ISSN 0321-4796

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

IMMANUEL KANT BALTIC FEDERAL UNIVERSITY

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2022

№ 53

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта

Immanuel Kant Baltic Federal University Press

2022

(12+)

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2022. — №53. — 161 с.

Редакционная коллегия

В. С. Малаховский, проф., засл. деятель науки РФ, отв. редактор (Калининград, Россия); *Ю. И. Шевченко*, проф., отв. секретарь (Калининград, Россия); *В. Балан,* проф. (Бухарест, Румыния); *В. В. Балащенко,* проф. (Минск, Беларусь); *Ш. Бачо,* проф. (Дебрецен, Венгрия); *О. О. Белова,* доц., отв. секретарь (Калининград); *Р. Бешимов,* проф. (Ташкент, Узбекистан); *Т. Бокелавадзе,* проф. (Кутаиси, Грузия); *Л. Велимирович,* проф. (Ниш, Сербия); *И. Гинтерлейтнер,* проф. (Брно, Чехия); *В. А. Игошин,* проф. (Н. Новгород); *Б. Кирик Рац,* проф. (Стамбул, Турция); *М. В. Кретов,* доц. (Калининград); *Й. Микеш,* проф. (Оломоуц, Чехия); *В. А. Мирзоян,* проф. (Ереван, Армения); *П. Т. Надь,* проф. (Будапешт, Венгрия); *К. В. Полякова,* доц., отв. секретарь (Калининград); *Ю. И. Попов,* проф. (Калининград); *В. Ровенский,* проф. (Хайфа, Израиль); *Л. Л. Сабинина,* проф. (Куэрнавака, Мексика); *С. Е. Степанов,* проф. (Москва); *Дж. Фальконе,* проф. (Палермо, Италия); *А. Фигула,* проф. (Дебрецен, Венгрия); *Г. С. Холл,* проф. (Абердин, Шотландия); *А. М. Шелехов,* проф. (Москва, Россия)

Входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH

Учредитель

Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Редакция

236016, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Издатель

236016, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Типография

236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Тираж 300 экз.
Дата выхода в свет 09.11.2022 г.

© БФУ им. И. Канта, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 514.76

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-1

О квазисасакиевой структуре на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры Кэли

Доказано, что квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав является сасакиевой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, квазисасакиева структура, сасакиева структура, вполне омбилическая гиперповерхность, 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли

1. В 60-х годах XX века знаменитый американский геометр Альфред Грей задал особое направление в области эрмитовой геометрии 6-мерных многообразий. Грей установил [1], что так называемые 3-векторные произведения в алгебре Кэли порождают на ее 6-мерных подмногообразиях почти эрмитову структуру. Спустя десятилетие к изучению таких почти эрмитовых структур приступил выдающийся отечественный геометр Вадим Федорович Кириченко, а затем и его ученики. Один из самых значительных результатов, полученных В. Ф. Кириченко в данной области, — это полная классификация 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав [2].

Поступила в редакцию 26.06.2022 г.
© Банару Г. А., 2022

В работе [3] В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару ввели понятие уплощающегося эрмитова подмногообразия алгебры Кэли. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся и все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав. При этом важно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с эрмитовой структурой, отличной от келеровой [3; 4].

В данной заметке мы рассматриваем почти контактную метрическую структуру на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав. Получен такой результат:

Теорема. *Квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры Кэли является сасакиевой.*

Таким образом, 6-мерные эрмитовы уплощающиеся подмногообразия алгебры Кэли обладают свойством, присущим 6-мерным келеровым подмногообразиям алгебры октав [5]. Сходство (и даже совпадение) разнообразных свойств 6-мерных эрмитовых уплощающихся и 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав было отмечено и в других работах (см., например, [6—9]).

2. Известно, что почти контактная метрическая (almost contact metric, acm-) структура индуцируется на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий исследовались и исследуются многими геометрами.

Напомним, что acm-структурой на многообразии N нечетной размерности называется система тензорных полей $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, для которой выполняются такие условия [10]:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle \Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Самым известным примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура [10], которая характеризуется следующими тождествами:

$$\nabla\eta=0, \quad \nabla\Phi=0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g. Известно, что многообразие с косимплектической структурой локально эквивалентно произведению некоторого келерова многообразия и вещественной прямой [10].

Напомним определение другого важнейшего вида почти контактной метрической структуры: структура (Φ,ξ,η,g) называется квазисасакиевой, если ее фундаментальная форма $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ замкнута и выполняется условие

$$N_\Phi+\frac{1}{2}d\eta\otimes\xi=0,$$

где N_Φ — тензор Нейенхейса оператора Φ.

Самой значительной работой в области геометрии квазисасакиевых структур является, по нашему мнению, статья В.Ф. Кириченко и А.Р. Рустанова [11].

3. Приведем краткое доказательство теоремы. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав [6; 7]:

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta+i\sigma^\alpha_\beta\omega^\beta\wedge\omega+i\sigma^{\alpha\beta}\omega_\beta\wedge\omega;\\
d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta-i\sigma^\beta_\alpha\omega_\beta\wedge\omega-i\sigma_{\alpha\beta}\omega^\beta\wedge\omega; \qquad (1)\\
d\omega &= -i\sigma^\alpha_\beta\,\omega^\beta\wedge\omega_\alpha+i\sigma_{3\beta}\omega\wedge\omega^\beta-i\sigma^\beta_3\,\omega\wedge\omega_\beta.
\end{aligned}$$

Здесь через $\{\omega^{\alpha}\}$, $\{\omega_{\alpha}\}$ обозначены компоненты форм смещения $(\omega^{3}=\omega)$; через $\{\omega_{j}^{k}\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_{\alpha}=\omega^{\hat{a}}$; $\alpha,\ \beta,\gamma=1,2$; $a,\ b,c=1,2,3$; $\hat{a}=a+3$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N в 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли.

Сопоставим эти уравнения со структурными уравнениями квазисасакиевой структуры [5; 10]:

$$d\omega^{\alpha}=\omega_{\beta}^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}+B_{\beta}^{\alpha}\omega^{\beta}\wedge\omega;$$

$$d\omega_{\alpha}=-\omega_{\alpha}^{\beta}\wedge\omega_{\beta}-B_{\alpha}^{\beta}\omega_{\beta}\wedge\omega;$$

$$d\omega=2B_{\beta}^{\alpha}\omega^{\beta}\wedge\omega_{\alpha}.$$

Следовательно,

$$1)\ \sigma_{\alpha\beta}=0;\ 2)\ \sigma^{\alpha\beta}=0;\ 3)\ \sigma_{3}^{\beta}=0;\ 4)\ \sigma_{3\beta}=0.$$

Это означает, что матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности N в 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли выглядит так:

$$\left(\sigma_{ps}\right)=\left(\begin{array}{cc|c|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\sigma_{\alpha\hat{\beta}}}} \\ & & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{\sigma_{\hat{\alpha}\beta}}} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ & & 0 & & \end{array}\right),\quad p,s=1,\ldots,5.$$

Пусть гиперповерхность 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав является вполне омбилической: $\sigma_{ps}=\lambda g_{ps},\lambda-const$. Принимая во внимание вид матрицы метрического тензора:

$$
\left(g_{ps}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c}
 & 0 & \\
\mathbf{0} & \dots & I_2 \\
 & 0 & \\
\hline
0\dots0 & 1 & 0\dots0 \\
\hline
 & 0 & \\
I_2 & \dots & \mathbf{0} \\
 & 0 &
\end{array}\right),
$$

мы приходим к выводу о том, что «блоки» $(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$ и $(\sigma_{\alpha\hat{\beta}})$ матрицы второй квадратичной формы погружения вполне омбилической гиперповерхности N в 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли имеют соответственно следующий вид: $\sigma_{\hat{\alpha}\beta} = i\,\delta^{\alpha}_{\beta}$, $\sigma_{\alpha\hat{\beta}} = -i\,\delta^{\beta}_{\alpha}$. Поэтому структурные уравнения (1) можно в данном случае переписать так:

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} - i\omega \wedge \omega^{\alpha};$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + i\omega \wedge \omega_{\alpha};$$

$$d\omega = -2i\omega^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha}.$$

Хорошо известно [5; 11], что полученные структурные уравнения задают сасакиеву структуру. Это означает, что квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав является сасакиевой, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 141. P. 465—504.

2. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

3. *Банару М.Б., Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. №1. С. 205—206.

4. *Banaru M.B.* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, №3. P. 354—388.

5. *Степанова Л.В., Банару Г.А. Банару М.Б.* О геометрии *QS*-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 815—822.

6. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

7. *Banaru M.B., Banaru G.A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

8. *Банару М.Б. Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 21—25.

9. *Банару М.Б. Банару Г.А.* Об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. Калининград, 2021. Вып. 52. С. 23—29.

10. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

11. *Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р.* Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Матем. сб. 2002. Т. 193, №8. С. 71—100.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53B35, 53B50

G.A. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-1

On quasi-Sasakian structure on a totally umbilical hypersurface of a six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra

Submitted on June 26, 2022

Six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra equipped with almost Hermitian structures induced by Brown — Gray three-fold vector cross products in R^8 are considered.

We select the case when the almost Hermitian structures on such six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra are Hermitian, i. e. these structures are integrable. We study almost contact metric structures on totally umbilical hypersurfaces in such six-dimensional Hermitian planar submanifolds of the octave algebra.

We prove that if these almost contact metric structures on a totally umbilical hypersurface of a six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra are quasi-Sasakian, then they are Sasakian.

Keywords: almost contact metric structure, quasi-Sasakian structure, Sasakian structure, totally umbilical hypersurface, six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra

References

1. *Gray, A.:* Vector cross products on manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 141, 465—504 (1969).

2. *Kirichenko, V. F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).

3. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Russian Mathematical Surveys, **49**:1, 223—225 (1994).

4. *Banaru, M. B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci. (New York). **207**:3, 354—388 (2015).

5. *Stepanova, L. V., Banaru, G. A., Banaru, M. B.:* On geometry of *QS*-hypersurfaces of Kählerian manifolds. Siberian Electronic Mathematical Reports, 15, 815—822 (2018).

6. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Bul. Acad. Ştiinţe a Repub. Moldova. Mat., **1**:74, 23—32 (2014).

7. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. SUT J. Math., **51**:1, 1—9 (2015).

8. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF. Kaliningrad. 48, 21—25 (2017).

9. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* On stability of Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF. Kaliningrad. 52, 23—29 (2021).

10. *Kirichenko, V. F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

11. *Kirichenko, V. F., Rustanov, A. R.:* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. Sb. Math., **193**:8, 1173—1202 (2002).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

М. Б. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-2

Заметка о проблеме Грея

Рассматривается проблема Грея о существовании собственного почти келерова многообразия. Доказано, что 6-мерное типа Риччи локально симметрическое почти эрмитово подмногообразие алгебры октав не допускает собственной почти келеровой структуры.

Ключевые слова: проблема Грея, почти эрмитова структура, почти келерово многообразие, 6-мерное типа Риччи локально симметрическое почти эрмитово подмногообразие алгебры Кэли

Среди выделенных Альфредом Греем и Луисом М. Херреллой классов почти эрмитовых многообразий [1] более других изучены так называемые малые классы. Это классы келеровых, приближенно келеровых, почти келеровых, специальных эрмитовых и локально конформных келеровых многообразий. Отметим, что класс почти келеровых (almost Kählerian, AK-) многообразий продолжает оставаться предметом интенсивных исследований и в настоящее время, уступая, быть может, по популярности лишь классу приближенно келеровых многообразий. Этот факт обусловлен, среди прочего, тем, что с классом AK-многообразий связана одна из интереснейших задач эрмитовой геометрии — так называемая проблема Грея. Более пятидесяти лет тому назад Альфред Грей обратил внимание на то, что не известно ни одного примера собственного (то есть отличного от келерова) 6-мерного почти келерова многообразия [2]. А. Грей предположил, что 6-мерное много-

Поступила в редакцию 26.06.2022 г.
© Банару М. Б., 2022

образие с отличной от келеровой почти келеровой структурой просто не существует. Однако ни указать пример 6-мерного собственного АК-многообразия и тем самым опровергнуть гипотезу, ни доказать предположение Грея до сих пор никому не удалось.

Работы по геометрии АК-многообразий посвящены в основном 4-мерным многообразиям (напомним, что почти эрмитова структура как частный вид почти комплексной структуры может быть реализована только на многообразиях четной размерности). Но время от времени появляются и результаты, так или иначе связанные с проблемой Грея. Например, один из ведущих специалистов в области геометрии 4-мерных АК-многообразий, английский математик Джон Армстронг, 20 лет назад получил красивый результат, приближающий решение проблемы Грея. Он доказал, что собственная почти келерова структура не может быть индуцирована на 6-мерном многообразии Эйнштейна [3]. Другие полученные к настоящему времени результаты в данном направлении имеют аналогичные формулировки: если 6-мерное многообразие обладает некоторыми дополнительными свойствами, то оно не допускает собственной почти келеровой структуры (не вдаваясь в детали, сошлемся на обзор [4]). В данной заметке мы приведем еще один результат такого же типа.

Напомним основные определения. Почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на многообразии M^{2n} называется упорядоченная пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (АН-) многообразием. С каждой АН-структурой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана 2-форма (ее называют фундаментальной формой почти эрмитовой структуры), определяемая равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}) .$$

Почти эрмитова структура называется почти келеровой, если $d\,F = 0$ [1].

Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ — общее 6-мерное подмногообразие алгебры октав. Напомним, что точка $p \in M^6$ называется специальной, если

$$T_p(M^6) \subset L(e_0)^{\perp} ,$$

где $L(e_0)^{\perp}$ — ортогональное дополнение единицы алгебры октав. В противном случае точка p называется простой. Ясно, что совокупность всех простых точек M^6 представляет собой открытое подмногообразие $M_0^6 \subset M^6$, на котором канонически индуцируется распределение Z, порожденное ортогональными проекциями вектора e_0 на касательное пространство $T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$. Такое распределение Z, а также одномерное пространство $Z_p \in T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$, называют исключительными [4].

В работе [5] В.Ф. Кириченко ввел понятие 6-мерного подмногообразия типа Риччи алгебры октав: подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется подмногообразием типа Риччи, если кривизна Риччи в каждой точке $p \in M_0^6$ в направлении исключительного пространства Z_p принимает минимальное значение.

В этой же работе получена полная классификация локально-симметрических почти эрмитовых подмногообразий $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи: почти эрмитово локально-симметрическое подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи локально голоморфно изометрично либо C^3 (тем самым являясь простейшим келеровым многообразием) либо произведению келеровых многообразий C^2 и CH^1, скрученному (warped) вдоль CH^1 (здесь C^n — n-мерное комплексное евклидово пространство, CH^1 — комплексное гиперболическое пространство).

Воспользуемся записанной в А-репере первой группой структурных уравнений почти эрмитовой структуры на 6-мерном типа Риччи локально симметрическом подмногообразии алгебры Кэли [6]:

$$d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1;$$

$$d\omega_1 = -\omega_1^1 \wedge \omega_1;$$

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{1\alpha\beta} D_{11} \omega^1 \wedge \omega_\beta; \qquad (1)$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{1\alpha\beta} D^{11} \omega_1 \wedge \omega^\beta.$$

Здесь и далее $\{\omega^k\}$ — компоненты форм смещения, $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности. Условимся, что здесь и далее $\alpha, \beta = 2, 3$; $a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; $k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$; $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера третьего порядка; $\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$; $D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}$; $D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + i T_{cj}^7$, $D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - i T_{\hat{c}j}^7$, где $\left\{T_{kj}^\varphi\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея) погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ [4].

Сопоставим эти уравнения со структурными уравнениями почти келеровой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b}D_h{}^{c]}\omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b}D^h{}_{c]}\omega^b \wedge \omega^c;$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b + i\,T^7_{b[d}D_{c]\hat{a}}\omega^c \wedge \omega^d + \qquad (2)$$

$$+(-\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg}D_{h\hat{c}}D_{\hat{g}d} + T^8_{\hat{a}d}T^8_{\hat{c}b} + T^7_{\hat{a}d}T^7_{\hat{c}b} - 2T^7_{\hat{a}\hat{c}}T^7_{bd})\omega_c \wedge \omega^d -$$

$$-i\,T^7_{\hat{a}[\hat{d}}D_{\hat{c}]b}\,\omega_c \wedge \omega_d,$$

где при этом $tr(D_{h\hat{c}}) = 0$.

Сравнив (1) и (2), мы можем сделать вывод о том, что локально-симметрическое почти келерово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи описывается структурными уравнениями Картана келеровой структуры [4]:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b\ ;$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b;$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - 2T^7_{\hat{a}\hat{h}}T^7_{bg}\,\omega_h \wedge \omega^g.$$

Отсюда мы заключаем, что имеет место следующая

Теорема. *6-мерное типа Риччи локально симметрическое почти эрмитово подмногообразие алгебры октав не допускает собственной почти келеровой структуры.*

Этот результат вместе с полученным ранее другим результатом аналогичного вида [7], не являясь решением проблемы Грея, на наш взгляд, в той или иной степени приближает тот момент, когда эта проблема будет решена полностью.

Список литературы

1. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.
2. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. Vol. 10, №2. P. 353—366.
3. *Armstrong J.* An ansatz for almost-Kähler, Einstein 4-manifolds // J. für die Reine und Angewandte Mathematik. 2002. Vol. 542. P. 53—84.
4. *Banaru M.* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, №3. P. 354—388.
5. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1994. №3. С. 6—13.
6. *Банару М. Б.* О локально симметрических 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 11—17.
7. *Banaru M.* On the type number of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Kyungpook Mathematical Journal. 2003. Vol. 43, №1. P. 27—35.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53C55, 53B35

M. B. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-2

A note on Gray problem

Submitted on June 26, 2022

We consider posed in 1960s Alfred Gray problem on the existence of a six-dimensional non-Kählerian almost Kählerian manifold.

We study six-dimensional almost Hermitian locally symmetric submanifolds of Ricci type of Cayley algebra (the notion of such six-dimensional submanifolds of the octave algebra was introduced by Vadim Feodorovich Kirichenko).

Our main result is the following: it is proved that a six-dimensional almost Hermitian locally symmetric submanifold of Ricci type of Cayley algebra does not admit a non-Kählerian almost Kählerian structure.

Keywords: Gray problem, almost Hermitian structure, almost Kählerian manifold, six-dimensional almost Hermitian locally symmetric submanifold of Ricci type of Cayley algebra

References

1. *Gray, A., Hervella, L.M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

2. *Gray, A.:* Some examples of almost Hermitian manifolds. Illinois J. Math., **10**:2, 353—366 (1966).

3. *Armstrong, J.:* An ansatz for almost-Kähler, Einstein 4-manifolds. J. für die Reine und Angewandte Mathematik, 542, 53—84 (2002).

4. *Banaru, M.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci. (New York). **207**:3, 354—388 (2015).

5. *Kirichenko, V.F.:* Hermitian geometry of six-dimensional symmetric submanifolds of the Cayley algebra. Moscow University Math. Bull. Ser. 1. Mat. Mekh., 3, 6—13 (1994).

6. *Banaru, M.B.:* On locally symmetric 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF. Kaliningrad. 47, 11—17 (2016).

7. *Banaru, M.:* On the type number of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Kyungpook Math. J., **43**:1, 27—35 (2003).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.75

О. О. Белова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-3

Обобщенная билинейная связность на пространстве центрированных плоскостей

Продолжается исследование пространства Π центрированных плоскостей в проективном пространстве P_n. В обобщенном расслоении задана билинейная связность, ассоциированная с пространством Π. Объект обобщенной билинейной связности, ассоциированный с пространством центрированных плоскостей, содержит два простейших подтензора и подквазитензоры (четыре простейших и три простых). Поле объекта этой связности определяет объекты кручения, кривизны-кручения и кривизны, последние два из которых являются тензорами. Тензор кривизны содержит шесть простейших и четыре простых подтензора, а тензор кривизны-кручения — три простейших и два простых подтензора.

Рассмотрен канонический случай обобщенной билинейной связности.

Ключевые слова: проективное пространство, пространство центрированных плоскостей, обобщенная билинейная связность, кручение, кривизна

В настоящей работе используются метод внешних форм Э. Картана [1; 16] и теоретико-групповой метод Г. Ф. Лаптева [7; 9; 13; 15] для исследования пространства центрированных плоскостей одной размерности [10].

Поступила в редакцию 28.12.2021 г.
© Белова О. О., 2022

Данные методы успешно применяются в физике [12].

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_i\}$ ($i, ... = 1, ..., n$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i, \ dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i, ω_j^i удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$:

$$\begin{gathered} D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \ D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j, \\ D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i. \end{gathered} \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим пространство Π центрированных плоскостей размерности m.

Помещаем вершину A в центр m-мерной плоскости, а вершины A_a на плоскость. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $a, b, ... = 1, ..., m$; $\alpha, \beta, ... = m+1, ..., n$. Центрированную плоскость будем обозначать P_m^*.

Из формул (1) очевидны уравнения стационарности плоскости P_m^*:

$$\omega^a = 0, \ \omega^\alpha = 0, \ \omega_a^\alpha = 0,$$

поэтому формы ω^a, ω^α, ω_a^α являются главными. Выбираем эти формы в качестве независимых.

Определение. Гладкое многообразие со структурными уравнениями

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^a,$$

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^a \wedge \omega_a^\alpha,$$

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \left(\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b\right) - \omega^\alpha \wedge \omega_a,$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a - \omega^c \wedge \left(\delta_c^a \omega_b + \delta_b^a \omega_c\right) - \delta_b^a \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha + \omega_b^\alpha \wedge \omega_\alpha^a ,$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_\beta^a \wedge \omega_a^\alpha + \delta_\beta^\alpha \omega_a \wedge \omega^a + \left(\delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta\right) \wedge \omega^\gamma$$

назовем обобщенным расслоением билинейных реперов и обозначим $A_{n^2-2k+[k]}$, где $k = m(n-m)$ (ср. [5; 8]).

Замечание. Символ k заключен в квадратные скобки, так как k форм ω_a^α являются и базисными, и слоевыми. Будем их называть базисно-слоевыми формами (см.: [8]).

В обобщенном расслоении $A_{n^2-2k+[k]}$ зададим билинейную связность [5] способом Лаптева — Лумисте [4; 7] с помощью форм плоскостной $\tilde{\omega}_b^a$ и нормальной $\tilde{\omega}_\beta^\alpha$ линейных связностей и форм $\tilde{\omega}_a^\alpha$:

$$\tilde{\omega}_a^\alpha = \omega_a^\alpha - G_{a\beta}^\alpha \omega^\beta - G_{ab}^\alpha \omega^b - G_{a\beta}^{\alpha b} \omega_b^\beta ,$$

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^a \omega^\alpha - \Gamma_{bc}^a \omega^c - \Gamma_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha , \tag{3}$$

$$\tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - \Gamma_{\beta a}^\alpha \omega^a - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma .$$

Вычисляем внешние дифференциалы форм (3), используя структурные уравнения (2) и применяем теорему Картана — Лаптева в обобщенном случае, тогда

$$\Delta G_{a\beta}^\alpha - G_{ab}^\alpha \omega_\beta^b + (G_{a\beta}^{\alpha b} - \delta_\beta^\alpha \delta_a^b)\omega_b = G_{a\beta,\gamma}^\alpha \omega^\gamma + G_{a\beta,b}^\alpha \omega^b + G_{a\beta,\gamma}^{\alpha,b} \omega_b^\gamma ,$$

$$\Delta G_{ab}^\alpha = G_{ab,\beta}^\alpha \omega^\beta + G_{ab,c}^\alpha \omega^c + G_{ab,\beta}^{\alpha,c} \omega_c^\beta ,$$

$$\Delta G_{a\beta}^{\alpha b} = G_{a\beta,\gamma}^{\alpha b} \omega^\gamma + G_{a\beta,c}^{\alpha b} \omega^c + G_{a\beta,\gamma}^{\alpha b,c} \omega_c^\gamma , \tag{4}$$

$$\Delta \Gamma_{bc}^a - \delta_b^a \omega_c - \delta_c^a \omega_b = \Gamma_{bc,\alpha}^a \omega^\alpha + \Gamma_{bc,e}^a \omega^e + \Gamma_{bc,\alpha}^{a,e} \omega_e^\alpha ,$$

$$\Delta \Gamma_{b\alpha}^a - \Gamma_{bc}^a \omega_\alpha^c + \Gamma_{b\alpha}^{ac} \omega_c - \delta_b^a \omega_\alpha = \Gamma_{b\alpha,\beta}^a \omega^\beta + \Gamma_{b\alpha,c}^a \omega^c + \Gamma_{b\alpha,\beta}^{a,c} \omega_c^\beta ,$$

$$\varDelta\varGamma^{ac}_{b\alpha} + \delta^c_b \omega^a_\alpha = \varGamma^{ac}_{b\alpha,\beta}\omega^\beta + \varGamma^{ac}_{b\alpha,e}\omega^e + \varGamma^{ac,e}_{b\alpha,\beta}\omega^\beta_e \ ,$$

$$\varDelta\varGamma^{\alpha}_{\beta a} - \delta^\alpha_\beta \omega_a = \varGamma^{\alpha}_{\beta a,\gamma}\omega^\gamma + \varGamma^{\alpha}_{\beta a,b}\omega^b + \varGamma^{\alpha,b}_{\beta a,\gamma}\omega^\gamma_b \ ,$$

$$\varDelta\varGamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \varGamma^{\alpha}_{\beta a}\omega^a_\gamma + \varGamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a - \delta^\alpha_\beta\omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\omega_\beta =$$

$$= \varGamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\mu}\omega^\mu + \varGamma^{\alpha}_{\beta\gamma,a}\omega^a + \varGamma^{\alpha,a}_{\beta\gamma,\mu}\omega^\mu_a \ ,$$

$$\varDelta\varGamma^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma \omega^a_\beta = \varGamma^{\alpha a}_{\beta\gamma,\mu}\omega^\mu + \varGamma^{\alpha a}_{\beta\gamma,b}\omega^b + \varGamma^{\alpha a,b}_{\beta\gamma,\mu}\omega^\mu_b \ ,$$

где в правых частях при базисных формах стоят пфаффовы производные, а оператор $\varDelta$ действует по закону (см., напр., [14])

$$\varDelta G^\alpha_{a\beta} = dG^\alpha_{a\beta} + G^\gamma_{a\beta}\omega^\alpha_\gamma - G^\alpha_{b\beta}\omega^b_a - G^\alpha_{a\gamma}\omega^\gamma_\beta \, .$$

Утверждение. *Объект обобщенной билинейной связности* $\overset{B}{\varGamma} = \{G^\alpha_{a\beta}, G^\alpha_{ab}, G^{\alpha b}_{a\beta}, \varGamma^a_{b\alpha}, \varGamma^a_{bc}, \varGamma^{ac}_{b\alpha}, \varGamma^\alpha_{\beta\gamma}, \varGamma^\alpha_{\beta a}, \varGamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$, *ассоциированной с пространством центрированных плоскостей, содержит два простейших [6] подтензора* $G^\alpha_{ab}, G^{\alpha b}_{a\beta}$ *простого [6] подквазитензора связности* $\{G^\alpha_{a\beta}, G^\alpha_{ab}, G^{\alpha b}_{a\beta}\}$, *четыре простейших подквазитензора* $\varGamma^a_{bc}$, $\varGamma^{ac}_{b\alpha}$, $\varGamma^\alpha_{\beta a}$, $\varGamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}$, *а также два простых подквазитензора* $\{\varGamma^a_{bc}, \varGamma^a_{b\alpha}, \varGamma^{ac}_{b\alpha}\}$ *и* $\{\varGamma^\alpha_{\beta a}, \varGamma^\alpha_{\beta\gamma}, \varGamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$.

Находим внешние дифференциалы базисных форм ω^a, ω^α с учетом выражений (3):

$$D\omega^\alpha = \omega^a \wedge \tilde{\omega}^\alpha_a + \omega^\beta \wedge \tilde{\omega}^\alpha_\beta + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^\alpha_{\beta a}\omega^\beta \wedge \omega^a +$$

$$+ S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma_a + S^\alpha_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + S^{\alpha b}_{a\beta}\omega^a \wedge \omega^\beta_b \ ,$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \tilde{\omega}^a_b + \omega^\alpha \wedge \omega^a_\alpha + S^a_{b\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha + S^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c +$$

$$+ S^{ac}_{b\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha_c \ ,$$

где компоненты кручения S находятся по формулам

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]},\ S^{\alpha}_{\beta a} = \Gamma^{\alpha}_{\beta a} - G^{\alpha}_{a\beta},\ S^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma},\ S^{\alpha}_{ab} = G^{\alpha}_{[ab]},$$

$$S^{\alpha b}_{a\beta} = G^{\alpha b}_{a\beta},\ S^{a}_{b\alpha} = \Gamma^{a}_{b\alpha},\ S^{a}_{bc} = \Gamma^{a}_{[bc]},\ S^{ac}_{b\alpha} = \Gamma^{ac}_{b\alpha}.$$

Здесь и далее квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам или парам индексов, например

$$\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\right),\ G^{\alpha}_{a}{}^{[b,c}_{[\beta,\gamma]} = \frac{1}{2}\left(G^{\alpha b,c}_{a\beta,\gamma} - G^{\alpha c,b}_{a\gamma,\beta}\right).$$

Компоненты объекта кручения S удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм

$$\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_a - \Gamma^{\alpha}_{[\beta a}\omega^{a}_{\gamma]} \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha}_{\beta a} - S^{\alpha b}_{a\beta}\omega_b + G^{\alpha}_{ab}\omega^{b}_{\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\,\omega^{a}_{\beta} \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha}_{ab} \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha b}_{a\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{a}_{b\alpha} + S^{ac}_{b\alpha}\omega_c - \Gamma^{a}_{bc}\omega^{c}_{\alpha} - \delta^{a}_{b}\,\omega_{\alpha} \equiv 0,\ \Delta S^{a}_{bc} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{ac}_{b\alpha} + \delta^{c}_{b}\omega^{a}_{\alpha} \equiv 0.$$

Утверждение. *Объект кручения S является геометрическим объектом (квазитензором) лишь в совокупности с объектом билинейной связности* $\overset{B}{\Gamma}$.

Учитывая дифференциальные уравнения (4) в структурных уравнениях форм связности (3), получим

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}_{a} = \tilde{\omega}^{b}_{a} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{b} + \tilde{\omega}^{\beta}_{a} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} + T^{\alpha}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + T^{\alpha}_{a\beta b}\omega^{\beta} \wedge \omega^{b} +$$

$$+ T^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}_{b} + T^{\alpha}_{abc}\omega^{b} \wedge \omega^{c} + T^{\alpha c}_{ab\beta}\omega^{b} \wedge \omega^{\beta}_{c} + T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta}_{b} \wedge \omega^{\gamma}_{c},$$

$$D\tilde{\omega}^{a}_{b} = \tilde{\omega}^{c}_{b} \wedge \tilde{\omega}^{a}_{c} + R^{a}_{b\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + R^{a}_{bc\alpha}\omega^{c} \wedge \omega^{\alpha} +$$

$$+ R^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{c} + R^{a}_{bce}\omega^{c} \wedge \omega^{e} + R^{ae}_{bc\alpha}\omega^{c} \wedge \omega^{\alpha}_{e} + R^{ace}_{b\alpha\beta}\omega^{\alpha}_{c} \wedge \omega^{\beta}_{e},$$

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\omega}^{\gamma}_{\beta} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu} + R^{\alpha}_{\beta\gamma a}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{a} +$$

$$+ R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu}_{a} + R^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{a} \wedge \omega^{b} + R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{a} \wedge \omega^{\gamma}_{b} + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{a} \wedge \omega^{\mu}_{b},$$

причем компоненты кривизны-кручения T имеют вид

$$T^{\alpha}_{a\beta\gamma} = G^{\alpha}_{a[\beta,\gamma]} - \Gamma^{b}_{a[\beta} G^{\alpha}_{b\gamma]} - G^{\mu}_{a[\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma]},$$

$$T^{\alpha}_{a\beta b} = 2\left(G^{\alpha}_{a[\beta,b]} - \Gamma^{c}_{a[\beta} G^{\alpha}_{cb]} - G^{\gamma}_{a[\beta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma b]}\right),$$

$$T^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = G^{\alpha,b}_{a\beta,\gamma} - G^{\alpha b}_{a\gamma,\beta} - \Gamma^{c}_{a\beta} G^{\alpha b}_{c\gamma} + \Gamma^{cb}_{a\gamma} G^{\alpha}_{c\beta} + \delta^{\alpha}_{\gamma} \Gamma^{b}_{a\beta} - \delta^{b}_{a} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} -$$

$$- G^{\mu}_{a\beta} \Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma} + G^{\mu b}_{a\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta},$$

$$T^{\alpha}_{abc} = G^{\alpha}_{a[b,c]} - \Gamma^{e}_{a[b} G^{\alpha}_{ec]} - G^{\beta}_{a[b} \Gamma^{\alpha}_{\beta c]}, \qquad (5)$$

$$T^{\alpha c}_{ab\beta} = 2G^{\alpha,c}_{a[b,\beta]} + \Gamma^{ec}_{a\beta} G^{\alpha}_{eb} - \Gamma^{e}_{ab} G^{\alpha c}_{e\beta} + G^{\gamma c}_{a\beta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma b} - G^{\gamma}_{ab} \Gamma^{\alpha c}_{\gamma\beta} +$$

$$+\delta^{\alpha}_{\beta} \Gamma^{c}_{ab} - \delta^{c}_{a} \Gamma^{\alpha}_{\beta b} - \delta^{c}_{b} G^{\alpha}_{a\beta},$$

$$T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = G^{\alpha}_{a}{}^{[b,c}_{[\beta,\gamma]} - \Gamma^{e}_{a}{}^{[b}_{[\beta} G^{\alpha c}_{e\gamma]} - G^{\mu}_{a}{}^{[b}_{[\beta} \Gamma^{\alpha c}_{\mu\gamma]} - \delta^{\alpha}_{|\underline{\beta}} \Gamma^{|\bar{b}c}_{a\gamma]} + \delta^{|\bar{b}}_{a} \Gamma^{\alpha c}_{|\underline{\beta}\gamma]}.$$

Компоненты объекта кривизны R

$$R^{a}_{bce} = \Gamma^{a}_{b[c,e]} - \Gamma^{d}_{b[c} \Gamma^{a}_{de]},$$

$$R^{a}_{bc\alpha} = \Gamma^{a}_{bc,\alpha} - \Gamma^{a}_{b\alpha,c} + \Gamma^{e}_{b\alpha} \Gamma^{a}_{ec} - \Gamma^{e}_{bc} \Gamma^{a}_{e\alpha},$$

$$R^{ad}_{bc\alpha} = \Gamma^{a,d}_{bc,\alpha} - \Gamma^{ad}_{b\alpha,c} + \Gamma^{ed}_{b\alpha} \Gamma^{a}_{ec} - \Gamma^{e}_{bc} \Gamma^{ad}_{e\alpha} - \delta^{d}_{c} \Gamma^{a}_{b\alpha},$$

$$R^{a}_{b\alpha\beta} = \Gamma^{a}_{b[\alpha,\beta]} - \Gamma^{c}_{b[\alpha} \Gamma^{a}_{c\beta]},$$

$$R^{ac}_{b\alpha\beta} = \Gamma^{c,b}_{b\alpha,\beta} - \Gamma^{ac}_{b\beta,\alpha} + \Gamma^{dc}_{b\beta} \Gamma^{a}_{d\alpha} - \Gamma^{d}_{b\alpha} \Gamma^{ac}_{d\beta},$$

$$R^{acd}_{b\alpha\beta} = \Gamma^{a}_{b}{}^{[c,d}_{[\alpha,\beta]} - \Gamma^{e}_{b}{}^{[c}_{[\alpha} \Gamma^{ad}_{e\beta]},$$

$$R^{\alpha}_{\beta ab} = \Gamma^{\alpha}_{\beta[a,b]} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma[a} \Gamma^{\gamma}_{\beta b]},$$

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma a} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,a} - \Gamma^{\alpha}_{\beta a,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} \Gamma^{\mu}_{\beta a} - \Gamma^{\alpha}_{\mu a} \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma},$$

$$R^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = \Gamma^{\alpha,b}_{\beta a,\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma,a} + \Gamma^{\alpha}_{\mu a} \Gamma^{\mu b}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma} \Gamma^{\mu}_{\beta a} - \delta^{b}_{a} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta[\gamma,\mu]} + \Gamma^{\alpha}_{\eta[\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\mu]},$$

$$R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha,a}_{\beta[\gamma,\mu]} - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta a}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha a}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma},$$

$$R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta}[^{a,b}_{\gamma,\mu}] + \Gamma^{\alpha}_{\eta}[^{a}_{\gamma}\Gamma^{\eta b}_{\beta\mu}]$$

удовлетворяют дифференциальным сравнениям (см. [2; 3; 11])

$$\Delta R^{a}_{bce} \equiv 0\,,\ \Delta R^{a}_{bc\alpha} - 2R^{a}_{bcd}\omega^{d}_{\alpha} + R^{ad}_{bc\alpha}\omega_{d} \equiv 0\,,\ \Delta R^{ad}_{bc\alpha} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R^{a}_{b\alpha\beta} + R^{a}_{bc[\alpha}\omega^{c}_{\beta]} + R^{ac}_{b[\alpha\beta]}\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R^{ac}_{b\alpha\beta} - 2R^{acd}_{b\alpha\beta}\omega_{d} - R^{ac}_{bd\beta}\omega^{d}_{\alpha} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R^{acd}_{b\alpha\beta} \equiv 0\,,\ \Delta R^{\alpha}_{\beta ab} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma a} + 2R^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{b}_{\gamma} - R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega_{b} \equiv 0\,,\ \Delta R^{\alpha b}_{\beta a\gamma} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} - R^{\alpha}_{\beta[\gamma a}\omega^{a}_{\mu]} + R^{\alpha a}_{\beta[\gamma\mu]}\omega_{a} \equiv 0\,,$$

$$\Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - 2R^{\alpha ab}_{\beta\mu\gamma}\omega_{b} - R^{\alpha a}_{\beta b\mu}\omega^{b}_{\gamma} \equiv 0\,,\ \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} \equiv 0\,,$$

из которых видно, что объект кривизны является тензором, содержащим шесть простейших подтензоров R^{a}_{bce}, $R^{ad}_{bc\alpha}$, $R^{acd}_{b\alpha\beta}$, $R^{\alpha}_{\beta ab}$, $R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}$, $R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}$ и четыре простых подтензора $\left\{R^{a}_{bc\alpha}, R^{a}_{bcd}, R^{ad}_{bc\alpha}\right\}$, $\left\{R^{ac}_{b\alpha\beta}, R^{acd}_{b\alpha\beta}, R^{ac}_{bd\beta}\right\}$, $\left\{R^{\alpha}_{\beta\gamma a}, R^{\alpha}_{\beta ab}, R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\right\}$, $\left\{R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\mu\gamma}, R^{\alpha a}_{\beta b\mu}\right\}$.

