ISSN 0321-4796

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ИММАНУИЛА КАНТА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 51

Межвузовский тематический сборник
научных трудов

Издательство Балтийского федерального университета
им. Иммануила Канта
2020

УДК 514.76
ББК 22.151.61я43
Д503

Д503 **Дифференциальная геометрия многообразий фигур :** межвуз. темат. сб. науч. тр. — Калининград : Изд-во БФУ им. И. Канта, 2020. — Вып. 51. — 170 с. — Библиогр. 123 назв.

В сборнике, подготовленном секцией геометрии научного семинара Института физико-математических наук и информационных технологий, публикуются статьи, посвященные следующим разделам: римановы и субримановы многообразия, структуры на многообразиях, расслоения и связности высших порядков, тензоры и квазитензоры кривизны-кручения, свойства плоскостей в пространстве проективной связности, распределения в аффинном и проективном пространствах, ассоциированные и внутренние связности, теория поверхностей, отображения многообразий фигур, теория чисел и алгебр Ли.

Сборник входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.

УДК 514.75(08)
ББК 22.151.61я43

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 514.76

Г. А. Банару[1]
[1] Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-1

О 6-мерных АН-подмногообразиях класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ алгебры Кэли

Установлено, что 6-мерное $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-подмногообразие алгебры октав, через каждую точку которого проходит гиперповерхность с квазисасакиевой структурой, является почти келеровым многообразием.

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие, классы Грея — Хервеллы, почти контактная метрическая структура, квазисасакиева структура, алгебра Кэли.

1. Многие специалисты считают, что опубликованная 40 лет назад статья [1] А. Грея и Л. М. Херверллы — самая значительная работа в области геометрии почти эрмитовых многообразий. Основной результат этой работы — выделение 16 классов (хотя правильнее было бы сказать — типов) почти эрмитовых структур.

Классы Грея — Херверллы изучены крайне неравномерно. Наименее изученными являются так называемые большие классы: $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. Многообразия класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ с 80-х годов прошлого века обычно исследовались под названием полукелеровых (semi-Kählerian, SK-) многообразий, за многообразиями классов

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.

$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ и $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ закрепились названия G_1- и G_2-многообразий соответственно. У многообразий класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ нет особого названия из-за того, что они практически никогда не изучались отдельно, то есть класс почти эрмитовых многообразий $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ — наименее исследованный среди всех 16 классов Грея — Хервеллы. При этом он включает в себя келеровы, приближенно келеровы, почти келеровы, локально конформные келеровы и квазикелеровы многообразия, а также многообразия Вайсмана — Грея.

В настоящей заметке мы рассматриваем почти эрмитову структуру класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, индуцированную на 6-мерных подмногообразиях алгебры октав.

2. Под почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на многообразии четной размерности M^{2n} понимают пару $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$, состоящую из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$, которые согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль всех гладких векторных полей на многообразии M^{2n} [1]. Для каждой AH-структуры $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} определяется фундаментальная (или келерова [1]) форма:

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура принадлежит классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ [1], если

$$\nabla_X (F)(Y, Z) + \nabla_{JX} (F)(JY, Z) =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\{\langle X, Y \rangle \delta F(Z) - \langle X, Z \rangle \delta F(Y) - \langle X, JY \rangle \delta F(JZ)\}, X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Напомним [2], что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, состоящая из четырех тензорных полей на этом многообразии, в том случае, когда для нее выполняются условия

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Самыми важными и известными примерами почти контактной метрической структуры являются косимплектическая и слабо косимплектическая структуры, структуры Кенмоцу и Сасаки, а также их многочисленные обобщения. В нашей заметке речь пойдет о квазисасакиевой структуре, которая определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой формой $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ и дополнительным равенством

$$N_\Phi+\frac{1}{2}d\eta\otimes\xi=0,$$

где N_Φ — тензор Нейенхейса оператора Φ.

