector field is called a structural. On a sub-Riemannian manifold of contact type, a quarter-symmetric connection is defined, which is associated with an endomorphism that preserves the distribution of the sub-Riemannian manifold. It is proved that if the connection under study is metric, then the endomorphism associated to it is uniquely defined. The structure of the associated endomorphism is found. In the case when the structure vector field is a field of infinitesimal isometries, the quarter-symmetric connection is called the canonical N-connection. An expression is found for the curvature tensor of the canonical N-connection in terms of the Riemann curvature tensor. The properties of the Schouten curvature tensor are investigated, which provide, in particular, the necessary symmetries of the curvature tensor of an N-connection for its sectional curvature to be well-defined. A relation between the sectional curvature of the canonical N-connection and the sectional curvature of the Levi-Civita connection is found. Necessary and sufficient conditions are found under which the sectional curvature of the N-connection and the sectional curvature of the Levi-Civita connection coincide.

Keywords: sub-Riemannian manifolds of contact type, quarter-symmetric connection, sectional curvature, Schouten tensor

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On geometry of Kenmotsu manifolds with N-connection. DGMF, 50, 48—60 (2019).

2. *Bukusheva, A. V.:* Non-holonomic Kenmotsu manifolds equipped with generalized Tanaka — Webster connection. DGMF, 52, 42—51 (2021).

3. *Galaev, S. V.:* Extended structures on codistributions of contact metric manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform. **16**:3, 263—272 (2016).

4. *Galaev, S. V.:* Almost contact metric spaces with N-connection. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **15**:3, 258—263 (2015).

5. *Galaev, S. V.:* Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces. Chebyshevskii sb., **17**:3, 53—63 (2016).

6. *Galaev, S. V., Gokhman, A. V.*: Almost symplectic connections on a nonholonomic manifold. Mathematics. Mechanics, 3, 28—31 (2001).

7. *Klepikov, P.N., Rodionov, E.D., Khromova, O.P.*: Sectional curvature of connections with vectorial torsion. Russ Math., 64, 75—79 (2020).

8. *Agricola, I., Kraus, M.:* Manifolds with vectorial torsion. Diff. Geom. and its App., 46, 130—146 (2016).

9. *Barua, B., Ray, A. Kr.:* Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold. Indian J. Pure App. Math., **16**:7, 736—740 (1985).

10. *Biswas, S.C., De, U.C.:* Quarter-symmetric metric connection in an SP-Sasakian manifold. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 46, 49—56 (1997).

11. *Cartan, E.:* Sur les varieties a connexion affine et la theorie de la relative generalisee. Part II. Ann. Ec. Norm., 42, 17—88 (1925).

12. *Galaev, S.V.:* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, **31**:1, 35—46 (2015).

13. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. Tensor (N.S.), 29, 249—254 (1975).

14. *Yano, K.:* On semi-symmetric metric connection. Rev. Roum. Math. Pure Appl., 15, 1579—1586 (1970).

15. *Yano, K. Imai, T.:* Quarter-symmetric metric connections and their curvature tensors. Tensor (N.S.), 38, 13—18 (1982).

For citation: Galaev, S.V. On the geometry of sub-Riemannian manifolds equipped with a canonical quarter-symmetric connection. DGMF, 54 (1), 64—77 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-7.

УДК 514.76

Н. А. Елисеева[1]**,** ***Ю. И. Попов***[2]
[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-8

Гиперполосное распределение, оснащенное полем сопряженных плоскостей

Рассматривается гиперполосное распределение аффинного пространства, оснащенное полем сопряженных плоскостей относительно асимптотического пучка тензоров базисной поверхности. Приведено задание изучаемого гиперполосного распределения в аффинном пространстве относительно репера 1-го порядка и доказана теорема существования. Построены инвариантные поля геометрических объектов 1-го и 2-го порядка. В дифференциальной окрестности 2-го порядка построены поля нормалей Трансона 1-го и 2-го рода. Найдены условия совпадения нормалей Трансона и нормалей Бляшке.