Продолжение дифференциальных уравнений (4_1)—(4_3) приводит к сравнениям по модулю базисных форм ω^{a}, ω^{α}, ω^{α}_{a}:

$$\Delta G^{\alpha}_{a\beta,\gamma} - \left(\delta^{\mu}_{\gamma}G^{\alpha}_{a\beta,b} + \delta^{\mu}_{\beta}G^{\alpha}_{ab,\gamma}\right)\omega^{b}_{\mu} +$$

$$+\left(\delta^{\mu}_{\beta}G^{\alpha}_{a\gamma} + \delta^{\mu}_{\gamma}G^{\alpha}_{a\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}G^{\mu}_{a\beta}\right)\omega_{\mu} + \left(G^{\alpha,b}_{a\beta,\gamma} + G^{\alpha b}_{a\beta,\gamma}\right)\omega_{b} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha}_{a\beta,b} - G^{\alpha}_{ac,b}\omega^{c}_{\beta} + G^{\alpha}_{ab}\omega_{\beta} + \left(G^{\alpha c}_{a\beta,b} + \delta^{c}_{a}G^{\alpha}_{b\beta} + \delta^{c}_{b}G^{\alpha}_{a\beta}\right)\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha,b}_{a\beta,\gamma} - \left(\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{b}_{c}G^{\mu}_{a\beta} + \delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{b}_{a}G^{\alpha}_{c\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}G^{\alpha,b}_{ac,\gamma} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{b}_{c}G^{\alpha}_{a\gamma}\right)\omega^{c}_{\mu} +$$

$$+\left(G^{\alpha b}_{a\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{b}_{a}\right)\omega_{\gamma} + G^{\alpha c,b}_{a\beta,\gamma}\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha}_{ab,\beta} - G^{\alpha}_{ab,c}\omega^{c}_{\beta} + \left(\delta^{\gamma}_{\beta}G^{\alpha}_{ab} - \delta^{\alpha}_{\beta}G^{\gamma}_{ab}\right)\omega_{\gamma} + G^{\alpha,c}_{ab,\beta}\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha}_{ab,c} + \left(\delta^{e}_{a}G^{\alpha}_{cb} + \delta^{e}_{b}G^{\alpha}_{ac} + \delta^{e}_{c}G^{\alpha}_{ab}\right)\omega_{e} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha,c}_{ab,\beta} - \left(\delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{e}_{c}G^{\gamma}_{ab} + \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{c}_{a}G^{\alpha}_{eb} + \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{c}_{b}G^{\alpha}_{ae}\right)\omega^{e}_{\gamma} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha b}_{a\beta,\gamma} - G^{\alpha b}_{a\beta,c}\omega^{c}_{\gamma} + \left(\delta^{\mu}_{\beta}G^{\alpha b}_{a\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}G^{\mu b}_{a\beta}\right)\omega_{\mu} + G^{\alpha b,c}_{a\beta,\gamma}\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha b}_{a\beta,c} + \left(\delta^{e}_{a}G^{\alpha b}_{c\beta} - \delta^{b}_{c}G^{\alpha e}_{a\beta}\right)\omega_{e} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha b,c}_{a\beta,\gamma} + \left(\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{b}_{e}G^{\alpha c}_{a\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{c}_{e}G^{\alpha b}_{a\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{c}_{e}G^{\mu b}_{a\beta} - \delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{c}_{a}G^{\alpha b}_{e\beta}\right)\omega^{e}_{\mu} \equiv 0\,.$$

Компоненты объекта кривизны-кручения удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм:

$$\begin{gathered}
\Delta T^{\alpha}_{a\beta\gamma} + \delta^{\mu}_{[\beta}T^{\alpha}_{a\gamma]b}\omega^{b}_{\mu} + T^{\alpha b}_{a[\beta\gamma]}\omega_{b} \equiv 0\,, \\
\Delta T^{\alpha}_{a\beta b} + 2T^{\alpha}_{abc}\omega^{c}_{\beta} - T^{\alpha c}_{ab\beta}\omega_{c} \equiv 0\,, \\
\Delta T^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - T^{\alpha b}_{ac\gamma}\omega^{c}_{\beta} - T^{\alpha bc}_{a\gamma\beta}\omega_{c} \equiv 0\,, \\
\Delta T^{\alpha}_{abc} \equiv 0\,,\ \Delta T^{\alpha c}_{ab\beta} \equiv 0\,,\ \Delta T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0\,.
\end{gathered} \tag{6}$$

Теорема. *Объект кривизны-кручения обобщенной билинейной связности является тензором, содержащим три простейших подтензора* T^{α}_{abc}, $T^{\alpha c}_{ab\beta}$, $T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}$ *и два простых подтензора* $\left\{T^{\alpha}_{abc}, T^{\alpha c}_{ab\beta}, T^{\alpha}_{a\beta b}\right\}$, $\left\{T^{\alpha c}_{ab\beta}, T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, T^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\right\}$.

Доказательство следует из дифференциальных сравнений (6).

Рассмотрим канонический случай, когда компоненты G^{α}_{ab} и $G^{\alpha b}_{a\beta}$ обращаются в нуль. Имеем $\tilde{\omega}^{\alpha}_{a} = \omega^{\alpha}_{a} - G^{\alpha}_{a\beta}\omega^{\beta}$, а левые части уравнений (4_2) и (4_3) тождественно равны нулю, тогда уравнения (4_1) упростятся:

$$\Delta \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{a} = \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,\gamma}\,\omega^{\gamma} + \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,b}\,\omega^{b} + \overset{0}{G}{}^{\alpha b}_{a\beta,\gamma}\,\omega^{\gamma}_{b} .$$

Утверждение. *В каноническом случае квазитензор G обобщенной билинейной связности редуцируется к квазитензору* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$*, при этом объект связности упрощается:*

$$\overset{B0}{\Gamma} = \{\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta},\, 0,\, 0,\, \Gamma^{a}_{b\alpha},\, \Gamma^{a}_{bc},\, \Gamma^{ac}_{b\alpha},\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},\, \Gamma^{\alpha}_{\beta a},\, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\} .$$

При условии что $G^{\alpha}_{ab} = 0$, $G^{\alpha b}_{a\beta} = 0$, выражения (5) для компонент тензора кривизны-кручения примут вид

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha}_{a\beta\gamma} = \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a[\beta,\gamma]} - \Gamma^{b}_{a[\beta}\,\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{b\gamma]} - \overset{0}{G}{}^{\mu}_{a[\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma]},$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha}_{a\beta b} = \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,b} + \Gamma^{c}_{ab}\,\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{c\beta} - \overset{0}{G}{}^{\gamma}_{a\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\gamma b},$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = -\overset{0}{G}{}^{\alpha b}_{a\gamma,\beta} + \Gamma^{cb}_{a\gamma}\,\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{c\beta} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\Gamma^{b}_{a\beta} - \delta^{b}_{a}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \overset{0}{G}{}^{\mu}_{a\beta}\,\Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma}, \qquad (7)$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha}_{abc} = 0,$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha c}_{ab\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma^{c}_{ab} - \delta^{c}_{a}\Gamma^{\alpha}_{\beta b} - \delta^{c}_{b}\,\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta},$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{[\underline{\beta}}\Gamma^{|\bar{b}c}_{a\gamma]} + \delta^{|\bar{b}}_{a}\Gamma^{\alpha c}_{|\underline{\beta}\gamma]}.$$

Утверждение. *Тензор кривизны-кручения в каноническом случае не равен нулю, но содержит нулевые компоненты* $\overset{0}{T}{}^{\alpha}_{abc}$.

Теорема. *Каноническая обобщенная билинейная связность без кривизны-кручения характеризуется следующими свойствами*:

1) альтернированные билинейные пфаффовы производные $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a[\beta,\gamma]}$ *квазитензора связности* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *образованы альтернациями сверток самого квазитензора* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{b\gamma}$ *и подобъектов* $\Gamma^{a}_{b\alpha}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *квазитензоров* $\{\Gamma^{a}_{bc}, \Gamma^{a}_{b\alpha}, \Gamma^{ac}_{b\alpha}\}$ *и* $\{\Gamma^{\alpha}_{\beta a}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$ *билинейной связности;*

2) пфаффовы производные $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,b}$ *квазитензора связности* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *образованы свертками самого квазитензора* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *и компонент простейших квазитензоров* Γ^{a}_{bc} *и* $\Gamma^{\alpha}_{\beta a}$*;*

3) пфаффовы производные $\overset{0}{G}{}^{\alpha b}_{a\gamma,\beta}$ *квазитензора связности* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *являются алгебраической суммой сверток самого квазитензора* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *с простейшими квазитензорами* $\Gamma^{ac}_{b\alpha}$ *и* $\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}$ *и компонент* $\Gamma^{b}_{a\beta}$ *и* $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$.

Доказательство. При обращении в нуль тензора кривизны-кручения T из выражений (7) находим

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a[\beta,\gamma]} = \Gamma^{b}_{a[\beta} \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{b\gamma]} + \overset{0}{G}{}^{\mu}_{a[\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma]},$$

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,b} = -\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{c\beta} \Gamma^{c}_{ab} + \overset{0}{G}{}^{\gamma}_{a\beta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma b},$$

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha b}_{a\gamma,\beta} = \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{c\beta} \Gamma^{cb}_{a\gamma} - \overset{0}{G}{}^{\mu}_{a\beta} \Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma} \Gamma^{b}_{a\beta} - \delta^{b}_{a} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}.$$

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Белова О.О.* Плоскостная обобщенная аффинная связность, ассоциированная с пространством центрированных плоскостей // Геометрия многообразий и их приложения : тр. науч. конф. с иностр. участием. Улан-Удэ, 2010. С. 8—13.

3. *Белова О.О.* Нормальная обобщенная аффинная связность, ассоциированная с пространством центрированных плоскостей // ДГМФ. Калининград, 2010. №41. С. 7—12.

4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

5. *Кулешов А.В.* Обобщенные связности на комплексе центрированных плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. Калининград, 2010. №41. С. 75—85.

6. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

7. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. №37. С. 179—187.

8. *Шевченко Ю.И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

9. *Akivis M.A., Shelekhov A.M.* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs // J. Math. Sci. 2011. Vol. 177, №522.

10. *Belova O.O.* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.

11. *Belova O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Mathematics. 2021. Vol. 9, №7. Art. №782. https://doi.org/10.3390/math9070782.

12. *Katanaev M.O.* Geometric Methods in Mathematical Physics. 2016. arXiv:1311.0733v3.

13. *Mansouri A.-R.* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions:I. Necessary conditions // Differential Geometry and its Applications. 2009. Vol. 27, №5. P. 635—646.

14. *Polyakova K.V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 675—709.

15. *Rahula M.* The G. F. Laptev method: fundamental objects of mappings // J. Math. Sci. 2011. Vol. 174, №675.
16. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 58A05, 53A20, 53A35

O. O. Belova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-3

Generalized bilinear connection on the space of centered planes

Submitted on December 28, 2021

We continue to study the space of centered planes in projective space P_n. In this paper, we use E. Cartan's method of external forms and the group-theoretical method of G. F. Laptev to study the space of centered planes of the same dimension. These methods are successfully applied in physics.

In a generalized bundle, a bilinear connection associated with a space is given. The connection object contains two simplest subtensors and subquasi-tensors (four simplest and three simple subquasi-tensors). The object field of this connection defines the objects of torsion, curvature-torsion, and curvature. The curvature tensor contains six simplest and four simple subtensors, and curvature-torsion tensor contains three simplest and two simple subtensors.

The canonical case of a generalized bilinear connection is considered.

Keywords: projective space, space of centered planes, generalized bilinear connection, torsion, curvature

References

1. *Akivis, M. A., Rosenfeld, B. A.*: Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Belova, O.O.:* Plane generalized affine connection associated with space of centered planes. Geometry of manifolds and its applications, Proceedings of scientific. conf. with int. participation. Ulan-Ude, 8—13 (2010).

3. *Belova, O.O.:* Normal generalized affine connection associated with space of centered planes. DGMF. Kaliningrad, 41, 7—12 (2010).

4. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

5. *Kuleshov, A.V.:* Generalized connections on the complex of centered planes in projective space. DGMF. Kaliningrad, 41, 75—85 (2010).

6. *Shevchenko, Yu. I.*: Clothings of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).

7. *Shevchenko, Yu.I.*: Laptev's and Lumiste's tricks for specifying a connection in a principal bundle. DGMF. Kaliningrad, 37, 179—187 (2006).

8. *Shevchenko, Yu.I.:* Connections Associated with the Distribution of Planes in Projective Space. Kaliningrad (2009).

9. *Akivis, M.A., Shelekhov, A.M.*: Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. J. Math. Sci., **177**:522 (2011).

10. *Belova, O.O.*: Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

11. *Belova, O.*: Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Maths., **9**:7, 782 (2021). https://doi.org/10.3390/math9070782.

12. *Katanaev, M.O.*: Geometric Methods in Mathematical Physics (2016). arXiv:1311.0733v3.

13. *Mansouri, A.-R.*: An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions. Differential Geometry and its Applications, **27**:5, 635—646 (2009).

14. *Polyakova, K.V.*: Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci., **162**:5, 675—709 (2009).

15. *Rahula, M.*: The G.F. Laptev method: fundamental objects of mappings. J. Math. Sci., **174**:675 (2011).

16. *Scholz, E.*: H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

А. В. Букушева
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-4

К геометрии обобщенных неголономных многообразий Кенмоцу

Вводится понятие обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу. В отличие от определенного ранее неголономного многообразия Кенмоцу изучаемое в статье многообразие является почти нормальным почти контактным метрическим многообразием нечетного ранга. Многообразие оснащается метрической связностью с кручением, названной в работе канонической связностью. Изучаются основные свойства канонической связности. Каноническая связность представляет собой аналог обобщенной связности Танаки — Вебстера. В работе доказывается, что каноническая связность является единственной метрической связностью с кручением специального строения, сохраняющей структурную 1-форму и векторное поле Риба. Изучается внутренняя геометрия обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу, оснащенного канонической связностью. Доказывается, что если обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу есть многообразие Эйнштейна относительно канонической связности, то оно риччи-плоское относительно этой связности. Приводится пример обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу, не являющегося неголономным многообразием Кенмоцу.

Ключевые слова: обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связность, тензор Схоутена, многообразие Эйнштейна

Поступила в редакцию 01.07.2022 г.
© Букушева А. В., 2022

1. Введение

Неголономное многообразие Кенмоцу является обобщением многообразия Кенмоцу, открытого в 1972 году в работе [1]. Структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы [2], в то время как структуры неголономного многообразия Кенмоцу нормальны, но не интегрируемы. Неголономное многообразие Кенмоцу определено автором настоящей работы в статье [3]. Внутренняя геометрия неголономного многообразия Кенмоцу *M* обладает рядом замечательных свойств. Эти свойства удобно сформулировать в терминах адаптированных координат [4]. В частности, установлено, что тензорное поле Схоутена — Вагнера *P*, компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P^{c}_{ad} = \partial_n \Gamma^{c}_{ad}$, обращается в нуль. В работе [5] доказано, что альтернация тензора Риччи — Схоутена, являющегося трансверсальным аналогом тензора Риччи, пропорциональна внешнему дифференциалу структурной формы. В настоящей работе мы вводим понятие обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу *M*. Многообразие *M* в отличие от неголономного многообразия Кенмоцу *M*, вообще говоря, не является нормальным почти контактным метрическим многообразием. В работе [5] на неголономном многообразии Кенмоцу рассматривалась связность ∇^{T}_{X}, являющаяся аналогом обобщенной связности Танаки — Вебстера. В настоящей работе мы называем эту связность канонической связностью и изучаем обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу *M*, оснащенное канонической связностью.

2. Основные результаты

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие *M* нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$, с заданной на нем почти контактной метрической структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g\right)$ [2]. Здесь, в частности, η — 1-форма и $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающие, соответственно, распределение D: $D=\ker(\eta)$ и оснащение $D^{\perp}$ распределения D: $D^{\perp}=span(\vec{\xi})$. Гладкое распределение D называется распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM=D\oplus D^{\perp}$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_{\varphi}^{1}=N_{\varphi}+2d\eta\otimes\vec{\xi}=0$, где

$$N_{\varphi}\left(X,Y\right)=\left[\varphi X,\varphi Y\right]+\varphi^{2}\left[X,Y\right]-\varphi\left[\varphi X,Y\right]-\varphi\left[X,\varphi Y\right]$$

— тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Почти контактное метрическое многообразие называется почти нормальным, если оказывается справедливым равенство

$$\tilde{N}_{\varphi}=N_{\varphi}+2\varphi^{*}d\eta\otimes\vec{\xi}=0.$$

Нормальное почти контактное метрическое многообразие M называется неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $d\Omega=2\eta\wedge\Omega.$ Легко показать, что для многообразия M также выполняется условие $L_{\vec{\xi}}g=2\left(g-\eta\otimes\eta\right)$. Обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу — это почти нормальное почти контактное метрическое многообразие M, для которого выполняются следующие условия: 1) $L_{\vec{\xi}}g=2\left(g-\eta\otimes\eta\right)$, 2) $d\eta\left(\vec{\xi},\cdot\right)=0$. Заметим, что условие $d\eta\left(\vec{\xi},\cdot\right)=0$ для нормального почти контактного метрического многообразия выполняется необходимым образом.

В дальнейшем будут изучаться исключительно обобщенные неголономные многообразия Кенмоцу, для обозначения которых будет использоваться термин «многообразие».

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g в адаптированных координатах [6]: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ $(i, j, k = 1, ..., n;\ a, b, c = 1, ..., n-1)$.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с контактной метрической структурой [6] понимается отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, удовлетворяющее обычным для ковариантной производной условиям.

Коэффициенты внутренней связности в адаптированных координатах определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma^c_{ab} \vec{e}_c$.

Пусть ψ: $D \to D$ — эндоморфизм, определяемый равенством $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$. Имеет место следующее предложение [5].

Предложение 1*. Ненулевые коэффициенты связности Леви-Чивиты многообразия M в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab},\ \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - g_{ab},\ \tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = \delta^b_a + \psi^b_a,$$

где $\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \dfrac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right)$, $\psi^b_a = g^{bc} \omega_{ac}$.

Для доказательства предложения используется формула

$$2\Gamma^m_{ij} = g^{km} \left(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega^l_{kj} g_{li} + \Omega^l_{ki} g_{lj} \right) + \Omega^m_{ij},$$

где $\left[\vec{e}_i, \vec{e}_j \right] = \Omega^k_{ij} \vec{e}_k$.

Связность ∇^T_X, определяемую равенством

$$\nabla^T_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \left(\left(\tilde{\nabla}_X \eta \right) Y \right) \vec{\xi} - \eta(Y) \tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X) \psi Y,$$

будем называть *канонической связностью обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу M*. Каноническая связность получается из *N*-связности

$$\nabla^N_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \left(\tilde{\nabla}_X \eta \right)(Y) \vec{\xi} - \eta(Y) \tilde{\nabla}_X \vec{\xi} - \eta(X)(C + \psi - N) Y,$$

если положить в последнем равенстве $N = C$.

Предложение 2. *Ненулевые коэффициенты* G_{ij}^{k} *канонической связности* ∇_X^T *многообразия М в адаптированных координатах имеют вид*

$$G_{bc}^{a}=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}\right),\ G_{nb}^{a}=\delta_b^a.$$

Предложение 3. *Каноническая связность* ∇_X^T *многообразия М является единственной метрической связностью с кручением*

$$S\left(X,Y\right)=2\omega\left(X,Y\right)\vec{\xi}+\eta\left(X\right)Y-\eta\left(Y\right)X\ \ \left(X,Y,Z\in\Gamma\left(TM\right)\right),$$

сохраняющей структурную 1-форму η *и векторное поле Риба* $\vec{\xi}$ *обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу.*

Докажем, что у любой метрической связности ∇, сохраняющей структурную 1-форму η и векторное поле Риба $\vec{\xi}$ и обладающей кручением

$$S\left(X,Y\right)=2\omega\left(X,Y\right)\vec{\xi}+\eta\left(X\right)Y-\eta\left(Y\right)X,$$

ненулевые коэффициенты G_{ij}^{k} совпадают с коэффициентами связности из предложения 2.

Условие метричности связности ∇ влечет равенство

$$G_{bc}^{a}=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}\right).$$

Из равенств $\nabla\vec{\xi}=0,\ \ \nabla\eta=0$ следует, что

$$G_{bn}^{a}=G_{bc}^{n}=G_{bn}^{n}=G_{nc}^{n}=G_{nn}^{a}=G_{nn}^{n}=0.$$

Найдем необходимые для доказательства компоненты тензора кручения *S(X, Y)* связности ∇: $S_{na}^{b}=G_{na}^{b}-G_{an}^{b}=G_{na}^{b}$.

С другой стороны, из равенства

$$S(X,Y)=2\omega(X,Y)\vec{\xi}+\eta(X)Y-\eta(Y)X$$

следует, что $S_{na}^{b}=\delta_{a}^{b}$. Таким образом, $G_{nb}^{a}=\delta_{a}^{b}$. Тем самым, предложение 3 доказано.

Вычислим необходимые нам для дальнейшего отличные от нуля компоненты тензора кривизны K связности ∇_{X}^{T}. Воспользуемся для этого формулой

$$K(X,Y)Z=\nabla_{X}^{T}\nabla_{Y}^{T}Z-\nabla_{Y}^{T}\nabla_{X}^{T}Z-\nabla_{[X,Y]}^{T}Z.$$

Имеем $K_{abc}^{d}=R_{abc}^{d}-2\omega_{ba}\delta_{c}^{d}$, $K_{nab}^{c}=\partial_{n}\Gamma_{ab}^{c}-\nabla_{a}\delta_{b}^{c}$.

Здесь ∇ — внутренняя связность, а R_{abc}^{d} — компоненты тензора Схоутена [3]. Учитывая, что $P_{ad}^{c}=\partial_{n}\Gamma_{ab}^{c}=0$, получаем $K_{nab}^{c}=0$.

Пусть $K(X,Y)$ — соответствующий тензору $K(X,Y)Z$ тензор Риччи. Имеют место равенства

$$k_{ac}=r_{ac}+2\omega_{ad}\delta_{c}^{d}=r_{ac}+2\omega_{ac}.$$

В работе [5] предложение 4 доказывалось для случая неголономного многообразия Кенмоцу.

Предложение 4. *Для неголономного многообразия Кенмоцу размерности* $n=2m+1$ *выполняется следующее равенство:* $2m\omega_{ca}-r_{[ac]}=0$ [5].

Теорема. *Пусть обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу M является многообразием Эйнштейна относительно канонической связности, тогда оно риччи-плоское относительно этой связности*

Доказательство. Пусть M — обобщенное неголономное многообразие Эйнштейна. Отсюда, в частности, следует, что

$$k_{ac}=r_{ac}+2\omega_{ac}=\lambda g_{ac},\quad \lambda\in R.$$

Тогда, с одной стороны, объект k_{ac} симметричен, так как $k_{ac} = \lambda g_{ac}$. С другой стороны, проальтернировав равенство $k_{ac} = r_{ac} + 2\omega_{ac} = \lambda g_{ac}$ и воспользовавшись равенством $2m\omega_{ca} = \frac{1}{2}\left(r_{ac} - r_{ca}\right)$, получаем $k_{[ac]} = (-2m+2)\omega_{ac}$.

Другими словами, если $m \neq 1$, то $k_{[ac]} \neq 0$.

Теорема доказана.

Приведем пример обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу.

Пусть $M = \left\{\left(x^i\right) \in R^5 : x^2 \neq 0\right\}$ $(i, j, k = 1, ..., 5; a, b, c = 1, ..., 4)$ — гладкое многообразие размерности 5, оснащенное почти контактной метрической структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D\right)$. Здесь: 1) $D = \left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \right\rangle$, где $\vec{e}_1 = \partial_1 - y\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\left(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5\right)$ — естественный базис пространства R^5, 2) $\vec{\xi} = \partial_5 = \vec{e}_5$, 3) $\eta = dx^5 + x^2 dx^1$, 4) $\varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_3$, $\varphi\vec{e}_2 = \vec{e}_4$, $\varphi\vec{e}_3 = -\vec{e}_1$, $\varphi\vec{e}_4 = -\vec{e}_2$, $\varphi\vec{\xi} = 0$, 5) метрический тензор g определяется по формуле $g(\vec{e}_a, \vec{e}_a) = e^{2x^5}$, $g(\vec{e}_5, \vec{e}_5) = 1$. Непосредственно проверяется, что почти контактное метрическое многообразие M не является нормальным, но является почти нормальным многообразием. Действительно,

$$N_{\varphi}^{(1)}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = \varphi^2[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + [\vec{e}_3, \vec{e}_4] - \varphi[\vec{e}_3, \vec{e}_2] - \varphi[\vec{e}_1, \vec{e}_4] +$$

$$+ 2d\eta\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)\vec{\xi} = \varphi^2\vec{\xi} - \eta\left(\vec{\xi}\right)\vec{\xi} = -\vec{\xi}.$$

С другой стороны, $N_{\varphi}^{(1)}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) = 2d\eta(\vec{e}_3, \vec{e}_4)\vec{\xi} = 0$. Для рассматриваемой структуры выполняется равенство

$$d\eta\left(\vec{\xi}, X\right) = 0, \quad X \in \Gamma(TM).$$

Далее, $\partial_5 g_{ab} = 2g_{ab}$. Отсюда заключаем, что $L_{\xi} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$. Таким образом, M — обобщенное неголономное многообразие Кенмоцу.

Заключение

В работе показано, что геометрия обобщенного неголономного многообразия Кенмоцу во многом повторяет геометрию изученного ранее неголономного многообразия Кенмоцу. Таким образом, условие нормальности многообразия не является существенно более сильным, чем условие почти нормальности, если многообразие наделено структурой нечетного ранга.

Список литературы

1. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. Vol. 24. P. 93—103.

2. *Pitis G.* Geometry of Kenmotsu manifolds / Publishing House of Transilvania University of Brasov. Brasov, 2007.

3. *Букушева А.В.* К геометрии неголономных многообразий Кенмоцу // Известия Алтайского государственного университета. 2021. №1 (117). С. 84—87.

4. *Галаев С.В.* Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, №3 (337). С. 632—640.

5. *Букушева А.В.* Неголономные многообразия Кенмоцу, оснащенные обобщенной связностью Танаки — Вебстера // ДГМФ. Калининград, 2021. №52. С. 42—51.

6. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

7. *Galaev S.V.* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31, №1. P. 35—46.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53D15

A. V. Bukusheva
Saratov State University
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-4

On the geometry of generalized nonholonomic Kenmotsu manifolds

Submitted on July 1, 2022

The concept of a generalized nonholonomic Kenmotsu manifold is introduced. In contrast to the previously defined nonholonomic Kenmotsu manifold, the manifold studied in the article is an almost normal almost contact metric manifold of odd rank. The manifold is equipped with a metric connection with torsion, which is called the canonical connection in this work. The main properties of the canonical connection are studied. The canonical connection is an analogue of the generalized Tanaka-Webster connection. In this paper, we prove that the canonical connection is the only metric connection with torsion of a special structure that preserves the structural 1-form and the Reeb vector field. We study the intrinsic geometry of a generalized nonholonomic Kenmotsu manifold equipped with a canonical connection. It is proved that if a generalized nonholonomic Kenmotsu manifold is an Einstein manifold with respect to a canonical connection, then it is Ricci-flat with respect to this connection. An example of a generalized nonholonomic Kenmotsu manifold that is not a nonholonomic Kenmotsu manifold is given.

Keywords: generalized nonholonomic Kenmotsu manifold, intrinsic connection, Schouten tensor, Einstein manifold

References

1. *Kenmotsu, K.:* A class of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J. 24, 93—103 (1972).

2. *Pitis, G.:* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov (2007).

3. *Bukusheva, A. V.:* Geometry of nonholonomic Kenmotsu manifolds. Izvestiya of Altai State University, 1 (117), 84—87 (2021).

4. *Galaev, S. V.:* Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure. Siberian Math. J., **57**:3, 498—504 (2016).

5. *Bukusheva, A. V.:* Non-holonomic Kenmotsu manifolds equipped with generalized Tanaka — Webster connection. DGMF. Kaliningrad, 52, 42—51 (2021).

6. *Galaev, S. V.:* Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **16**:3, 263—272 (2016).

7. *Galaev, S. V.:* Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, **31**:1, 35—46 (2015).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

***Н. А. Елисеева*[1], *Ю. И. Попов*[2]**
[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-5

Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов регулярной гиперполосы с центральным оснащением проективного пространства

В данной работе приведено задание гиперполосы CH_m с центральным оснащением в проективном пространстве P_n и доказана теорема существования. Построены поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперполосы CH_m в окрестностях 1—3-го порядков. Доказано, что гиперполоса CH_m, оснащенная в смысле Э. Картана, индуцирует проективную связность, полученную путем проектирования (центром проектирования в каждой точке базисной поверхности является плоскость Картана).

Ключевые слова: гиперполоса, оснащение Картана, регулярная гиперполоса, тензор кручения-кривизны, квазитензор, геометрический объект, охват геометрического объекта, проективная связность

§ 1. Задание регулярной гиперполосы с центральным оснащением в проективном пространстве P_n

В работе используется следующая схема индексов:

$$J, K = \overline{1, n}\,; i,\ j,\ k,\ s,\ t,\ p,\ q = \overline{1, m}\,;$$

Поступила в редакцию 05.04.2022 г.
© Елисеева Н. А., Попов Ю. И., 2022

$$\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{s}, \tilde{p} = \overline{0, m}; \ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}.$$

Знак «$\equiv$» означает сравнение по модулю базисных форм.

Определение [8]. Гиперполоса H_m $(m \geq 2)$ называется *центрально оснащенной*, если оснащающие прямые в нормалях 1-го рода базисной поверхности [8] проходят через одну точку (центр оснащения).

Центрально оснащенные гиперполосы обозначим символом CH_m. Присоединим к гиперполосе CH_m подвижной точечный репер $R^1 = \{A_J\}$ следующим образом: $A_0 \equiv A \in V_m$, где V_m — базисная поверхность гиперполосы CH_m; $\{A_i\} \subset T_m$ (здесь T_m — касательная плоскость базисной поверхности V_m в точке A_0); $\{A_\alpha\} \subset X_{n-m-1}$ (X_{n-m-1} — характеристика гиперполосы); A_n поместим в точку пересечения прямых $h(A_0)$, то есть $A_n \equiv P$ (P — центр оснащения).

В репере 1-го порядка R^1 регулярная гиперполоса CH_m задается уравнениями

$$\omega_0^n = 0, \ \omega_0^\alpha = 0, \ \omega_\alpha^n = 0,$$

$$\omega_n^\alpha = 0, \ \omega_n^0 = 0, \ \omega_n^i = 0, \tag{1}$$

$$\omega_i^n = \lambda_{ij}^n \omega_0^j, \ \omega_i^\alpha = \lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j, \ \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega_0^j,$$

где

$$\nabla \lambda_{ij}^n + \lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \lambda_{ijk}^n \omega_0^k, \ \nabla \lambda_{ij}^\alpha + \lambda_{ij}^\alpha \omega_0^0 = \lambda_{ijk}^\alpha \omega_0^k,$$

$$\nabla \lambda_{\alpha j}^t + \lambda_{\alpha j}^t \omega_0^0 - \delta_j^t \omega_\alpha^0 = \lambda_{\alpha jk}^t \omega_0^k, \tag{2}$$

$$\lambda_{[ij]}^n = 0, \ \lambda_{[ij]}^\alpha = 0, \ \lambda_{s[i}^n \lambda_{|\alpha| j]}^s = 0.$$

Поскольку гиперполоса CH_m регулярная [1], то тензор 1-го порядка $\Lambda \overset{def}{=} \{\lambda_{ij}^n\}$ невырожденный. Для него введем обратный тензор λ_n^{ij} первого порядка:

$$\lambda_n^{ik}\lambda_{kj}^n = \delta_j^i, \; \nabla\lambda_n^{ij} - \lambda_n^{ij}\omega_0^0 - \lambda_{nk}^{ij}\omega_0^k = 0, \qquad (3)$$

где

$$\lambda_{nk}^{ij} = -\lambda_n^{is}\lambda_n^{jt}\lambda_{stk}^n, \; \nabla\lambda_{stk}^n + 2\lambda_{stk}^n\omega_0^0 + \Lambda_{(st}^n\omega_{k)}^0 = \Lambda_{stkj}^n\omega_0^j. \qquad (4)$$

Функция Λ есть относительный инвариант 1-го порядка:

$$d\ln\Lambda = \lambda_n^{ij}d\lambda_{ij}^n = 2\omega_k^k - m(\omega_0^0 + \omega_n^n) + \Lambda_k\omega_0^k, \Lambda_k = \lambda_n^{ij}\lambda_{ijk}^n. \qquad (5)$$

Отметим, что $\Gamma_1 = \{\lambda_{ij}^n, \lambda_{ij}^\alpha, \lambda_{\alpha j}^i\}$, $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \lambda_{ijk}^n, \lambda_{ijk}^\alpha, \lambda_{\alpha jk}^i\}$, … — последовательность фундаментальных геометрических объектов [2], гиперполосы CH_m.