3. В 60-х годах прошлого века А. Грей приступил к исследованию почти эрмитовых структур, индуцированных так называемыми 3-векторными произведениями в алгебре Кэли на ее 6-мерных подмногообразиях (см., например, [3]). В 1980 году В. Ф. Кириченко опубликовал работу [4], где представлены структурные уравнения Картана произвольной почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$d\omega^a=\omega_b^a\wedge\omega^b+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b}D_h^{c]}\omega_b\wedge\omega_c+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c\wedge\omega_b;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b}D_{c]}^h\omega^b \wedge \omega_c + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b;$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2}\delta_{bg}^{ah}D_{h[k}D^g{}_{j]} + \sum_\varphi T^\varphi_{\hat{a}[k}T^\varphi_{j]b}\right)\omega^k \wedge \omega^j.$$

Здесь $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три;

$$\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a\delta_g^h - \delta_g^a\delta_b^h;$$

$$D_{cj} = \pm T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}j} = \pm T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7,$$

где $\{T_{ij}^\phi\}$ — компоненты конфигурационного тензора; $\varphi = 7, 8$; $a, b, c, d, h = 1, 2, 3$; $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $\hat{a} = a + 3$.

Используя условия принадлежности произвольной почти эрмитовой структуры классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ [5; 6], мы получаем такое

Предложение 1. *Почти эрмитова структура на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли принадлежит классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ тогда и только тогда, когда*

$$D_{ab} = D_{\hat{a}\hat{b}} = 0. \tag{1}$$

Условия (1) позволяют получить структурные уравнения почти эрмитовой структуры класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, индуцированной на 6-мерном подмногообразии алгебры Кэли.

Предложение 2. *Структурные уравнения Картана почти эрмитовой структуры, индуцированной на 6-мерном $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-подмногообразии алгебры октав, имеют следующий вид:*

$$d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b}D_h{}^{c]}\omega_b \wedge \omega_c;$$

$$d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b}D^h{}_{c]}\omega^b \wedge \omega^c; \tag{2}$$

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + i\,T^7_{b[d}D_{c]\hat{a}}\omega^c \wedge \omega^d +$$
$$+(-\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg}\,D_{h\hat{c}}D_{\hat{g}d} + T^8_{\hat{a}d}T^8_{\hat{c}b} + T^7_{\hat{a}d}T^7_{\hat{c}b} - 2\,T^7_{\hat{a}\hat{c}}T^7_{bd})\,\omega_c \wedge \omega^d - i\,T^7_{\hat{a}[\hat{d}}D_{\hat{c}]b}\,\omega_c \wedge \omega_d.$$

Обратим внимание на то, что уравнения (2) в точности соответствуют структурным уравнениям квазикелеровой структуры [7]. Отметим, что в работе [8] Л.В. Степановой представлено большое количество результатов о геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей квазикелеровых многообразий. Эти результаты можно теперь применить и к 6-мерным АН-подмногообразиям класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ алгебры Кэли.

Предложение 3. *Всякое 6-мерное* $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$*-подмногообразие алгебры октав, через каждую точку которого проходит гиперповерхность с квазисасакиевой структурой, является почти келеровым многообразием (многообразием класса* W_2*).*

Предложение 4. *Всякое 6-мерное* $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$*-подмногообразие алгебры октав, через каждую точку которого проходит* η*-квазиомбилическая гиперповерхность с квазисасакиевой структурой, является келеровым многообразием.*

Список литературы

1. *Gray A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.

2. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

3. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 1. P. 614—620.

4. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

5. *Банару М.Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1993.

6. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

7. *Banaru M.B.* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. Vol. 207, №3. P. 354—388.

8. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

G. A. Banaru[1]

[1] Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-1

On six-dimensional AH-submanifolds of class $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ in Cayley algebra

Submitted on March 12, 2020

Six-dimensional submanifolds of Cayley algebra equipped with an almost Hermitian structure of class $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ defined by means of three-fold vector cross products are considered. As it is known, the class $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ contains all Kählerian, nearly Kählerian, almost Kählerian, locally conformal Kählerian, quasi-Kählerian and Vaisman — Gray manifolds. The Cartan structural equations of the $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-structure on such six-dimensional submanifolds of the octave algebra are obtained. A criterion in terms of the configuration tensor for an arbitrary almost Hermitian structure on a six-dimensional submanifold of Cayley algebra to belong to the $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-class is established.

It is proved that if a six-dimensional $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-submanifold of Cayley algebra satisfies the quasi-Sasakian hypersurfaces axiom (i.e. a hypersurface with a quasi-Sasakian structure passes through every point of such submanifold), then it is an almost Kählerian manifold. It is also proved that a six-dimensional $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$-submanifold of Cayley algebra satisfies the eta-quasi-umbilical quasi-Sasakian hypersurfaces axiom, then it is a Kählerian manifold.

Keywords: almost Hermitian manifold, Gray — Hervella classes, almost contact metric structure, quasi-Sasakian structure, Cayley algebra.