Ключевые слова: гиперполоса, регулярная гиперполоса, гиперполосное распределение, аффинное пространство, нормализация

§ 1. Задание гиперполосного распределения, оснащенного полем сопряженных плоскостей, в n-мерном аффинном пространстве A_n

В работе используется следующая схема индексов:

$$J,K,L=\overline{1,n};\ i,j,k=\overline{1,m};\ p,q,r,s,t=\overline{1,r};\ a,b,c,d=$$
$$=\overline{r+1,m};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,n-1};\ \hat{\alpha},\hat{\beta}=\overline{m+1,n}.$$

Поступила в редакцию 8.05.2023 г.

Обзор работ по теории гиперполос в трехмерных пространствах с фундаментальными группами дан в статье А.В. Столярова [12]. В.В. Вагнер [4] обобщил введенное В. Бляшке [3] понятие полосы: m-мерной гиперполосой H_m в n-мерном центроаффинном пространстве A_n^0 он называет поверхность V_m $(m < n-1)$, оснащенную полем касательных гиперплоскостей. При этом поверхность V_m называется базисной поверхностью гиперполосы H_m, а касательное оснащение гиперплоскости — главными касательными гиперплоскостями гиперполосы H_m.

В настоящей работе используются метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [2; 14; 16] и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева [5; 7].

Рассмотрим гиперполосное распределение [13] аффинного пространства A_n [15], для которого в каждом центре A базисной поверхности V_m заданы r-мерная плоскость $\Lambda_r \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda$ и сопряженная ей $(m-r)$-мерная плоскость $L_{m-r} \stackrel{\text{def}}{=} L$ относительно асимптотического пучка тензоров базисной поверхности V_m. Такой специальный класс гиперполосных распределений аффинного пространства A_n будем обозначать символом $H_m(Z)$. Отнесем n-мерное аффинное пространство A_n к подвижному реперу $R = \{M, \bar{e}_J\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$dM = \omega^J \bar{e}_J, d\bar{e}_J = \omega_J^K \bar{e}_K,$$

где $d\omega^J = \omega^L \wedge \omega_L^J, d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K$.

Совместим вершину M репера R с текущей точкой A базисной поверхности V_m. Векторы $\{\bar{e}_p\}$ поместим в касательную плоскость $\Lambda(A)$, а векторы $\{\bar{e}_a\}$ — в $(m-r)$-мерную плоскость $L(A)$. Векторы $\{\bar{e}_\alpha\}$ расположим в характеристике $X_{n-m-1}(A)$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$, а вектор $\bar{e}_n$ пусть занимает произвольное положение, образуя с векторами $\{\bar{e}_p, \bar{e}_a, \bar{e}_\alpha\}$ репер $\{A, \bar{e}_J\}$ пространства A_n. Выбранный таким образом репер является репером 1-го порядка R^1, относительно которого гиперполосное распределение $H_m(Z)$ задается следующими уравнениями и соотношениями:

$$\omega^n = 0,\ \omega^\alpha = 0,\ \omega_\alpha^n = 0,$$

$$\omega_p^n = b_{pq}^n \omega^q,\ \omega_a^n = b_{ab}^n \omega^b, \qquad \text{(a)}$$

$$\omega_p^\alpha = b_{pq}^\alpha \omega^q,\ \omega_a^\alpha = b_{ab}^\alpha \omega^b,\ \omega_p^a = \lambda_{pi}^a \omega^i, \qquad (1.1)$$

$$\omega_a^p = \lambda_{ai}^p \omega^i,\ \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha i}^a \omega^i,\ \omega_\alpha^p = \lambda_{\alpha i}^p \omega^i;$$

$$\nabla b_{pq}^n = b_{pqi}^n \omega^i,\ \nabla b_{ab}^n = b_{abi}^n \omega^i, \qquad \text{(b)}$$

$$\nabla b_{pq}^\alpha + b_{pq}^n \omega_n^\alpha = b_{pqi}^\alpha \omega^i,\ \nabla b_{ab}^\alpha + b_{ab}^n \omega_n^\alpha = b_{abi}^\alpha \omega^i, \qquad (1.2)$$

$$\nabla \lambda_{pi}^a + b_{pq}^n \delta_i^q \omega_n^a = \lambda_{pij}^\alpha \omega^j,\ \nabla \lambda_{ai}^p + b_{ac}^n \delta_i^c \omega_n^p = \lambda_{aij}^p \omega^j,$$

$$\nabla \lambda_{\alpha i}^a = \lambda_{\alpha ij}^a \omega^j,\ \nabla \lambda_{\alpha i}^p = \lambda_{\alpha ij}^p \omega^j;$$