§ 2. Теорема существования гиперполосы CH_m

Теорема. *В проективном пространстве P_n регулярная гиперполоса с центральным оснащением CH_m (1) существует с произволом $s_m = (n-m) + m(n-m-1)$ функции m аргументов.*

Доказательство. Чистое замыкание системы (1) представим в виде

$$\Delta\lambda_{ij}^n \wedge \omega_0^j = 0, \; \Delta\lambda_{ij}^\alpha \wedge \omega_0^j = 0, \; \Delta\lambda_{\alpha j}^i \wedge \omega_0^j = 0. \qquad (6)$$

Найдем характеры системы (6) [2]:

$$s_1 = m(n-m) + m(n-m-1),$$

$$s_2 = (m-1)(n-m) + m(n-m-1),$$

$$s_3 = (m-2)(n-m) + m(n-m-1),$$

$$\dots$$

$$s_m = 1 \cdot (n-m) + m(n-m-1).$$

Далее вычисляем число Э. Картана системы (6) (пусть $A = m(n-m-1)$):

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ms_m = [m(n-m) + A] + 2[(m-1)(n-m) + A] +$$
$$+ 3[(m-3)(n-m) + A] + \ldots + m[\big(m-(m-1)\big)(n-m) + A] =$$
$$= A\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(n-m)(m+1)m(m+2)}{6}.$$

В силу леммы Э. Картана [2] из системы (6) следует

$$\Delta\lambda^n_{ij} = \lambda^n_{ijk}\omega^k,\ \Delta\lambda^\alpha_{ij} = \lambda^\alpha_{ijk}\omega^k,\ \Delta\lambda^i_{\alpha j} = \lambda^i_{\alpha jk}\omega^k.$$

Определим число линейно независимых коэффициентов N, входящих в систему (6):

$$N = A\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(n-m)(m+1)m(m+2)}{6}.$$

Итак, $Q = N$. Система (6) находится в инволюции [12], а ее произвол определяется характером s_m, что и требовалось доказать.

§ 3. Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперполосы CH_m в дифференциальной окрестности 2-го и 3-го порядков

1. Окрестность 2-го порядка. Продолжив уравнение (5) и введя обозначение $\widetilde{\Lambda}_i = \dfrac{1}{m+2}\Lambda_i$, получим

$$\nabla\widetilde{\Lambda}_i + \widetilde{\Lambda}_i\omega^0_0 + \omega^0_i = \widetilde{\Lambda}_{ij}\omega^j_0, \tag{7}$$

где $\widetilde{\Lambda}_{ij} \overset{def}{=} \dfrac{2}{m+2}\Lambda^\alpha_{si}\Lambda^s_{\alpha j}$.

Таким образом, функция $\widetilde{\Lambda}_i$ (7) есть квазитензор 2-го порядка. Далее, используя элементы гиперполосы, строим поля тензоров a_n^α, c_{ij}^α, $b_{n\alpha}^{ij}$ и поле квазитензора e_α^0 [10]

$$a_n^\alpha \overset{def}{=} \frac{1}{m}\lambda_{ij}^\alpha \lambda_n^{ij},\ c_{ij}^\alpha \overset{def}{=} \lambda_{ij}^\alpha - a_n^\alpha \lambda_{ij}^n,\ b_{n\alpha}^{ij} \overset{def}{=} \lambda_{\alpha k}^i \lambda_n^{kj} - e_\alpha^0 \lambda_n^{ij},$$

$$e_\alpha^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{m}\Lambda_{\alpha i}^i,$$

компоненты которых в силу (2, 3) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla a_n^\alpha = a_{nk}^\alpha \omega_0^k, \nabla c_{ij}^\alpha + c_{ij}^\alpha \omega_0^0 = c_{ijk}^\alpha \omega_0^k,$$

$$\nabla b_{n\alpha}^{ij} = b_{n\alpha k}^{ij}\omega_0^k,\ \nabla e_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = e_{\alpha k}^0 \omega_0^k.$$

Тензоры c_{ij}^α и $b_{n\alpha}^{ij}$ симметричны по индексам i и j.

Введем в рассмотрение следующие охваты, тем самым построим еще ряд полей геометрических объектов 2-го порядка:

$$D_{ijk}^n \overset{def}{=} \Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n \widetilde{\Lambda}_{k)}, D_{ij} \overset{def}{=} \lambda_n^{ls}\lambda_n^{kt} D_{ist}^n D_{jlk}^n,\ D_n \overset{def}{=} \lambda_n^{ij}\lambda_n^{st}\lambda_n^{kl} D_{isk}^n D_{jtl}^n,$$

$$b_{\alpha k}^i \overset{def}{=} b_{n\alpha}^{ij}\lambda_{jk}^n,\ b_{\alpha\beta} \overset{def}{=} b_{\alpha j}^s b_{\beta s}^j,\ b_{n\alpha}^\beta \overset{def}{=} b_{n\alpha}^{st} c_{st}^\beta, \tag{8}$$

$$c_{nj}^{\alpha i} \overset{def}{=} c_{sj}^\alpha \lambda_n^{is},\ c_{nn}^{\alpha\beta} \overset{def}{=} c_{ns}^{\alpha k} c_{nk}^{\beta s}.$$

Каждый из этих охватов в силу уравнений (2—4, 7, 8) образует тензор (D_n — относительный инвариант, вообще говоря, ненулевой), причем тензоры D_{ijk}^n, D_{ij}, $b_{\alpha\beta}$, $c_{nn}^{\alpha\beta}$ симметрические:

$$\nabla D_{ijk}^n + 2D_{ijk}^n \omega_0^0 = D_{ijks}^n \omega_0^s,\ D_{ijks}^n = \lambda_{ijks}^n - \lambda_{s(ij}^n \widetilde{\Lambda}_{k)} - \lambda_{(ij}^n \widetilde{\Lambda}_{k)s}, \tag{9}$$

$$\nabla D_{ij} + 2D_{ij}\omega_0^0 \equiv 0,$$

$$d\ln D_n + \omega_0^0 - \omega_n^n = D_k \omega_0^k\,, \tag{10}$$

$$\nabla b_{\alpha k}^i + b_{\alpha k}^i \omega_0^0 \equiv 0\,,\ \nabla b_{\alpha\beta} + 2b_{\alpha\beta}\omega_0^0 \equiv 0\,,$$

$$\nabla b_{n\alpha}^\beta + b_{n\alpha}^\beta \omega_0^0 \equiv 0\,,$$

$$\nabla c_{nj}^{\alpha i} \equiv 0\,,\ \nabla c_{nn}^{\alpha\beta} \equiv 0\,.$$

Отметим, что тензоры D_{ij}, $b_{n\alpha}^\beta$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{nn}^{\alpha\beta}$ в общем случае невырожденные. Следовательно, можно построить взаимные им тензоры 2-го порядка. Например,

$$b_\gamma^{n\beta} b_{n\alpha}^\gamma = b_\alpha^{n\gamma} b_{n\gamma}^\beta = \delta_\alpha^\beta\,,\ \nabla b_\alpha^{n\beta} - b_\alpha^{n\beta}\omega_0^0 \equiv 0\,,$$

$$D^{ik} D_{kj} = \delta_j^i,\ \nabla D^{ij} - 2D^{ij}\omega_0^0 \equiv 0\,. \tag{11}$$

В дифференциальной окрестности 2-го порядка построим охваты, необходимые нам для дальнейшего изложения:

$$B_{\alpha\beta}^n \overset{def}{=} -\frac{1}{2}\left(b_\alpha^{n\gamma} b_{\gamma\beta} + b_\beta^{n\gamma} b_{\gamma\alpha}\right),\ \nabla B_{\alpha\beta}^n + B_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = B_{\alpha\beta k}^n \omega_0^k\,,$$

$$b_\alpha \overset{def}{=} -\left(B_{\beta\alpha}^n a_n^\beta + e_\alpha^0\right),\ \nabla b_\alpha + b_\alpha \omega_0^0 + \omega_\alpha^0 \equiv 0\,, \tag{12}$$

$$\eta_{nk} \overset{def}{=} \lambda_n^{is}\lambda_n^{jt} D_{kst}^n c_{ij}^\alpha e_\alpha^0\,,\ \nabla\eta_{nk} + 2\eta_{nk}\omega_0^0 - \lambda_n^{is}\lambda_n^{jt} D_{kst}^n c_{ij}^\alpha \omega_\alpha^0 \equiv 0\,,$$

$$\mu_{nk} \overset{def}{=} D_{kij}^n b_{n\alpha}^{ij} a_n^\alpha\,,\ \nabla\mu_{nk} + 2\mu_{nk}\omega_0^0 \equiv 0\,.$$

2. Окрестность 3-го порядка. Построим систему охватов, связанных с 3-й дифференциальной окрестностью элемента гиперполосы $CH_m \subset P_n$. Продолжая уравнения (7, 10), получим уравнения для функций $\widetilde{\Lambda}_{ij}$, D_k:

$$\nabla\widetilde{\Lambda}_{ij} + 2\widetilde{\Lambda}_{ij}\omega_0^0 + \widetilde{\Lambda}_{(i}\omega_{j)}^0 + \lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^0 \equiv 0\,,$$

$$\nabla D_i + D_i \omega_0^0 + \omega_i^0 \equiv 0\,.$$

Введем в рассмотрение функции

$$\widetilde{T}_n \overset{def}{=} (\widetilde{\Lambda}_{ij} - \widetilde{\Lambda}_i \widetilde{\Lambda}_j)\lambda_n^{ij}, S_n \overset{def}{=} \frac{1}{m}\widetilde{T}_n - a_n^\alpha b_\alpha ,$$

которые, согласно (3, 7, 8, 12), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \widetilde{T}_n + \widetilde{T}_n \omega_0^0 + m a_n^\alpha \omega_\alpha^0 \equiv 0, \nabla S_n + S_n \omega_0^0 = S_{nk}\omega_n^k .$$

Следует отметить, что система функций $\left\{\lambda_{ij}^n, \widetilde{\Lambda}_i, B_{\alpha\beta}^n, b_\alpha, S_n\right\}$ образует поле геометрических объектов 3-го порядка на регулярной гиперполосе $CH_m \subset P_n$. Известно [6; 11], что эта система определяет поле инвариантных соприкасающихся с гиперполосой гиперквадрик, уравнения которых относительно репера 1-го порядка имеют вид

$$\lambda_{ij}^n x^i x^j + 2\widetilde{\Lambda}_i x^i x^n + B_{\alpha\beta}^n x^\alpha x^\beta + 2b_\alpha x^\alpha x^n + S_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n . \quad (13)$$

Замечание 1. Относительно гиперквадрик (13) в каждой точке $A_0 \in V_m$ касательная плоскость $T_m(A_0)$ и характеристика $X_{n-m-1}(A_0)$ полярно сопряжены [7].

Замечание 2. Обращение в нуль тензора Дарбу D_{ijk}^n (9) есть условие соприкосновения 3-го порядка гиперквадрик (13) с гиперполосой $CH_m \subset P_n$, то есть в каждой точке $A_0 \in V_m$ гипреквадрике (13) принадлежат точки

$$A_0 ,\ A_0 + dA_0 ,\ A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2 A_0 ,\ A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2 A_0 + \frac{1}{3!}d^3 A_0 .$$

Поле геометрического объекта $\left\{\lambda_{ij}^n, \widetilde{\Lambda}_i\right\}$ устанавливает между полями нормалей ν_n^i, ν_i^0 1-го и 2-го рода гиперполосы CH_m полярное соответствие (взаимность) относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (13) тогда и только тогда, когда выполняется соотношение [8]

$$\nu_i^0 = \widetilde{\Lambda}_i + \lambda_{ik}^n \nu_n^k . \quad (14)$$

Наконец, в 3-й дифференциальной окрестности введем новые функции:

$$V_{ij} \overset{def}{=} \widetilde{\Lambda}_{ij} + \widetilde{\Lambda}_i \widetilde{\Lambda}_j - \frac{1}{m} \widetilde{T}_n \lambda^n_{ij}, W_{nk} \overset{def}{=} \lambda^{is}_n \lambda^{jt}_n V_{ij} D^n_{kst} + (\eta_{nk} - \mu_{nk}),$$

$$W^i_n \overset{def}{=} D^{ik} W_{nk}, \; F^i_n \overset{def}{=} \frac{1}{2} \lambda^{ik}_n (D_k - \widetilde{\Lambda}_k), \; J^i_n = W^i_n + F^i_n,$$

дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$\nabla V_{ij} + 2V_{ij}\omega^0_0 + c^\alpha_{ij}\omega^0_\alpha \equiv 0, \; \nabla W_{nk} + 2W_{nk}\omega^0_0 \equiv 0,$$

$$\nabla W^i_n = W^i_{nk}\omega^k_0, \; \nabla F^i_n = F^i_{nk}\omega^k_0, \; \nabla J^i_n = 0. \qquad (15)$$

Заметим, что функция $J = D^n_{ijk} D^{ij} (W^k_n + F^k_n)$ [8] есть абсолютный инвариант 3-го порядка гиперполосы $CH_m \subset P_n$, так как в силу (9, 11, 15) имеем $\nabla J = 0$.

Замечание 3. Требование инвариантности поля нормали $N_{n-m}(\nu)$ первого рода гиперполосы CH_m приводит к условию

$$\nabla \nu^i_n = \nu^i_{nj}\omega^j_0,$$

а требование инвариантности поля $N_{m-1}(\nu)$ нормалей 2-го рода приводит к условию

$$\nabla \nu^0_i + \omega^0_i = \nu^0_{ik}\omega^k_0.$$

В качестве охвата объекта $\{\nu^i_n\}$ можно взять любой из тензоров W^i_n, F^i_n, J^i_n. Например, пусть для определенности $\nu^i_n \overset{def}{=} W^i_n$. Тогда по формуле (14) находим охват объекта $\{\nu^0_i\}$:

$$\nu^0_i = W^0_i \overset{def}{=} \widetilde{\Lambda}_i + \lambda^n_{ip} W^p_n.$$

§ 4. Проективная связность на оснащенной гиперполосе CH_m

Определение. Гиперполоса CH_m *оснащена в смысле Э. Картана* [8], если каждой точке $A_0 \in V_m$ поставлена в соответствие плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ размерности $n-m-1$, не имеющая общей точки с касательной плоскостью $T_m(A_0)$.

Плоскость $K_{n-m-1} = [K_\alpha, K_n]$ в каждой точке $A_0 \in V_m$ можно задать следующим образом:

$$K_\alpha = \nu_\alpha^0 A_0 + A_\alpha\,,\; K_n = \nu_n^0 A_0 + \nu_n^i A_i + \nu_n^\alpha A_\alpha + A_n\,, \quad (16)$$

где

$$\nabla \nu_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \nu_{\alpha k}^0 \omega_0^k\,,\; \nabla \nu_n^0 + \nu_n^i \omega_i^0 + \nu_n^\alpha \omega_\alpha^0 = \nu_{nk}^0 \omega_0^k\,, \quad (17)$$

$$\nabla \nu_n^i = \nu_{nk}^i \omega_0^k\,,\; \nabla \nu_n^\alpha = \nu_{nk}^\alpha \omega_0^k\,.$$

Охваты функций в (16) имеют вид

$$\nu_\alpha^0 = e_\alpha^0 \overset{def}{=} -\frac{1}{m}\Lambda_{\alpha i}^i\,,\; \nu_n^i = W_n^i\,,\; \nu_n^\alpha \overset{def}{=} a_n^\alpha = -\frac{1}{m}\lambda_{ij}^\alpha \lambda_n^{ij}\,, \quad (18)$$

$$\nu_n^0 = W_i^0 W_n^i + e_\alpha^0 a_n^\alpha\,.$$

В силу сказанного оснащение гиперполосы CH_m в смысле Э. Картана равносильно заданию на гиперполосе CH_m полей геометрических объектов $\{\nu_n^i\}$, $\{\nu_n^i, e_\alpha^0, \nu_n^\alpha\}$, при этом в каждой точке $A_0 \in V_m$ оснащающая плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ пересекает характеристику $X_{n-m-1}(A_0)$ по оси Кёнигса $K_{n-m-2} = [K_\alpha = e_\alpha^0 A_0 + A_\alpha]$ [8; 9].

Известно [3], что при $m>1$ оснащающие плоскости Э. Картана $K_{n-m-1}(A_0)$ неподвижны при любом смещении A_0 тогда и только тогда, когда ее смещение не выходит за пределы нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$.

Проективную связность на гиперполосе CH_m определим при помощи системы форм $\tilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$, которые получаются из форм $\omega_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$, ω_0^i следующим преобразованием [2]:

$$\tilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} = \omega_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} - \Gamma_{\tilde{j}k}^{\tilde{i}} \omega_0^k . \tag{19}$$

Преобразованные формы $\tilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$ (19) удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\tilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} = \tilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{s}} \wedge \tilde{\omega}_{\tilde{s}}^{\tilde{j}} + \omega_0^k \wedge \Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}} ,$$

где

$$\Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}} = d\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}} + \Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}\omega_0^0 - \Gamma_{\tilde{s}k}^{\tilde{j}}\omega_{\tilde{i}}^{\tilde{s}} + \Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{s}}\omega_{\tilde{s}}^{\tilde{j}} - \Gamma_{\tilde{i}s}^{\tilde{j}}\omega_k^s - \Gamma_{\tilde{s}p}^{\tilde{j}}\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{s}}\omega_0^p + \lambda_{\tilde{i}k}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\tilde{j}} .$$

Здесь для удобства записи мы ввели обозначение $\lambda_{0k}^{\alpha} = 0$. Формы $\Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}$, ω_0^k образуют вполне интегрируемую систему и определяют на базисной поверхности $V_m \subset CH_m$ поле геометрического объекта $\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}$. Этот объект $\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}$ мы будем называть объектом проективной связности Γ (19) гиперполосы CH_m.

Для того чтобы формы $\tilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$ определяли проективную связность на гиперполосе CH_m, необходимо и достаточно [2], чтобы было задано поле объекта связности $\Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}}$:

$$\Delta\Gamma_{\tilde{i}k}^{\tilde{j}} = \Gamma_{\tilde{i}kp}^{\tilde{j}}\omega_0^p , \tag{20}$$

тогда

$$D\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} = \widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{s}} \wedge \widetilde{\omega}_{\tilde{s}}^{\tilde{j}} + R_{\tilde{i}\,kp}^{\tilde{j}} \omega_0^k \wedge \omega_0^p ,$$

где $R_{\tilde{i}\,kp}^{\tilde{j}} = \Gamma_{\tilde{i}\,[kp]}^{\tilde{j}}$ — тензор кручения-кривизны проективной связности гиперполосы CH_m.

Будем полагать, что гиперполоса $CH_m \subset P_n$ оснащена в смысле Э. Картана [13]. Построим для этой гиперполосы CH_m проективную связность Γ, внутренне определенную самой гиперполосой CH_m, то есть охват объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{\tilde{i}\,k}^{\tilde{j}}\}$ фундаментальными объектами гиперполосы CH_m [4; 5].

Предварительно распишем систему дифференциальных уравнений (20):

$$\nabla\Gamma_{0k}^{j} + \Gamma_{0k}^{j}\omega_0^0 = \widetilde{\Gamma}_{0kp}^{j}\omega_0^p ,$$

$$\nabla\Gamma_{0k}^{0} + \Gamma_{0k}^{0}\omega_0^0 + \Gamma_{0k}^{i}\omega_i^0 = \widetilde{\Gamma}_{0kp}^{0}\omega_0^p ,$$

$$\Delta\Gamma_{ik}^{0} + \Gamma_{ik}^{0}\omega_0^0 - \Gamma_{0k}^{0}\omega_i^0 - \Gamma_{ik}^{q}\omega_q^0 + \lambda_{ik}^{\alpha}\omega_\alpha^0 = \widetilde{\Gamma}_{ikp}^{0}\omega_0^p ,$$

$$\Delta\Gamma_{ik}^{j} + \Gamma_{ik}^{j}\omega_0^0 - \Gamma_{0k}^{j}\omega_i^0 = \widetilde{\Gamma}_{ikp}^{j}\omega_0^p ,$$

где правые части $\widetilde{\Gamma}_{\tilde{i}\,kp}^{\tilde{j}}\omega_0^p$ состоят из первоначальных членов $\Gamma_{\tilde{i}\,kp}^{\tilde{j}}\omega_0^p$ и членов, содержащих главные формы ω_0^p, которые перенесены из левых частей уравнений (20).

Охват объекта проективной связности Γ осуществим по формулам

$$\Gamma_{0k}^{0} = 0 ,\ \Gamma_{0k}^{j} = 0 ,\ \Gamma_{ik}^{j} = a_{ik}^{n}\nu_n^j ,\ \Gamma_{ik}^{0} = a_{ik}^{n}\nu_n^0 + \lambda_{ik}^{\alpha}\nu_\alpha^0 - a_{ik}^{n}a_n^{\alpha}a_\alpha^0 . \quad (21)$$

Таким образом, формы проективной связности $\widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{j}}$, внутренним образом присоединенные к гиперполосе CH_m, имеют вид

$$\widetilde{\omega}_0^i = \omega_0^i,\ \widetilde{\omega}_0^0 = \omega_0^0,\ \widetilde{\omega}_i^j = \omega_i^j - a_{ik}^n \nu_n^j \omega_0^k, \tag{22}$$

$$\widetilde{\omega}_i^0 = \omega_i^0 - (a_{ik}^n \nu_n^0 - a_{ik}^n a_n^\alpha \nu_\alpha^0 + \lambda_{ik}^\alpha \nu_\alpha^0)\omega_0^k.$$

Из соотношений (21) с учетом уравнений (1, 2, 17, 18) получаем следующие выражения для коэффициентов $\widetilde{\Gamma}_{\tilde{i}kp}^{\tilde{j}}$:

$$\widetilde{\Gamma}_{0kp}^j = 0,\ \widetilde{\Gamma}_{0kp}^0 = 0,\ \widetilde{\Gamma}_{ikp}^j = a_{ikp}^n \nu_n^j + a_{ik}^n \nu_{np}^j,$$

$$\widetilde{\Gamma}_{ikp}^0 = a_{ikp}^n \nu_n^0 + a_{ik}^n \nu_{np}^0 - a_{ikp}^n a_n^\alpha e_\alpha^0 - a_{ik}^n a_{np}^\alpha e_\alpha^0 -$$

$$- a_{ik}^n a_n^\alpha e_{\alpha p}^0 + \lambda_{ikp}^\alpha \nu_\alpha^0 + \lambda_{ik}^\alpha \nu_{\alpha p}^0.$$

Учитывая построенные выше охваты (21) компонент объекта проективной связности Г, находим охваты компонент тензора кручения-кривизны $R_{\tilde{i}kp}^{\tilde{j}}$:

$$R_{0kp}^j = 0,\ R_{0kp}^0 = 0,$$

$$R_{ikp}^j = 2[a_{i[k}^n \nu_{|n|p]}^j + a_{i[k}^n \delta_{p]}^j \nu_n^o - a_{i[k}^n \delta_{p]}^j a_n^\alpha \nu_\alpha^0 + \lambda_{i[k}^\alpha \delta_{p]}^j \nu_\alpha^0 +$$

$$+ \lambda_{i[k}^\alpha \lambda_{|\alpha|p]}^j + a_{q[k}^n a_{p]i}^n \nu_n^q \nu_n^j],$$

$$R_{ikp}^0 = 2[a_{i[k}^n \nu_{|n|p]}^0 - a_{i[k}^n a_{|n|p]}^\alpha \nu_\alpha^0 - a_{i[k}^n \nu_{|\alpha|p]}^0 a_n^\alpha + \lambda_{i[k}^\alpha \nu_{|\alpha|p]}^0 +$$

$$+ a_{q[k}^n a_{p]i}^n \nu_n^q \nu_n^0 + \lambda_{q[k}^\alpha a_{p]i}^n \nu_n^q \nu_\alpha^0 - a_{q[k}^n a_{p]i}^n a_n^\alpha \nu_\alpha^0 \nu_n^q].$$

Покажем, что построенная связность Г относится к классу проективных связностей, определяемых путем проектирования. Действительно, при определяющем связность отображении

$$A_K(u+du) \to A_K(u, du) = A_K(u) + \omega_K^J A_J(u) + [2]$$

образом касательной плоскости $T_m(u+du) = [A_{\tilde{i}}(u+du)]$ является плоскость $T_m(u, du) = [A_{\tilde{i}}(u, du)]$:

$$A_{\tilde{i}}(u+du) \to A_{\tilde{i}}(u, du) = A_{\tilde{i}}(u) + \omega_{\tilde{i}}^K A_K(u) + [2]. \tag{23}$$

Спроектируем на касательную плоскость $T_m(u) = [A_{\tilde{i}}(u)](A_0)$ образ $[A_{\tilde{i}}(u, du)]$ соседней касательной плоскости $T_m(u+du) = [A_{\tilde{i}}(u+du)]$, приняв оснащающую плоскость $K_{n-m-1}(A_0) = [K_\alpha, K_n]$ за центр проектирования. Эта проекция определяется отображением

$$\begin{aligned} & A_{\tilde{i}}(u, du) \to \widetilde{A}_{\tilde{i}}(u, du) = A_{\tilde{i}}(u, du) + l_{\tilde{i}}^\alpha K_\alpha + l_{\tilde{i}}^n K_n = \\ & = A_{\tilde{i}}(u) + \omega_{\tilde{i}}^{\tilde{k}} A_{\tilde{k}} + \omega_{\tilde{i}}^\alpha A_\alpha + \omega_{\tilde{i}}^n A_n + l_{\tilde{i}}^\alpha K_\alpha + l_{\tilde{i}}^n K_n = \\ & = A_{\tilde{i}}(u) + (\omega_{\tilde{i}}^k + l_{\tilde{i}}^n \nu_n^k) A_k + (l_{\tilde{i}}^n \nu_n^0 + l_{\tilde{i}}^\alpha \nu_\alpha^0 + \omega_{\tilde{i}}^0) A_0 + \\ & + (\omega_{\tilde{i}}^\alpha + l_{\tilde{i}}^n a_n^\alpha + l_{\tilde{i}}^\alpha) A_\alpha + (\omega_{\tilde{i}}^n + l_{\tilde{i}}^n) A_n. \end{aligned} \tag{24}$$

Коэффициенты $l_{\tilde{i}}^\alpha$, $l_{\tilde{i}}^n$ определим из условия: проекции $\widetilde{A}_{\tilde{i}}(u, du)$ вершин $A_{\tilde{i}}(u, du)$ должны располагаться в касательной плоскости $T_m(u) = [A_{\tilde{i}}(u)]$, то есть в разложении (24) должны отсутствовать члены, содержащие A_α и A_n. В результате получим, что

$$l_0^n = 0\,,\; l_0^\alpha = 0\,,\; l_i^n = -a_{ij}^n \omega_n^j\,,\; l_i^\alpha = -\lambda_{ip}^\alpha \omega_0^p + a_{ip}^n a_n^\alpha \omega_0^p\,. \tag{25}$$

Итак, суперпозиция отображений (23) и (24) задает отображение, определяющее проективную связность Γ для гиперполосы CH_m (здесь мы учитываем соотношения (25)):

$$A_{\tilde{i}}(u, du) \to \widetilde{A}_{\tilde{i}}(u, du) = A_{\tilde{i}}(u) + \widetilde{\omega}_{\tilde{i}}^{\tilde{p}} A_{\tilde{p}}\,.$$

Формы (22), определяющие главную часть полученного отображения, и являются формами проективной связности на гиперполосе CH_m, определенной путем проектирования. Объект этой связности Γ определяется формулами (22), что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 197—272.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Лаптев Г. Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда. М., 1961. Т. 2. С. 226—236.

4. *Попов Ю. И.* Введение проективных связностей на *SH*-распределении проективного пространства // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2017. №1. С. 5—15.

5. *Попов Ю. И.* Введение связностей на гиперповерхности $\Omega(\Delta)$ // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2018. №1. С. 18—24.

6. *Попов Ю. И.* Общая теория регулярных гиперполос : учеб. пособие. Калининград, 1983.

7. *Попов Ю. И.* Соприкасающиеся гиперквадрики кооснащенной гиперполосы $^{s}H_{m}$ // ДГМФ. Калининград, 2019. Вып. 50. С. 126—132.

8. *Попов Ю. И., Столяров А. В.* Специальные классы регулярных гиперполос проективного пространства : учеб. пособие. Калининград, 2011.

9. *Попов Ю. И.* Гиперполосные распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

10. *Попов Ю. И.* О полях геометрических объектов Δ-оснащенной гиперповерхности проективного пространства // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2017. №4. С. 16—23.

11. *Столяров А. В.* О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Математика. 1979. Вып. 10. С. 97—99.

12. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.

13. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. М., 1937. Вып. 4. С. 147—159.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 58A05, 53A20

N. A. Eliseeva[1], *Yu. I. Popov*[2]
[1] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
[2] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-5

Fields of fundamental and embracing geometric objects of a regular hyperband with central framing of a projective space

Submitted on April 5, 2022

The study of hyperbands and their generalizations in spaces with different fundamental groups is of great interest in connection with numerous applications in mathematics and physics. In this paper, we study a special class of hyperbands, i. e., centrally equipped hyperbands. A hyperband H_m ($m \geq 2$) is said to be centrally rigged if the rigging lines in the normals of the 1st kind of the base surface pass through one (the center of the rigging).

The article gives a task of a centrally equipped hyperband in the 1st order frame. A sequence of fundamental geometric objects of a hyperstrip with central framing is constructed. An existence theorem for a hyperband with a central framing is proved. It is proved that a hyperstrip with central framing and framing in the sense of Cartan induces a projective connection obtained by projection, where the projection center at each point is the Cartan plane. The spans of the components of the curvature-torsion tensor of the constructed connection are found.

Keywords: hyperstrip, Cartan equipment, regular hyperstrip, torsion-curvature tensor, quasitensor, geometric object, envelopment of a geometric object, projective connection

References

1. *Vagner, V. V.:* The theory of the field of local hyperbands. Tr. Semin. Vectorn. Tensorn. Anal., 8, 197—272 (1950).

2. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

3. *Laptev, G. F.:* Manifolds immersed in generalized spaces. Tr. 4^{th} Vses. Math. Congress, 2, 226—236 (1961).

4. *Popov, Yu. I.:* Introduction of projective connections on the *SH*-distribution of a projective space. IKBFU's Vestnik. Physics, Math., and Techn., 1, 5—15 (2017).

5. *Popov, Yu. I.:* Introduction of connections on the hypersurface $\Omega(\Delta)$. IKBFU's Vestnik. Physics, Math., and Techn., 1, 18—24 (2018).

6. *Popov, Yu. I.:* General theory of regular hyperbands. Kaliningrad (1983).

7. *Popov, Yu. I.:* Contigious hyperquadrics of coequipped hyperbands ^sH_m. DGMF. Kaliningrad. 50, 126—132 (2019).

8. *Popov, Yu. I., Stolyarov, A. V.:* Special classes of regular hyperbands in a projective space. Kaliningrad (2011).

9. *Popov, Yu. I.:* Hyperstrip distributions of affine space. Kaliningrad (2021).

10. *Popov, Yu. I.:* On the fields of geometric objects of a Δ-framed hypersurface of a projective space. IKBFU's Vestnik. Physics, Math., and Techn., 4, 16—23 (2017).

11. *Stolyarov, A. V.:* On fundamental objects of a regular hyperband. Izv. Vuzov. Math., 10, 97—99 (1979).

12. *Finikov, S. P.:* Cartan's exterior form method in differential geometry. Moscow (1948).

13. *Cartan E.*: Les espaces a connexion projective. Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal., 4, 147—159 (1937).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

Л. А. Игнаточкина
Московский педагогический государственный университет, Россия
ignlia@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-6

Характеристический вектор почти контактной метрической структуры как аффинное движение

Рассмотрены почти контактные метрические многообразия, характеристический вектор которых является аффинным движением. Доказано, что шестой структурный тензор почти контактного метрического многообразия, для которого характеристический вектор является аффинным движением, равен нулю. Доказано, что для таких многообразий контактная форма инвариантна относительно локальной однопараметрической подгруппы, порожденной характеристическим вектором. Рассмотрены почти контактные метрические многообразия, характеристический вектор которых является торсообразующим и аффинным движением. Доказано, что для таких многообразий характеристический вектор ковариантно постоянен в римановой связности метрики, то есть не существует почти контактных метрических многообразий с торсообразующим характеристическим вектором, который был бы аффинным движением, отличным от движения.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, характеристический вектор, аффинное движение, торсообразующее векторное поле

Пусть M^{2n+1} — гладкое многообразие, $n>1$. Напомним [1], что четверка тензорных полей $(\Phi, \xi, \eta, \mathrm{g})$, где Φ — тензорное поле типа (1,1), ξ — векторное поле (называемое *характери-*

Поступила в редакцию 28.05.2022 г.
© Игнаточкина Л. А., 2022

стическим вектором или *вектором Риба*), η — 1-форма (называемая *контактной формой*), g — риманова метрика, называется *почти контактной метрической структурой*, если

$$\Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta,\ \ \eta(\xi) = 1, \Phi(\xi) = 0,\ \eta \circ \Phi = 0,$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in X(M),$$

где $X(M)$ — модуль гладких векторных полей. Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием*. К каждому почти контактному метрическому многообразию внутренним образом присоединено подрасслоение расслоения реперов со структурной группой $\{e\} \times U(n)$. Оно называется *присоединенной* G-*структурой*, а элементы $(m, \xi_m = \varepsilon_0, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, $m \in M$, ее тотального пространства расслоения, называются A-*реперами*. Здесь индексы

$$i, j, k, \ldots = 0, \ldots, 2n;\ a, b, c, \ldots = 1, \ldots, n;$$

$$\hat{a}, \hat{b}, \ldots = n+1, \ldots, 2n;\ \hat{a},\ \ldots = a + n.$$

На пространстве присоединенной G-структуры компоненты тензорных полей почти контактной метрической структуры имеют следующий вид:

$$\Phi^a_b = i\delta^a_b, \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -i\delta^b_a,\ g_{00} = 1,\ g_{\hat{a}b} = g_{b\hat{a}} = \delta^a_b,\ \xi^0 = \eta_0 = 1,$$

остальные компоненты равны нулю.

Ковариантный дифференциал $\nabla\Phi$ в римановой связности ∇ метрики g определяет шесть тензорных полей, которые называются *структурными тензорами* почти контактной метрической структуры. Они определяются через компоненты $\{\Phi^i_{j,k}\}$ ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ следующим образом [1]:

$$B=\left\{B^{i}_{jk}\right\},\, B^{a}_{\hat{b}c}=B^{ab}{}_{c}=-\frac{i}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},c},\, B^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}=B_{ab}{}^{c}=\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}};$$

$$C=\left\{C^{i}_{jk}\right\},\, C^{a}_{\hat{b}\hat{c}}=C^{abc}=\frac{i}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},\hat{c}},\; C^{\hat{a}}_{bc}=C_{abc}=-\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c};$$

$$D=\left\{D^{i}{}_{j}\right\}, D^{a}_{\hat{b}}=B^{ab}=i\left(\Phi^{a}_{0,\hat{b}}-\frac{1}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},0}\right), D^{\hat{a}}{}_{b}=B_{ab}=$$

$$=-i\left(\Phi^{\hat{a}}_{0,b}-\frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}\right);$$

$$E=\left\{E^{i}{}_{j}\right\},\; E^{a}{}_{b}=B^{a}{}_{b}=i\Phi^{a}_{0,b},\; E^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}=B_{a}{}^{b}=-i\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}};$$

$$F=\left\{F^{i}{}_{j}\right\},\; F^{a}{}_{\hat{b}}=F^{ab}=i\Phi^{0}_{\hat{a},\hat{b}},\; F^{\hat{a}}{}_{b}=F_{ab}=-i\Phi^{0}_{a,b};$$

$$G=\left\{G^{i}\right\}, G^{a}=G_{\hat{a}}=-i\Phi^{0}_{\hat{a},0},\; G^{\hat{a}}=G_{a}=i\Phi^{0}_{a,0},$$

остальные компоненты этих тензорных полей равны нулю. Кроме того, имеют место тождества

$$1)\;\Phi^{\hat{a}}_{b,\,k}=-\Phi^{\hat{b}}_{a,\,k},\; 2)\;\Phi^{\hat{a}}_{0,\,k}=-\Phi^{0}_{a,\,k} \qquad (1)$$

и формулы комплексно сопряженные.