References

1. *Gray, A., Hervella, L.M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

2. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

3. *Gray, A.:* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products. Tôhoku Math. J., 21, 614—620 (1969).

4. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).

5. *Banaru, M.B.:* Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. PhD thesis. Moscow (1993).

6. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, 1 (74), 23—32 (2014).

7. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci. (New York), **207**:3, 354—388 (2015).

8. *Stepanova, L.V.:* Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow (1995).

УДК 514.76

М. Б. Банару[1]
[1] *Смоленский государственный университет, Россия*
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-2

Об одном свойстве W_4-многообразий

Доказано, что квазисасакиева структура, индуцированная на вполне омбилической гиперповерхности W_4-многообразия, либо гомотетична сасакиевой структуре, либо является косимплектической структурой.

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие, W_4-многообразие, почти контактная метрическая структура, гиперповерхность.

1. Значение класса W_4 почти эрмитовых многообразий определяется прежде всего тем, что этот класс содержит все локально конформные келеровы (locally conformal Kählerian, LCK-) многообразия. При этом класс W_4 совпадает с классом LCK-многообразий для размерности не ниже шести [1]. Отметим, что W_4-многообразия изучали с разных точек зрения такие известнейшие геометры, как Альфред Грей (США), Изу Вайсман (Израиль) и Вадим Фёдорович Кириченко (Россия).

Данная статья продолжает работу автора, связанную с изучением почти контактных метрических структур на гиперповерхностях W_4-многообразий [2—5].

2. Напомним [1], что под почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии M^{2n} мы понимаем пару $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$,

---

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.

состоящую из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$, причем J и $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ должны удовлетворять условию

$$\langle JX, JY\rangle=\langle X, Y\rangle, \quad X, Y\in\aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии M^{2n}.

Пусть $\left(M^{2n}, \{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}\right)$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p\in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в выбранной точке p, а $\left\{J_p, g_p=\langle\cdot,\cdot\rangle\right\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\left\{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\right\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (А-реперы), устроены так:

$$(p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры в комплексификации касательного пространства, принадлежащие собственному значению оператора $i=\sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, принадлежащие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a}=a+n$.

Почти эрмитова структура на многообразии M^{2n} принадлежит классу W_4, если

$$\nabla_X(F)(Y,Z) = -\frac{1}{2(n-1)}\{\langle X,Y\rangle\delta F(Z)-\langle X,Z\rangle\delta F(Y)-$$
$$-\langle X,JY\rangle\delta F(JZ)+\langle X,JZ\rangle\delta F(JY)\}, \quad X,Y,Z\in\aleph(M^{2n}).$$

Здесь $F(X, Y)=\langle X, JY\rangle$ — фундаментальная форма почти эрмитовой структуры; через δ обозначен оператор кодифференцирования, через ∇ — риманова связность метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ [1].

На всякой ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} почти эрмитова многообразия M^{2n} индуцируется почти контактная метрическая структура [4; 6], понимаемая как система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика.

3. Структурные уравнения Картана (в А-репере) почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} в произвольном W_4-многообразии M^{2n} имеют следующий вид [2; 3; 5]:

$$d\omega^\alpha=\omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta+B^{\alpha\beta}{}_\gamma\omega^\gamma\wedge\omega_\beta+\left(\sqrt{2}B^{\alpha n}{}_\beta+i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta\wedge\omega+$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n+i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta\wedge\omega; \qquad (1)$$

$$d\omega_\alpha=-\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta+B_{\alpha\beta}{}^\gamma\omega_\gamma\wedge\omega^\beta+\left(\sqrt{2}B_{\alpha n}{}^\beta-i\sigma^\beta_\alpha\right)\omega_\beta\wedge\omega+$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^n-i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta\wedge\omega;$$

$$d\omega=\left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta-\sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha-2i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta\wedge\omega_\alpha+\left(B_{n\beta}{}^n+i\sigma_{n\beta}\right)\omega\wedge\omega^\beta+$$
$$+\left(B^{n\beta}{}_n-i\sigma^\beta_n\right)\omega\wedge\omega_\beta,$$

где $B^{ab}{}_c=-\frac{i}{2}J^a_{\hat b,c}$, $\quad B_{ab}{}^c=\frac{i}{2}J^{\hat a}_{b,\hat c}$.