где

$$b_{[pq]}^{\widehat{\alpha}} = 0,\ b_{[ab]}^{\widehat{\alpha}} = 0,\ \lambda_{\alpha[i}^k b_{j]k}^n = 0. \qquad (1.3)$$

В дальнейшем будем изучать только регулярные гиперполосные распределения $H_m(Z)$, то есть такие гиперполосные распределения, для которых характеристика $X_{n-m-1}(A)$ и касательная плоскость $T_m(A)$ находятся в общем положении:

$$X_{n-m-1}(A) \cap T_m(A) = A, [X_{n-m-1}(A), T_m(A)] = \tau(A).$$

Известно [1], что необходимым и достаточным условием сопряженности плоскостей $\Lambda(A)$ и $L(A)$ является обращение в нуль тензора $\{b_{pa}^{\widehat{\alpha}}\}$, то есть $b_{pa}^{\widehat{\alpha}} = 0$ и $b_{ap}^{\widehat{\alpha}} = 0$.

Из (1.1.a) и (1.2) следует, что система функций b_{ij}^n образует невырожденный тензор 1-го порядка — основной фундаментальный тензор гиперполосного распределения $H_m(Z)$, который распадается на два невырожденных симметрических тензора 1-го порядка b_{pq}^n и b_{ab}^n. Назовем тензор 1-го порядка b_{pq}^n главным фундаментальным тензором гиперполосного распределения $H_m(Z)$, ассоциированным с расслоением $\Lambda(V_m)$, а тензор b^n_{ab} — главным фундаментальным тензором гиперполосного распределения $H_m(Z)$, ассоциированным с расслоением $L(V_m)$.

Замечание. Расслоение $\Lambda(V_m)$ плоскостей $\Lambda(A)$ и расслоение $L(V_m)$ плоскостей $L(A)$ в дальнейшем будем соответственно называть Λ-подрасслоением и L-подрасслоением, а расслоение касательных плоскостей $T(V_m)$ назовем T-подрасслоением гиперполосного распределения $H_m(Z)$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Регулярное гиперполосное распределение* $H_m(Z)$ *в репере 1-го порядка задается дифференциальными уравнениями (1.1), (1.2) и соотношениями (1.3).*

§ 2. Теорема существования

Теорема 2. *В аффинном пространстве* A_n *гиперполосное распределение* $H_m(Z)$ *существует и определяется с произволом* $2r(m-r)+(n-m)+m(n-m-1)$ *функций* m *аргументов.*

Доказательство. Все уравнения, входящие в чистое замыкание системы (1.1), можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\Delta b^n_{pq} \wedge \omega^q = 0, \Delta\lambda^a_{pi} \wedge \omega^i = 0, \\ &\Delta b^n_{ab} \wedge \omega^b = 0, \Delta\lambda^p_{ai} \wedge \omega^i = 0, \\ &\Delta b^\alpha_{pq} \wedge \omega^q = 0, \Delta\lambda^a_{\alpha i} \wedge \omega^i = 0, \\ &\Delta b^\alpha_{ab} \wedge \omega^b = 0, \Delta\lambda^p_{\alpha i} \wedge \omega^i = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\Delta b^n_{pq} = \nabla b^n_{pq}, \quad \Delta\lambda^a_{pi} = \nabla\lambda^a_{pi} + b^n_{pq}\delta^q_i\omega^a_n,$$

$$\Delta b^n_{ab} = \nabla b^n_{ab}, \quad \Delta\lambda^p_{ai} = \nabla\lambda^p_{ai} + b^n_{ac}\delta^c_i\omega^p_n,$$

$$\Delta b^\alpha_{pq} = \nabla b^\alpha_{pq} + b^n_{pq}\omega^\alpha_n, \quad \Delta\lambda^a_{\alpha i} = \nabla\lambda^a_{\alpha i},$$

$$\Delta b^\alpha_{ab} = \nabla b^\alpha_{ab} + b^n_{ab}\omega^\alpha_n, \quad \Delta\lambda^p_{\alpha i} = \nabla\lambda^p_{\alpha i}.$$

Исследуем систему (2.1). Количество независимых функций, входящих в эту систему, равно

$$q = m^2 + 2m^2(n-m-1) + 2r\,m(m-r).$$

Введем обозначения: $A = 2sr + m(n-m-1)$, $s = m - r$.