Хорошо известно, что в окрестности каждой точки, в которой векторное поле (в частности, характеристический вектор ξ) отлично от нуля, это векторное поле порождает локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов. В связи с этим встает задача выяснить, будут ли геометрические объекты, заданные на почти контактном метрическом многообразии, инвариантны относительно этой группы преобразований. Одним из таких объектов является риманова связность ∇ метрики g . Хорошо известно [2], что локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, определенная векторным полем X , сохраняет ∇ тогда и только тогда, когда $\nabla L_X\left(g\right)=0$, где L_X обозначает производную Ли в направлении векторного поля X. Такое векторное поле называется *аффинным движением*. Изучим свойства почти контактных метрических многообразий, для которых характеристический вектор ξ является аффинным движением. Так как ξ является двойственным векторным полем для контактной формы η, то есть $\eta(X)=g(X,\xi)$, из хорошо известной формулы

$$L_\xi(g)(X,Y)=g(\nabla_X\xi,Y)+g(X,\nabla_Y\xi),\quad X,Y\in X(M),$$

получим

$$L_\xi(g)(X,Y)=\nabla_X(\eta)Y+\nabla_Y(\eta)X. \tag{2}$$

Применяя к (2) оператор ковариантного дифференцирования ∇_Z, получим

$$\nabla_Z L_\xi(g)(X,Y)=\nabla\nabla(\eta)(X,Y,Z)+\nabla\nabla(\eta)(Y,X,Z). \tag{3}$$

Из (3) следует, что ξ будет аффинным движением тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется тождество

$$\eta_{i,\,j,\,k}+\eta_{j,\,i,\,k}=0, \tag{4}$$

где $\{\eta_{i,j,k}\}$ — компоненты $\nabla\nabla(\eta)$ на пространстве присоединенной G-структуры. Выразим их через компоненты структурных тензоров и их ковариантные производные. По основной теореме тензорного анализа для $\nabla\eta$ имеем

$$d\eta_{i,\,j}-\eta_{k,\,j}\theta_i^k-\eta_{i,\,k}\theta_j^k=\eta_{i,\,j,\,k}\omega^k, \tag{5}$$

где $\{\theta_i^k\}$ — тензорные компоненты римановой связности ∇, а $\{\omega^k\}$ — тензорные компоненты формы смещения. Из основной теоремы тензорного анализа для η и (1) получаем, что

$$\eta_{a,\,b}=-F_{ab},\ \eta_{\hat{a},\,b}=B^a{}_b,\ \eta_{a,\,0}=G_a,\ \eta_{0,\,k}=0 \tag{6}$$

и формулы комплексно сопряженные. Из (5) и (6) следует:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \eta_{a,\,b,\,c} = -F_{abc} - B^d{}_b C_{dac} - B_a{}^d C_{dbc} - G_a F_{bc}\,,\\
&2)\ \eta_{a,\,b,\,\hat c} = -F_{ab\hat c} + B^d{}_b B_{da}{}^c + B_a{}^d B_{db}{}^c + G_a B_b{}^c\,,\\
&3)\ \eta_{a,\,b,\,0} = -F_{ab0} + B^c{}_b\left(B_{ca} + F_{ca}\right) + B_a{}^c\left(B_{cb} + F_{cb}\right) + G_b G_a\,,\\
&4)\ \eta_{\hat a,\,b,\,c} = B^a{}_{bc} - F_{db} B^{da}{}_c + F^{ad} C_{dbc} - G^a F_{bc}\,,\\
&5)\ \eta_{\hat a,\,b,\,\hat c} = B^a{}_{b\hat c} + F_{db} C^{dac} - F^{ad} B_{db}{}^c + G^a B_b{}^c\,,\\
&6)\ \eta_{\hat a,\,b,\,0} = B^a{}_{b0} + F_{db} B^{ad} - F^{ad} B_{db} + G^a G_b\,,\\
&7)\ \eta_{a,\,0,\,c} = G_{ac} - G^d C_{dac} + F_{ad} B^d{}_c + B_a{}^d F_{dc}\,, \qquad\qquad (7)\\
&8)\ \eta_{a,\,0,\,\hat c} = G_{a\hat c} + G^d B_{da}{}^c - F_{ad} F^{dc} - B_a{}^d B_d{}^c\,,\\
&9)\ \eta_{a,\,0,\,0} = G_{a0} - G^d B_{ad} - B_a{}^d G_d\,,\\
&10)\ \eta_{0,\,0,\,c} = -G_d B^d{}_c + G^d F_{dc}\,,\\
&11)\ \eta_{0,\,a,\,c} = F_{da} B^d{}_c + B^d{}_a F_{dc}\,,\\
&12)\ \eta_{0,\,a,\,\hat c} = -F_{da} F^{dc} - B^d{}_a B_d{}^c\,,\\
&13)\ \eta_{0,\,a,\,0} = F_{da} G^d - B^d{}_a G_d\,,\\
&14)\ \eta_{0,\,0,\,0} = -2G^d G_d
\end{aligned}
$$

и формулы комплексно сопряженные. Системы функций $\{F_{abk}\}, \{G_{ak}\}, \{B^a{}_{bk}\}$ определяются уравнениями

$$
1)\ dF_{ab} - F_{cb}\theta^c_a - F_{ac}\theta^c_b = F_{abk}\omega^k,\ 2)\ dG_a - G_c\theta^c_a = G_{ak}\omega^k,
$$

$$
3)\ dB^a{}_b - B^a{}_c\theta^c_b + B^c{}_b\theta^a_c = B^a{}_{bk}\omega^k. \qquad (8)
$$

Из (4) и (7_{14}) следует, что норма $\| G^d \| = 0$, следовательно, шестой структурный тензор равен нулю. Тем самым доказана теорема.

Теорема 1. *Если характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия является аффинным движением, то шестой структурный тензор G равен нулю.*

Подставляя (7) в (4), получаем критерий.

Теорема 2. *Характеристический вектор ξ является аффинным движением тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}
&1)\ G^a = 0,\ 2)\ F_{(ab)0} = -\left(B^c{}_{(a} + B_{(a}{}^c\right)\left(B_{b)c} + F_{b)c}\right), \\
&3)\ \left(F_{ad} + F_{da}\right)B^d{}_c + \left(B_a{}^d + B^d{}_a\right)F_{dc} = 0, \\
&4)\ B^a_{b0} + F_{db}B^{ad} - F^{ad}B_{db} + B_b{}^{a0} - F_{bd}B^{da} + F^{da}B_{bd} = 0, \\
&5)\ \left(F^{ad} + F^{da}\right)F_{dc} + \left(B^a{}_d + B_d{}^a\right)B^d{}_c = 0, \\
&6)\ F_{(ab)c} = -\left(B^d{}_{(a} + B_{(a}{}^d\right)C_{b)dc}, \qquad (9) \\
&7)\ B^a{}_{bc} + B_b{}^a{}_c - \left(F_{db} + F_{bd}\right)B^{da}{}_c + \left(F^{ad} + F^{da}\right)C_{dbc} = 0, \\
&8)\ F_{(ab)\hat{c}} = -\left(B_{(a}{}^d + B^d{}_{(a}\right)B_{b)d}{}^c,
\end{aligned}$$

где круглые скобки обозначают симметризацию по индексам, заключенным в них.

Рассмотрим инвариантность тензорных полей относительно локальной однопараметрической группы, порожденной ξ. Будем говорить при этом, что характеристический вектор ξ *сохраняет тензорное поле*. Характеристический вектор ξ сохраняет контактную форму η тогда и только тогда, когда шестой структурный тензор G обращается в нуль [3]. Откуда получается

Теорема 3. *Если характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия является аффинным движением, то ξ сохраняет контактную форму η.*

В [4] были изучены некоторые классы почти контактных метрических многообразий с характеристическим вектором ξ, который одновременно является аффинным движением и торсообразующим векторным полем. Рассмотрим общий случай почти контактного метрического многообразия, характеристический вектор которого является торсообразующим вектором и аффинным движением. Напомним, что векторное поле ξ называется *торсообразующим*, если

$$\nabla\xi = \rho id + a \otimes \xi ,$$

где a — некоторая 1-форма, ρ — некоторая гладкая функция на M. Эти форму и функцию называют *определяющими элементами* торсообразующего векторного поля. На пространстве присоединенной *G*-структуры это условие записывается в виде

$$1)\ B^a{}_b = \rho\delta^a_b,\ 2)\ F_{ab} = 0,\ 3)\ G_a = 0,\ 4)\ a_b = 0,\ \rho + a_0 = 0 \quad (10)$$

и формулы комплексно сопряженные. Здесь $\left\{a_b, a_{\hat{b}}, a_0\right\}$ — компоненты формы a на пространстве присоединенной *G*-структуры. Применим оператор внешнего дифференцирования d к (10_1) и подставим в получившееся выражение (8_3). Тогда

$$1)\ B^a{}_{bc} = \rho_c\delta^a_b,\ 2)\ B^a{}_{b\hat{c}} = \rho_{\hat{c}}\delta^a_b,\ 3)\ B^a{}_{b0} = \rho_0\delta^a_b, \qquad (11)$$

где $d\rho = \rho_k\omega^k$. Аналогично из (8_1) и (10_2) получим

$$F_{abk} = 0. \qquad (12)$$

Отметим, что если $F_{ab} = 0$, то из определения B_{ab} с учетом (1) следует, что B_{ab} кососимметричны по индексам $a, b.$ С учетом этого подставим (10—12) и комплексно сопряженные формулы в формулы (9). Получим

$$\rho_0 = 0, \rho_c = 0, \rho^2\delta^a_c = 0.$$

Сворачивая по индексам a, c последнее равенство, получаем $\rho = 0$. Откуда с учетом (10_4) получаем, что $a = 0$. Тогда $\nabla\xi = 0$. Тем самым доказана

Теорема 4. *Если характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия является торсообразующим векторным полем и аффинным движением, то его определяющие элементы нулевые, а ξ ковариантно постоянен в римановой связности метрики g.*

Так как контактная форма η и характеристический вектор ξ двойственны, то есть $g(\nabla_X\xi, Y) = \nabla_X(\eta)Y$, из теоремы 4 с учетом (2) получаем

Следствие. *Если характеристический вектор* ξ *почти контактного метрического многообразия является торсообразующим векторным полем и аффинным движением, то он сохраняет метрику* g *(такие векторные поля называются движениями, или киллинговыми векторными полями). Другими словами, не существует почти контактных метрических многообразий с торсообразующим характеристическим вектором* ξ*, который был бы аффинным движением, отличным от движения.*

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях : монография. Одесса, 2013.

2. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. М., 2003.

3. *Игнаточкина Л.А, Никифорова А.В.* Инвариантность почти контактной метрической структуры гладкого многообразия относительно характеристического вектора // Классическая и современная геометрия (Москва, 1—4 ноября 2021 г.). М., 2021. С. 75—76.

4. *Терпстра М.А.* О геометрии характеристического вектора почти контактных метрических структур : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2011.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53C15, 53D15

L. A. Ignatochkina
Moscow Pedagogical State University
1/1 M. Pirogovskaya St., Moscow, 119991, Russia
ignlia@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-6

Reeb vector field of almost contact metric structure as affine motion

Submitted on May 28, 2022

Smooth manifold with almost contact metric structure (i. e., almost contact metric manifold) was considered in this paper. We used a modern version of Cartan’s method of external forms to conduct our study. We assume that its Reeb vector field is affine motion. We got formulas for components of second covariant differential of contact form for an arbitrary almost contact metric manifold. Criterion for affine motion of Reeb vector field has been obtained for arbitrary almost contact metric manifold in this paper. It is proved that if Reeb vector field of almost contact structure is affine motion then sixth structural tensor of almost contact metric structure is vanishing. It is proved that if Reeb vector field is affine motion and torse-forming vector field then Reeb vector field is Killing vector field. It is proved that if Reeb vector field of almost contact metric structure is torse-forming vector field and it is not Killing vector field then it is not affine motion.

Keywords: almost contact metric structure, Reeb vector field, affine motion, torse-forming vector field

References

1. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).
2. *Aminova, A.V.*: Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. Moscow (2003).
3. *Ignatochkina, L.A., Nikiforova, A.V.:* Invariance of almost contact metric structure under Reeb vector fields. Classic and modern geometry. Moscow, 75—76 (2021).
4. *Terpstra, M.A.:* About geometry of characteristic vector of almost contact metric structure. PhD thesis. Moscow (2011).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
arturkuleshov@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-7

О структурных формах проективной структуры

Показано, что проективная структура на гладком многообразии порождает дифференциально-геометрические структуры 2-го, 3-го и т. д. порядков над расслоением фактор-реперов данного гладкого многообразия. Построены структурные формы и выведены структурные уравнения данной структуры.

Ключевые слова: гладкое многообразие, фактор-репер, расслоение реперов, проективная структура, дифференциально-геометрическая структура, структурные формы, структурные уравнения

Введение

Изучение проективных структур было начато еще в работах Дж. Уайтхеда [5] и Ш. Эресмана [6] 30-х гг. прошлого века. Однако до сих пор «при $n \geq 3$ проблема существования и классификации проективных структур на n-мерном многообразии чрезвычайно далека от решения» [3, с. 169]. Полный ответ на задачу классификации известен только в размерностях 1 и 2 (см., напр., [7]). Пример гладкого многообразия размерности 3, не допускающего проективной структуры, приведен в [8].

Существует ряд эквивалентных определений проективной структуры, связывающих это понятие с проективными атласами, развертывающими отображениями, тензорными плотностями (см., напр., [9]). Проективную структуру можно также понимать как плоскую проективную связность [3, с. 242].

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.
© Кулешов А. В., 2022

Целью данной статьи является интерпретация проективной структуры на гладком многообразии M в терминах расслоений реперов высшего порядка $H^p(M)$ на M и их структурных форм. Она достигается путем построения дифференциально-геометрических структур, порождаемых данной проективной структурой. Данное построение осуществлено в несколько этапов.

Этап 1. Для произвольного многообразия M конструируется так называемое расслоение фактор-реперов $P(M)$, ассоциированное с $H^2(M)$.

Этап 2. При помощи заданной на M проективной структуры строятся отображения из $P(M)$ в $H^p(M)$, $p \geq 2$.

Этап 3. При помощи кодифференциалов отображений, построенных на этапе 2, структурные формы расслоений $H^p(M)$ «переносятся» на $P(M)$.

Структура настоящей работы следующая. В части 1 приводятся необходимые сведения о расслоениях реперов высших порядков и структурных формах (см., напр., [1]). Этапы 1—3 реализованы в частях 2—4 соответственно. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем 1 и 2.

На протяжении всей работы индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k, l, m, ... = \overline{1, n}.$$

1. Расслоения реперов высших порядков

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие, $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ — атлас на M, $x \in M$ — некоторая точка, (U, φ) — некоторая карта атласа в окрестности данной точки. Репер порядка p (p-репер) r_x^p на многообразии M в точке x — это p-струя $j_0^p f$ диффеоморфизма $f : (R^n, 0) \to (M, x)$ окрестностей точек $0 \in R^n$ и $x \in M$ такого, что $f(0) = x$. Локальными координатами этого p-репера в карте (U,φ) считаются значения в точке $0\in R^n$ частных производных функций f^i, задающих координатное представление $\varphi\circ f$ отображения f относительно данной карты:

$$(x^i, x^i_j, x^i_{jk}, \dots, x^i_{j_1 j_2\dots j_p}),$$

где

$$x^i = f^i(0),\ x^i_{j_1 j_2\dots j_s} = \partial_{j_1 j_2\dots j_s} f^i(0),\ s=1,\dots,p,$$

а в роли аргументов выступают стандартные координаты $(t^1,t^2,\dots,t^n)$ на R^n. Заметим, что матрица (x^i_j) обратима.

Через D^p_n обозначим дифференциальную группу порядка p, где $p=1,2,\dots$. Множество $H^p(M)$ всех p-реперов многообразия M наделено структурой главного расслоения с базой M, структурной группой D^p_n и канонической проекцией

$$\pi^p : H^p(M)\to M,\quad \pi^p(r^p_x)=x.$$

Так как каждый p-репер определяет последовательность реперов всех низших порядков, то для любых $p<q$ определен гомоморфизм главных расслоений $\pi^q_p : H^q(M)\to H^p(M)$.

На расслоении $H^3(M)$ глобально определены дифференциальные 1-формы ω^i, ω^i_j, ω^i_{jk}, локальное координатное выражение которых вытекает из формул

$$dx^i = x^i_j\omega^i,$$

$$dx^i_j = x^i_k\omega^k_j + x^i_{jk}\omega^k, \tag{1.1}$$

$$dx^i_{jk} = x^i_l\omega^l_{jk} + x^i_{jl}\omega^l_k + x^i_{kl}\omega^l_j + x^i_{jkl}\omega^l$$

и имеет вид

$$\omega^i = \tilde{x}^i_j dx^j ,$$

$$\omega^i_j = \tilde{x}^i_k (dx^k_j - x^k_{jl}\omega^l) , \qquad (1.2)$$

$$\omega^i_{jk} = \tilde{x}^i_l (dx^l_{jk} - x^l_{jm}\omega^m_k - x^l_{km}\omega^m_j - x^l_{jkm}\omega^m) ,$$

где $\tilde{x}^i_j$ — элементы матрицы, обратной матрице (x^i_j):

$$\tilde{x}^i_k x^k_j = \delta^i_j .$$

Внешние дифференциалы 1-форм ω^i, ω^i_j можно представить в виде

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j ,\ d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} . \qquad (1.3)$$

2. Расслоение фактор-реперов

Определение 1. Пусть r^2_x и $\hat{r}^2_x$ — два репера порядка 2 в точке $x \in M$. Назовем их *эквивалентными*, если относительно некоторой (а значит, любой) карты на M в окрестности точки x их координаты (x^i, x^i_j, x^i_{jk}) и (y^i, y^i_j, y^i_{jk}) соответственно связаны соотношениями

$$x^i = y^i ,\ x^i_j = y^i_j ,\ x^j_{ik}\tilde{x}^k_j = y^j_{ik}\tilde{y}^k_j .$$

Фактор-репер на M *в точке* x (*центропроективный репер* в терминологии статьи [2]) — это класс эквивалентности $[r^2_x]$ 2-реперов по данному отношению, где r^2_x — 2-репер, представляющий данный класс.

Координатами фактор-репера $[r_x^2]$ относительно карты (U,φ) являются величины (x^i, x^i_j, x_i), где $x_i = x^j_{ik}\widetilde{x}^k_j$. Если при этом отображение f таково, что $j^2_0 f = [r^2_x]$, то

$$x_i = \left.\frac{\partial \ln |J_f|}{\partial t^i}\right|_{t=0},$$

где J_f — якобиан отображения f относительно данной карты:

$$J_f = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial t^j}\right).$$

Обозначим через PD^1_n проективно-дифференциальную группу первого порядка.

Теорема 1. *Множество* $P(M)$ *всех фактор-реперов многообразия* M *наделяется структурой главного расслоения с базой* M *, структурной группой* PD^1_n *и канонической проекцией* $\overline{\pi}: P(M) \to M$ *, действующей по правилу* $\overline{\pi}([r^2_x]) = x$*. Расслоение* $P(M)$ *присоединено к главному расслоению* $H^2(M)$ *с гомоморфизмом-охватом*

$$\Phi: H^2(M) \to P(M), \quad \Phi(r^2_x) = [r^2_x].$$

Доказательство см. в статье [2].

Дифференциалы dx_i можно разложить по формам ω^i, ω^i_j, ω_i следующим образом [2]:

$$dx_i = \omega_i + x_j\omega^j_i + x_{ij}\omega^j, \tag{2.1}$$

где

$$x_{ij} = x^l_{ijk}\widetilde{x}^k_l - \widetilde{x}^k_l x^l_{im}\widetilde{x}^m_q x^q_{jk}, \tag{2.2}$$

$$\omega_i = \omega^k_{ik}.$$

3. Проективная структура на многообразии

Определение 2. Атлас $A=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ на гладком многообразии M называется *проективным атласом*, если все отображения перехода $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ дробно-линейны. *Два проективных атласа* называются *эквивалентными*, если их объединение — снова проективный атлас. Класс эквивалентности проективных атласов называется *проективной структурой* Π [3].

Определение 3. Пусть даны два расслоения: $\widetilde{F}(M)$ и $F(M)$, ассоциированные с расслоением *p*-реперов $H^p(M)$, причем расслоение $\widetilde{F}(M)$ охватывает расслоение $F(M)$: $\varphi:\widetilde{F}(M)\to F(M)$. *Дифференциально-геометрической структурой порядка p на* $F(M)$ называется сечение [1]

$$\sigma:F(M)\to\widetilde{F}(M),\quad \varphi\circ\sigma=id_{F(M)}.$$

Вначале покажем, как с помощью проективной структуры выделить по одному каноническому представителю для каждого фактор-репера на M. Для этого среди всевозможных локальных диффеоморфизмов $f:(R^n,0)\to(M,x)$ выделим такие, которые хотя бы в одной (а следовательно, в каждой) карте проективной структуры Π задаются дробно-линейными функциями, отличными от констант:

$$x^i=f^i(t^j)=\frac{a^i_j t^j+a^i_0}{a^0_j t^j+a^0_0},\quad \det(a^i_j)\neq 0. \tag{3.1}$$

Класс всех таких отображений обозначим через $\Im(M)$.

Лемма 1. *В любой карте проективной структуры* Π *справедливы следующие выражения для частных производных 2-го порядка отображения (3.1) класса* $\Im(M)$:

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial t^i \partial t^j} = \frac{1}{n+1}(A_i^l A_j + A_j^l A_i), \tag{3.2}$$

где

$$A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}, \quad A_i = \frac{\partial^2 x^m}{\partial t^i \partial t^k} \frac{\partial t^k}{\partial x^m}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \Im(M)$, то есть отображение f задано функциями вида (3.1). Формулу (3.1) перепишем в виде тождества относительно переменных t^j:

$$(a_k^0 t^k + a_0^0)x^l = a_k^l t^k + a_0^l.$$

Последовательно дифференцируя это тождество сначала по t^i, затем по t^j, получим:

$$(a_k^0 t^k + a_0^0)\frac{\partial x^l}{\partial t^i} + a_i^0 x^l = a_i^l,$$

$$(a_k^0 t^k + a_0^0)\frac{\partial^2 x^l}{\partial t^i \partial t^j} + a_i^0 \frac{\partial x^l}{\partial t^j} + a_j^0 \frac{\partial x^l}{\partial t^i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial t^i \partial t^j} = -\frac{1}{a_k^0 t^k + a_0^0}\left(a_i^0 \frac{\partial x^l}{\partial t^j} + a_j^0 \frac{\partial x^l}{\partial t^i}\right). \tag{3.3}$$

Пусть

$$A_i = \frac{\partial x^m}{\partial t^i \partial t^k} \frac{\partial t^k}{\partial x^m}.$$

Тогда в силу (3.3)

$$A_i = \frac{\partial^2 x^m}{\partial t^i \partial t^k} \frac{\partial t^k}{\partial x^m} = -\frac{(n+1)a_i^0}{a_k^0 t^k + a_0^0}. \tag{3.4}$$

С учетом данного равенства формула (3.3) дает (3.2). Лемма доказана.

Замечание 1. Из (3.4) получается выражение для частной производной A_i по t^j:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t^j} = \frac{A_i A_j}{n+1}.$$

Замечание 2. Формула (3.2) обобщается на частные производные любого порядка $p \geq 2$:

$$\frac{\partial^p x^l}{\partial t^{i_1} \partial t^{i_2} \ldots \partial t^{i_p}} = \frac{p!}{(n+1)^{p-1}} A^l_{(i_1} A_{i_2} \ldots\ A_{i_p)}. \qquad (3.5)$$

Замечание 3. Из леммы 1 непосредственно следует, что для отображений класса $\Im(M)$ многомерная производная Шварца [3] обращается в нуль.

Замечание 4. В случае $n = 1$ равенства (3.2) обращаются в тождество для произвольного отображения, а потому они сами по себе не накладывают никаких ограничений. При этом равенства (3.5) при $p = 3$ принимают вид

$$f'''(t) = \frac{3}{2} \frac{(f''(t))^2}{f'(t)},$$

что равносильно обращению в нуль производной Шварца [3].

Замечание 5. Формула (3.1), рассматриваемая как система дифференциальных уравнений на неизвестные функции $x^i(t^j)$ при $n \geq 2$, допускает непосредственное интегрирование (см., напр., [4]), и ее решение имеет вид (3.1). Таким образом, при $n \geq 2$ она является не только необходимым, но также и достаточным условием принадлежности отображения f классу $\Im(M)$.

Лемма 2. *Для любого фактор-репера ξ_x многообразия M существует единственное (с точностью до выбора окрест-*

ности точки x*) отображение* f *класса* $\Im(M)$ *такое, что данный фактор-репер является классом эквивалентности в точке* x *2-репера данного отображения:*

$$\xi_x = [j_0^2 f], \quad f \in \Im(M).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное отображение $f \in \Im(M)$ такое, что $f(0) = x$. В любой карте проективной структуры Π в окрестности точки x отображение f задается функциями f^i вида (3.1). При этом $a_0^0 \neq 0$, поскольку f определено в точке $0 \in R^n$. Разложим функции f^i по формуле Маклорена 2-го порядка:

$$f^i = c^i + \sigma_j^i t^j + \frac{1}{2}\sigma_{jk}^i t^j t^k + o(\rho^2), \tag{3.6}$$

где

$$\sigma_j^i = c_j^i - c^i c_j, \quad \sigma_{jk}^i = -2\sigma_j^i c_k,$$

$$c_j^i = \frac{a_j^i}{a_0^0}, \quad c^i = \frac{a_0^i}{a_0^0}, \quad c_j = \frac{a_j^0}{a_0^0}, \quad \rho = ((t^1)^2 + \ldots + (t^n))^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$f^i = x^i + x_j^i t^j + \frac{1}{2} x_{jk}^i t^j t^k + o(\rho^2), \tag{3.7}$$

где (x^i, x_j^i, x_{jk}^i) — координаты 2-струи $j_0^2 f$.

Сопоставляя (3.6) и (3.7), видим, что отображение f порождает заданный фактор-репер $\xi_x = [j_0^2 f]$ тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$c^i = x^i, \quad \sigma_j^i = x_j^i, \quad \sigma_{(ij)}^k \widetilde{\sigma}_k^j = x_i,$$

которые равносильны следующей системе уравнений относительно неизвестных c_j^i, c^i, c_j:

$$c^i = x^i, \quad c^i_j - c^i c_j = x^i_j, \quad -(x^j_i c_k + x^j_k c_i)\widetilde{x}^k_j = x_i,$$

имеющей единственное решение

$$c^i = x^i, \quad c_i = -\frac{1}{n+1} x_i, \quad c^i_j = x^i_j - \frac{1}{n+1} x^i x_j.$$

Лемма доказана.

Замечание 6. Из леммы 2 следует, что для каждой точки $x \in M$ фактор-реперы на M в этой точке находятся во взаимно-однозначном соответствии с ростками отображений класса $\Im(M)$ в данной точке, причем данное соответствие не зависит от выбора локальных координат.

Замечание 7. В частном случае, когда многообразие M представляет собой проективное пространство P^n, а проективная структура на нем задана аффинными картами, фактор-реперы на M можно отождествить с обычными проективными реперами, и таким образом понятие фактор-репера приобретает наглядный геометрический смысл [11].

Теорема 2. *Проективная структура* Π *на гладком многообразии определяет семейство отображений*

$$\sigma^p : P(M) \to H^p(M), \quad p \geq 2,$$

являющихся дифференциально-геометрическими структурами порядка p *над расслоением фактор-реперов* $P(M)$. *Действие каждого из отображений* σ^p *относительно любой локальной карты на* M, *принадлежащей проективной структуре* Π, *имеет вид*

$$(x^i, x^i_j, x_i) \to (x^i, x^i_j, \overline{x}^i_{jk}, \ldots, \overline{x}^i_{j_1 j_2 \ldots j_p}),$$

где

$$\overline{x}^i_{j_1 j_2 \ldots j_p} = \frac{p!}{(n+1)^{p-1}} x^i_{(j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_p)}, \quad p = 2, 3, \ldots . \qquad (3.8)$$

Доказательство. По лемме 2, для каждого фактор-репера ξ_x существует единственное (с точностью до выбора окрестности точки x) отображение f класса $\Im(M)$ такое, что $\xi_x = [j_0^2 f]$. Отображение f, в свою очередь, определяет для каждого $p \geq 2$ p-репер $r_x^p = j_0^p f$ в точке x. Тем самым построено семейство отображений $\sigma^p : P(M) \to H^p(M)$, $\sigma^p(\xi_x) = r_x^p$, действие которых относительно любой локальной карты на M, принадлежащей проективной структуре Π, имеет вид (3.8), вытекающий из формулы (3.5). Теорема доказана.

Замечание 8. Из (2.2) и (3.8) вытекает, что

$$\overline{x}_{ij} = \frac{x_i x_j}{n+1}. \tag{3.9}$$

4. Структурные формы проективной структуры

Рассмотрим 1-формы ω^i, ω_j^i, ω_{jk}^i, ω_i, определенные на $H^3(M)$, а также их образы под действием кодифференциала отображения σ^3:

$$\overline{\omega}^i = \sigma^{3*}(\omega^i),\ \overline{\omega}_j^i = \sigma^{3*}(\omega_j^i),\ \overline{\omega}_{jk}^i = \sigma^{3*}(\omega_{jk}^i),\ \overline{\omega}_i = \sigma^{3*}(\omega_i).$$

1-формы $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_j^i$, $\overline{\omega}_i$, определенные на $P(M)$, будем называть структурными формами проективной структуры Π. Выражения для форм $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}_j^i$ легко получаются из выражений для форм ω^i, ω_j^i:

$$\overline{\omega}^i = \tilde{x}_j^i dx^j,\ \overline{\omega}_j^i = \tilde{x}_k^i (dx_j^k - \overline{x}_{jl}^k \omega^l).$$

Лемма 3. *Выражения для форм* $\overline{\omega}_{jk}^i$ *имеют вид*

$$\overline{\omega}_{jk}^i = \frac{1}{n+1}(\delta_j^i \overline{\omega}_k + \delta_k^i \overline{\omega}_j). \tag{4.1}$$

Доказательство. Выведем выражение для дифференциала $d\overline{x}^i_{jk}$ через формы $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}^i_j$, $\overline{\omega}_i$. Используя формулы (3.8) при $p=2$, (1.1) и (2.1), получим

$$d\overline{x}^i_{jk} = \frac{1}{n+1} d(x^i_j x_k) + \{j \leftrightarrow k\} =$$

$$= \frac{1}{n+1}(x_k(\underline{x^i_m \overline{\omega}^m_j} + \overline{x}^i_{jm}\overline{\omega}^m) + x^i_j(\overline{\omega}_k + \underline{x_m \overline{\omega}^m_k} + \overline{x}_{km}\overline{\omega}^m)) + \{j \leftrightarrow k\},$$

где символ $\{j \leftrightarrow k\}$ обозначает выражение, полученное перестановкой индексов j и k. Отдельно рассмотрим подчеркнутые слагаемые. Заметим, что

$$x^i_m x_k \overline{\omega}^m_j + x^i_j x_m \overline{\omega}^m_k + \{j \leftrightarrow k\} = x^i_m x_k \overline{\omega}^m_j + x^i_k x_m \overline{\omega}^m_j + \{j \leftrightarrow k\} =$$

$$= (x^i_m x_k + x^i_k x_m)\overline{\omega}^m_j + \{j \leftrightarrow k\} = (n+1)\overline{x}^i_{km}\overline{\omega}^m_j .$$

Также отдельно рассмотрим слагаемые, содержащие формы $\overline{\omega}^m$. В силу (3.8) и (3.9) получим

$$x_k \overline{x}^i_{jm}\overline{\omega}^m + x^i_j \overline{x}_{km}\overline{\omega}^m + \{j \leftrightarrow k\} =$$

$$= \frac{1}{n+1}(x_k(x^i_j x_m + x^i_m x_j) + x^i_j x_k x_m)\overline{\omega}^m + \{j \leftrightarrow k\} = (n+1)\overline{x}^i_{jkm}\overline{\omega}^m .$$

Таким образом,

$$d\overline{x}^i_{jk} = \frac{1}{n+1} x^i_m(\delta^m_j \overline{\omega}_k + \delta^m_k \overline{\omega}_j) + \overline{x}^i_{km}\overline{\omega}^m_j + \overline{x}^i_{jm}\overline{\omega}^m_k + \overline{x}^i_{jkm}\overline{\omega}^m .$$

Сравнивая полученное выражение с (1.1), приходим к (4.1). Лемма доказана.

Теорема 3. *Внешние дифференциалы структурных форм проективной структуры* Π *удовлетворяют уравнениям*

$$d\overline{\omega}^i = \overline{\omega}^j \wedge \overline{\omega}^i_j , \tag{4.2}$$

$$d\overline{\omega}_j^i = \overline{\omega}_j^k \wedge \overline{\omega}_k^i + \frac{1}{n+1}\overline{\omega}^k \wedge (\delta_j^i \overline{\omega}_k + \delta_k^i \overline{\omega}_j)\,, \tag{4.3}$$

$$d\overline{\omega}_i = \overline{\omega}_i^j \wedge \overline{\omega}_j\,. \tag{4.4}$$

Доказательство. Формула (4.2) получается непосредственно из (1.3). Формула (4.3) выводится из (1.3) в силу леммы 3. Выведем формулу (4.5). Для этого применим к обеим частям равенства (2.1) кодифференциал отображения σ^3:

$$dx_i = \overline{\omega}_i + x_j \overline{\omega}_i^j + \overline{x}_{ij}\overline{\omega}^j\,,$$

а затем возьмем внешний дифференциал от обеих частей:

$$0 = d\overline{\omega}_i + dx_j \wedge \overline{\omega}_i^j + x_j d\overline{\omega}_i^j + d\overline{x}_{ij} \wedge \overline{\omega}^j + \overline{x}_{ij} d\overline{\omega}^j\,. \tag{4.5}$$

Отдельно рассмотрим сумму второго и третьего слагаемых. В силу (4.3) и (2.1) получим

$$dx_j \wedge \overline{\omega}_i^j + x_j d\overline{\omega}_i^j = (\overline{\omega}_j + \underline{x_k \overline{\omega}_j^k} + \overline{x}_{jk}\overline{\omega}^k) \wedge \overline{\omega}_i^j +$$

$$+ x_j(\underline{\overline{\omega}_i^k \wedge \overline{\omega}_k^j} + \frac{1}{n+1}\overline{\omega}^k \wedge (\delta_i^j \overline{\omega}_k + \delta_k^j \overline{\omega}_i)),$$

где подчеркнутые члены взаимно уничтожаются. Также отдельно рассмотрим сумму четвертого и пятого слагаемых, которая с учетом (3.9) и (2.1) приводится к виду

$$d\overline{x}_{ij} \wedge \overline{\omega}^j + \overline{x}_{ij} d\overline{\omega}^j = \frac{1}{n+1}((x_j dx_i + x_i dx_j) \wedge \overline{\omega}^j + x_i x_j \overline{\omega}^k \wedge \overline{\omega}_k^j) =$$

$$= \frac{1}{n+1}(x_j(\overline{\omega}_i + x_k \overline{\omega}_i^k + \underline{\overline{x}_{ik}\overline{\omega}^k}) \wedge \overline{\omega}^j +$$

$$+ x_i(\overline{\omega}_j + \underline{x_k \overline{\omega}_j^k} + \underline{\overline{x}_{jk}\overline{\omega}^k}) \wedge \overline{\omega}^j + \underline{x_i x_j \overline{\omega}^k \wedge \overline{\omega}_k^j},$$

где сумма подчеркнутых членов равна нулю. Таким образом, равенство (4.5) принимает вид

$$0 = d\overline{\omega}_i + \frac{1}{n+1}\overline{\omega}^k \wedge (x_i\overline{\omega}_k + x_k\overline{\omega}_i) + \overline{\omega}_j \wedge \overline{\omega}_i^j + \overline{x}_{jk}\overline{\omega}^k \wedge \overline{\omega}_i^j +$$

$$+\frac{1}{n+1}(x_j\overline{\omega}_i \wedge \overline{\omega}^j + x_j x_k \overline{\omega}_i^k \wedge \overline{\omega}^j + x_i\overline{\omega}_j \wedge \overline{\omega}^j),$$

откуда после приведения подобных слагаемых получается (4.4). Теорема доказана.