Здесь через $\{\omega^{\alpha}\}, \{\omega_{\alpha}\}$ обозначены компоненты форм смещения $(\omega^{n} = \omega)$, через $\{\omega_{j}^{k}\}$ — компоненты форм римановой связности; а через $\{J_{k,m}^{j}\}$ обозначены компоненты ∇J. Отметим, что системы функций $\{B^{ab}{}_{c}\}$ и $\{B_{ab}{}^{c}\}$ являются компонентами тензоров Кириченко [6] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Здесь и далее $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$; $a, b, c = 1, \ldots, n$; $\hat{a} = a + n$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в W_4-многообразие M^{2n}.

Гиперповерхность W_4-многообразия является вполне омбилической в том и только том случае, если $\sigma_{ps} = \lambda g_{ps}$, $\lambda - const$, при этом гиперповерхность W_4-многообразия является вполне геодезической тогда и только тогда, когда матрица ее второй квадратичной формы будет нулевой. Принимая во внимание вид матрицы метрического тензора [4; 6]

$$\left(g_{ps}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \begin{matrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix} & I_{n-1} \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \hline I_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0} \end{array}\right),$$

мы можем сделать вывод о том, что «блоки» $(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$ и $(\sigma_{\alpha\hat{\beta}})$ матрицы второй квадратичной формы погружения вполне омбилической гиперповерхности N^{2n-1} в W_4-многообразие M^{2n} имеют скалярный вид: $\sigma_{\hat{\alpha}\beta} = i\,\delta_{\beta}^{\alpha}$.

Сопоставляя уравнения (1) с известными [1] структурными уравнениями квазисасакиевой структуры

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha}_{\beta}\omega \wedge \omega^{\beta};$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} - B^{\beta}_{\alpha}\omega \wedge \omega_{\beta};$$

$$d\omega = 2B^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha},$$

структуры, гомотетичной сасакиевой,

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} - i\lambda\,\delta^{\alpha}_{\beta}\,\omega \wedge \omega^{\beta};$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + i\lambda\,\delta^{\beta}_{\alpha}\,\omega \wedge \omega_{\beta};$$

$$d\omega = -2i\lambda\,\omega^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha},$$

а также косимплектической структуры

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta},$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta},$$

$$d\omega = 0,$$

мы приходим к такому результату.

Теорема. *Квазисасакиева структура, индуцированная на вполне омбилической гиперповерхности* N^{2n-1} W_4*-многообразия* M^{2n}, *является либо гомотетичной сасакиевой структуре, либо косимплектической структурой. При этом структура будет косимплектической в том и только том случае, когда гиперповерхность является вполне геодезическим подмногообразием многообразия* M^{2n}.

Учитывая упомянутый выше факт о том, что класс W_4 почти эрмитовых многообразий содержит все LCK-многообразия, мы получаем такое

Следствие 1. Квазисасакиева структура, индуцированная на вполне омбилической гиперповерхности N^{2n-1} всякого

LCK-многообразия M^{2n}, является либо гомотетичной сасакиевой структуре, либо косимплектической структурой. При этом структура будет косимплектической в том и только том случае, когда гиперповерхность является вполне геодезическим подмногообразием LCK-многообразия M^{2n}.

С учетом результатов В. Ф. Кириченко о строении косимплектических многообразий [6] мы приходим еще к одному результату.

Следствие 2. Пусть N^{2n-1} — вполне геодезическая гиперповерхность W_4-многообразия M^{2n}, на которой индуцирована квазисасакиева структура. Тогда гиперповерхность N^{2n-1} локально эквивалентна произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

2. *Банару М. Б.* W_4-многообразия и аксиома косимплектических гиперповерхностей // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 5. 34—37.

3. *Банару М. Б.* О некоторых почти контактных метрических гиперповерхностях W_4-многообразий // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 12—18.

4. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. № 1. С. 67—70.

5. *Banaru M. B., Banaru G. A., Melekhina T. L.* A note on almost contact metric 2- and 3-hypersurfaces in W_4-manifolds // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2019. № 1 (89). P. 103—108.

6. *Banaru M. B., Kirichenko V. F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. Vol. 207, iss. 4. P. 513—537.

M. B. Banaru[1]
[1] Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-2

On a property of W_4-manifolds

Submitted on March 12, 2020

The properties of almost Hermitian manifolds belonging to the Gray — Hervella class W_4 are considered. The almost Hermitian manifolds of this class were studied by such outstanding geometers like Alfred Gray, Izu Vaisman, and Vadim Feodorovich Kirichenko.