Найдем характеры системы (2.1):

$$S_1 = rangM_1 = r(n-m) + s(n-m) + A,$$

$$S_2 = rangM_2 - rangM_1 = (r-1)(n-m) + (s-1)(n-m) + A,$$

$$S_3 = (r-2)(n-m) + (s-2)(n-m) + A,$$

$$\ldots$$

$$S_r = 1(n-m) + (m-2r+1)(n-m) + A,$$

$$S_{r+1} = (m-2r)(n-m) + A,$$

$$\ldots$$

$$S_m = 1(n-m) + A.$$

Подсчитаем число Картана для системы (2.1):

$$Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 + \cdots + mS_m =$$

$$= r(n-m)\frac{r(1+r)}{2} + s(n-m)\frac{s(1+s)}{2} +$$

$$+2rs\frac{m(1+m)}{2} + m\frac{m(1+m)}{2}(n-m-1).$$

Разрешим систему (2.1) по лемме Картана:

$$\begin{aligned}
&\Delta b^n_{pq} = b^n_{pqt}\omega^t, \Delta\lambda^a_{pi} = \lambda^a_{pij}\omega^j,\\
&\Delta b^\alpha_{pq} = b^\alpha_{pqt}\omega^t, \Delta\lambda^p_{ai} = \lambda^p_{aij}\omega^j,\\
&\Delta b^n_{ab} = b^n_{abc}\omega^c, \Delta\lambda^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha ij}\omega^j,\\
&\Delta b^\alpha_{ab} = b^\alpha_{abc}\omega^c, \Delta\lambda^p_{\alpha i} = \lambda^p_{\alpha ij}\omega^j.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Найдем число линейно независимых функций, стоящих в правых частях системы (2.2):

$$N = r(n-m)\frac{r(1+r)}{2} + s(n-m)\frac{s(1+s)}{2} +$$

$$+2rs\frac{m(1+m)}{2} + m\frac{m(1+m)}{2}(n-m-1).$$

Таким образом, $Q = N$. Данная система находится в инволюции [2; 14; 16]. Следовательно, в аффинном пространстве A_n гиперполосное распределение $H_m(Z)$ существует и определяется с произволом $2r(m-r)+(n-m)+m(n-m-1)$ функций m аргументов.

§ 3. Построение инвариантных полей геометрических объектов 1-го и 2-го порядка гиперполосного распределения $H_m(Z)$

Для невырожденных тензоров b^n_{pq} и b^n_{ab} (§ 1) можно построить обратные им тензоры b^{pq}_n и b^{ab}_n, компоненты которых удовлетворяют условиям

$$b^n_{pq}b^{qt}_n = \delta^t_p,\ \nabla b^{qt}_n + b^{qs}_n b^{tr}_n b^n_{sri}\omega^i = 0, \tag{3.1}$$

$$b^n_{ab}b^{bc}_n = \delta^c_a, \nabla b^{bc}_n + b^{ba}_n b^{cd}_n b^n_{adi}\omega^i = 0.$$

Построим геометрические объекты 1-го порядка, ассоциированные с Λ-, L-подрасслоениями гиперполосного распределения $H_m(Z)$:

$$\Lambda^\alpha_n = \frac{1}{r}b^\alpha_{pq}b^{pq}_n,\ \ L^\alpha_n = \frac{1}{m-r}b^\alpha_{ab}b^{ab}_n,$$

удовлетворяющие в силу (1.2.b) и (3.1) уравнениям

$$\nabla\Lambda^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{ni}\omega^i,\ \ \nabla L^\alpha_n + \omega^\alpha_n = L^\alpha_{ni}\omega^i. \tag{3.2}$$