Замечание 9. Из теоремы 2 ввиду теоремы Фробениуса вытекает, что система уравнений

$$\overline{\omega}_i^j = 0, \quad \overline{\omega}_i = 0;$$

задает вполне интегрируемое распределение D на расслоении $P(M)$. Следовательно, над любой связной односвязной областью $U \subset M$ результат параллельного перенесения фактор-репера не зависит от выбора пути на базе M, вдоль которого оно осуществляется, а зависит лишь от его начала и конца.

Замечание 10. Если произвести замену $\overline{\omega}^i = \vartheta^i$, $\overline{\omega}_j^i = \vartheta_j^i$, $\overline{\omega}_i = -(n+1)\vartheta_i$, то с чисто формальной точки зрения уравнения (4.2)—(4.4) примут тот же самый вид, что и структурные уравнения группы проективных преобразований n-мерного проективного пространства (см., например, [10]). Однако, в отличие от последнего, на многообразии M действие указанной группы a priori не задано.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

2. *Кулешов А.В.* Центропроективные реперы как классы эквивалентности реперов второго порядка // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 94—107.

3. *Овсиенко В.Ю., Табачников С.Л.* Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое: от производной Шварца до когомологий групп диффеоморфизмов. М., 2008.

4. *Eisenhart L.P.* Non-Riemannian Geometry. N.Y., 1927.

5. *Whitehead J.M.C.* Locally homogeneous spaces in differential geometry // Ann. Math. 1932. Vol. 33, №4. P. 681—687.

6. *Ehresmann, C.* Sur les espaces localement homogènes. L'Enseign // Math. 1936. Vol. 35. P. 317—333.

7. *Choi C., Goldman W.* The classification of real projective structures on compact surfaces // Bull. Am. Math. Soc., 1997. Vol. 34. P. 161—171.

8. *Cooper D., Goldman W.* A 3-Manifold with no Real projective structure. http://arxiv.org/abs/1207.2007.

9. *Овсиенко В.Ю.* Проективные структуры и контактные формы // Функциональный анализ и его приложения. 1994. Т. 28, №3. С. 187—197.

10. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

11. *Кулешов А.В.* Об эквивалентности двух точек зрения на центропроективные реперы // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 60—65.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53B10, 53C10

A. V. Kuleshov

Immanuel Kant Baltic Federal University

14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia

arturkuleshov@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-7

On the structure forms of a projective structure

Submitted on May 22, 2022

A projective structure on a smooth manifold is a maximal atlas such that all its transition maps are the fractional linear transformations. Our aim is to interpret this notion in terms of the higher order frame bundles and their structure forms. It is shown that the projective structure generates the sequence of differential geometric structures. The construction is following:

Step 1. For a smooth manifold the so-called quotient frame bundle associated to the 2nd order frame bundle on the manifold is constructed.

Step 2. Given projective structure on the manifold, the mappings from the quotient frame bundle to the higher order frame bundles are constructed. These mappings are the differential geometric structures.

Step 3. The pullbacks of the structure forms of the frame bundles via the mappings are considered. These are called structure forms of the projective structure. The expressions of their exterior differentials in terms of the forms themselves are found. These expressions coincide with the structure equations of a projective space.

Keywords: smooth manifold, quotient frame, frame bundle, projective structure, differential geometric structure, structure forms, structure equations

References

1. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

2. *Kuleshov, A. V.:* Center-projective frames as equivalence classes of the second order frames. DGMF. Kaliningrad. 46, 94—107 (2015).

3. *Ovsienko, V., Tabachnikov S.:* Projective differential geometry. Old and new. Cambridge (2005).

4. *Eisenhart, L.P.*: Non-Riemannian Geometry. New York (1927).

5. *Whitehead, J.M.C.:* Locally homogeneous spaces in differential geometry. Ann. Math. **33**:4, 681—687 (1932).

6. *Ehresmann, C.:* Sur les espaces localement homogènes. L'Enseign. Math. 35, 317—333 (1936).

7. *Choi, C., Goldman, W.:* The classification of real projective structures on compact surfaces. Bull. Am. Math. Soc. 34, 161—171 (1997).

8. *Cooper, D., Goldman, W.:* A 3-Manifold with no Real projective structure. http://arxiv.org/abs/1207.2007.

9. *Ovsienko, V. Yu.:* Projective structure and contact forms. Funct. anal. and its app., **28**:3, 187—197 (1994).

10. *Kobayashi, S.:* Transformation groups in differential geometry. Moscow (1986).

11. *Kuleshov, A. V.:* On the equivalence of two viewpoints on the center-projective frames. DGMF. Kaliningrad. 48, 60—65 (2017).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 517.54; 514.144.14

С. В. Мациевский
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
sergei.matsievsky@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-8

Одна геометрическая модель дробно-линейных преобразований

Представлена модель дробно-линейных преобразований комплексной плоскости в виде точек комплексного трехмерного проективного пространства без линейной «запрещенной» квадрики. Представлена модель вещественных дробно-линейных преобразований комплексной плоскости в виде точек вещественного трехмерного проективного пространства без линейной «запрещенной» квадрики. Найдено геометрическое разделение точек, соответствующих параболическим, гиперболическим и эллиптическим вещественным дробно-линейным преобразованиям с помощью «параболического» конуса, касающегося запрещенной квадрики. Найдены некоторые свойства точек модели, соответствующих вещественным дробно-линейным преобразованиям, а также преобразованиям фундаментальных групп двусвязных областей комплексной плоскости.

Ключевые слова: дробно-линейное преобразование, комплексная плоскость, трехмерное проективное пространство, запрещенная квадрика, параболический конус, фундаментальная группа

1. Введение. Неподвижные точки дробно-линейного преобразования

Дробно-линейным преобразованием (отображением), или дробно-линейной функцией, называется преобразование (отображение) расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$:

Поступила в редакцию 03.06.2022 г.
© Мациевский С. В., 2022

$$w = L(z): z \mapsto \frac{x^0 z + x^1}{x^2 z + x^3},$$

где $x^\alpha \in \mathbf{C}$, $z \in \mathbf{C}$, $x^0 x^3 - x^1 x^2 \neq 0$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Если же

$$x^0 x^3 - x^1 x^2 = 0,$$

то дробно-линейное преобразование сводится к постоянной, то есть отображает расширенную комплексную плоскость в одну точку[1—5].

Дробно-линейное преобразование также называют *преобразованием Мёбиуса*, *проективным преобразованием*, *билинейным преобразованием*, *спиновым преобразованием* (теория относительности) [5].

Формула не задает преобразование при $z = \infty$ и $z = -\frac{x^3}{x^2}$. Доопределим преобразование по непрерывности [3—4]:

$$w(\infty) = \frac{x^0}{x^2},\ w(\infty) = \infty \text{ при } x^2 = 0,\ w\left(-\frac{x^3}{x^2}\right) = \infty.$$

Если $L(u) = u$, то точка $u \in \overline{\mathbf{C}}$ *называется неподвижной*. Множество неподвижных точек дробно-линейного преобразования определяется квадратным уравнением

$$x^2 u^2 + (x^3 - x^0)u - x^1 = 0$$

и состоит из двух элементов: u_1 и u_2 [1—2]. Возможны следующие четыре случая [1].

(1) $u_1 \neq u_2$. Имеем:

$$\frac{w - u_1}{w - u_2} = k \frac{z - u_1}{z - u_2},\ k \in \boldsymbol{C}.$$

(1a) $k \in \mathbf{R}$, то есть k вещественно, — *гиперболическое преобразование*.

(1б) модуль $|k|=1$ — *эллиптическое преобразование.*

(1в) $k \notin \mathbf{R}$, $|k| \neq 1$, — *локсодромическое преобразование.*

(2) $u_1 = u_2$ — *параболическое преобразование.*

2. Группа дробно-линейных преобразований и запрещенная квадрика

Как известно, описанные выше преобразования образуют *группу дробно-линейных преобразований* [1—4; 6—9]. Эта группа изоморфна полной линейной группе $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ невырожденных квадратных матриц второго порядка над полем комплексных чисел **C**:

$$L_2(L_1(z)) \cong \begin{pmatrix} y^0 & y^1 \\ y^2 & y^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 & x^1 \\ x^2 & x^3 \end{pmatrix}.$$

Введем на группе $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ следующее отношение эквивалентности *e*:

$$(x^0, x^1, x^1, x^2) \sim (y^0, y^1, y^1, y^2)$$

тогда и только тогда, когда

$$\exists \lambda \in \boldsymbol{C}/\{0\} : x^\alpha = \lambda y^\alpha, \ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

В итоге получим

$$\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}} \cong \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})/e,$$

где $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$ — группа всех конформных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости [5].

Множество-носитель группы $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ можно интерпретировать как множество аналитических точек трехмерного проективного пространства над полем **C** с исключенной из него невырожденной линейчатой квадрикой *Q*, которая определяется квадратным уравнением

$$x^0 x^3 - x^1 x^2 \neq 0.$$

Множество-носитель группы $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$ есть тогда множество точек трехмерного проективного пространства $P_3(\mathbf{C})$ над полем комплексных чисел **C**, исключая квадрику Q. Такую квадрику назовем *запрещенной квадрикой* группы дробно-линейных преобразований. Очевидно, что точка $E=(1,0,0,1)$ проективного пространства $P_3(\mathbf{C})$ представляет собой единицу этой группы (рис. 1)[1] [5].

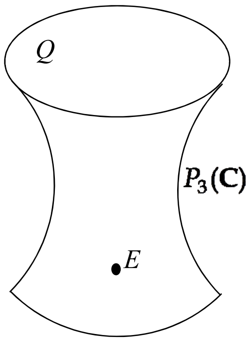

Рис. 1. Запрещенная квадрика

3. Вещественные дробно-линейные преобразования и структура вещественной запрещенной квадрики

Рассмотрим фуксову подгруппу $\overline{\mathbf{G}}$ группы $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$, оставляющую на месте верхнюю полуплоскость плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, то есть

$$x^{\alpha} \in \boldsymbol{R},\ x^0x^3 - x^1x^2 > 0\,.$$

Множество-носитель $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$ можно интерпретировать как множество точек G (вместе с $E=(1,0,0,1)$) трехмерного проективного пространства $P_3(\mathbf{R})$, ограниченных запрещенной

[1] Рисунки в статье весьма условны.

невырожденной линейчатой квадрикой Q [5]. Прямые, проходящие через точку E и касающиеся квадрики Q, образуют *конус параболических преобразований K*, касающийся квадрики Q по эллипсу S (рис. 2).

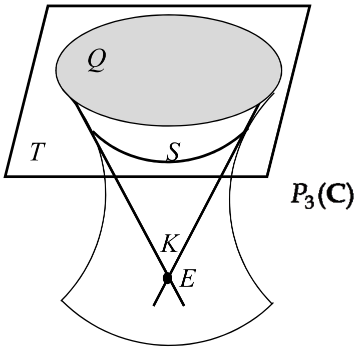

Рис. 2. Запрещенная квадрика и конус K

Обозначим через S эллипс пересечения квадрики Q и плоскости T:

$$x^0 + x^3 = 0 .$$

Точка $X + \lambda E$ тогда и только тогда принадлежит квадрике Q, когда

$$\lambda^2 + \lambda \left(x^0 + x^3\right) + x^0 x^3 - x^1 x^2 = 0 .$$

Детерминант этого уравнения

$$\Delta = (x^0 - x^3)^2 + 4x^1 x^2$$

совпадает с детерминантом уравнения неподвижных точек

$$x^2 u^2 + \left(x^3 - x^0\right) u - x^1 = 0 .$$

Поскольку вещественные гиперболические преобразования имеют вещественные неподвижные точки, а эллиптические — комплексно-сопряженные:

— то параболическим вещественным дробно-линейным преобразованиям соответствуют точки пространства $P_3(\mathbf{R})$, лежащие на конусе K, исключая вершину E и эллипс S;

— гиперболическим — внутри K;

— эллиптическим — вне K, но внутри квадрики Q [5].

Локсодромические преобразования отсутствуют.

В дальнейшем не будем различать точку из множества G и соответствующий ей элемент группы $\overline{\mathbf{G}}$.

4. Точки вещественной запрещенной квадрики

1. Рассмотрим внутри квадрики Q точку

$$X = (x^0, x^1, x^2, x^3), \; X \notin T, \; X \neq E.$$

Тогда прямая (EX) пересечет плоскость T в точке

$$X^T = \left(\frac{x^0 - x^3}{2}, x^1, x^2, \frac{x^3 - x^0}{2} \right) = X - \frac{x^0 + x^3}{2} E.$$

Обозначим через $X^{-1} \equiv (-x^3, x^1, x^2, -x^0)$ преобразование, обратное к X. Тогда точки $(X^T, E; X, X^{-1})$ образуют гармоническую четверку [5].

2. Рассмотрим внутри квадрики Q точку

$$X = (x^0, x^1, x^2, x^3), \; X \in T.$$

Поскольку $X^{-1} = X$, то такие точки, и только они, имеют порядок 2 в группе $\overline{\mathbf{G}}$ [5].

3. Если три точки E, X, Y, $Y \neq X^{-1}$, расположенные внутри квадрики Q, коллинеарны, то

$$Y = X + \lambda E, \; x^0 + x^3 + \lambda \neq 0,$$

$$X \cdot Y = X(X + \lambda E) = X + \frac{x^1 x^2 - x^0 x^3}{x^0 + x^3 + \lambda} E.$$

Таким образом, если три точки E, X, Y группы $\overline{\mathbf{G}}$ коллинеарны, то также коллинеарны четыре точки E, X, Y, XY. В общем случае четыре точки E, X, Y, XY не компланарны [5].

5. Вещественные дробно-линейные преобразования и геометрия Лобачевского

Верхняя полуплоскость плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ с группой преобразований $\overline{\mathbf{G}}$ реализует плоскость Лобачевского. Будем рассматривать верхнюю полуплоскость как евклидову плоскость. Угол на ней есть инвариант группы $\overline{\mathbf{G}}$ и сохраняет свое евклидово значение на плоскости Лобачевского. Введем дифференциальный инвариант группы $\overline{\mathbf{G}}$, заменяющий в геометрии Лобачевского евклидов линейный элемент:

$$d\sigma = \frac{ds}{Im\, z},$$

где ds — евклидов линейный элемент на верхней полуплоскости. Длина произвольной кривой l на плоскости Лобачевского равна интегралу линейного элемента $d\sigma$ вдоль этой кривой [1]:

$$\int_l \frac{ds}{Im\, z}.$$

С помощью конформного преобразования метрику Лобачевского можно перенести с верхней полуплоскости почти на любую область комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$. А именно, любую область D комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, имеющую более двух граничных точек в естественной топологии, можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость [3].

Такое конформное преобразование $w(z)$ в случае многосвязной области D многозначно. Отсюда возникает понятие *группы автоморфизмов конформного преобразования* $w(z)$ — подгруппы группы $\overline{\mathbf{G}}$, которая изоморфна *фундаментальной группе* $\pi_1(D)$ многосвязной области D.

В частности, группа $\pi_1(D)$ автоморфизмов конформного преобразования произвольной n-связной области D на верхнюю полуплоскость есть *свободная группа* с образующими в количестве $(n-1)$ [3].

Фундаментальная группа $\pi_1(D)$ состоит только из параболических и гиперболических дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости (группу $\pi_1(D)$ и изоморфную ей группу автоморфизмов конформного преобразования различать не будем), то есть таких, которые не имеют неподвижных точек в верхней полуплоскости и осуществляют параллельный перенос на плоскости Лобачевского [3].

Вернемся к геометрической интерпретации группы $\overline{\mathbf{G}}$ на проективном пространстве (см. рис. 2). Если D — двусвязная область, то преобразования группы $\pi_1(D)$ лежат на одной прямой, проходящей через точку E. Действительно, тогда группа $\pi_1(D)$ порождается одной точкой X, а все точки вида X^n при $n \in \mathrm{Z}$ лежат на прямой (EX) [5]:

$$X \cdot X = X + \frac{x^1 x^2 - x^0 x^3}{x^0 + x^3} E .$$

Группы $\pi_1(D)$ с параболическими преобразованиями суть составляющие параболического конуса K, с гиперболическими — полностью лежат внутри этого конуса, то есть преобразования групп $\pi_1(D)$ полностью заполняют конус.

Список литературы

1. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. Т. 1 : Основные понятия и принципы / пер. с рум. И. Берштейна. М., 1962.

2. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1 : Начала теории. 2-е изд., испр. и доп. М., 1967.

3. *Евграфов М.А.* Аналитические функции : учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М., 1991.

4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М., 1976.

5. *Needham T.* Differential Geometry and Forms: A Mathematical Drama in Five Acts. Princeton, N. J., 2021.

6. *Kisil V. V.* Geometry of Möbius Transformations: Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Actions of $SL(2, R)$. L., 2012.

7. *Olsen J.* The Geometry of Möbius Transformations. Rochester, 2010.

8. *Tsai M. Ch., Gu D. W.* Robust and Optimal Control. L., 2014. Part 4 : Linear Fractional Transformations. P. 65—97.

9. *Arnold D. N., Rogness D.* Möbius Transformations Revealed // Notices of the AMS. 2008. Vol. 55, № 10. P. 1226—1231.

10. *Мациевский С. В.* Дробно-линейные преобразования и геометрия Лобачевского. Калининград, 1982. Рукопись.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 14N99, 30C99, 51N15, 53A20

S. V. Matsievsky
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
sergei.matsievsky@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-8

A geometric model of linear fractional transformations

Submitted on June 3, 2022

A model of linear fractional transformations of the complex plane in the form of points of the complex three-dimensional projective space without a linear “forbidden” quadric is presented. A model of real linear fractional transformations of the complex plane in the form of points of the real three-dimensional projective space without a linear “forbidden” quadric is presented. A geometric separation of points corresponding to parabolic, hyperbolic and elliptic real linear fractional transformations by a “parabolic” cone touching the forbidden quadric is found. Some properties of model points corresponding to real linear fractional transformations are found. Some properties of model points corresponding to fundamental groups transformations of biconnected domains of the complex plane are found.

Keywords: linear fractional transformation, complex plane, three-dimensional projective space, forbidden quadric, parabolic cone, fundamental group

References

1. *Stoilow, S.:* Teoria funcţiilor de o variabilă complex. Vol. 1. Noţiuni şi principii fundamentale. Editura Academiei Republicii Populare Române (1954).

2. *Markushevich, A. I.:* Theory of Analytic Functions. Vol. 1. Beginning of theory. Moscow (1967).

3. *Evgrafov, M. A.:* Analytic Functions. Moscow (1991).

4. *Shabat, B. V.:* Introduction to Complex Analysis. Vol. 1. Moscow (1976).

5. *Needham, T.:* Differential Geometry and Forms: A Mathematical Drama in Five Acts. Princeton, NJ, 2021.

6. *Kisil, V. V.:* Geometry of Möbius Transformations: Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Actions of $SL(2, R)$. London (2012).

7. *Olsen, J.:* The Geometry of Möbius Transformations. University of Rochester (2010).

8. *Tsai, M. Ch., Gu, D. W.* Linear Fractional Transformations. Robust and Optimal Control. London (2014).

9. *Arnold, D. N., Rogness, D.:* Möbius Transformations Revealed // Notices of the AMS, **55**:10, 1226—1231 (2008).

10. *Matsievsky, S. V.:* Linear Fractional Transformations and Lobachevsky Geometry. Kaliningrad (1982). The manuscript.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

К. В. Полякова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

polyakova_@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-9

О расширении касательного пространства 2-го порядка гладкого многообразия

С использованием возмущения внешнего и обычного дифференциалов введены отображения, позволяющие строить несимметричные кореперы и реперы 2-го и более высоких порядков на гладком многообразии. Произведено расширение касательного пространства 2-го порядка к гладкому m-мерному многообразию за счет дополнения касательных векторов 2-го порядка к этому многообразию вертикальными векторами к расслоению линейных реперов над этим многообразием.

Ключевые слова: гладкое многообразие, возмущение дифференциала, деформация дифференциала, касательное пространство 2-го порядка, реперы и кореперы 2-го порядка

Основываясь на применении внешнего и обычного дифференциалов D и d на гладком многообразии X_m, построим расширенный аппарат, позволяющий получить несимметричные формы дифференциальных групп 2-го и более высоких порядков, а также несимметричные векторы касательного пространства 2-го и более высоких порядков.

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.

© Полякова К. В., 2022

Рассмотрим над m-мерным гладким многообразием X_m главное расслоение касательных реперов $L(X_m)$ со структурными уравнениями [3]

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j,$$
$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \quad (1)$$

$i, j, k = 1, \ldots, m$. Его типовым слоем является линейная группа $GL(m)$, действующая в касательном пространстве TX_m.

Формы инвариантного корепера $\{\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx^i_j, dx^i_{jk}\}$ выражаются по формулам [3]

$$\omega^i = x^i_j dx^j,$$
$$\omega^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - x^i_{jk}\omega^k, \quad (2)$$
$$\omega^i_{jk} = dx^i_{jk} + x^l_{jk}\omega^i_l - x^i_{lk}\omega^l_j - x^i_{jl}\omega^l_k + (x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl})\omega^l,$$

где x^i — локальные координаты точки на многообразии X_m. Слоевые координаты 1-го порядка x^i_j образуют невырожденную матрицу, для которой $\left(\overset{*}{x}{}^i_j\right)$ — обратная матрица, то есть $\overset{*}{x}{}^i_j x^j_k = \delta^i_k$. Слоевые координаты 2-го и 3-го порядков x^i_{jk}, x^i_{jkl} симметричны по нижним индексам, в остальном слоевые координаты произвольны и рассматриваются как независимые переменные [3, с. 149].

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m, а значит, и слой расслоения $L(X_m)$. Следовательно, касательное пространство $TL(X_m)$

содержит вертикальное пространство $VL(X_m)=[e_i^j]$, касательное к слою в точке A. Вертикальные векторы имеют вид $e_j^i=-x_k^i\partial_j^k$ [14], $\partial_q^p=\partial/\partial x_p^q\in T^v L(X_m)$.

Каноническая форма 1-го порядка $\omega=\omega^i\varepsilon_i$ на многообразии X_m связывает касательное $TX_m=span(\varepsilon_i)$ и кокасательное $T^*X_m=span(\omega^i)$ пространства к этому многообразию в его текущей точке. Дифференциальные 1-формы ω^i образуют кобазис, сопряженный к подвижному базису $\{\varepsilon_i\}$, то есть $\omega^i(\varepsilon_j)=\delta_j^i$. Относительно натурального (голономного) репера $\left\{\partial_i=\partial/\partial x^i,\ \partial_{ij}=\partial^2/\partial x^i\partial x^j\right\}$ векторы ε_i, ε_{ij} раскладываются по формулам [9; 14]:

$$\varepsilon_i=\overset{*}{x}{}_i^j\partial_j,\ \varepsilon_{ij}=\overset{*}{x}{}_i^k\overset{*}{x}{}_j^l\partial_{kl}+x_{ij}^k\overset{*}{x}{}_k^l\partial_l. \qquad (3)$$

Слоевые формы интерпретируются как компоненты инфинитезимального перемещения векторного репера ε_i, ε_{ij}, удовлетворяющего деривационным уравнениям [7]

$$d\varepsilon_i=\omega^j\varepsilon_{ij}+\omega_i^j\varepsilon_j,\ d\varepsilon_{ij}=\omega_i^k\varepsilon_{kj}+\omega_j^k\varepsilon_{ik}+\omega_{ij}^k\varepsilon_k+\omega^k\varepsilon_{ijk}, \qquad (4)$$

которые получены дифференцированием векторов (3).

В силу (1) и (4) дифференциал канонической формы $\omega=\omega^i\varepsilon_i$ равен нулю.

Пространство $T^2X_m=span(\varepsilon_i,\varepsilon_{ij})$ в текущей точке многообразия называется касательным пространством порядка 2, а также соприкасающимся пространством порядка 1 [8];

$$dimT^2X_m=\tfrac{1}{2}m(m+3).$$

Определим в пространствах T^*X_m и TX_m деформацию дифференциалов D и d с помощью внешнего поля $f=f(x^i,x^\xi)$

и внутреннего поля $f^{\xi} = f^{\xi}(x^i)$, $\xi = \overline{m+1, m+s}$. Например, $f^{\xi} = f\big|_{x^{\xi}=1,\, остальные=0}$. В общем случае можно рассматривать $(x^{\xi}) = (x^i_j, x^i_{jk}, ...)$. В настоящей работе изучим случай, когда значения индекса ξ нумеруют элементы матрицы (x^i_j), то есть $(x^{\xi}) = (x^i_j)$, $f = f(x^k, x^i_j)$. Тогда $f^i_j = f\big|_{x^i_j=1,\, остальные=0}$, то есть в качестве функций f^i_j рассматриваются значения функций $f = f(x^i, x^i_j)$ на координатные линиях x^i_j.

1. Деформация внешнего дифференциала *D* в $T^* X_m$

Определение. Отображение Θ определяет *возмущение внешнего дифференциала D* на многообразии, если $D + \Theta$ снова является дифференциалом $(D+\Theta)^2 = 0$ (см., напр., [10, с. 8, 92].

Можно называть это возмущение *внутренним, или голономным*.

Определение. Отображение Θ определяет *внешнее возмущение внешнего дифференциала D* на многообразии, если $D + \Theta$ является дифференциалом вдоль линии ρ этого многообразия, то есть $(D+\Theta)^2\big|_{\rho} = 0$.

Можно называть это возмущение *неголономным*.

Для дифференциальной 1-формы ω имеем (см.: [6])

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)\big|_{\wedge^2 T^*}, \tag{5}$$

где $f = f(x^i, x^{\xi})$. Будем называть многообразие деформирующимся и обозначать $\breve{X}_m$, а отображение $\breve{D}$ — *внешним дифференциалом на* деформирующемся *многообразии* $\breve{X}_m$, или *внешней деформацией дифференциала D*.

Закон (5) для p-форм имеет вид

$$\breve{D}\overset{p}{\omega} = D\overset{p}{\omega} + p(df \wedge \overset{p}{\omega})\Big|_{\wedge^{p+1}T^*}, \quad f = f(x^i, x^\xi).$$

или коротко (см., напр., [1; 11])

$$\breve{D} = D + pdf \wedge \big|_{\wedge^{p+1}T^*}.$$

Замечание. В работе [1] рассматривается идея Э. Виттена [16] использовать функцию h, заданную на многообразии, для возмущения внешнего дифференциала d, то есть $d_t\omega = d\omega + tdh \wedge \omega$, где t — вещественный параметр. При этом $d_t^2 = 0$.

Замечание. Выражение, по форме аналогичное (1), встречается у [2, с. 174] в следующей теореме. Пусть Λ — тензорная p-форма типа ρ на главном расслоении $H = H(X_m, G_r)$ со значениями в векторном пространстве V_N. Тогда для внешнего абсолютного дифференциала D формы Λ относительно связности τ на главном расслоении H справедливо

$$D\Lambda = d\Lambda + \rho_*(\tau) \wedge \Lambda,$$

где ρ_*: $g \to gl(V)$ — гомоморфизм алгебр Ли, отвечающий представлению ρ.

Найдем деформацию внешнего дифференциала для ковекторов dx^i:

$$\breve{D}(dx^i) = D(dx^i) + df \wedge dx^i\Big|_{T^*} =$$

$$= \partial_j f\, dx^j \wedge dx^i = (\delta^i_{[k}\partial_{j]} f) dx^j \wedge dx^k.$$

Откуда

$$\breve{D}(dx^i) = \widetilde{N}^i_{jk} dx^j \wedge dx^k, \quad \widetilde{N}^i_{jk} = \delta^i_{[k}\partial_{j]} f.$$

Замечание. В работе [5, с. 42; 13] рассматривается внешний дифференциал на деформирующемся многообразии [5, с. 38, 86; 13] со свойством $d(dx^i \wedge dx^j \wedge \ldots) \neq 0$.

Для 1-формы $\omega = a_i dx^i$ справедливо равенство

$$\breve{D}\omega - D\omega = x_{ij} dx^i \wedge dx^j ,\ x_{ij} = a_{[j}\partial_{i]} f \ .$$

Отображение $\Theta = p(df \wedge \overset{p}{\omega})\Big|_{\wedge^{p+1}T^*}$ определяет *внешнее возмущение внешнего дифференциала* D.

Теорема [6]. *Справедливы следующие свойства отображения* $\breve{D}$:

1⁰. *Аддитивность и градуированная кососкоммутативность:*

$$\breve{D}(\overset{p}{\omega} + \overset{p}{\theta}) = \breve{D}\overset{p}{\omega} + \breve{D}\overset{p}{\theta},\ \breve{D}(\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}) = (\breve{D}\overset{p}{\omega}) \wedge \overset{q}{\omega} + (-1)^p \overset{p}{\omega} \wedge \breve{D}\overset{q}{\omega}.$$

2⁰. *Обобщенный дифференциал функции* $g = g(x^i, x^\xi)$, *то есть 0-формы, совпадает с ее обычным дифференциалом* $\breve{D}g = dg$, *т. к. степень* $p = 0$.

3⁰. *Если* $\omega = dg$ — *полный дифференциал функции* $g = g(x^i, x^\xi)$, *то* $\breve{D}\omega = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\dfrac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j$. *В частности,*

$$\breve{D}(df) = 0 ,\ \breve{D}(dx^\xi) = 0 .$$

4⁰. *Если* $\omega = a_i(x^j, x^\xi) dx^i$, *то второй дифференциал дается формулой*

$$\breve{D}^2\omega = \omega_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j ,$$

где

$$\omega_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^{[j}}\frac{\partial a_{i]}}{\partial x^k} dx^k + d(\frac{\partial f}{\partial x^{[i}}) a_{j]} .$$

В частности, $\breve{D}^2(a_\xi dx^\xi) = 0$.

Для свойства 3^0 справедливы вычисления

$$\breve{D}\omega = \breve{D}(dg) = D(dg) + df \wedge dg\Big|_{\wedge^k T^*} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j ,$$

$$\breve{D}(df) = D(df) + \partial_j f dx^j \wedge df\Big|_{T^*} = 0 ,$$

$$\breve{D}(dx^\xi) = D(dx^\xi) + \partial_j f dx^j \wedge dx^\xi\Big|_{T^*} = 0 .$$

Для свойства 4^0 справедливы вычисления

$$\breve{D}^2\omega = \breve{D}\left(\breve{D}\omega\right) = \breve{D}\left(da_i \wedge dx^i + \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \omega \right) =$$

$$= \breve{D}(da_i) \wedge dx^i - da_i \wedge \breve{D}(dx^i) + \breve{D}(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i) \wedge \omega - \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \breve{D}\omega =$$

$$= \left(d(da_i) + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k \right) \wedge dx^i - da_i \wedge \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \frac{\partial x^i}{\partial x^k} dx^k +$$

$$+ d(\frac{\partial f}{\partial x^i}) \wedge dx^i \wedge \omega + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge \omega -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge (da_j \wedge dx^j + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \omega) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial a_i}{\partial x^k} dx^k + d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) a_j \right) \wedge dx^i \wedge dx^j = \omega_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j ,$$

где $\omega_{ij} = \dfrac{\partial f}{\partial x^{[j}}\dfrac{\partial a_{i]}}{\partial x^k} dx^k + d(\dfrac{\partial f}{\partial x^{[i}}) a_{j]}$ — кососимметричные 1-формы.

Замечание. В работах [12; 13; 15; 16] рассматривается деформация внешнего дифференциала, которая является дифференциалом при ограничении на некоторое подпространство.

2. Деформация дифференциала *d* в TX_m

Дифференциал касательных векторов $v = v^i \partial_i = v^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ в базисе $\{\partial_i\} = \{\partial / \partial x^i\}$ определяется по закону

$$d : v = v^i \partial_i \in TX_m \mapsto dv = dv^i \otimes \partial_i + v^i dx^j \otimes \partial_{ij} \in T^2 X_m \otimes T^* X_m .$$

Аналогично определяется дифференциал касательных векторов $v = v^i \varepsilon_i$ в базисе $\{\varepsilon_i\}$ [7; 14]:

$$d : \; v = v^i \varepsilon_i \in TX_m \;\mapsto\; dv = dv^i \otimes \varepsilon_i + v^i d\varepsilon_i .$$

При этом $D(dv) = 0$.

Определение. *Внешней деформацией дифференциала касательных векторов* $v = v^i \partial_i$ назовем оператор $\breve{d}$, определяемый по правилу

$$\breve{d} : \; v \in T\breve{X}_m \;\mapsto\; \breve{d}(v) = dv + d\big(v(f_j^i)\big)\partial_i^j\Big|_{T^*} \in T^2 \breve{X}_m , \; f_j^i = f_j^i(x^k) .$$

Будем считать, что

$$\breve{D}(v) = \breve{d}(v) = dv + d\big(v(f_j^i)\big)\partial_i^j\Big|_{T^*} , \; f_j^i = f_j^i(x^k) .$$

Будем говорить, что отображение θ определяет *внешнее возмущение дифференциала* d на многообразии, если $d + \theta$ является дифференциалом вдоль линии ρ этого многообразия, то есть $(D + \Theta)((d + \theta)^2 (v))\Big|_\rho = 0$, или формально $(d + \theta)^2\Big|_\rho = 0$.

Отображение $\theta(v) = d\big(v(f_j^i)\big)\partial_i^j\Big|_{T^*}$ определяет внешнее возмущение дифференциала *d*.

Замечание. Отображение $d\left(v(f^i)\right)\partial_i\Big|_{T^*}$ определяет внутреннее возмущение дифференциала *d*.

В частности, для касательных векторов $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ оператор $\breve{d}$ дает

$$\breve{d}(\partial_i) = d\partial_i + \left(\partial_{ij} f_q^p \partial_p^q\right) \otimes dx^j .$$

Таким образом,

$$\breve{d}(\partial_i) = (\partial_{ij} + N_{ijq}{}^p \partial_p^q) \otimes dx^j ,$$

где коэффициенты $N_{ijq}{}^p$ объекта $N_{ijq}{}^p dx^j \otimes \partial_p^q$ имеют вид

$$N_{ijq}{}^p = \partial_{ij} f_q{}^p .$$

Происходит расширение касательного пространства 2-го порядка $T^2 X_m$ с помощью вертикальных векторов

$$\partial_q^p = \partial / \partial x_p^q \in T^v L(X_m) .$$

3. Совпадение внешних дифференциалов форм вдоль линий

Дифференцируем формы (2_1) с помощью $\breve{D}$:

$$\breve{D}\omega^i = dx_j^i \wedge dx^j + \partial_j f dx^j \wedge \omega^i =$$

$$= (-x_j^l \omega_l^i - x_{ls}^i x_j^l \omega^s) \wedge \overset{*}{x}{}_k^j \omega^k + \partial_k f \, \overset{*}{x}{}_j^k \omega^j \wedge \omega^i =$$

$$= \omega^j \wedge \omega_j^i - x_{kl}^i \omega^k \wedge \omega^l + \partial_l f \, \overset{*}{x}{}_j^l \omega^j \wedge \delta_k^i \omega^k =$$

$$= \omega^j \wedge \left(\omega_j^i + \partial_l f \, \overset{*}{x}{}_{[j}^l \delta_{k]}^i \omega^k \right).$$

Откуда следует

$$\breve{D}\omega^i = \omega^j \wedge \breve{\omega}^i_j, \tag{6}$$

$$\breve{\omega}^i_j = \omega^i_j + N^i_{jk}\omega^k \qquad (N^i_{jk} = \partial_l f \overset{*}{x}{}^l_{[j}\delta^i_{k]}). \tag{7}$$

Учитывая (2_2), найдем

$$\breve{\omega}^i_j = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k - \breve{x}^i_{jk}\omega^k,$$

где $\breve{x}^i_{jk} = x^i_{jk} - N^i_{jk}$, причем $\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk}$.