Using the Cartan structural equations of an almost contact metric structure induced on an arbitrary oriented hypersurface of a W_4-manifold, some results on totally umbilical and totally geodesic hypersurfaces of W_4-manifolds are presented. It is proved that the quasi-Sasakian structure induced on a totally umbilical hypersurface of a W_4-manifold is either homothetic to a Sasakian structure or cosymplectic. Moreover, the quasi-Sasakian structure is cosymplectic if and only if the hypersurface is a totally geodesic submanifold of the considered W_4-manifold.

From the present result it immediately follows that the quasi-Sasakian structure induced on a totally umbilical hypersurface of a locally conformal Kählerian (LCK-) manifold also is either homothetic to a Sasakian structure or cosymplectic.

Keywords: almost Hermitian manifold, W_4-manifold, almost contact metric structure, hypersurface.

References

1. *Kirichenko, V. F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

2. *Banaru, M. B.:* The axiom of cosymplectic surfaces and W_4-manifolds // Moscow University Math. Bull., **70**:5, 213—215 (2015).

3. *Banaru, M. B.:* On some almost contact metric hypersurfaces of W_4-manifolds. DGMF. Kaliningrad. 49, 12—18 (2018).

4. *Banaru, M. B.:* On almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4-manifolds. Moscow University Math. Bull., **73**:1, 38—40 (2018).

5. *Banaru, M. B., Banaru, G. A., Melekhina, T. L.:* A note on almost contact metric 2- and 3-hypersurfaces in W_4-manifolds. Buletinul Academiei Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, 1 (89), 103—108 (2019).

6. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci. (New York), **207**:4, 513—537 (2015).

УДК 514.76

К. В. Башашина[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
KBashashina@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-3

Приклеенная линейная связность на поверхности проективного пространства

В многомерном проективном пространстве рассмотрена поверхность как многообразие центрированных плоскостей. Над этим многообразием возникает приклеенное расслоение линейных кореперов, которое не является главным расслоением. Задание связности в таком расслоении превращает его в пространство приклеенной линейной связности. Доказано, что объект кривизны является тензором. Найдено условие, при котором пространство приклеенной линейной связности превращается в пространство проективной связности Картана.

Ключевые слова: поверхность проективного пространства, приклеенное расслоение, линейная связность, приклеенная линейная связность, проективная связность Картана, тензор кривизны.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_I\}$ $(I, J, K = \overline{0, n})$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J . \tag{1}$$

Поступила в редакцию 09.05.2020 г.

Структурные уравнения неэффективно действующей в пространстве P_n линейной группы $GL(n+1)$ запишем в виде

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I . \qquad (2)$$

В пространстве P_n рассмотрим m-мерную поверхность X_m как семейство касательных плоскостей. Произведем специализацию подвижного репера $\{A_0, A_i, A_\alpha\}$ $(i,... = \overline{1, m}$; $\alpha, ... = \overline{m+1, n})$, помещая вершину A_0 в точку поверхности X_m, вершины A_i — в касательную плоскость T_m, а вершины A_α — вне касательной плоскости.

Перепишем формулы (1) с учетом разбиения индексов:

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^i A_i + \omega_0^\alpha A_\alpha,$$
$$dA_i = \omega_i^0 A_0 + \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha,$$
$$dA_\alpha = \omega_\alpha^0 A_0 + \omega_\alpha^i A_i + \omega_\alpha^\beta A_\beta.$$

Вершина A_0 является точкой касания плоскости T_m к поверхности X_m^0, описанной этой вершиной; значит, ее бесконечно малое перемещение лежит в T_m: $dA_0 \in T_m$, следовательно

$$\omega_0^\alpha = 0 . \qquad (3)$$

Замыкая это уравнение и разрешая по лемме Картана, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \ b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \ \omega^i = \omega_0^i . \qquad (4)$$

Уравнения (3, 4_1) определяют поверхность X_m в заданном репере.

Продолжая уравнения (4_1), найдем дифференциальные уравнения на функции b_{ij}^α :

$$\Delta b_{ij}^\alpha + b_{ij}^\alpha \omega_0^0 = b_{ijk}^\alpha \omega^k, \ b_{ijk}^\alpha = b_{ikj}^\alpha = b_{jik}^\alpha , \qquad (5)$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta b_{ij}^{\alpha} = db_{ij}^{\alpha} - b_{ik}^{\alpha}\omega_j^k - b_{kj}^{\alpha}\omega_i^k + b_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}.$$

Из уравнений (5_1) видно, что объект b_{ij}^{α} является тензором и называется основным тензором поверхности (см., напр., [1, с. 170]).