Предварительно заметим, что, замыкая уравнения (1.2.b), получим

$$\nabla b^n_{pqi} - b^n_{sq} b^n_{pi} \omega^s_n - b^n_{ps} b^n_{qi} \omega^s_n - b^n_{pq} b^n_{ij} \omega^j_n = b^n_{pqij} \omega^j \quad (3.3)$$

$$\nabla b^n_{abi} - b^n_{cb} b^n_{ai} \omega^c_n - b^n_{ac} b^n_{bi} \omega^c_n - b^n_{ab} b^n_{ij} \omega^j_n = b^n_{abij} \omega^j.$$

Введем [9] в рассмотрение функции 2-го порядка:

$$B_i = b^n_{pqi} b^{pq}_n, \; b_i = b^n_{abi} b^{ba}_n,$$

для которых в силу (1.2.b), (3.1), (3.3) выполняются условия

$$\nabla B_i = 2 b^n_{pi} \omega^p_n + r b^n_{ij} \omega^j_n + B_{ij} \omega^j, \quad (3.4)$$

$$\nabla b_i = 2 b^n_{ai} \omega^a_n + (m-r) b^n_{ij} \omega^j_n + b_{ij} \omega^j.$$

Составим величины

$$F_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r+2} b^n_{sqp} b^{qs}_n = \frac{1}{r+2} B_p, \; t_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m-r} b^n_{abp} b^{ba}_n = \frac{1}{s} b_p, \quad (3.5)$$

$$F_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} b^n_{pqa} b^{qp}_n = \frac{1}{r} B_a, \; t_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s+2} b^n_{cba} b^{bc}_n = \frac{1}{s+2} b_a,$$

удовлетворяющие в силу (3.4) уравнениям

$$\nabla F_p = b^n_{ps} \omega^s_n + F_{pi} \omega^i, \nabla t_p = b^n_{pq} \omega^q_n + t_{pi} \omega^i, \quad (3.6)$$

$$\nabla F_a = b^n_{ac} \omega^c_n + F_{ai} \omega^i, \nabla t_a = b^n_{ac} \omega^c_n + t_{ai} \omega^i.$$

Величины 2-го порядка $F_i = \{F_p, F_a\}$ и $t_i = \{t_p, t_a\}$, согласно (3.6), удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\nabla F_i = b^n_{ij} \omega^j_n + F_{ij} \omega^j, \nabla t_i = b^n_{ij} \omega^j_n + t_{ij} \omega^j.$$

Используя величины 2-го порядка (3.5), построим [9] геометрические объекты следующего вида:

$$F^p_n = -b^{pq}_n F_q, \; t^p_n = -b^{pq}_n t_q,$$

$$F^a_n = -b^{ab}_n F_b, \; t^a_n = -b^{ab}_n t_b,$$

где

$$\nabla F_n^p + \omega_n^p = F_{ni}^p \omega^i, \ \ \nabla t_n^p + \omega_n^p = t_{ni}^p \omega^i, \tag{3.7}$$

$$\nabla F_n^a + \omega_n^a = F_{ni}^a \omega^i, \ \ \nabla t_n^a + \omega_n^a = t_{ni}^a \omega^i.$$

Геометрические объекты F_n^p, F_n^a, t_n^p, t_n^a порождают в дифференциальной окрестности 2-го порядка квазитензоры:

$$F_n^i = \{F_n^a, F_n^p\}, \nabla F_n^i + \omega_n^i = F_{nj}^i \omega^j, \tag{3.8}$$

$$t_n^i = \{t_n^a, t_n^p\}, \nabla t_n^i + \omega_n^i = t_{nj}^i \omega^j.$$

В результате имеет место теорема 3.

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 1-го порядка поля (3.2) квазитензоров $\{\Lambda_n^\alpha\}$, $\{L_n^\alpha\}$ задают, соответственно, поля нормалей 1-го рода распределения характеристик гиперполосного распределения $H_m(Z)$.*

Поля (3.7), (3.8) квазитензоров $\{F_n^p\}$, $\{t_n^p\}$, $\{F_n^a\}$,$\{t_n^a\}$, $\{F_n^i\}$, $\{t_n^i\}$ задают в дифференциальной окрестности 2-го порядка соответственно поля нормалей 1-го рода Λ-, L-, T-подрасслоений гиперполосного распределения $H_m(Z)$.