При фиксации точки многообразия структурные формы $\breve{\omega}^i_j, \omega^i_j$ группы $GL(m)$ совпадают, то есть справедливо равенство

$$\breve{\omega}^i_j\Big|_{\omega^k=0} = \omega^i_j\Big|_{\omega^k=0}.$$

Линия ρ на многообразии X_m задается уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$. Параметрическая форма ω удовлетворяет внешнему уравнению $D\omega = \omega \wedge \omega_1$, позволяющему найти дифференциальные уравнения на коэффициенты ρ^i:

$$\Delta\rho^i - \rho^i\omega_1 = \rho^i_1\omega,$$

где $\Delta\rho^i = d\rho^i + \rho^j\omega^i_j$.

Линия ρ на многообразии $\breve{X}_m$ задается уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$, причем $\breve{D}\omega = \omega \wedge \omega_1$ и

$$\breve{\Delta}\rho^i - \rho^i\omega_1 = \rho^i_1\omega,$$

где $\breve{\Delta}\rho^i = d\rho^i + \rho^j\breve{\omega}^i_j$.

Очевидно равенство $\breve{\Delta}\big|_{\omega^i=0} = \Delta\big|_{\omega^i=0}$ дифференциальных тензорных операторов $\breve{\Delta}$ и Δ при фиксации точки многообразия.

Утверждение. *Вдоль линии* ρ: $\omega^i = \rho^i\omega$ *дифференциалы* $\breve{D}$ *и D совпадают, то есть*

$$\breve{D}\omega^i\Big|_\rho = D\omega^i\Big|_\rho,$$

поскольку $\breve{D}\omega^i - D\omega^i = N^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$.

Замечание. Если $\omega^i = dx^i$, то есть $\overset{*}{x}{}^i_j = \delta^i_j$, то функции (ср. [4])

$$\breve{x}^i_{jk} = -\partial_l f \overset{*}{x}{}^l_{[j}\delta^i_{k]} + x^i_{jk}$$

остаются несимметричными.

4. Несимметричные векторы репера 2-го порядка

Применим $\breve{d}$ к касательным векторам $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i\partial_j$ (3_1). Получим

$$\breve{\mathrm{d}}\varepsilon_i = \mathrm{d}\left(\overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\partial_{\mathrm{j}}\right)\Big|_{\mathrm{T}^*} + \overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\mathrm{N}^{\ \ \mathrm{p}}_{\mathrm{jkq}}\partial^{\mathrm{q}}_{\mathrm{p}}\mathrm{dx}^{\mathrm{k}} =$$

$$= \breve{\omega}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{j}} + \mathrm{x}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\omega^{\mathrm{j}}\varepsilon_{\mathrm{k}} - \mathrm{N}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\omega^{\mathrm{j}}\varepsilon_{\mathrm{k}} + \overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{i}}\overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{j}}\partial_{\mathrm{lk}}\omega^{\mathrm{j}} + \overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{i}}\overset{*}{\mathrm{x}}{}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{j}}\mathrm{N}^{\ \ \mathrm{p}}_{\mathrm{lkq}}\partial^{\mathrm{q}}_{\mathrm{p}}\omega^{\mathrm{j}}.$$

Тогда

$$\breve{d}\varepsilon_i = \breve{\omega}^j_i\varepsilon_j + \breve{\varepsilon}_{ij}\omega^j,$$

то есть $\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\varepsilon}_{ij}\omega^j$, где $\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\mathrm{d}}\varepsilon_i - \breve{\omega}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{j}}$.

Новые векторы 2-го порядка $\breve{\varepsilon}_{ij}$ имеют вид

$$\breve{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - N^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^k_j N^{\ \ p}_{lkq}\partial^q_p = \overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^k_j\partial_{lk} + \breve{x}^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^k_j N^{\ \ p}_{lkq}\partial^q_p.$$

Симметричные векторы ε_{ij} (3_2) определяют касательное пространство 2-го порядка к многообразию X_m, то есть $T^2 X_m = span\left(\varepsilon_k, \varepsilon_{ij}\right)$. Новые векторы $\breve{\varepsilon}_{ij}$ несимметричны и

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]} = N_{ij}^k \varepsilon_k .$$

Теорема. *Касательное пространство 2-го порядка* $T^2 \breve{X}_m = span\left(\varepsilon_k, \breve{\varepsilon}_{ij}\right) = span\left(\varepsilon_k, \varepsilon_{ij}, \partial_q^p\right)$ *деформирующегося многообразия* $\breve{X}_m$ *получается дополнением пространства* $T^2 X_m$ *векторами* $\partial_q^p = \partial / \partial x_p^q \in T^v L(X_m)$.

Замечание. Для построенных дифференциалов справедливо

$$\breve{D}\omega^i = D\omega^i + N_{jk}^i \omega^i \wedge \omega^j ,$$

$$\breve{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N_{ijq}{}^p \omega^j \otimes \partial_p^q .$$

Учитывая структурные уравнения (6), формула для внешнего дифференциала аналогична структурным уравнениям в работе [9].

5. Несимметричные формы корепера 2-го порядка

Продифференцируем выражения новых форм (7) с помощью дифференциала $\breve{D}$:

$$\breve{D}\breve{\omega}_j^i = \breve{\omega}_j^k \wedge \breve{\omega}_k^i + \omega^j \wedge \left(\omega_{jk}^i - \breve{\Delta} N_{jk}^i + \left(N_{j[k}^s N_{sl]}^i + \partial_s f \overset{*}{x}{}_{[l}^s x_{jk]}^i \right) \omega^l \right).$$

Здесь и в дальнейшем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках. Откуда

$$\breve{D}\breve{\omega}_j^i = \breve{\omega}_j^k \wedge \breve{\omega}_k^i + \omega^j \wedge \breve{\omega}_{jk}^i , \tag{8}$$

где

$$\breve{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} + \theta^i_{jk},$$

$$\theta^i_{jk} = -\breve{\Delta} N^i_{jk} + \left(N^s_{j[k} N^i_{sl]} + \partial_s f \overset{*}{x}{}^s_{[l} x^i_{jk]} \right) \omega^l .$$

При фиксации точки базы имеем

$$\breve{\pi}^i_{jk} = \breve{\omega}^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} = \omega^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} + \theta^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} = \pi^i_{jk} + \partial^q_{pl} f \overset{*}{x}{}^l_{[j} \delta^i_{k]} dx^p_q .$$

Видно, что структурные формы π^i_{jk}, $\breve{\pi}^i_{jk}$ дифференциальных групп 2-го порядка, действующих в касательных пространствах 2-го порядка

$$T^2 X_m = span\left(\varepsilon_k, \varepsilon_{ij}\right)$$

и

$$T^2 \breve{X}_m = span\left(\varepsilon_k, \breve{\varepsilon}_{ij}\right) = span\left(\varepsilon_k, \varepsilon_{ij}, \partial^p_q\right),$$

не совпадают.

Замечание. В работе [4] рассматривается неголономная дифференциальная группа, определенная инвариантными формами, подчиненными лишь структурным уравнениям вида (6), (7) без дополнительных условий симметрии на эти формы.

Формулы (6), (8) аналогичны соответствующим формулам в работе [9].

Рассмотрим альтернирование форм $\breve{\omega}^i_{jk}$:

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} = \omega^i_{[jk]} + \theta^i_{[jk]} = -\Delta N^i_{jk} + \left(N^s_{jk} N^i_{sl} - N^s_{[jl} N^i_{sk]} - \partial_s f \overset{*}{x}{}^s_{[k} x^i_{j]l} \right) \omega^l .$$

Поскольку $f = f(x^i, x^i_j)$, то

$$\breve{\Delta} N^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} = \overset{*}{x}{}^s_{[j} \delta^i_{k]} \frac{\partial^2 f}{\partial x^s_v \partial x^u} dx^u_v .$$

Значит, формы $\breve{\omega}^i_{jk}$ несимметричны даже в точке. Получили расслоение несимметричных кореперов на гладком многообразии $\breve{X}_m$. Отметим, что новые формы несимметричны даже при фиксации точки многообразия, то есть

$$\breve{\omega}^i_{[jk]} \not\equiv 0 \ (\operatorname{mod}\omega^k).$$

Замечание. Если $f = f(x^i)$, то $\breve{\Delta}N^i_{jk}\Big|_{\omega^l=0} = 0$. Тогда

$$\breve{\omega}^i_{[jk]}\Big|_{\omega^l=0} = 0,$$

то есть в точке формы $\breve{\omega}^i_{jk}$ симметричны. Получили расслоение симметричных кореперов.

Продифференцируем (6) с помощью $\breve{D}$:

$$\breve{D}^2\omega^i = \breve{D}\left(\breve{D}\omega^i\right) = \breve{D}\omega^j \wedge \breve{\omega}^i_j - \omega^j \wedge \breve{D}\breve{\omega}^i_j =$$
$$= \omega^k \wedge \breve{\omega}^j_k \wedge \breve{\omega}^i_j - \omega^j \wedge \left(\breve{\omega}^k_j \wedge \breve{\omega}^i_k + \omega^k \wedge \breve{\omega}^i_{jk}\right) =$$
$$= -\omega^j \wedge \omega^k \wedge \breve{\omega}^i_{jk} = -\omega^j \wedge \omega^k \wedge \theta^i_{jk}.$$

Таким образом,

$$\breve{D}^2\omega^i = -\theta^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k,$$

что соответствует свойству 4^0. Причем

$$\theta^i_{[jk]} \not\equiv 0 \ (\operatorname{mod}\omega^i).$$

Вдоль линии ρ: $\omega^i = \rho^i\omega$ получаем

$$\breve{D}^2\omega^i\Big|_\rho = 0.$$

Дифференцируем каноническую форму $\omega = \omega^i \varepsilon_i$ с помощью $\breve{D}$:

$$\breve{D}\omega = \breve{D}\omega^i \varepsilon_i - \omega^i \wedge \breve{d}\varepsilon_i =$$

$$= \omega^j \wedge \breve{\omega}^i_j \varepsilon_i - \omega^i \wedge (\breve{\omega}^j_i \varepsilon_j + \breve{\varepsilon}_{ij}\omega^j) = -\breve{\varepsilon}_{ij}\omega^i \wedge \omega^j =$$

$$= -\left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + x^k_{ij} e_k + N^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N_{lkq}^{\;p} \partial^q_p\right)\omega^i \wedge \omega^j.$$

Учитывая симметрию входящих функций и антисимметрию внешнего произведения, получим

$$\breve{D}\omega = -(N^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N_{lkq}^{\;p} \partial^q_p)\omega^i \wedge \omega^j,$$

то есть $\breve{D}\omega\big|_\rho = 0$.

Список литературы

1. *Аньар Г.* Неравенства Морса (по Виттену) / пер. с фр. И. С. Захаревича // Математический анализ и геометрия. Избр. тр. семин. Н. Бурбаки : сб. ст. 1983—1987 гг. М., 1990. Вып. 45. С. 80—101.

2. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.

3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 139—189.

4. *Лумисте Ю. Г.* Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. №69. С. 419—454.

5. *Петрова Л. И.* Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. М., 2006.

6. *Полякова К. В.* Обобщение внешнего дифференциала с помощью виртуальной функции // ДГМФ. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 111—117.

7. *Полякова К. В.* Тангенциальнозначные формы 2-го порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 105, №1. С. 84—94.

8. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981.Т. 29, №2. С. 279—290.

9. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. №1. С. 73—80.

10. *Солодов Н.В.* Бивариантные когомологии с симметриями : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2003.

11. *Ho F.-H.* Witten deformation and its application toward Morse inequalities. arXiv:1710.09579v1

12. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10, №46. doi: https://doi.org/10.3390/axioms10020046.

13. *Petrova L.I.* Skew-symmetric differential forms. Conservation laws: The foundation of equations of mathematical physics and field theory. M., 2021.

14. *Polyakova K.V.* Prolongations generated by horizontal vectors // J. Geom. 2019. Vol. 110, №53. doi: https://doi.org/10.1007/s00022-019-0510-2.

15. *Witten E.* Supersymmetry and Morse theory // J. Differential Geom. 1982. Vol. 17, №4. P. 661—692.

16. *Witten E.* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv:1009.6032v1.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-9

On some extension of the second order tangent space for a smooth manifold

Submitted on May 21, 2022

This paper relates to differential geometry, and the research technique is based on G.F. Laptev’s method of extensions and envelopments, which generalizes E. Cartan’s method of moving frame and exterior forms. We consider a smooth m-dimensional manifold, its tangent and cotangent spaces, as well as the second-order frames and coframes on this manifold.

Using the perturbation of the exterior derivative and ordinary differential, mappings are introduced that enable us to construct non-symmetrical second-order frames and coframes on a smooth manifold. It is shown that the extension of the second order tangent space to a smooth *m*-dimensional manifold is carried out by adding the vertical vectors to the linear frame bundle over the manifold to the second order tangent vectors to this manifold.

A deformed external differential is widely used, which is a differential, i. e., its reapplication vanishes. We introduce a deformed external differential being a differential along the curves on the manifold, i. e., its repeated application along the curves on the manifold gives zero.

Keywords: smooth manifold, differential perturbation, deformation of differential, second order tangent space, second order frames and coframes

References

1. *Henniart, G.:* Les inégalités de Morse. Séminaire Bourbaki, exp. no 617, Astérisque, t. 121—122, 43—61 (1985).

2. *Sulanke, R., Wintgen, P.:* Differentialgeometrie und faserbundel. Basel (1972).

3. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

4. *Lumiste, Yu. G.:* Connections in homogeneous bundles. Sb. Math., 69, 419—454 (1966).

5. *Petrova, L.I.:* Skew-symmetric differential forms: Conservation laws. Fundamentals of field theory. Moscow (2006).

6. *Polyakova, K.:* Generalization of exterior differential by means of virtual function. DGMF. Kaliningrad. 41, 111—117 (2010).

7. *Polyakova, K. V.:* Second-Order Tangent-Valued Forms. Math. Notes, **105**:1, 71—79 (2019).

8. *Rybnikov, A.K.:* Affine connections of second order. Math. Notes, **29**:2, 143—149 (1981).

9. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. Izvestia Vuzov. Math., **27**:1, 84—93 (1983).

10. *Solodov, N. V.:* Bivariant cohomology with symmetries. PhD thesis. Moscow, 2003.

11. *Ho, F.-H.:* Witten Deformation and Its Application toward Morse Inequalities. arXiv:1710.09579v1.

12. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, **10**:46 (2021). https://doi.org/10.3390/axioms10020046.

13. *Petrova, L.I.:* Skew-symmetric differential forms. Conservation laws: The foundation of equations of mathematical physics and field theory. Moscow (2021).

14. *Polyakova, K.V.:* Prolongations generated by horizontal vectors. J. Geom., **110**:53 (2019). https://doi.org/10.1007/s00022-019-0510-2.

15. *Witten, E.:* Supersymmetry and Morse theory. J. Diff. Geom. **17**:4, 661—692 (1982).

16. *Witten, E.:* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv:1009.6032v1.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53A20

S. E. Stepanov [1], ***I. I. Tsyganok*** [2], ***J. Mikeš*** [3]
[1, 2] *Financial University under the Government of the Russian Federation, Russia*
[3] *Department of Algebra and Geometry, Palacky University, Czech Republic*
[1, 2] s.e.stepanov@mail.ru, [3] josef.mikes@upol.cz
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-10

Complete Riemannian manifolds with Killing — Ricci and Codazzi — Ricci tensors

The purpose of this paper is to prove of Liouville type theorems, i. e., theorems on the non-existence of Killing — Ricci and Codazzi — Ricci tensors on complete non-compact Riemannian manifolds. Our results complement the two classical vanishing theorems from the last chapter of famous Besse's monograph on Einstein manifolds.

Keywords: complete Riemannian manifold, Killing — Ricci tensor, Codazzi — Ricci tensor, Liouville-type theorems

1. Introduction

A. Gray introduced in [1] two classes of Riemannian manifolds $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, which are defined by the two following conditions on the covariant derivative of the Ricci tensor. Firstly, a Riemannian manifold (M, g) belongs to $\mathcal{A}$ if and only if its Ricci tensor Ric is a *Killing tensor*, that is,

$$(\nabla_X Ric)(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)(X, Z) + (\nabla_Z Ric)(X, Y) = 0 \qquad (1.1)$$

for all $X, Y, Z \in TM$. In this case, Ric is called the *Killing — Ricci tensor* (see [2]). Second, a Riemannian manifold (M, g)

Поступила в редакцию 20.03.2022 г.
© Stepanov S. E., Tsyganok I. I., Mikeš J., 2022

belongs to $\mathcal{B}$ if and only if its Ricci tensor Ric is a *Codazzi tensor*, that is,

$$(\nabla_X Ric)(Y,Z) - (\nabla_Y Ric)(X,Z) = 0 \qquad (1.2)$$

for all $X, Y, Z \in TM$. In this case, Ric is called the *Codazzi — Ricci tensor* (see [3]).

Obviously, all manifolds belonging to $\mathcal{A}$ or $\mathcal{B}$, which are known as *Einstein-like manifolds*, have constant scalar curvature $s = \text{trace}_g Ric$. Moreover, any manifold that belongs to $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ must have a parallel Ricci tensor. An example of this type of Einstein-like manifolds is a *Riemannian locally symmetric space* (see [4, p. 369]). More interesting examples which are Einstein-like but not Einstein can be found in [5, p. 432—455].

The aim of this paper is to prove Liouville-type theorems, i. e., non-existence theorems for complete noncompact manifolds of classes $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$. Our results complement two classical theorems of the last chapter of Besse's famous monograph [7].

2. Liouville-type theorems for complete Einstein-like manifolds of class $\mathcal{A}$

Let (M, g) be a Riemannian Einstein-like manifold (M, g) of class $\mathcal{A}$. Then its Ricci tensor Ric satisfies the equations (1.1) and has a constant trace, i. e., the scalar curvature $s = \text{trace}_g Ric$ is a constant function. This also means that the Ricci tensor is a divergence-free tensor.

It is known that if (M, g) is a compact (without boundary) Einstein-like manifolds of class $\mathcal{A}$ with non-positive sectional curvature, then $\nabla Ric = 0$. If in addition there exists a point in M where the sectional curvature of every two-plane is strictly negative, then (M, g) is Einstein, i. e., its Ricci tensor satisfies $Ric = \rho g$ for some constant ρ (see [5, p. 451]).

On the other hand, from [6] we conclude that the following theorem holds: On a simply connected complete Riemannian manifold (M, g) of nonpositive sectional curvature, any divergence-free Killing 2-tensor, such that $\|\varphi\| \in L^p$ for at least one $p \in (0, \infty +)$, is a parallel tensor field. If, in addition, the volume of the manifold is infinite, then there exist no nonzero divergence-free Killing 2-tensors. In turn, we recall here that a simply connected complete Riemannian manifold (M, g) of nonpositive curvature is called a *Hadamard manifold* after the Cartan — Hadamard theorem (see, for example, [4, p. 241]). From the Cartan — Hadamard theorem one can conclude, in particular, that no compact simply connected manifold admits a metric of nonpositive curvature (see also [4, p. 162]). Moreover, Hadamard manifolds have infinite volume (see [8]). Therefore, the Ricci tensor of a Hadamard manifold, which is a Riemannian Einstein-like manifold (M, g) of class $\mathcal{A}$, is equals to zero. In this case, the sectional curvature must vanishes in (M, g). Then (M, g) is a flat manifold. Again (M, g) is a simply connected manifold, hence it follows that (M, g) is isometric to the Euclidean space $\mathbf{R}^n$.

Theorem 1. *Let an n-dimensional Riemannian Einstein-like manifold (M, g) of class $\mathcal{A}$ be a Hadamard manifold. If $\|\varphi\| \in L^p$ for at least one $p \in (0, +\infty)$, then (M, g) is isometric to the Euclidean space $\mathbf{R}^n$.*

2. Liouville-type theorems for complete Einstein-like manifolds of class $\mathcal{B}$

Let (M, g) be a Riemannian Einstein-like manifold (M, g) of class $\mathcal{B}$. Then its Ricci tensor Ric satisfies the equations (1.2) and has a constant trace, i. e. the scalar curvature $s = \mathrm{trace}_g Ric$ is a constant function. This also means that the Ricci tensor is a divergence-free tensor. In this case, Ric is a *symmetric harmonic* 2-*tensor* (see [4, p. 350]).

The following classical Berger — Ebin theorem is well known: If (M, g) is a compact (without boundary) Einstein-like manifolds of class $\mathcal{B}$ with non-negative sectional curvature, then $\nabla Ric = 0$. If in addition there exists a point in M where the sectional curvature of every two-plane is strictly positive, then (M, g) is Einstein (see [7, p. 445]).

On the other hand, from [9] we conclude the following theorem: Let (M, g) be a connected complete noncompact Riemannian manifold with nonnegative sectional curvature. Then there is no a non-zero harmonic symmetric 2-tensor φ which satisfies the condition $\|\varphi\| \in L^p$ for at least one $p \in (1, +\infty)$. Therefore, the Ricci tensor of a connected complete noncompact Riemannian manifold with nonnegative sectional curvature (M, g) of class $\mathcal{B}$ is equals to zero. In this case, the sectional curvature must vanishes in (M, g). Then (M, g) is a flat manifold. Again if (M, g) is a simply connected manifold, hence it follows that (M, g) is isometric to the Euclidean space $\mathbf{R}^n$. Therefore, we can formulate a theorem.

Theorem 2. *Let a Riemannian Einstein-like manifold (M, g) of class $\mathcal{B}$ be a connected complete noncompact Riemannian manifold with nonnegative sectional curvature. If $\|\varphi\| \in L^p$ for at least one $p \in (1, +\infty)$, then (M, g) is a flat manifold. If, moreover, (M, g) is a simply connected manifold, then (M, g) is isometric to the Euclidean space $\mathbf{R}^n$.*

References

1. *Gray, A.:* Einstein-like manifolds which are not Einstein. Geom. Dedicata, **7**:3, 259—280 (1978).

2. *Suh, Y.J.:* Generalized Killing Ricci tensor for real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians. J. Geom. Phys., 159, 103799 (2011). doi: 10.1016/j.geomphys.2020.103799.

3. *Calvaruso, G.:* Riemannian 3-metrics with a generic Codazzi Ricci tensor. Geom. Dedicata, **151**:1, 259—267 (2011).

4. *Petersen, P.:* Riemannian Geometry. Springer (2016).

5. *Besse, A.L.:* Einstein Manifolds. Berlin Heidelberg (2008).

6. *Stepanov, S.E.; Tsyganok, I.I.:* Codazzi and Killing tensors on a complete Riemannian manifold. Math. Notes, **109**:6, 901—911 (2021). (In Rus.).

7. *Besse, A.L.:* Einstein Manifolds. Springer (1987).

8. *Bertrand, J., Sandeep, K.:* Sharp Green's function estimates on Hadamard manifolds and Adams inequality. International Mathematics Research Notices, 6, 4729—4767 (2021).

9. *Mikes, J., Rovenski, V., Stepanov, S.:* On higher order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds. Annals of Global Analysis and Geometry, 56, 429—442 (2021).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.764

С.Е. Степанов[1], *И.И. Цыганок*[2], *Й. Микеш*[3]

[1, 2] *Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия*

[3] *Университет Палацкого, Оломоуц, Чешская Республика*

[1, 2] s.e.stepanov@mail.ru, [3] josef.mikes@upol.cz

doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-10

Полные многообразия с тензорами Киллинга — Риччи и Кодацци — Риччи

Поступила в редакцию 20.03.2022 г.

Целью работы является доказательство теорем лиувиллева типа, то есть теорем несуществования для тензоров Киллинга — Риччи и Кодацци — Риччи на полном некомпактном римановом многообразии. Наши результаты дополняют две классические теоремы исчезновения из последней главы известной монографии А. Бессе.

Ключевые слова: полное риманово многообразие, тензор Киллинга — Риччи, тензор Кодацци — Риччи, теоремы Лиувиллева типа

Список литературы

1. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. 1978. Vol. 7, №3. P. 259—280.

2. *Suh Y.J.* Generalized Killing Ricci tensor for real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians // J. Geom. Phys. 2011. №159. Art. №103799. doi: 10.1016/j.geomphys.2020.103799.

3. *Calvaruso G.* Riemannian 3-metrics with a generic Codazzi Ricci tensor // Geom. Dedicata. 2011. Vol. 151, №1. P. 259—267.

4. *Petersen P.* Riemannian Geometry. Springer, 2016.

5. *Besse A.L.* Einstein Manifolds. Berlin ; Heidelberg, 2008.

6. *Степанов С.Е., Цыганок И.И.* О тензорах Кодацци и Киллинга на полном римановом многообразии // Матем. заметки. 2021. Т. 109, вып. 6. С. 901—911.

7. *Besse A.L.* Einstein Manifolds. Springer, 1987.

8. *Bertrand J., Sandeep K.* Sharp Green's function estimates on Hadamard manifolds and Adams inequality // International Mathematics Research Notices. 2021. Vol. 6. P. 4729—4767.

9. *Mikes J., Rovenski V., Stepanov S.* On higher order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 2021. Vol. 56. P. 429—442.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

***А. Я. Султанов*[1], *Г. А. Султанова*[2]**
[1] *Пензенский государственный университет, Россия*
[2] *Пензенский филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулева Министерства обороны РФ, Россия*
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-11

О локальном представлении синектических связностей на расслоениях Вейля

В данной работе получены выражения в естественных локальных координатах для синектического лифта А. П. Широкова линейной связности и компоненты тензорных полей кривизны и кручения на расслоении Вейля.

Ключевые слова: касательное расслоение, алгебра Вейля, синектическая связность, тензорное поле кривизны, тензорное поле кручения

Синектические расширения полных лифтов линейных связностей в касательных расслоениях были введены А. П. Широковым в 70-е годы прошлого столетия [1; 2]. Он установил, что эти связности являются линейными и представляют собой вещественные реализации линейных связностей на касательных расслоениях первого порядка, снабженных гладкой структурой над алгеброй дуальных чисел. Он доказал также существование гладкой структуры на касательных расслоениях произвольного порядка $T^k(M)$ на гладком многообразии M над алгеброй $R(\varepsilon^k)$ плюральных чисел. Изучая голоморфные линейные связности на $T^k(M)$ над алгеброй $R(\varepsilon^k)$, А. П. Ши-

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.
© Султанов А. Я., Султанова Г. А., 2022

роков получил вещественные реализации этих связностей, которые назвал синектическими расширениями линейной связности, заданной на M. Естественным обобщением алгебры плюральных чисел является алгебра А. Вейля, а обобщением касательного расслоения — расслоение А. Вейля. В работе [3] показано, что синектическое расширение линейных связностей, заданных на гладком многообразии, можно построить и на расслоениях А. Вейля M^{A}, где A — алгебра А. Вейля. Геометрия этих расслоений изучалась многими авторами — А. Моримото, В. В. Шурыгиным и др. Подробный разбор этих работ можно найти в [3].

В настоящей работе изучаются синектические лифты линейных связностей, заданных на расслоениях А. Вейля.

Напомним, что алгеброй А. Вейля над полем R называется линейная алгебра A, являющаяся коммутативной, ассоциативной, обладающая единицей и максимальным нильпотентным идеалом I, таким, что факторалгебра A/I изоморфна алгебре R.

В дальнейшем будем считать, что единица алгебры A отождествлена с единицей поля R, а остальные базисные элементы выбраны в идеале I.

Пусть M — гладкое многообразие класса C^{∞} размерности n, $C^{\infty}(M)$ — вещественная алгебра гладких класса C^{∞} функций, заданных на M и принимающих значения в R. Обозначим через M_q^{A} множество всевозможных гомоморфизмов $j_q : C^{\infty}(M) \to \mathrm{A}$, где $q \in M$, удовлетворяющих условию $j_q(f) \equiv f(q)(\mathrm{mod}\,\mathrm{I})$. Множество $M^{\mathrm{A}} = \bigcup\limits_{q\in M}(M)_q^{\mathrm{A}}$ можно естественным образом наделить структурой гладкого многообразия над алгеброй A и гладкой структурой над R [1]. Отображение $\pi : M^{\mathrm{A}} \to M$, определенное условием $\pi(j_q) = q$, называется канонической проекцией, а тройка (M^{A}, π, M) — расслоением А. Вейля. Функция f^{A}, определенная условием $f^{\mathrm{A}}(j_q) = j_q(f)$ для каждого гомоморфизма j_q, называется естественным продолжением функции f, а функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ — вертикальным лифтом функции $f \in C^{\infty}(M)$ с M на M^{A}.

Обозначим через A^* векторное пространство линейных форм, заданных на A как на векторном пространстве, принимающих значения в поле R действительных чисел.

Пусть $a^* \in \mathrm{A}^*, f \in C^{\infty}(M_n)$. Зададим функцию $f_{(a^*)} : M^{\mathrm{A}} \to R$ равенством $f_{(a^*)} = a^* \circ f^{\mathrm{A}}$. Пусть (U, x^i) — карта гладкой структуры на M. Тогда функции $x^i_{\alpha} = (x^i)_{e_{\alpha}}$, где e_{α} — элементы дуального к базису $\left(\varepsilon^{\alpha}\right)$ алгебры A, определяют координатные функции в карте $\pi^{-1}(U)$. Векторные поля $\left(\partial_i\right)^{\alpha} = \partial_i^{\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial x^i_{\alpha}}$ составляют поле натурального репера в карте $\pi^{-1}(U)$. При помощи этих функций можно определить лифты векторных полей с M на M^{A}. Пусть $a \in \mathrm{A}$ — любой фиксированный элемент алгебры A, X — произвольное гладкое векторное поле на M. На расслоении M^{A} существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}$$

для любой функции $f \in C^{\infty}(M)$. В этом равенстве $b^* \cdot a \in A^*$ определяется по правилу $b^* \cdot a(b) = b^*(ab)$. Для векторного поля X можно построить его естественное продолжение X^{A}

на M_n^{A}. Оно задается условием $X^{\mathrm{A}} f^{\mathrm{A}} = (Xf)^{\mathrm{A}}$ для любой функции $f \in C^{\infty}(M)$. Векторное поле $\widetilde{X}$ на A является голоморфным тогда и только тогда, когда $\widetilde{X} = \varepsilon^{\alpha} X_{\alpha}^{A}$ $(\alpha = 0, 1, ..., N-1)$. Линейная связность $\widetilde{\nabla}$, заданная на M^{A}, называется голоморфной, если векторное поле $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ является голоморфным для любых голоморфных векторных полей $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, заданных на M^{A}.

Имеет место

Предложение 1. *Линейная связность* $\widetilde{X}$*, заданная на расслоении Вейля* M^{A}*, голоморфна тогда и только тогда, когда на базе M этого расслоения существует такая линейная связность* $\nabla = \Gamma_0$*, тензорные поля* Γ_{λ} $(\lambda = 1, 2, ..., N-1)$ *— тензорные поля типа (1,2), что выполняется тождество*

$$\widetilde{\nabla}_{X^{\mathrm{A}}} Y^{\mathrm{A}} = \varepsilon^{\alpha} (\Gamma_{\alpha}(X, Y))^{\mathrm{A}}.$$

Определение. *Вещественной реализацией линейной связности* $\widetilde{\nabla}$ называется линейная связность $\widetilde{\nabla}^{R}$ на M^{A}, если для любых $a, b \in \mathrm{A}$ и любых векторных полей X и Y выполняется равенство

$$\tilde{\nabla}^{R}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\tilde{\nabla}_{X^{\mathrm{A}}} Y^{\mathrm{A}})^{(ab)}.$$

Вещественную реализацию $\tilde{\nabla}^{R}$ обозначим через ∇^{sh} и будем называть синектической связностью А. П. Широкова. Отсюда следует тождество

$$\nabla^{sh}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\Gamma_{\alpha}(X, Y))^{(\varepsilon^{\alpha} ab)}. \tag{1}$$

Положим

$$\nabla_{\partial_{j}} \partial_k = \Gamma^{i}_{jk} \partial_i,$$

$$\Gamma_{\alpha}(\partial_j, \partial_k) = \Gamma^{i}_{\alpha jk} \partial_i \ (\alpha = 0, 1, 2, ..., N-1).$$

Отметим, что $\Gamma^i_{0jk} = \Gamma^i_{jk}$.

На $\pi^{-1}(U)$ положим

$$\nabla^{sh}(\partial^\alpha_j, \partial^\beta_k) = \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma}\partial^\sigma_i .$$

Из соотношений (1) для синектической связности ∇^{sh} следует, что

$$\nabla^{sh}(\partial^\alpha_j, \partial^\beta_k) = (\Gamma_\nu(\partial_j, \partial_k))^{\left(\varepsilon^\nu\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta\right)},$$

где $\left(\varepsilon^\alpha\right)$ — базис алгебры A, причем $\varepsilon^0 = 1$. Поэтому

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma}\partial^\sigma_i = \gamma^{\nu\alpha\beta}_\tau(\Gamma^i_{\nu jk}\partial_i)^{\left(\varepsilon^\tau\right)} = \gamma^{\nu\alpha\beta}_\tau(\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)}\partial^{(\varepsilon^\mu\varepsilon^\tau)}_i = \gamma^{\nu\alpha\beta\mu}_\sigma(\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)}\partial^\sigma_i .$$

Отсюда

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\nu\alpha\beta\mu}_\sigma(\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)} . \qquad (2)$$

Так выражаются коэффициенты синектической связности ∇^{sh} через $\Gamma^i_{\alpha jk}$ и структурные постоянные алгебры Вейля.

Для полного лифта $\nabla^{(0)}$ связности ∇, поскольку $\Gamma_\lambda = 0\ (\lambda \neq 0)$, из формул (2) получим следующие формулы для коэффициентов:

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\beta\mu}_\sigma(\Gamma^i_{jk})_{(\mu)} . \qquad (3)$$

В частном случае, когда алгебра A является алгеброй дуальных чисел $R(\varepsilon)$, формулы (2) дают известные соотношения для вычисления коэффициентов полного лифта линейной связности на касательном расслоении $T(M)$. Если A является алгеброй плюральных чисел $R(\varepsilon^r)$, то по формулам (2) вычисляются коэффициенты синектического лифта линейной связности на касательном расслоении $T^r(M)$.

Заметим, что в силу коммутативности и ассоциативности алгебры Вейля A из формул (2) следуют соотношения

$$\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = \Gamma_{jk\sigma}^{\beta\alpha i}. \quad (4)$$

Из соотношений (2) и соотношений $\gamma_{\alpha}^{0\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ следует, что

$$\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha 0 i} = \gamma_{\sigma}^{\nu\alpha\mu} (\Gamma_{\nu jk}^{i})_{(\mu)}; \quad (5)$$

$$\Gamma_{jk\sigma}^{00i} = \gamma_{\sigma}^{\nu\mu} (\Gamma_{\nu jk}^{i})_{(\mu)}; \quad (6)$$

$$\Gamma_{jk0}^{\alpha\beta i} = 0 \text{ при } \alpha \neq 0 \text{ или } \beta \neq 0;\ \Gamma_{jk0}^{00i} = (\Gamma_{jk}^{i})_{(0)}.$$

Предложение 2. *Коэффициенты* $\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i}$ *синектической связности* ∇^{sh} *удовлетворяют условиям*

1) $\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = \gamma_{\sigma}^{\beta\mu} \Gamma_{jk\mu}^{\alpha 0 i}$;

2) $\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = \gamma_{\sigma}^{\alpha\mu} \Gamma_{jk\mu}^{0\beta i}$;

3) $\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha 0 i} = \gamma_{\sigma}^{\alpha\mu} \Gamma_{jk\mu}^{00 i}$;

4) $\Gamma_{jk\sigma}^{0\beta i} = \gamma_{\sigma}^{\beta\mu} \Gamma_{jk\mu}^{00 i}$;

5) $\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = \gamma_{\sigma}^{\alpha\beta\mu} \Gamma_{jk\mu}^{00 i}$.