Из структурных уравнений (2) с учетом уравнений (3, 4_1) получим

$$d\omega^i = \omega^j \wedge (\omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0), \tag{6}$$

$$d\omega_{j'}^{i'} = \omega_{j'}^{k'} \wedge \omega_{k'}^{i'} + \omega^k \wedge \omega_{j'k}^{i'} \ \ (i', j', k' = \overline{0, m}), \tag{7}$$

где $\omega_{j'k}^{i'} = b_{j'k}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{i'}\ (b_{0k}^{\alpha} = 0)$.

Эти уравнения аналогичны структурным уравнениям главного расслоения линейных кореперов $L_{(m+1)^2}(X_m)$ над поверхностью X_m с типовым слоем — линейной группой

$$L_{(m+1)^2} = GL(m+1).$$

Однако, поскольку m базисных форм ω^i входят в совокупность форм $\omega_{j'}^{i'}$, будем говорить о приклеенном расслоении линейных кореперов, которое обозначим $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$.

Применим способ Лаптева — Лумисте [2, с. 62, 82; 3] задания связности в главном расслоении для определения связности в приклеенном расслоении $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$:

$$\widetilde{\omega}_{j'}^{i'} = \omega_{j'}^{i'} - \Pi_{j'k}^{i'}\omega^k. \tag{8}$$

Найдем внешние дифференциалы этих форм, используя уравнения (6, 7):

$$d\widetilde{\omega}_{j'}^{i'} = \widetilde{\omega}_{j'}^{k'} \wedge \widetilde{\omega}_{k'}^{i'} + \omega^k \wedge (d\Pi_{j'k}^{i'} - \Pi_{j'l}^{i'}\omega_k^l - \Pi_{l'k}^{i'}\omega_{j'}^{l'} + \Pi_{j'k}^{l'}\omega_{l'}^{i'} +$$
$$+ \Pi_{j'k}^{i'}\omega_0^0 + \widetilde{\omega}_{j'k}^{i'}) - \Pi_{j'k}^{m'}\Pi_{m'l}^{i'}\omega^k \wedge \omega^l.$$

Пусть компоненты $\Pi^{i'}_{j'k}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\Pi^{i'}_{j'k} + \Pi^{i'}_{j'k}\omega^0_0 + \omega^{i'}_{j'k} = \Pi^{i'}_{j'kl}\omega^l . \tag{9}$$

Структурные уравнения форм приклеенной связности окончательно запишем в виде

$$d\tilde{\omega}^{i'}_{j'} = \tilde{\omega}^{k'}_{j'} \wedge \tilde{\omega}^{i'}_{k'} + R^{i'}_{j'kl}\omega^k \wedge \omega^l , \tag{10}$$

где компоненты объекта кривизны выражаюся по формулам

$$R^{i'}_{j'kl} = \Pi^{i'}_{j'[kl]} - \Pi^{m'}_{j'[k}\Pi^{i'}_{m'l]} , \tag{11}$$

причем по крайним индексам в скобках производится альтернирование.

Для продолжения уравнения (9) найдем внешние дифференциалы форм $\omega^{i'}_{j'k}$:

$$d\omega^{i'}_{j'k} = d(b^{\alpha}_{j'k}\omega^{i'}_{\alpha}) = db^{\alpha}_{j'k} \wedge \omega^{i'}_{\alpha} + b^{\alpha}_{j'k}(\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega^{i'}_{\beta} + \omega^{m'}_{\alpha} \wedge \omega^{i'}_{m'}) =$$
$$= (b^{\alpha}_{j'm}\omega^m_k + b^{\alpha}_{m'k}\omega^{m'}_{j'} - b^{\beta}_{j'k}\omega^{\alpha}_{\beta} + b^{\alpha}_{j'kl}\omega^l) \wedge \omega^{i'}_{\alpha} +$$
$$+ b^{\alpha}_{j'k}\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega^{i'}_{\beta} + b^{\alpha}_{j'k}\omega^{m'}_{\alpha} \wedge \omega^{i'}_{m'}.$$

Приведем подобные слагаемые и воспользуемся обозначениями для трехиндексных форм ω:

$$d\omega^{i'}_{j'k} = -\underbrace{b^{\alpha}_{j'k}\omega^{i'}_{\alpha}}_{\omega^{i'}_{j'm}} \wedge \omega^m_k - \underbrace{b^{\alpha}_{m'k}\omega^{i'}_{\alpha}}_{\omega^{i'}_{m'k}} \wedge \omega^{m'}_{j'} + \underbrace{b^{\alpha}_{j'k}\omega^{m'}_{\alpha}}_{\omega^{m'}_{j'k}} \wedge \omega^{i'}_{m'} + \omega^l \wedge \underbrace{b^{\alpha}_{j'kl}\omega^{i'}_{\alpha}}_{\omega^{i'}_{j'kl}}.$$