§ 4. Нормализация Трансона гиперполосного распределения $H_m(Z)$

Согласно теореме Трансона [6], для регулярных гиперполос аффинные нормали всех плоских сечений гиперповерхности V_{n-1}^r $(r+1)$-мерными плоскостями, проходящими через плоскость $\Lambda(A)$, лежат в $(n-r)$-мерной плоскости $T_{n-r}(A) = \left[A, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_a, \bar{e}_n + +T_n^p \bar{e}_p\right]$, то есть в нормали Трансона Λ-подрасслоения. Аналогичным образом нормалью Трансона Λ-подрасслоения оснащенного гиперполосного распределения $H_m(Z)$ является $(n-s)$-мерная плоскость $T_{n-s}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_p, \bar{e}_n + T_n^a \bar{e}_a]$, где $s = m - r$.

Введем в рассмотрение квазитензоры $\{T_n^i\} \overset{\text{def}}{=} \{T_n^a, T_n^p\}, \{\lambda_n^\alpha\}$:

$$\nabla T_n^i + \omega_n^i = T_{nj}^i \omega^j, \quad \nabla \lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \lambda_{nj}^\alpha \omega^j, \tag{4.1}$$

где

$$T_n^p \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{r+2} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp}, \quad T_n^a \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{s+1} b_n^{db} b_{dbc}^n b_n^{ca}, \tag{4.2}$$

$$\lambda_n^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}(b_n^{pq} \lambda_{pq}^\alpha + b_n^{ab} \lambda_{ab}^\alpha).$$

Определение 1. *Нормалью Трансона гиперполосного распределения* $H_m(Z)$ назовем $(n-m)$-мерную плоскость $T_{n-m}(A) = T_{n-r}(A) \cap T_{n-s}(A)$ — плоскость пересечения нормалей Трансона Λ-, L-подрасслоений. Прямую $T_1(A) = [A,\ \bar{T}_n]$, где $\bar{T}_n = T_n^p \bar{e}_p + T_n^a \bar{e}_a + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{e}_n$, назовем *прямой Трансона гиперполосного распределения* $H_m(Z)$ в точке A.

Из определения 1 вытекает строение нормали Трансона гиперполосного распределения $H_m(Z)$: $T_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{T}_n]$.

Известно [10], что между нормалями 1-го и 2-го рода гиперполосного распределения $H_m(Z)$ существует соответствие Бомпьяни — Пантази

$$\nu_i = b_{ik}^n \nu_n^k + t_i, \quad \nabla \nu_i = \nu_{ik} \omega^k.$$

Определение 2. Нормаль 2-го рода гиперполосного распределения $H_m(Z)$, определяемую квазитензором

$$T_i = b_{ik}^n T_n^k + t_i, \nabla T_i = T_{ik} \omega^k, \tag{4.3}$$

назовем *нормалью Трансона 2-го рода гиперполосного распределения* $H_m(Z)$.

Уравнение (4.2) можно расписать на две группы уравнений, ассоциированных соответственно с Λ-, L-подрасслоениями:

$$T_p = b_{pq}^n T_n^q + t_p, \ \nabla T_p = T_{pk} \omega^k, \tag{4.4}$$

$$T_a = b_{ac}^n T_n^c + t_a, \ \nabla T_a = T_{ak} \omega^k. \tag{4.5}$$

Из дифференциальных уравнений (4.1)—(4.5), согласно приведенным выше определениям вытекает теорема 4.

Теорема 4. *Поля геометрических объектов* $\{T_n^i, T_i\}$, $\{T_n^p, T_p\}$, $\{T_n^a, T_a\}$ *задают в дифференциальной окрестности 2-го порядка поля нормализаций в смысле Трансона гиперполосного распределения* $H_m(Z)$ *и* Λ-, L-*подрасслоений соответственно. При этом нормализация Трансона* $\{T_n^i, T_i\}$ *гиперполосного распределения* $H_m(Z)$ *порождает нормализации Трансона* Λ-, L-*подрасслоений. Верно и обратное утверждение.*

Выясним условия совпадения [11] нормалей Трансона $T_{n-m}(A)$ и Бляшке $B_{n-m}(A)$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$.