Доказательство. В формулах (2) коэффициенты $\gamma_{\sigma}^{\nu\alpha\mu}$ определяются условием

$$\varepsilon_{\sigma}(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta}\varepsilon^{\mu}) = \gamma_{\sigma}^{\nu\alpha\beta\mu}.$$

В силу коммутативности и ассоциативности алгебры A эти коэффициенты можно представить следующим образом:

$$\gamma_{\sigma}^{\nu\alpha\beta\mu} = \varepsilon_{\sigma}(\gamma_{\tau}^{\nu\alpha\mu}\varepsilon^{\tau}\varepsilon^{\beta}) = \gamma_{\tau}^{\nu\alpha\mu}\gamma_{\sigma}^{\tau\beta}.$$

Поэтому из формул (2) получим

$$\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = \gamma_{\sigma}^{\beta\tau}\gamma_{\tau}^{\nu\alpha\mu}(\Gamma_{\nu jk}^{i})_{(\mu)}.$$

Отсюда в силу (5) следует, что

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\beta\tau}_{\sigma}\Gamma^{\alpha 0 i}_{jk\tau}.$$

Соотношения 1) доказаны. Остальные соотношения являются следствиями (1) и (4).

Пусть T^{sh}, R^{sh} — тензорные поля кручения и кривизны соответственно. Положим

$$T^{sh}(\partial^{\alpha}_{j}, \partial^{\beta}_{k}) = T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma}\partial^{\sigma}_{i}, \quad R^{sh}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l})\partial^{\sigma}_{j} = R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau}\partial^{\tau}_{i}.$$

Левые части этих равенств можно вычислить на основе равенств

$$T^{sh} = T^{(\alpha)}_{\alpha}, \ R^{sh} = R^{(\alpha)}_{\alpha}.$$

$$T^{sh}(\partial^{\alpha}_{j}, \partial^{\beta}_{k}) = T^{(\lambda)}_{\lambda}(\partial^{\alpha}_{i}, \partial^{\beta}_{k}) = (T_{\lambda}(\partial_{j}, \partial_{k}))^{(\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta})} =$$

$$= \gamma^{\lambda\alpha\beta}_{\mu}(T^{i}_{\lambda jk}\partial_{i})^{\left(\varepsilon^{\mu}\right)} = \gamma^{\lambda\alpha\beta}_{\mu}(T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)}\partial^{\left(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\mu}\right)}_{i} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\nu}_{\sigma}(T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)}\partial^{\sigma}_{i}.$$

Отсюда

$$T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\nu}_{\sigma}(T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)}. \tag{7}$$

Аналогично

$$R^{sh}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l})\partial^{\sigma}_{j} = R^{(\lambda)}_{\lambda}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l})\partial^{\sigma}_{j} = (R_{\lambda}(\partial_{k}, \partial_{l})\partial_{j})^{(\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta}\varepsilon^{\sigma})} =$$

$$= \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma}_{\mu}(R^{i}_{\lambda jkl}\partial_{i})^{\left(\varepsilon^{\mu}\right)} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma}_{\mu}(R^{i}_{\lambda jkl})_{(\nu)}\partial^{\left(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\mu}\right)}_{i} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma\nu}_{\tau}(R^{i}_{\lambda jkl})_{(\nu)}\partial^{\tau}_{i},$$

поэтому

$$R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau} = \gamma^{\lambda\sigma\alpha\beta\nu}_{\tau}(R^{i}_{\lambda jkl})_{(\nu)}. \tag{8}$$

Если $\nabla^{sh} = \nabla^{(0)}$, то из (7) и (8) получим

$$T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\beta\nu}_{\sigma}(T^{i}_{jk})_{(\nu)},$$

$$R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau} = \gamma^{\sigma\alpha\beta\nu}_{\tau}(R^{i}_{jkl})_{(\nu)},$$

где T^{i}_{jk} — составляющие тензорного поля кручения T, R^{i}_{jkl} — составляющие тензорного поля кривизны связности ∇, заданной на базе M_n расслоения Вейля M^{A}.

Список литературы

1. *Широков А.П.* Замечание о структурах в касательных расслоениях // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1974. Т. 5. С. 311—318.

2. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1984.

3. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Математика. 1999. №9. С. 64—72.

4. *Султанов А.Я.* О вещественной реализации голоморфной линейной связности над алгеброй // ДГМФ. Калининград, 2007. Вып. 38. С. 136—139.

5. *Шурыгин В.В.* Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2002. Т. 73. С. 162—236.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC: 53B15

A. Ya. Sultanov[1], *G. A. Sultanova*[2]

[1] *Penza State University,*
40 Krasnaya St., Penza, 440026, Russia
[2] *Federal State-Owned Logistic Military Educational Institution*
named after General A. V. Khrulyov of the Ministry of Defence of the Russian Federation,
Penza-5, Penza region, 440000, Russia
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-11

On the local representation of synectic connections on Weil bundles

Submitted on May 30, 2022

Synectic extensions of complete lifts of linear connections in tangent bundles were introduced by A.P. Shirokov in the seventies of the last century [1; 2]. He established that these connections are linear and are real realizations of linear connections on first-order tangent bundles endowed with a smooth structure over the algebra of dual numbers. He also

proved the existence of a smooth structure on tangent bundles of arbitrary order $T^k(M)$ on a smooth manifold *M* over the algebra $R(\varepsilon^k)$ of plural numbers. Studying holomorphic linear connections on $T^k(M)$ over an algebra $R(\varepsilon^k)$, A. P. Shirokov obtained real realizations of these connections, which he called Synectic extensions of a linear connection defined on *M*. A natural generalization of the algebra of plural numbers is the A. Weyl algebra, and a generalization of the tangent bundle is the A. Weyl bundle. It was shown in [3] that a synectic extension of linear connections defined on *M* a smooth manifold can also be constructed on A. Weyl bundles M^{A}, where A is the A. Weyl algebra. The geometry of these bundles has been studied by many authors — A. Morimoto, V. V. Shurygin and others. A detailed analysis of these works can be found in [3].

In this paper, we study synectic lifts of linear connections defined on A. Weyl bundles.

Keywords: tangent bundle, Weyl algebra, synectic connection, curvature tensor field, torsion tensor field

References

1. *Shirokov, A. P.:* A note on structures in tangent bundles. Tr. Geom. Sem., 5, 311—318 (1974).

2. *Vishnevskiy, V. V., Shirokov, A. P., Shurygin, V. V.:* Spaces over algebras. Kazan (1984).

3. *Sultanov, A. Ya.:* Extensions of tensor fields and connections to Weil bundles. Izvestia Vuzov. Math., 9, 64—72 (1999).

4. *Sultanov, A. Ya.:* On the real realization of a holomorphic path connection over an algebra. DGMF. Kaliningrad. 38, 136—139 (2007).

5. *Shurygin, V. V.:* Smooth varieties over local algebras and Weil bundles. Itogi nauki i tekhn. Sovrem. math. and its app. Theme reviews, 73, 162—236 (2002).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.7

С. В. Хохлов[1], ***Л. А. Игнаточкина***[2]
[1, 2] *Московский педагогический государственный университет, Россия*
[1] hohlov@yahoo.com, [2] ignlia@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-12

Инвариантность некоторых классов почти эрмитовых структур относительно однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли

Рассмотрены почти эрмитовы структуры и структуры типа W_4 в классификации Грея — Хервеллы. Рассуждения проведены с использованием инвариантного исчисления Кошуля. Исследованы условия инвариантности келеровой формы относительно однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной векторным полем Ли в структурах типа W_4, и показано, что келерова форма ковариантно постоянна относительно векторного поля Ли. Исследованы условия инвариантности римановой метрики под действием однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли. Доказан критерий инвариантности почти комплексной структуры относительно локальной группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли в классе W_4.

Установлено, что инвариантность римановой структуры g влечет инвариантность почти комплексной структуры для класса W_4 многообразий в классификации Грея — Хервеллы, получены условия ковариантного постоянства формы Ли в отдельных классах многообразий размерностей выше 4.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, почти комплексная структура, вектор Ли, форма Ли

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.
© Хохлов С. В., Игнаточкина Л. А., 2022

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие; n четно; $dimM > 2$, $\mathfrak{X}(M)$ — $C^{\infty}(M)$-модуль гладких векторных полей на M; d — оператор внешнего дифференцирования; δ — оператор кодифференцирования; L_X — оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X.

Почти эрмитовой структурой на M называется пара (g, J), где g — риманова структура на M, а J — почти комплексная структура на M, согласованная с g, то есть

$$J \circ J = -id \; ; \; g(JX, JY) = g(X, Y)$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Келеровой формой на эрмитовом многообразии М называется 2-форма F такая, что

$$F(X,Y) = g(JX,Y) \text{ для любых } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \qquad (1)$$

Формой Ли называется 1-форма ω, которая определяется следующим образом:

$$\omega(X) = \frac{-1}{n-1}\delta F(JX). \qquad (2)$$

Вектором Ли называется двойственное форме Ли векторное поле ξ такое, что

$$g(\xi, X) = \omega(X). \qquad (3)$$

Напомним, что, согласно [3], структура $S = \{T_1, ..., T_k\}$ на M называется ξ-инвариантной тогда и только тогда, когда $L_{\xi}(T_k) = 0$, $k = 1, ..., n$.

В [4] доказано, что структура S является ξ-инвариантной, если каждое из тензорных полей, ее составляющих, инвариантно относительно локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов.

Получим условия инвариантности J-почти комплексной структуры в некоторых классах почти эрмитовых многообразий.

Согласно классификации Грея — Хервеллы [1], класс W_4 почти эрмитовых многообразий определяется тождеством

$$\nabla_X(F)(Y,Z)=\frac{-1}{2(n-1)}(g(X,Y)\delta F(Z)-$$

$$-g(X,Z)\delta F(Y)-g(X,JY)\delta F(JZ)+g(X,JZ)\delta F(JY)).$$

Заметим, что

$$\delta F(Z)=\delta F(-J(JZ))=\frac{-1}{n-1}\delta F(J(JZ))(n-1)=$$

$$=(n-1)\omega(JZ), \tag{4}$$

$$\delta F(JZ)=(1-n)\omega(Z).$$

Следовательно, из определения класса W_4 с учетом (3) и (4) получаем

$$\nabla_X(F)(Y,Z)=\frac{-1}{2(n-1)}(g(X,Y)(n-1)\omega(JZ)-$$

$$-g(X,Z)(n-1)\omega(JY)-g(X,JY)(1-n)\omega(Z)+$$

$$+g(X,JZ)(1-n)\omega(Y))=\frac{1}{2}(-g(X,Y)\omega(JZ)+g(X,Z)\omega(JY)-$$

$$-g(X,JY)\omega(Z)+g(X,JZ)\omega(Y)).$$

Взяв $X=\xi,$ с учетом (3) получим

$$\nabla_\xi(F)(Y,Z)=\frac{1}{2}(-g(\xi,Y)\omega(JZ)+g(\xi,Z)\omega(JY)-$$

$$-g(\xi,JY)\omega(Z)+g(\xi,JZ)\omega(Y))=\frac{1}{2}(-\omega(Y)\omega(JZ)+$$

$$+\omega(Z)\omega(JY)-\omega(JY)\omega(Z)+\omega(JZ)\omega(Y))=0,$$

откуда следует

Лемма. *В классе* W_4 *для любых* $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

$$\nabla_{\xi}(F)(Y, Z) = 0. \tag{5}$$

Теорема 1 (*критерий инвариантности почти комплексной структуры относительно локальной группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли в классе* W_4). *Почти комплексная структура* J ξ*-инвариантна в классе* W_4 *тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_{JY}\xi = J(\nabla_Y \xi). \tag{6}$$

Действительно, ковариантно продифференцировав (1), получим

$$\nabla_{\xi}(F)(Y, Z) = g(\nabla_{\xi}(J)Y, Z), \tag{7}$$

а значит, с учетом леммы, $g(\nabla_{\xi}(J)Y, Z) \equiv 0,$ что вместе с невырожденностью метрики g влечет $\nabla_{\xi}(J)Y \equiv 0.$

Поскольку

$$L_{\xi}(J)Y = L_{\xi}(JY) - J(L_{\xi}(Y)) = [\xi, JY] - J([\xi, Y]) =$$

$$= \nabla_{\xi}(JY) - \nabla_{JY}\xi - J(\nabla_{\xi}Y) + J(\nabla_Y \xi) =$$

$$= -\nabla_{JY}\xi + J(\nabla_Y \xi) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Почти комплексная структура* J ξ*-инвариантна в классе* W_4 *тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_{JX}(\omega)(Y) + \nabla_X(\omega)(JY) = 0 \tag{8}$$

для любых X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Действительно, учитывая, что

$$L_\xi(J)X = \nabla_\xi(J)X - \nabla_{JX}\xi + J(\nabla_X \xi),$$

получим

$$g(L_\xi(J)X,Y) = g(\nabla_\xi(J)X,Y) - g(\nabla_{JX}\xi,Y) + g(J(\nabla_X\xi),Y)) =$$
$$= \nabla_\xi(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(\omega)(Y) - \nabla_X(\omega)(JY) =$$
$$= -\nabla_{JX}(\omega)(Y) - \nabla_X(\omega)(JY),$$

и, допустив $L_\xi(J)X = 0,$ получаем прямое утверждение. Обратное очевидно следует из невырожденности формы g.

Теорема 3. *Риманова структура g ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда для любых X, Y∈ X(M) выполнено*

$$\nabla_X(\omega)Y + \nabla_Y(\omega)X = 0\,. \tag{9}$$

Для доказательства вычислим производную Ли римановой метрики.

$$L_\xi(g(X,Y)) = L_\xi(g)(X,Y) + g(L_\xi X,Y) + g(X,L_\xi Y)\,.$$

Отсюда

$$L_\xi(g)(X,Y) = \xi(g(X,Y)) - g([\xi,X],Y) - g(X,[\xi,Y]) =$$
$$= \xi(g(X,Y)) - g(\nabla_\xi X,Y) + g(\nabla_X\xi,Y) - g(X,\nabla_\xi Y) +$$
$$+ g(X,\nabla_Y\xi).$$

Поскольку

$$\nabla_\xi(g(X,Y)) = \xi(g(X,Y)) = \nabla_\xi(g)(X,Y) + g(\nabla_\xi X,Y) +$$
$$+ g(X,\nabla_\xi Y),$$

получаем

$$L_\xi(g)(X,Y)) = g(\nabla_X\xi,Y) + g(X,\nabla_Y\xi). \tag{10}$$

Ковариантно продифференцировав по X равенство (3), получаем $g(X, \nabla_Y \xi) = \nabla_Y(\omega)X$, что с учетом (10) завершает доказательство.

В [2] было доказано, что для собственных многообразий класса $W_1 \oplus W_4$ (а значит, и в подклассе W_4) размерностей $dimM > 4$ форма Ли замкнута, то есть справедливо равенство

$$d\omega = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X = 0 \tag{11}$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Следствие. *В классе собственных многообразий из* W_4 *размерности выше 4* ξ*-инвариантность римановой метрики g влечет* ξ*-инвариантность почти комплексной структуры J. При этом форма Ли ковариантно постоянна в римановой связности* ∇*, то есть* $\nabla_X(\omega) \equiv 0$.

Действительно, из (9) и (11) следует, что $\nabla_X(\omega)Y \equiv 0$, что влечет выполнимость условия (8).

Список литературы

1. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.

2. *Игнаточкина Л. А.* Многообразия Вайсмана — Грея с J-инвариантным тензором конформной кривизны // Матем. сб. 2003. Т. 194, №2. С. 61—72.

3. *Кобаяши Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981.

4. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. М., 2003.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53C15, 53D15

S. V. Khokhlov[1], *L. A. Ignatochkina*[2]
[1, 2] *Moscow Pedagogical State University*
1/1 M. Pirogovskaya St., Moscow, 119991, Russia
[1] hohlov@yahoo.com, [2] ignlia@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-12

Invariance of some classes of almost Hermitian structures concerning to the one-parameter group of diffeomorphisms generated by the Lie vector field

Submitted on May 30, 2022

Finding the conditions for the invariance of geometric objects under the action of transformation groups is one of the main objects of geometric research. Almost Hermitian structures and structures of the Gray — Hervella classification on smooth manifolds are considered in this paper. All arguments are given using invariant Koszul's calculus. Conditions for the invariance of the Kähler form in type structures are investigated and it is shown that the Kähler form is covariantly constant with respect to the Lie vector field. Conditions for the invariance of the Riemannian metric under the action of a one-parameter group of diffeomorphisms generated by a Lie vector field are studied. A criterion for the invariance of an almost complex structure with respect to the local group of diffeomorphisms generated by the Lie vector field in the class W_4 is proved.

Conditions for the invariance of an operator of an almost complex structure, a tensor of a Riemannian metric, are proved. It is established that the invariance of the Riemannian structure g implies the invariance of the operator of an almost complex structure for some class of manifolds according to the Gray — Hervella classification, and conditions for the covariant constancy of the Lie form in certain classes of manifolds of dimensions above four were obtained. It is proved that the Lie form is covariantly constant in some classes of the type of dimensions above four.

Keywords: almost Hermitian structure, almost complex structure, Lie vector, Lie form

References

1. *Gray, A., Hervella, L. M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura ed Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

2. *Ignatochkina, L. A.:* Vaisman — Gray manifolds with *J*-invariant conformal curvature tensor. Sb. Math., **194**:2, 61—72 (2003).

3. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Foundations of Differential Geometry. Moscow (1981).

4. *Aminova, A. V.:* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. Moscow (2003).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

Е. Р. Шамардина
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
katerina.r2805@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-13

Нахождение симметрий для задачи о волнах на воде с поверхностным натяжением

В статье Т. Брук Бенджамина и П. Дж. Олвера 1982 года исследуется вопрос о поведении гамильтоновых систем с бесконечным фазовым пространством. Частным случаем данной задачи является задача о волнах на воде по модели идеальной жидкости в R^2 и R^3 как с учетом поверхностного натяжения, так и без. Здесь мы рассматриваем случай данной задачи в R^2 с учетом поверхностного натяжения и находим для него симметрии, что не было подробно разобрано в указанной статье.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, симметрии, гамильтонова структура, задача о волнах

1. Постановка задачи. Пусть (x,y,z) — фиксированная декартова система координат, где y — вертикальная координата. Считается, что несжимаемая невязкая жидкость, имеющая единичную плотность, занимает область D_η. Верхняя граница D_η — движущаяся свободная поверхность S: $y=\eta(x,y,t)$. Здесь $\eta(x,y,t)$ — однозначная функция. Рассмотрим систему уравнений

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.
© Шамардина Е. Р., 2022

$$\Lambda:\begin{cases} \varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0, \\ \eta_t=\Phi_{(y)}-\Phi_{(x)}\eta_x, \\ \Phi_{(t)}+(\Phi_{(x)}^2+\Phi_{(y)}^2)/2+g\eta-\sigma\eta_{xx}/(1+\eta_x^2)^{3/2}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Phi_{(x)}=(\varphi_x)_S$, $\Phi_{(y)}=(\varphi_y)_S$, $\Phi_{(t)}=(\varphi_t)_S$.

Инфинитезимальные симметрии будем искать в виде

$$X=\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\tau\partial_t+\gamma\partial_\varphi,$$

где коэффициенты α, β, τ и γ — функции от переменных x, y и t.

Первое и второе продолжения, сужаемые на поверхность S, имеют вид

$$X_{(1)S}=\alpha_S\partial_x+\beta_S\partial_y+\tau_S\partial_t+\gamma_S\partial_\varphi+(\delta\varphi_x)_S\frac{\partial}{\partial\Phi_{(x)}}+$$

$$+(\delta\varphi_y)_S\frac{\partial}{\partial\Phi_{(y)}}+(\delta\varphi_t)_S\frac{\partial}{\partial\Phi_{(t)}}+\delta\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta_x}+\delta\eta_t\frac{\partial}{\partial\eta_t},$$

$$X_{(2)}=\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\tau\partial_t+\gamma\partial_\varphi+\delta\varphi_x\frac{\partial}{\partial\varphi_x}+\delta\varphi_y\frac{\partial}{\partial\varphi_y}+\delta\varphi_t\frac{\partial}{\partial\varphi_t}+$$

$$+\delta\varphi_{xx}\frac{\partial}{\partial\varphi_{xx}}+\delta\varphi_{yy}\frac{\partial}{\partial\varphi_{yy}}+\delta\varphi_{tt}\frac{\partial}{\partial\varphi_{tt}}+\delta\varphi_{xy}\frac{\partial}{\partial\varphi_{xy}}+$$

$$+\delta\varphi_{xt}\frac{\partial}{\partial\varphi_{xt}}+\delta\varphi_{yt}\frac{\partial}{\partial\varphi_{yt}}+\delta\eta_x\frac{\partial}{\partial\eta_x}+\delta\eta_{xx}\frac{\partial}{\partial\eta_{xx}},$$

здесь

$$\delta\varphi_x=D_x\gamma-\varphi_xD_x\alpha-\varphi_yD_x\beta-\varphi_tD_x\tau, \tag{2}$$

$$\delta\varphi_y=D_y\gamma-\varphi_xD_y\alpha-\varphi_yD_y\beta-\varphi_tD_y\tau, \tag{3}$$

$$\delta\varphi_t=D_t\gamma-\varphi_xD_t\alpha-\varphi_yD_t\beta-\varphi_tD_t\tau, \tag{4}$$

$$\delta\varphi_{xx} = D_x\delta\varphi_x - \varphi_{xx}D_x\alpha - \varphi_{xy}D_x\beta - \varphi_{xt}D_x\tau, \qquad (5)$$

$$\delta\varphi_{yy} = D_y\delta\varphi_y - \varphi_{xy}D_y\alpha - \varphi_{yy}D_y\beta - \varphi_{yt}D_y\tau, \qquad (6)$$

$$\delta\eta_x = D_x(\beta_S) - \eta_x D_x(\alpha_S) - \eta_t D_x(\tau_S), \qquad (7)$$

$$\delta\eta_t = D_t(\beta_S) - \eta_x D_t(\alpha_S) - \eta_t D_t(\tau_S), \qquad (8)$$

$$\delta\eta_{xx} = D_x(\delta\eta_x) - \eta_{xx}D_x(\alpha_S) - \eta_{tx}D_x(\tau_S). \qquad (9)$$

Слагаемое $D_x(\beta_S)$ имеет вид

$$D_x(\beta_S) = (D_x\beta)_S + (\beta_y)_S\eta_x, \qquad (10)$$

аналогично для $D_x(\alpha_S)$ и $D_x(\tau_S)$.

$$D_x(\delta\eta_x) = D_{xx}(\beta_S) - \eta_{xx}D_x(\alpha_S) - \eta_x D_{xx}(\alpha_S) -$$
$$-\eta_{tx}D_x(\tau_S) - \eta_t D_{xx}(\tau_S). \qquad (11)$$

Введем определяющие уравнения системы:

$$X_{(2)}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})\Big|_\Lambda = 0, \qquad (12)$$

$$X_{(1)S}(\eta_t - \Phi_{(y)} + \Phi_{(x)}\eta_x)\Big|_\Lambda = 0, \qquad (13)$$

$$X_{(2)S}\left(\Phi_{(t)} + (\Phi^2_{(x)} + \Phi^2_{(y)})/2 + g\eta - \sigma\eta_{xx}/(1+\eta_x^2)^{3/2}\right)\Big|_\Lambda = 0. \qquad (14)$$

Найдем общий вид коэффициентов α, β, τ и γ инфинитезимальной симметрии X.

2. Первое определяющее уравнение. Рассмотрим определяющее уравнение (12), которое после подстановки первого продолжения примет вид

$$(\delta\varphi_{xx} + \delta\varphi_{yy})\Big|_\Lambda = 0. \qquad (15)$$

Распишем слагаемые левой части, воспользовавшись выражениями (2, 3, 5, 6), приняв во внимание, что $\varphi_{yy} = -\varphi_{xx}$:

$$\delta\varphi_{xx} = D_x\delta\varphi_x - \varphi_{xx}D_x\alpha - \varphi_{xy}D_x\beta - \varphi_{xt}D_x\tau = \gamma_{xx} + 2\gamma_{x\varphi}\varphi_x + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 +$$
$$+ \gamma_\varphi\varphi_{xx} - \varphi_{xx}(\alpha_x + \alpha_\varphi\varphi_x) - \varphi_x(\alpha_{xx} + 2\alpha_{x\varphi}\varphi_x + \alpha_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + \alpha_\varphi\varphi_{xx}) -$$
$$-\varphi_{xy}(\beta_x + \beta_\varphi\varphi_x) - \varphi_y(\beta_{xx} + 2\beta_{x\varphi}\varphi_x + \beta_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + \beta_\varphi\varphi_{xx}) - \varphi_{xt}(\tau_x +$$
$$+\tau_\varphi\varphi_x) - \varphi_t(\tau_{xx} + 2\tau_{x\varphi}\varphi_x + \tau_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + \tau_\varphi\varphi_{xx}) - \varphi_{xx}(\alpha_x + \alpha_\varphi\varphi_x) -$$
$$-\varphi_{xy}(\beta_x + \beta_\varphi\varphi_x) - \varphi_{xt}(\tau_x + \tau_\varphi\varphi_x),$$

$$\delta\varphi_{yy} = D_y\delta\varphi_y - \varphi_{xy}D_y\alpha - \varphi_{yy}D_y\beta - \varphi_{yt}D_y\tau = \gamma_{yy} + 2\gamma_{y\varphi}\varphi_y +$$
$$+\gamma_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 - \gamma_\varphi\varphi_{xx} - \varphi_{xy}(\alpha_y + \alpha_\varphi\varphi_y) - \varphi_x(\alpha_{yy} + 2\alpha_{y\varphi}\varphi_y + \alpha_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 -$$
$$-\alpha_\varphi\varphi_{xx}) + \varphi_{xx}(\beta_y + \beta_\varphi\varphi_y) - \varphi_y(\beta_{yy} + 2\beta_{y\varphi}\varphi_y + \beta_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 - \beta_\varphi\varphi_{xx}) -$$
$$-\varphi_{yt}(\tau_y + \tau_\varphi\varphi_y) - \varphi_t(\tau_{yy} + 2\tau_{y\varphi}\varphi_y + \tau_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 - \tau_\varphi\varphi_{xx}) - \varphi_{xy}(\alpha_y +$$
$$+\alpha_\varphi\varphi_y) + \varphi_{xx}(\beta_y + \beta_\varphi\varphi_y) - \varphi_{yt}(\tau_y + \tau_\varphi\varphi_y).$$

Приняв левую часть уравнения (15) как полином от переменных φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{xt}, φ_{yt}, имеем:

$$\varphi_{xx}:\ -2(\alpha_x + \alpha_\varphi\varphi_x) + 2(\beta_y + \beta_\varphi\varphi_y) = 0, \tag{16}$$

$$\varphi_{xy}:\quad 2(\alpha_y + \alpha_\varphi\varphi_y) + 2(\beta_x + \beta_\varphi\varphi_x) = 0, \tag{17}$$

$$\varphi_{xt}:\quad \tau_x + \tau_\varphi\varphi_x = 0, \tag{18}$$

$$\varphi_{yt}:\quad \tau_y + \tau_\varphi\varphi_y = 0, \tag{19}$$

$$1:\quad \gamma_{xx} + 2\gamma_{x\varphi}\varphi_x + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 - \varphi_x(\alpha_{xx} + 2\alpha_{x\varphi}\varphi_x +$$
$$+\alpha_{\varphi\varphi}\varphi_x^2) - \varphi_y(\beta_{xx} + 2\beta_{x\varphi}\varphi_x + \beta_{\varphi\varphi}\varphi_x^2) - \varphi_t(\tau_{xx} +$$
$$+2\tau_{x\varphi}\varphi_x + \tau_{\varphi\varphi}\varphi_x^2) + \gamma_{yy} + 2\gamma_{y\varphi}\varphi_y + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 -$$
$$-\varphi_x(\alpha_{yy} + 2\alpha_{y\varphi}\varphi_y + \alpha_{\varphi\varphi}\varphi_y^2) - \varphi_y(\beta_{yy} + 2\beta_{y\varphi}\varphi_y +$$
$$+\beta_{\varphi\varphi}\varphi_y^2) - \varphi_t(\tau_{yy} + 2\tau_{y\varphi}\varphi_y + \tau_{\varphi\varphi}\varphi_y^2) = 0. \tag{20}$$

Из уравнений (16—19) получим

$$\alpha_x = \beta_y\,,\ \alpha_y = -\beta_x\,,\ \alpha_\varphi = \beta_\varphi = 0,\ \tau_x = \tau_y = \tau_\varphi = 0.$$

Тогда $\alpha = \alpha(x,y,t)$, $\beta = \beta(x,y,t)$ и $\tau = \tau(t)$. Перепишем выражения (2—4):

$$\delta\varphi_x = D_x\gamma - \varphi_x\alpha_x - \varphi_y\beta_x\,, \tag{2*}$$

$$\delta\varphi_y = D_y\gamma - \varphi_x\alpha_y - \varphi_y\beta_y\,, \tag{3*}$$

$$\delta\varphi_t = D_t\gamma - \varphi_x\alpha_t - \varphi_y\beta_t - \varphi_t\tau_t\,. \tag{4*}$$

Уравнение (20) примет вид

$$\begin{gathered}\gamma_{xx} + 2\gamma_{x\varphi}\varphi_x + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 - \varphi_x\alpha_{xx} - \varphi_y\beta_{xx} + \gamma_{yy} + \\ +2\gamma_{y\varphi}\varphi_y + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 - \varphi_x\alpha_{yy} - \varphi_y\beta_{yy} = 0.\end{gathered} \tag{20*}$$

3. Второе определяющее уравнение. После подстановки первого продолжения во второе определяющее уравнение (13) получим

$$\left[(\delta\eta_t)_S - (\delta\varphi_y)_S + (\delta\varphi_x)_S\eta_x + (\varphi_x)_S\delta\eta_x\right]\Big|_\Lambda = 0. \tag{21}$$

Распишем слагаемые $\delta\eta_x$ и $\delta\eta_t$, приняв во внимание $\tau = \tau(t)$ и $\eta_t = \varphi_y - \varphi_x\eta_x$:

$$\begin{gathered}\Big[\beta_t + \beta_y(\varphi_y - \varphi_x\eta_x) - \alpha_t\eta_x - \alpha_y\eta_x(\varphi_y - \varphi_x\eta_x) - \tau_t(\varphi_y - \varphi_x\eta_x) - \\ -\gamma_y - \gamma_\varphi\varphi_y + \alpha_y\varphi_x + \beta_y\varphi_y + (\gamma_x + \gamma_\varphi\varphi_x - \alpha_x\varphi_x - \beta_x\varphi_y)\eta_x + \\ +(\beta_x + \beta_y\eta_x - \alpha_x\eta_x - \alpha_y\eta_x^2)\varphi_x\Big]\Big|_\Lambda = 0.\end{gathered}$$

Рассмотрим левую часть как полином от переменных η_x^2 и η_x:

$$\eta_x^2:\ \ \alpha_y\varphi_x - \alpha_y\varphi_x = 0,$$

$$\eta_x: \ -\alpha_t - \alpha_y\varphi_y + \tau_t\varphi_x + \gamma_x + \gamma_\varphi\varphi_x - 2\alpha_x\varphi_x - \beta_x\varphi_y = 0,$$

$$1: \ \beta_t + 2\beta_y\varphi_y - \tau_t\varphi_y - \gamma_y - \gamma_\varphi\varphi_y + \alpha_y\varphi_x + \beta_x\varphi_x = 0.$$

Второе равенство равносильно системе уравнений на коэффициенты по степеням φ_x и φ_y:

$$\varphi_x: \ \tau_t + \gamma_\varphi - 2\alpha_x = 0, \ \varphi_y: \ -\alpha_y - \beta_x = 0, \ 1: \ -\alpha_t + \gamma_x = 0,$$

что сводится к

$$\tau_t + \gamma_\varphi = 2\alpha_x, \tag{22}$$

$$\alpha_y = -\beta_x, \tag{23}$$

$$\alpha_t = \gamma_x. \tag{24}$$

Аналогично из третьего выражения следует:

$$\tau_t + \gamma_\varphi = 2\beta_y, \tag{25}$$

$$\beta_t = \gamma_y. \tag{26}$$

4. Третье определяющее уравнение. Перейдем к рассмотрению третьего определяющего уравнения (14):

$$\Big[(\delta\varphi_t)_S + \varphi_x(\delta\varphi_x)_S + \varphi_y(\delta\varphi_y)_S + g(\delta\eta)_S +$$

$$+3\sigma\,\eta_x\eta_{xx}\delta\eta_x(1+\eta_x^2)^{-5/2} - \sigma\,\delta\eta_{xx}(1+\eta_x^2)^{-3/2}\Big]\Big|_\Lambda = 0.$$

С учетом, что $\eta = y$ и $\delta\eta = \beta$, подставим выражения для $\delta\varphi_t$, $\delta\varphi_x$, $\delta\varphi_y$, $\delta\eta_x$ и $\delta\eta_{xx}$:

$$\big[(D_t\gamma - \varphi_x D_t\alpha - \varphi_y D_t\beta - \varphi_t D_t\tau)_S + \varphi_x(D_x\gamma - \varphi_x D_x\alpha - \varphi_y D_x\beta)_S +$$

$$+\varphi_y(D_y\gamma - \varphi_x D_y\alpha - \varphi_y D_y\beta)_S + g(\beta)_S + 3\sigma\,\eta_x\eta_{xx}(D_x(\beta_S) -$$

$$-\eta_x D_x(\alpha_S) - \eta_t D_x(\tau_S))(1+\eta_x^2)^{-5/2} - \sigma(D_x(\delta\eta_x) - \eta_{xx}D_x(\alpha_S) -$$

$$-\eta_{tx}D_x(\tau_S))(1+\eta_x^2)^{-3/2}\Big]\Big|_\Lambda = 0.$$

Теперь подставим выражения для слагаемых $D_x(\alpha_S)$, $D_x(\beta_S)$, $D_x(\tau_S)$ и $D_x(\delta\eta_x)$, приняв во внимание, что $\tau=\tau(t)$:

$$\Big[(\gamma_t+\gamma_\varphi\varphi_t-\varphi_x\alpha_t-\varphi_y\beta_t-\varphi_t\tau_t)_S+\varphi_x(\gamma_x+\gamma_\varphi\varphi_x-\varphi_x\alpha_x-\varphi_y\beta_x)_S+$$
$$+\varphi_y(\gamma_y+\gamma_\varphi\varphi_y-\varphi_x\alpha_y-\varphi_y\beta_y)_S+g(\beta)_S+3\sigma\eta_x\eta_{xx}((\beta_x)_S+$$
$$+(\beta_y)_S\eta_x-(\alpha_x)_S\eta_x-(\alpha_y)_S\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma(D_{xx}(\beta_S)-$$
$$-2(\alpha_x)_S\eta_{xx}-2(\alpha_y)_S\eta_x\eta_{xx}-D_{xx}(\alpha_S)\eta_x)(1+\eta_x^2)^{-3/2}\Big]\Big|_\Lambda=0.$$

Запишем выражения для $D_{xx}(\alpha_S)$ и $D_{xx}(\beta_S)$:

$$D_{xx}(\alpha_S)=(\alpha_{xx})_S+2(\alpha_{xy})_S\eta_x+(\alpha_{yy})_S\eta_x^2+(\alpha_y)_S\eta_{xx},$$
$$D_{xx}(\beta_S)=(\beta_{xx})_S+2(\beta_{xy})_S\eta_x+(\beta_{yy})_S\eta_x^2+(\beta_y)_S\eta_{xx},$$