Окончательно имеем

$$d\omega^{i'}_{j'k} = \omega^{m'}_{j'k} \wedge \omega^{i'}_{m'} - \omega^{i'}_{m'k} \wedge \omega^{m'}_{j'} - \omega^{i'}_{j'm} \wedge \omega^m_k + \omega^m \wedge \omega^{i'}_{j'km},$$

где $\omega^{i'}_{j'km} = b^{\alpha}_{j'km}\omega^{i'}_{\alpha}$, $\omega^{i'}_{j'[km]} = 0$.

Уравнения на продолжения компонент объекта связности Π имеют вид:

$$\Delta\Pi^{i'}_{j'kl} + 2\Pi^{i'}_{j'kl}\omega^0_0 - \Pi^{i'}_{m'k}\omega^{m'}_{j'l} - \Pi^{i'}_{j'm}\omega^m_{kl} + \Pi^{m'}_{j'k}\omega_{m'l}^{i'} + \\ + \Pi^{i'}_{j'k}\omega^0_l + \Pi^{i'}_{j'l}\omega^0_k + \omega_{j'kl}^{i'} = \Pi^{i'}_{j'klm}\omega^m. \qquad (12)$$

Используя формулы (9, 11, 12), найдем дифференциальные сравнения по модулю базисных форм на компоненты объекта кривизны R рассматриваемой связности:

$$\Delta R^{i'}_{j'kl} + 2R^{i'}_{j'kl}\omega^0_0 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \omega^i\,). \qquad (13)$$

Теорема 1. *Связность в приклеенном расслоении линейных кореперов $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$ задается с помощью поля объекта связности $\Pi^{i'}_{j'k}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9). Объект связности $\Pi^{i'}_{j'k}$ определяет формы связности (8), удовлетворяющие структурным уравнениям (10), в которые входят компоненты объекта кривизны $R^{i'}_{j'kl}$, выражающиеся по формуле (11) через объект связности $\Pi^{i'}_{j'k}$ и его пфаффовы производные. Объект кривизны приклеенной линейной связности является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (13).*

Определение. Расслоение приклеенных линейных кореперов $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$ со структурными уравнениями (6, 7), в котором задана связность полем объекта $\Pi^{i'}_{j'k}$, назовем *пространством приклеенной линейной связности* $L_{(m+1)^2-m,m}$, имеющим структурные уравнения (6, 10).

Распишем уравнения на компоненты связности (9) подробно:

$$\Delta\Pi^i_{0k} \equiv 0, \ \Delta\Pi^0_{0k} + \Pi^0_{0k}\omega^0_0 + \Pi^l_{0k}\omega^0_l \equiv 0,$$
$$\Delta\Pi^i_{jk} + \Pi^i_{jk}\omega^0_0 - \Pi^i_{0k}\omega^0_j + \omega^i_{jk} \equiv 0,$$
$$\Delta\Pi^0_{jk} + 2\Pi^0_{jk}\omega^0_0 - \Pi^0_{0k}\omega^0_j + \Pi^l_{jk}\omega^0_l + \omega^0_{jk} \equiv 0.$$

Положим простейшую тензорную часть объекта связности Π равной нулю: $\Pi^i_{0k} = 0$. Тогда уравнения остальных компонент упростятся:

$$\begin{cases} \Delta\Pi^0_{0k} + \Pi^0_{0k}\omega^0_0 \equiv 0, \\ \Delta\Pi^i_{jk} + \Pi^i_{jk}\omega^0_0 + \omega^i_{jk} \equiv 0, \\ \Delta\Pi^0_{jk} + 2\Pi^0_{jk}\omega^0_0 - \Pi^0_{0k}\omega^0_j + \Pi^l_{jk}\omega^0_l + \omega^0_{jk} \equiv 0. \end{cases}$$

Значит, справедлива

Теорема 2. *Если подтензор* Π^i_{0k} *объекта связности* $\Pi^{i'}_{j'k}$ *обращается в нуль, то* $\tilde{\omega}^i_0 = \omega^i$*, поэтому пространство приклеенной линейной связности* $L_{(m+1)^2-m,m}$ *становится пространством проективной связности Картана* $P_{m,m}$ *(см., напр., [2, с. 119; 4, с. 23; 5]) со структурными уравнениями (10), ассоциированными с поверхностью* X_m *проективного пространства* P_n.