Нормаль Бляшке [3; 4] $B_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{b}_n]$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$, где $\bar{b}_n = b_n^p \bar{e}_p + b_n^a \bar{e}_a + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{e}_n$, в дифференциальной окрестности 2-го порядка определяется квазитензорами $\{b_n^p, b_n^a, \lambda_n^\alpha\}$:

$$b_n^p = -\frac{1}{m-r} b_n^{bd} b_{bdq}^n b_n^{qp}, \quad b_n^a = -\frac{1}{r} b_n^{pq} b_{pqc}^n b_n^{ca}. \tag{4.6}$$

Прямую $B_1(A) = [A,\ \bar{b}_n]$ назовем прямой Бляшке гиперполосного распределения $H_m(Z)$ в точке A. Тогда нормаль Бляшке $B_{n-m}(A)$ в каждой точке A натянута на характеристику $X_{n-m-1}(A)$ и прямую Бляшке $B_1(A)$, то есть $B_{n-m}(A) =$ $= [B_1(A), X_{n-m-1}(A)]$.

Пусть нормаль Трансона $T_{n-m}(A)$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$ совпадает с нормалью Бляшке $B_{n-m}(A)$. Тогда $\bar{T}_n = \bar{b}_n$, что равносильно условиям $T_n^p = b_n^p$, $T_n^a = b_n^a$. Используя (4.2), (4.6), запишем:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{m-r} b_n^{bd} b_{bdq}^n b_n^{qp} = -\dfrac{1}{r+2} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp}, \\ -\dfrac{1}{r} b_n^{pq} b_{pqc}^n b_n^{ca} = -\dfrac{1}{s+2} b_n^{bd} b_{bdc}^n b_n^{ca}, \end{cases}$$

что равносильно соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m-r} b_n^{bd} b_{bdp}^n = \dfrac{1}{r+2} b_n^{st} b_{stp}^n, \\ \dfrac{1}{r} b_n^{pq} b_{pqa}^n = \dfrac{1}{s+2} b_n^{cd} b_{cda}^n. \end{cases}$$

Учитывая (3.5), получим

$$\begin{cases} F_p = t_p, \\ F_a = t_a. \end{cases} \Leftrightarrow F_i = t_i. \tag{4.7}$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *Нормаль Трансона $T_{n-m}(A)$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$ совпадает с нормалью Бляшке $B_{n-m}(A)$ [6] тогда и только тогда, когда выполняются условия (4.7).*

Список литературы

1. *Акивис М.А.* О строении двухкомпонентных сопряженных систем // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 7—31.

2. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

3. *Бляшке В.* Введение в дифференциальную геометрию. М., 1957.

4. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторнрму и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 197—272.

5. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

6. *Лисицына И.Е.* Нормализация Тренсона гиперполосы H_m аффинного пространства // ДГМФ. 1998. Вып. 29. С. 38—40.

7. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 4. С. 7—70.

8. *Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение аффинного пространства // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 203. С. 84—99.

9. *Попов Ю.И.* Гиперполосные распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

10. *Попов Ю.И.* Введение в теорию регулярного гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. №10. С. 49—56.

11. *Попов Ю.И.* Специальные классы гиперполосного распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

12. *Столяров А.В.* Дифференциальная геометрия полос // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т. 10. С. 25—54.

13. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

14. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.

15. *An-Min L., Udo S., Guosong Zh., Zejun H.* Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces. De Gruyter, 2015 (Expositions in Mathematics ; vol. 11).

16. *Ivey Th.A., Landsberg J.M.* Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems. Amer. Math. Society, 2003 (Graduate Studies in Mathematics ; vol. 61).

Для цитирования: *Елисеева Н.А., Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение, оснащенное полем сопряженных плоскостей // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 78—91. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-8.