и подставим их в уравнение выше:

$$\Big[(\gamma_t+\gamma_\varphi\varphi_t-\varphi_x\alpha_t-\varphi_y\beta_t-\varphi_t\tau_t)_S+\varphi_x(\gamma_x+\gamma_\varphi\varphi_x-\varphi_x\alpha_x-\varphi_y\beta_x)_S+$$
$$+\varphi_y(\gamma_y+\gamma_\varphi\varphi_y-\varphi_x\alpha_y-\varphi_y\beta_y)_S+g(\beta)_S+3\sigma\eta_x\eta_{xx}((\beta_x)_S+$$
$$+(\beta_y)_S\eta_x-(\alpha_x)_S\eta_x-(\alpha_y)_S\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma((\beta_{xx})_S+2(\beta_{xy})_S\eta_x+$$
$$+(\beta_{yy})_S\eta_x^2+(\beta_y)_S\eta_{xx}-(\alpha_{xx})_S\eta_x-2(\alpha_{xy})_S\eta_x^2-(\alpha_{yy})_S\eta_x^3-$$
$$-3(\alpha_y)_S\eta_x\eta_{xx}-2(\alpha_x)_S\eta_{xx})(1+\eta_x^2)^{-3/2}\Big]\Big|_\Lambda=0.$$

Выполним подстановку:

$$\varphi_t=-(\varphi_x^2+\varphi_y^2)/2-gy+\sigma\eta_{xx}(1+\eta_x^2)^{-3/2}$$

и опустим S:

$$\Big[\gamma_t-(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\gamma_\varphi/2-gy\gamma_\varphi+\sigma\eta_{xx}\gamma_\varphi(1+\eta_x^2)^{-3/2}-\varphi_x\alpha_t-\varphi_y\beta_t+$$
$$+(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\tau_t/2+gy\tau_t-\sigma\eta_{xx}\tau_t(1+\eta_x^2)^{-3/2}+\varphi_x(\gamma_x+\gamma_\varphi\varphi_x-$$
$$-\varphi_x\alpha_x-\varphi_y\beta_x)+\varphi_y(\gamma_y+\gamma_\varphi\varphi_y-\varphi_x\alpha_y-\varphi_y\beta_y)+g\beta+3\sigma\eta_x\eta_{xx}(\beta_x+$$

$$+\beta_y\eta_x-\alpha_x\eta_x-\alpha_y\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma(\beta_{xx}+2\beta_{xy}\eta_x+\beta_{yy}\eta_x^2+$$

$$+\beta_y\eta_{xx}-2\alpha_x\eta_{xx}-3\alpha_y\eta_x\eta_{xx}-\alpha_{xx}\eta_x-2\alpha_{xy}\eta_x^2-\alpha_{yy}\eta_x^3)\cdot$$

$$\cdot(1+\eta_x^2)^{-3/2}\Big]\Big|_\Lambda=0.$$

Рассмотрим левую часть как полином от φ_x и φ_x^2:

$$\varphi_x^2:\ \ \gamma_\varphi/2+\tau_t/2-\alpha_x=0,\ \ \varphi_x:\ \ -\alpha_t+\gamma_x-\varphi_y\beta_x-\varphi_y\alpha_y=0,$$

$$1:\ \ \gamma_t-\varphi_y^2\gamma_\varphi/2-gy\gamma_\varphi+\sigma\eta_{xx}\gamma_\varphi(1+\eta_x^2)^{-3/2}-\varphi_y\beta_t+\varphi_y^2\tau_t/2+$$

$$+gy\tau_t-\sigma\eta_{xx}\tau_t(1+\eta_x^2)^{-3/2}+\varphi_y(\gamma_y+\gamma_\varphi\varphi_y-\varphi_y\beta_y)+g\beta+$$

$$+3\sigma\eta_x\eta_{xx}(\beta_x+\beta_y\eta_x-\beta_y\eta_x-\beta_x\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma(\beta_{xx}+$$

$$+2\beta_{xy}\eta_x-\beta_{xx}\eta_x^2+\beta_y\eta_{xx}-2\beta_y\eta_{xx}+3\beta_x\eta_x\eta_{xx}-\beta_{xy}\eta_x+$$

$$+2\beta_{xx}\eta_x^2+\beta_{xy}\eta_x^3)(1+\eta_x^2)^{-3/2}=0.$$

Из первого выражения получим выведенное ранее тождество: $\gamma_\varphi+\tau_t=2\alpha_x$. Рассмотрим второе выражение как полином от φ_y:

$$\varphi_y:\ \ \beta_x=-\alpha_y,\qquad\qquad 1:\ \ \alpha_t=\gamma_x.$$

Аналогично, рассмотрев третье, получим

$$\varphi_y^2:\ \ \gamma_\varphi+\tau_t=2\beta_y,\qquad\qquad \varphi_y:\ \ \beta_t=\gamma_y,$$

$$1:\ \ \gamma_t-gy\gamma_\varphi+\sigma\eta_{xx}\gamma_\varphi(1+\eta_x^2)^{-3/2}+gy\tau_t-\sigma\eta_{xx}\tau_t(1+\eta_x^2)^{-3/2}+$$

$$+g\beta+3\sigma\eta_x\eta_{xx}(\beta_x-\beta_x\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma(\beta_{xx}+\beta_{xy}\eta_x-\beta_y\eta_{xx}+$$

$$+3\beta_x\eta_x\eta_{xx}+\beta_{xx}\eta_x^2+\beta_{xy}\eta_x^3)(1+\eta_x^2)^{-3/2}=0.$$

Из последнего выражения получим

$$\alpha_{xx}=\alpha_{yy}=\alpha_{xy}=\beta_{xx}=\beta_{yy}=\beta_{xy}=0,$$

$$\tau_t-\gamma_\varphi=\beta_y=\alpha_x,\quad \gamma_t=-g\beta-gy\beta_y.$$

5. Общий вид коэффициентов α**,** β**,** τ ***и*** γ**.** Рассмотрим коэффициент γ. Так как

$$\gamma_\varphi + \tau_t = 2\alpha_x = 2\beta_y, \quad \tau_t - \gamma_\varphi = \beta_y = \alpha_x,$$

значит,

$$\gamma_\varphi = \alpha_x / 2 = \beta_y / 2, \;\; \tau_t = 3\alpha_x / 2 = 3\beta_y / 2 = 3\gamma_\varphi.$$

Очевидно, что γ_φ не зависит от переменной φ, тогда

$$\gamma = c_0(x,y,t)\varphi + \chi(x,y,t).$$

Найдем вид c_0. Продифференцируем коэффициент γ по переменным x, y, t:

$$\begin{gathered}\gamma_x = \alpha_t \equiv (c_0)_x\varphi + \chi_x, \qquad \gamma_y = \beta_t \equiv (c_0)_y\varphi + \chi_y, \\ \gamma_t = -g\beta - gy\beta_y \equiv (c_0)_t\varphi + \chi_t.\end{gathered} \tag{27}$$

Откуда $(c_0)_x = (c_0)_y = (c_0)_t = 0$, а значит $c_0 = const$:

$$\gamma = c_0\varphi + \chi(x,y,t).$$

Найдем вид α и β. С учетом, что $\alpha_x = 2\gamma_\varphi = 2c_0$, где правая часть зависит только от переменной t, α примет вид

$$\alpha = c_0 x + \sigma(y,t).$$

Аналогично для коэффициента β:

$$\beta = c_0 y + \tilde{\sigma}(x,t).$$

Приняв во внимание вид α и β, перепишем систему (27):

$$\gamma_x = \chi_x = \alpha_t \equiv \sigma_t,$$

$$\gamma_y = \chi_y = \beta_t \equiv \tilde{\sigma}_t,$$

$$\gamma_t = \chi_t \equiv -4c_0 gy - g\tilde{\sigma}.$$

Рассмотрим формулу

$$\chi = \int_{(0,0,0)}^{(0,0,t)} \chi_t dt + \int_{(0,0,t)}^{(x,0,t)} \chi_x dx + \int_{(x,0,t)}^{(x,y,t)} \chi_y dy + const. \qquad (28)$$

Распишем правую часть:

$$\int_{(0,0,0)}^{(0,0,t)} \chi_t dt + const = \phi(t),$$

$$\int_{(0,0,t)}^{(x,0,t)} \chi_x dx = \int_{(0,0,t)}^{(x,0,t)} \sigma_t dx = x\sigma_t,$$

$$\int_{(x,0,t)}^{(x,y,t)} \chi_y dy = \int_{(x,0,t)}^{(x,y,t)} \widetilde{\sigma}_t dy = y\widetilde{\sigma}_t.$$

Тогда формула (28) примет вид

$$\chi = \phi + x\sigma_t + y\widetilde{\sigma}_t. \qquad (29)$$

Найдем вид коэффициентов τ, σ и $\widetilde{\sigma}$. Продифференцируем по переменной t выражение (29):

$$\chi_t = \phi_t + x\sigma_{tt} + y\widetilde{\sigma}_{tt} \equiv -4c_0 g y - g\widetilde{\sigma}.$$

Рассмотрим данное выражение как полином по переменным x и y:

$$x:\ \sigma_{tt} = 0, \qquad y:\ \widetilde{\sigma}_{tt} = -4c_0 g, \qquad 1: \phi_t = -g\widetilde{\sigma}.$$

Так как $\tau = \tau(t)$ и $\tau_t = 3\gamma_\varphi$, то $\tau = 3c_0 t + c_1$. Тогда с учетом вида коэффициента τ σ и $\widetilde{\sigma}$ примут вид

$$\widetilde{\sigma} = -2c_0 g t^2 + c_2 t + c_3,$$

$$\sigma = c_4 t + c_5.$$

Рассмотрим коэффициент ϕ_t:

$$\phi_t = -g\widetilde{\sigma} = 2c_0 g^2 t^2 - c_2 g t - c_3 g.$$

Значит

$$\phi = 2c_0 g^2 t^3 / 3 - c_2 g t^2 / 2 - c_3 g t + c_6.$$

Тем самым коэффициенты α, β, γ и τ приняли вид

$$\tau = 3c_0 t + c_1, \quad \alpha = 2c_0 x + c_4 t + c_5,$$

$$\beta = 2c_0 y - 2c_0 g t^2 + c_2 t + c_3,$$

$$\gamma = c_0\varphi + 2c_0 g^2 t^3 / 3 - c_2 g t^2 / 2 - c_3 g t + c_6 + c_4 x - 4c_0 g y t + c_2 y.$$

Подставив коэффициенты α, β, γ и τ в выражение (20), получим тождество.

6. Инфинитезимальные симметрии. Подставим найденные коэффициенты α, β, γ и τ в выражение для инфинитезимальной симметрии:

$$X = (2c_0 x + c_4 t + c_5)\partial x + (2c_0 y - 2c_0 g t^2 + c_2 t + c_3)\partial y +$$
$$+(3c_0 t + c_1)\partial t + (c_0\varphi + 2c_0 g^2 t^3 / 3 - c_2 g t^2 / 2 -$$
$$-c_3 g t + c_6 + c_4 x - 4c_0 g y t + c_2 y)\partial\varphi.$$

Группируя по константам c, получим

$$X = c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 + c_5 X_5 + c_6 X_6,$$

где

$$X_0 = 2x\partial x + (2y - 2gt^2)\partial y + 3t\partial t + (\varphi + 2g^2 t^3 / 3 - 4gyt)\partial\varphi,$$
$$X_1 = \partial t, \qquad X_2 = t\partial y + (y - gt^2 / 2)\partial\varphi,$$
$$X_3 = \partial y - gt\partial\varphi, \qquad X_4 = t\partial x + x\partial\varphi,$$
$$X_5 = \partial x, \qquad X_6 = \partial\varphi.$$

Список литературы

1. *Адлер В.Э., Хабибуллин И.Т., Черданцев И.Ю.* Приложения групп Ли в математической физике : учеб. пособие. Уфа, 2013.
2. *Ибрагимов Н.Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности / пер. с англ. И.С. Емельяновой. Издательство Нижегородского госуниверситета. Н. Новгород, 2007.
3. *Brooke Benjamin T., Olver P.J.* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves // Journal of Fluid Mechanics. 1982. Vol. 125. P. 137—185.
4. *Oliveri F.* ReLie: A Reduce Program for Lie Group Analysis of Differential Equations // Symmetry. 2021. Vol. 13, №10. Art. №1826.
5. *Olver P.J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. Mathematical Institute, University of Oxford, 1980.
6. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. N.Y., 1982.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 76M60, 58J70

E.R. Shamardina[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
katerina.r2805@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-13

Finding symmetries for the problem of water waves with surface tension

Submitted on May 21, 2022

T. Brooke Benjamin and P.J. Olver “Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves” study the behavior of Hamiltonian systems with an infinite-dimensional phase space. The methods of variational problems and infinite-dimensional differential geometry are applicable to this problem. A special case of the problem is an abstract problem of hydrodynamics for an ideal fluid. Its configuration space is the group of volume-preserving diffeomorphisms of some manifold in R^2 or R^3 filled with fluid. Even more special is the problem of waves on water. Its non-standard nature is due to the presence of boundary conditions on the free surface. These boundary conditions can be interpreted in terms of the functional derivatives of the energy integral, which plays the role of the Hamiltonian. Here we consider in detail the case of this problem in R^2, taking into account surface tension, and find symmetries for it, which was not considered in detail in the article. Finding symmetries can be achieved without recourse to the Hamiltonian structure of the given problem.

Keywords: differential equations, symmetries, Hamiltonian structure, wave problem

References

1. *Adler, V.E., Khabibullin, I.T., Cherdantsev, I. Yu.:* Applications of the Lie Group in Mathematical Physics. Ufa (2013).

2. *Ibragimov, N.H.:* A practical course in differential equations and mathematical modeling. Classical and new methods nonlinear mathematical models symmetry and invariance principles. Nizhny Novgorod (2007).

3. *Brooke Benjamin, T., Olver, P.J.:* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves. Journal of Fluid Mechanics, 125, 137—185 (1982).

4. *Oliveri, F.:* ReLie: A Reduce Program for Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetry, **13**:10, 1826 (2021).

5. *Olver, P.J.:* Applications of Lie Groups to Differential Equations. Mathematical Institute, University of Oxford (1980).

6. *Ovsiannikov, L. V.:* Group Analysis of Differential Equations. New York (1982).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

Ю. И. Шевченко[1], ***А. В. Вялова***[2]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[2] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[1] ESkrydlova@kantiana.ru, [2] vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-14

Метрики пространства с линейной связностью, не являющейся полусимметрической

Хорошо известно построение Леви-Чивиты объекта аффинной связности (в современной терминологии — линейной связности) по полю невырожденной метрики на гладком многообразии. Обратная задача (построение метрики по заданной линейной связности) решается неоднозначно, причем метрика может оказаться вырожденной и неопределенной. С одной стороны, две отличающиеся знаком метрики строятся очевидно — путем сворачивания тензора кривизны с последующим симметрированием. С другой стороны, метрика Врэнчану представляет собой двойную свертку произведений компонент тензора кручения. В настоящей статье обратная задача Леви-Чивиты решена иначе с помощью поля объекта связности.

Доказано, что в общем случае, когда линейная связность не является полусимметрической, можно построить шесть метрик. В особом случае, когда линейная связность полусимметрична (в частности, без кручения), построенные метрики обращаются в нуль.

Исследование проведено на полуголономном гладком многообразии с помощью двух продолжений его структурных уравнений. Использован способ Лаптева — Лумисте задания связности в главном расслоении и обобщения объекта классической проективной связности.

Ключевые слова: метрика, линейная (аффинная) связность, классическая проективная связность, тензоры кручения и кривизны

Поступила в редакцию 08.05.2022 г.
© Шевченко Ю. И., Вялова А. В., 2022

1. Расслоение кореперов 2-го порядка. Структурные уравнения n-мерного гладкого многообразия V_n имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \;\; (i,... = \overline{1,n}). \tag{1}$$

Дифференцируем их внешним образом и разрешаем результат по лемме Лаптева [1, с. 141]:

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{2}$$

причем новые формы ω^i_{jk} удовлетворяют условиям полуголономности [2]:

$$\omega^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \;\; \Leftrightarrow \omega^i_{[jk]} = \lambda^i_{jkl}\omega^l, \;\; \lambda^i_{(jk)l} = 0, \;\; \lambda^i_{\{jkl\}} = 0, \tag{3}$$

где λ^i_{jkl} — некоторые функции, квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые скобки — симметрирование, а фигурные скобки — циклирование.

Продолжение структурных уравнений (2) приводится к виду

$$d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}, \tag{4}$$

$$\omega^i_{jkl} \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0 \;\; \Leftrightarrow \omega^i_{j[kl]} = \lambda^i_{jklm}\omega^m, \;\; \lambda^i_{j(kl)m} = 0, \;\; \lambda^i_{j\{klm\}} = 0. \tag{5}$$

Точка многообразия V_n фиксируется вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^i = 0$, тогда уравнения (2, 4) становятся проще:

$$d\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k \;\; (\pi = \omega\big|_{\omega^i=0}),$$

$$d\pi^i_{jk} = \pi^l_{jk} \wedge \pi^i_l - \pi^i_{lk} \wedge \pi^l_j - \pi^i_{jl} \wedge \pi^l_k .$$

Это структурные уравнения линейной группы 2-го порядка L^2, $\dim L^2 = \frac{1}{2}n^2(n+3)$, имеющей линейную фактор-группу

$L^1 = GL(n)$, $\dim L^1 = n^2$. Эти группы действуют в касательных пространствах 1-го и 2-го порядков T^1 и T^2 к многообразию V_n в фиксированной точке, причем

$$\dim T^1 = n,\ \dim T^2 = \frac{1}{2}n(n+3).$$

Утверждение 1. Над гладким многообразием V_n имеется главное расслоение кореперов 2-го порядка $L^2(V_n)$ со структурными уравнениями (1, 2, 4), базой которого служит многообразие V_n с уравнениями (1) и типовым слоем — линейной группой 2-го порядка $L^2 > L^1$, где символ > обозначает наличие факторгруппы L^1 в группе L^2.

2. Линейная связность. Зададим линейную [3] связность (в классической терминологии — аффинную связность [4]) в главном расслоении линейных кореперов $L^1(V_n)$ способом Лаптева — Лумисте [5; 6] с помощью форм

$$\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k, \tag{6}$$

где Γ^i_{jk} — некоторые функции. Внешние дифференциалы этих форм найдем с помощью структурных уравнений (1, 2):

$$d\tilde{\omega}^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge (d\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k + \omega^i_{jk}). \tag{7}$$

Преобразуем внешние произведения слоевых форм:

$$\omega^k_j \wedge \omega^i_k = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \Gamma^k_{jl}\omega^l \wedge \omega^i_k + \omega^k_j \wedge \Gamma^i_{km}\omega^m - \Gamma^k_{jl}\omega^l \wedge \Gamma^i_{km}\omega^m.$$

Подставим эти выражения в уравнения (7):

$$d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \omega^k \wedge (\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk}) - \Gamma^m_{jk}\omega^k \wedge \Gamma^i_{ml}\omega^l, \tag{8}$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k .$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [6, с. 83] зададим поле объекта линейной (в классической терминологии — аффинной) связности

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l . \tag{9}$$

Подставим дифференциальные уравнения (9) в структурные уравнения (8):

$$d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l , \tag{10}$$

где компоненты объекта кривизны линейной связности выражаются по формуле

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]}, \tag{11}$$

причем альтернирование здесь и в дальнейшем выполняется по крайним индексам в квадратных скобках.

Внесем формы связности (6) в структурные уравнения (1) многообразия V_n:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k , \tag{12}$$

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}, \tag{13}$$

где T^i_{jk} — объект кручения линейной связности.

Утверждение 2. *Линейная связность в расслоении линейных корепреров $L^1(V_n)$ задается формами (6), определенными с помощью компонент объекта линейной связности Γ^i_{jk}, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9). Формы линейной связности (6) входят в структурные уравнения*

(10, 12), содержащие объекты кручения T^i_{jk} *(13) и кривизны* R^i_{jkl} *(11), причем последний выражается не только через объект связности* Γ^i_{jk}*, но и через его пфаффовы производные* Γ^i_{jkl}.

3. Тензорность объектов кручения и кривизны. В дифференциальных уравнениях (9) раскроем действие дифференциального оператора Δ и проальтернируем результат:

$$d\Gamma^i_{[jk]} + \Gamma^l_{[jk]}\omega^i_l - \Gamma^i_{l[k}\omega^l_{j]} - \Gamma^i_{[jl}\omega^l_{k]} + \omega^i_{[jk]} = \Gamma^i_{[jk]l}\omega^l. \qquad (14)$$

Раскроем альтернирование в двух слагаемых и используем выражение кручения (13):

$$-\Gamma^i_{l[k}\omega^l_{j]} - \Gamma^i_{[jl}\omega^l_{k]} = -T^i_{lk}\omega^l_j - T^i_{jl}\omega^l_k.$$

Уравнения (14) примут вид

$$\Delta T^i_{jk} + \omega^i_{[jk]} = \Gamma^i_{[jk]l}\omega^l.$$

Для полуголономного [2] многообразия V_n имеем

$$\Delta T^i_{jk} = T^i_{jkl}\omega^l, \quad T^i_{jkl} = \Gamma^i_{[jk]l} - \lambda^i_{jkl}. \qquad (15)$$

В особом случае голономного [2] многообразия $\overset{0}{V}_n$ дифференциальные уравнения (15_1) сохраняют вид, но

$$\lambda^i_{jkl} = 0, \quad T^i_{jkl} = \Gamma^i_{[jk]l}.$$

Утверждение 3. *На полуголономном многообразии* V_n *объект кручения* T^i_{jk} *является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (15_1).

Следствие 1. На голономном многообразии $\overset{0}{V}_n$ пфаффовы производные T^i_{jkl} тензора кручения T^i_{jk} выражаются проще.

Определение 1. Если тензор кручения равен нулю: $T^i_{jk} = 0 \Leftrightarrow \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, то линейная связность без кручения называется также *симметрической*.

Запишем дифференцированные уравнения (9) подробно и продифференцируем их внешним образом с помощью структурных уравнений (1, 2, 4):

$$(\Delta\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{ml} - \Gamma^i_{mk}\omega^m_{jl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} + \omega^i_{jkl}) \wedge \omega^l = 0.$$

Разрешим эти квадратичные уравнения по лемме Картана и запишем результат в виде дифференциальных сравнений:

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{ml} - \Gamma^i_{mk}\omega^m_{jl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} + \omega^i_{jkl} \equiv 0 \pmod{\omega^m}.$$

Проальтернируем эти сравнения по индексам k, l, затем учтем выражения (3_2, 5_2):

$$\Delta\Gamma^i_{j[kl]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} - \Gamma^i_{m[k}\omega^m_{jl]} \equiv 0\,. \qquad (16)$$

С помощью дифференциальных уравнений (9) получим

$$\Delta\Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + \Gamma^i_{m[l}\omega^m_{jk]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} \equiv 0\,. \qquad (17)$$

Согласно формуле (11) вычтем из сравнений (16) сравнения (17), тогда

$$\Delta R^i_{jkl} \equiv 0 \pmod{\omega^m}. \qquad (18)$$

Утверждение 4. *На полуголономном многообразии V_n объект кривизны R^i_{jkl} является тензором с дифференциальными сравнениями (18) для его компонент.*

Следствие 2. На голономном многообразии $\overset{0}{V}_n$ сравнения (18) для компонент тензора кривизны R^i_{jkl} не изменяются.

4. Классы аффинных и проективных связностей. Рассмотрим разные свертки объекта несимметрической линейной связности

$$\overset{1}{\Gamma}_j = \Gamma^i_{ji}, \quad \overset{2}{\Gamma}_k = \Gamma^i_{ik}, \tag{19}$$

которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta \overset{1}{\Gamma}_j + \overset{1}{\omega}_j = \overset{1}{\Gamma}_{jl}\, \omega^l, \quad \Delta \overset{2}{\Gamma}_k + \overset{2}{\omega}_k = \overset{2}{\Gamma}_{kl}\, \omega^l;$$

$$\overset{1}{\omega}_j = \omega^i_{ji}, \quad \overset{1}{\Gamma}_{jl} = \Gamma^i_{jil}, \quad \overset{2}{\omega}_k = \omega^i_{ik}, \quad \overset{2}{\Gamma}_{kl} = \Gamma^i_{ikl}.$$

Определение 2. В зависимости от вида компонент объекта линейной связности Γ^i_{jk} и их сверток $\overset{a}{\Gamma}_i$ (19) используем следующие названия:

1) $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ — *симметрическая* (иначе говоря, без кручения) линейная связность;

2) $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$ — *полусимметрическая* (ср. [4]) линейная связность;

3) $\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}$, $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$ — *существенно полусимметрическая* линейная связность;

4) $\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}$, $\overset{1}{\Gamma}_i \neq \overset{2}{\Gamma}_i$ — *общая* линейная связность.

Утверждение 5. *Линейные связности разбиваются на три класса: симметрические, существенно полусимметрические и общие связности.*

Введем два аналога объекта классической проективной связности:

$$\overset{a}{\Pi}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overset{a}{\Gamma}_k + \delta^i_k \overset{a}{\Gamma}_j) \quad (a = 1, 2). \tag{20}$$

Это непосредственное обобщение формулы для объекта классической проективной связности, построенной с помощью объекта симметрической аффинной связности. Библиография по истории понятия проективной связности приведена в работе [6]. Формула (20) дает

Утверждение 6. *Если* $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$, *то получается единственное обобщение объекта классической проективной связности, т. к.* $\overset{1}{\Pi}{}^i_{jk} = \overset{2}{\Pi}{}^i_{jk}$, *если* $\overset{1}{\Gamma}_i \neq \overset{2}{\Gamma}_i$, *то имеем два обобщения с объектами* $\overset{a}{\Pi}{}^i_{jk}$.

Из формулы (20) следуют четыре формулы:

$$\overset{1}{\Pi}{}^i_{ji} = 0, \quad \overset{2}{\Pi}{}^i_{ji} = \overset{1}{\Gamma}_j - \overset{2}{\Gamma}_j, \quad \overset{1}{\Pi}{}^i_{ik} = \overset{2}{\Gamma}_k - \overset{1}{\Gamma}_k, \quad \overset{2}{\Pi}{}^i_{ik} = 0. \qquad (21)$$

Первое и последнее равенства показывают непосредственные обобщения объекта классической проективной связности. Второе и третье выражения суть разности двух сверток объекта линейной связности, которые образуют тензоры в силу равенств (3_2). Это обеспечивает инвариантность их обращения в нуль, то есть возможность равенств $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$.

Вывод 1. *Общая линейная связность* $(\Gamma^i_{jk} \neq \Gamma^i_{kj}, \quad \overset{1}{\Gamma}_i \neq \overset{2}{\Gamma}_i)$ *порождает две проективные связности с объектами* $\overset{a}{\Pi}{}^i_{jk}$. *Если линейная связность полусимметрическая* $(\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i)$, *в частности симметрическая* $(\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj})$, *то объекты порожденных проективных связностей совпадают:* $\overset{1}{\Pi}{}^i_{jk} = \overset{2}{\Pi}{}^i_{jk}$. *Иначе говоря, классическая аффинная связность и полусимметрическая линейная связность индуцируют единственные проективные связности.*

5. Метрики, порожденные общей линейной связностью. Объект общей аффинной связности и две его свертки позволяют построить объекты

$$\overset{ab}{\Pi}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overset{a}{\Gamma}_k + \delta^i_k \overset{b}{\Gamma}_j) \quad (a, b = 1, 2), \qquad (22)$$

обобщающие объекты (20), которые получаются при $a = b$. Рассмотрим два объекта $\overset{ab}{\Pi}$ $(a \neq b)$, которые назовем объектами обобщенных проективных связностей.

Компоненты объекта $\overset{12}{\Pi}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta \overset{12}{\Pi}{}^i_{jk} + \omega^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overset{1}{\omega}_k + \delta^i_k \overset{2}{\omega}_j) \equiv 0.$$

Свернем их двумя способами. Обозначим $\overset{12}{\Pi}_j = \overset{12}{\Pi}{}^i_{ji}$, тогда

$$\Delta \overset{12}{\Pi}_j + \frac{n}{n+1}(\overset{1}{\omega}_j - \overset{2}{\omega}_j) \equiv 0.$$

При другом сворачивании $\overset{12}{\pi}_k = \overset{12}{\Pi}{}^i_{ik}$ имеем

$$\Delta \overset{12}{\pi}_k + \frac{n}{n+1}(\overset{2}{\omega}_k - \overset{1}{\omega}_k) \equiv 0.$$

Аналогично получаем

$$\Delta \overset{21}{\Pi}{}^i_{jk} + \omega^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j \overset{2}{\omega}_k + \delta^i_k \overset{1}{\omega}_j) \equiv 0.$$

При $i = k$ величины $\overset{21}{\Pi}_j = \overset{21}{\Pi}{}^i_{ji}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta \overset{21}{\Pi}_j + \frac{1}{n+1}(\overset{1}{\omega}_j - \overset{2}{\omega}_j) \equiv 0.$$

При $i=j$ имеем $\overset{21}{\pi}_k = \overset{21}{\Pi}{}^i_{ik}$, причем

$$\Delta \overset{21}{\pi}_k + \frac{1}{n+1}(\overset{2}{\omega}_k - \overset{1}{\omega}_k) \equiv 0.$$

Следующие линейные комбинации компонент всевозможных пар из четырех квазитензоров $\overset{12}{\Pi}_i$, $\overset{12}{\pi}_i$, $\overset{21}{\Pi}_i$, $\overset{21}{\pi}_i$, являющихся свертками аналогов объектов двух несимметричных линейных связностей, образуют шесть одновалентных тензоров:

$$\overset{1}{G}_i = \overset{12}{\Pi}_i + \overset{12}{\pi}_i, \quad \overset{2}{G}_i = \overset{12}{\Pi}_i - n\overset{21}{\Pi}_i, \quad \overset{3}{G}_i = \overset{12}{\Pi}_i + n\overset{21}{\pi}_i,$$

$$\overset{4}{G}_i = \overset{12}{\pi}_i + n\overset{21}{\Pi}_i, \quad \overset{5}{G}_i = \overset{12}{\pi}_i - n\overset{21}{\pi}_i, \quad \overset{6}{G}_i = \overset{21}{\Pi}_i + \overset{21}{\pi}_i.$$

Каждая из шести совокупностей удовлетворяет дифференциальным уравнениям следующего вида:

$$\Delta G_i = G_{ij}\omega^j.$$

Замыкая их, найдем

$$(\Delta G_{ij} - G_k\omega^k_{ij}) \wedge \omega^j = 0.$$

Разрешая эти квадратичные уравнения по лемме Картана, получим дифференциальные сравнения

$$\Delta G_{ij} - G_k\omega^k_{ij} \equiv 0.$$

Введем величины

$$\hat{G}_{ij} = G_{ij} + G_k\Gamma^k_{ij},$$

которые удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta\hat{G}_{ij} \equiv 0,$$

поэтому образуют тензор, который не является симметрическим. Наконец, в результате симметрирования получим метрику

$$g_{ij} = \hat{G}_{(ij)}, \quad \Delta g_{ij} \equiv 0.$$

Теорема. *Поле объекта общей линейной связности порождает шесть метрических тензоров.*

Замечание. Метрики g_{ij} могут быть неопределенными и вырожденными.

Пусть линейная связность полусимметрична, то есть $\overset{1}{\Gamma}_i = \overset{2}{\Gamma}_i$. Тогда обобщение (22) формулы (20) невозможно, так как два объекта $\overset{12}{\Pi}$, $\overset{21}{\Pi}$ вырождаются в один объект $\overset{1}{\Pi} = \overset{2}{\Pi}$. Но из объектов $\overset{12}{\Pi}$, $\overset{21}{\Pi}$ построены тензоры G_i, продолжения которых привели к метрикам g_{ij}. Значит, в случае полусимметрической линейной связности нельзя построить метрики. Тем более это нельзя сделать для симметрической линейной связности.

Утверждение 7. *В пространстве полусимметрической (в частности, симметрической) линейной связности метрика не существует.*

Вывод 2. *Обратная задача Леви-Чивиты, то есть построение метрического тензора по заданной линейной связности, решена следующим образом: 1) в общем случае, когда связность не является полусимметрической, существует шесть метрик; 2) в особом случае, когда связность полусимметрическая (в частности, симметрическая), решения не существует.*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

3. *Номидзу К.* Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960.

4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. 2-е изд., испр. М., 1976.

5. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюз. матем. съезда, 1961. Т. 2. Л., 1964. С. 226—233.

6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

7. *Veblen O.* Generalized projective geometry // J. Lond. Math. Soc. 1929. Vol. 4. P. 140—160.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53B05, 53B10, 53B20

Yu. I. Shevchenko[1], *A. V. Vyalova*[2]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[2] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
[1] ESkrydlova@kantiana.ru, [2] vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-14

Metrics of a space with linear connection which is not semi-symmetric

Submitted on May 08, 2022

It is well-known Levi-Chivita's construction of object for affine connection (in modern terminology — linear connection) by the field of non-degenerate metric on a smooth manifold. An inverse problem (a construction of metric by given linear connection) is solved ambiguously, besides, the metric may turn out to be degenerate and indefinite. On the one hand, two metrics differing in a sign are obviously build: by curvature tensor contractionwith subsequent symmetrization. On the other hand, Vranceanu's metric is a double contraction of multiplication of a torsion tensor's components. In this paper Levi-Chivita's inverse problem is solved in other way using the field of connection object.

It is proved that in the general case, when the linear connection is not semi-symmetric, six metrics can be constructed. In the special case, when the linear connection is semi-symmetric (in particular, torsion-free), the constructed metrics vanish.

The investigation is done on a semi-holonomic smooth manifold by means of two prolongation its structure equations.

Keywords: metric, linear (affine) connection, classic projective connection, torsion and curvature tensors

References

1. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

2. *Shevchenko, Yu. I.:* The equipment of holonomic and nonholonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

3. *Nomizu, K.:* Lie Groups and Differential Geometry. Moscow (1960).

4. *Norden, A.P.:* Spaces with an affine connection. Moscow (1976).

5. *Laptev, G.F.:* Manifolds, imbedded in generalized spaces. Tr. 4th All-Union Math. Congr., 1961. Leningrad, 2 (1964). P. 226—233.

6. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

7. *Veblen, O.:* Generalized projective geometry. J. Lond. Math. Soc., 4, 140—160 (1929).

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

Editorial Board

Editor-in-Chief:

V. Malakhovsky (Kaliningrad, Russia)

Members:

Y. Shevchenko, Executive Secretary (Kaliningrad, Russia)
V. Balan (Bucharest, Romania);
V. Balashchenko (Minsk, Belarus);
S. Bácsó (Debrecen, Hungary);
O. Belova (Kaliningrad, Russia);
R. Beshimov (Tashkent, Uzbekistan);
T. Bokelavadze (Kutaisi, Georgia);
L. S. Velimirović (Niš, Serbia)
I. Hinterleitner (Brno, Czech Republic);
V. Igoshin (Nizhni Novgorod, Russia);
B. Kırık Rácz (Istanbul, Turkey);
M. Kretov (Kaliningrad, Russia);
J. Mikeš (Olomouc, Czech Republic);
V. Mirzoyan (Yerevan, Armenia);
P. T. Nagy (Budapest, Hungary);
K. Polyakova (Kaliningrad, Russia);
Yu. Popov (Kaliningrad, Russia);
V. Rovenski (Haifa, Israel);
L. Sabinina (Cuernavaca, Mexico)
S. Stepanov (Moscow, Russia);
G. Falcone (Palermo, Italy);
Á. Figula (Debrecen, Hungary);
G. S. Hall (Aberdeen, Scotland, UK);
A. Shelekhov (Moscow, Russia).

Abstracted in:
Zentralblatt für Mathematik, Mathematical Reviews

ISSN: 0321-4796

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia)

Put to the Press:
October 26, 2022

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY
OF MANIFOLDS OF FIGURES

2022

№ 53

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 26.10.2022 г.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 10,1
Тираж 300 экз. (1-й завод 50 экз.). Заказ 115

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236001, г. Калининград, ул. Гайдара, 6