MSC 2010: 58A05, 53A20

N.A. Eliseeva[1], *Yu.I. Popov*[2]
[1] *Kaliningrad State Technical University*
1, Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
[2] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14, A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-8

Hyperband distribution equipped with a field of conjugate planes

Submitted on May 8, 2023

In this paper, we study a special class of hyperbands, i.e., a framed hyperband distribution. The study of hyperbands and their generalizations in spaces with different fundamental groups is of great interest in connection with numerous applications in mathematics and physics. A special place is occupied by regular hyperstrips, for which the characteristic planes of families of principal tangent hyperplanes do not contain directions tangent to the basal surface of the hyperstrip. In this paper, we use the method of external differential forms of E. Cartan and the group-theoretic method of G. F. Laptev.

We consider a regular hyperband distribution of an affine space equipped with a field of conjugate planes with respect to an asymptotic bundle of tensors of the basic surface. The definition of the studied hyperband distribution in the affine space with respect to the 1st order frame is given and the existence theorem is proved. A sequence of fundamental geometric objects of the 1st and 2nd order of a hyperband distribution equipped with a field of conjugate planes is constructed. Fields of quasitensors are constructed that define the fields of normals of the first kind of the distribution of the characteristics of the hyperband distribution. In a differential neighborhood of the 2nd order, the fields of Transon normals of the 1st and 2nd kind are constructed. The conditions for the coincidence of the Transon normal and the Blaschke normal are found.

Keywords: hyperband, regular hyperband, hyperband distribution, affine space, normalization

References

1. *Akivis, M.A.:* On the structure of two-component conjugate systems. Tr. Geom. Sem., 1, 7—31 (1966).

2. *Akivis, M.A., Rosenfeld B.A.:* Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

3. *Blaschke, V.:* Introduction to differential geometry. Moscow (1957).

4. *Vagner, V.V.:* The theory of the field of local hyperbands. Tr. Semin. Vectorn. Tensorn. Anal., 8, 197—272 (1950).

5. *Laptev, G.F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

6. *Lisitsina, I. E.:* Transon normalization of a hyperband H_m of an affine space. DGMF, 29, 38—40 (1998).

7. *Ostianu, N.M., Ryzhkov, V.V., Shveikin P.I.:* Outline of scientific research by German Fedorovich Laptev. Tr. Geom. Sem., 4, 7—70 (1973).

8. *Popov, Yu.I.:* Hyperband distribution of an affine space. Itogi Nauki i Tekhn. 203, 84—99 (2021).

9. *Popov, Yu.I.:* Hyperband distributions of affine space. Kaliningrad (2021).

10. *Popov, Yu.I.:* Introduction to the theory of a regular hyper-band distribution of an affine space. IKBFU's Vestnik. 10, 49—56 (2013).

11. *Popov, Yu.I.:* Special classes of hyperband distribution of an affine space. Kaliningrad (2021).

12. *Stolyarov, A.V.:* Differential geometry of stripes. Problems of Geom., 10, 25—54 (1978).

13. *Stolyarov, A.V.:* Projective-differential geometry of a regular hyperband distribution of m-dimensional linear elements. Problems of Geom. 7, 117—151 (1975).

14. *Finikov, S.P.:* Cartan's exterior form method in differential geometry. Moscow (1948).

15. *An-Min, L., Simon, U., Guosong, Zh., Zejun, H.:* Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces, De Gruyter (Expositions in Mathematics, 11) (2015).

16. *Ivey, Th.A., Landsberg, J.M.:* Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems, Amer. Math. Soc. (Graduate Studies in Mathematics, 61) (2003).

For citation: Eliseeva, N.A., Popov, Yu.I. Hyperband distribution equipped with a field of conjugate planes. DGMF, 54 (1), 78—91 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-8.

Published since 1970.
Indexing: MathSciNet (American Mathematical Society),
ZBMATH — The database Zentralblatt MATH.
Frequency — twice a year (from 2023)

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

Put to the Press:
October 4, 2023

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2023

№ 54 (1)

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 13.10.2023 г.
Дата выхода в свет 01.11.2023 г.
Формат $60{\times}90^1/_{16}$. Усл. печ. л. 5,8
Тираж 300 экз. (1-й завод 50 экз.). Заказ 102

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14