Список литературы

1. *Базылев В.Т.* Геометрия дифференцируемых многообразий. М., 1989.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Т. 9. М., 1979. С. 1—248.

3. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 179—187.

4. *Столяров А.В., Глухова Т.Н.* Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных многообразий. Чебоксары, 2007.

5. *Шевченко Ю.И.* Об оснащении Картана // ДГМФ. Калининград, 1983. Вып. 14. С. 107—110.

K. V. Bashashina[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
KBashashina@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-3

Glued linear connection on surface of the projective space

Submitted on May 9, 2020

We consider a surface as a variety of centered planes in a multidimensional projective space. A fiber bundle of the linear coframes appears over this manifold. It is important to emphasize the fiber bundle is not the principal bundle. We called it a glued bundle of the linear coframes. A connection is set by the Laptev — Lumiste method in the fiber bundle. The ifferential equations of the connection object components have been found. This leads to a space of the glued linear connection. The expressions for a curvature object of the given connection are found in the paper. The theorem is proved that the curvature object is a tensor. A condition is found under which the space of the glued linear connection turns into the space of Cartan projective connection.

The study uses the Cartan — Laptev method, which is based on calculating external differential forms. Moreover, all considerations in the article have a local manner.

Keywords: projective space surface, glued bundle, linear connection, glued linear connection, Cartan projective connection, curvature tensor.

References

1. *Bazylev, V. T.:* The geometry of differentiable manifolds. Moscow (1989).

2. *Evtuchik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Širokov, A. P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

3. *Shevchenko, Yu. I.:* Laptev and Lumiste methods connectivity in the main bundle. DGMF. Kaliningrad. 37, 179—187 (2006).

4. *Stolyarov A. V., Glukhova T. N.:* Conformal differential geometry of framed manifolds. Cheboksary (2007).

5. *Shevchenko, Yu. I.:* About Cartan equipment. DGMF. Kaliningrad. 14, 107—110 (1983).

УДК 514.764.4

О. О. Белова[1]

[1] Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

olgaobelova@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-4

Центрированные плоскости в пространстве проективной связности

В пространстве проективной связности Картана исследуется пространство Π^* центрированных m-мерных плоскостей. В присоединенном главном расслоении $G\left(\Pi^*\right)$ способом Лаптева — Лумисте задается связность. Найдены дифференциальные сравнения компонент объекта связности. Показано, что объект групповой связности образует квазитензор, содержащий четыре подквазитензора, которые задают связности в соответствующих фактор-расслоениях.

Ключевые слова: пространство проективной связности, пространство центрированных плоскостей, расслоение, связность.

Проективное пространство P_n представляет собой фактор-пространство $L_{n+1}/\sim$ линейного пространства L_{n+1} по отношению эквивалентности (коллинеарности) $\sim$ ненулевых векторов, то есть $P_n = \left(L_{n+1} \setminus \{0\}\right)/\sim$ (см., напр., [12]). Проективное пространство P_n является многообразием размерности n.

Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ [5] было введено им как n-мерное многообразие, с каждой точкой которого связано касательное пространство, являющееся цен-

---

Поступила в редакцию 03.04.2020 г.

тропроективным пространством P_n, причем каждой паре бесконечно близких точек соответствует проективное отображение, которое служит аналогом параллельного переноса вектора пространства аффинной связности [1].

Пространство $P_{n,n}$ является n-мерным дифференцируемым многообразием M_n, с каждой точкой которого ассоциировано n-мерное проективное пространство P_n, содержащее эту точку. Таким образом, многообразие M_n выступает базой, а пространство P_n — n-мерным слоем, «приклеенным» к точкам базы [5]. В [8] показано, что задание фундаментально-групповой связности в главном расслоении, типовым слоем которого является проективная группа, превращает данное расслоение в пространство общей проективной связности. Кроме того, в той же работе построена иерархия пространств проективной связности.

Пространство $P_{n,n}$ есть главное расслоение $G_{n(n+1)}\left(M_n\right)$ над базой M_n, типовым слоем служит группа $G_{n(n+1)}$, действующая эффективно в каждом центропроективном пространстве $P_n^0\left(x\right)$, приклеенном к базе M_n в точке $x \in M_n$. При этом $P_{n,n}$ не является пространством со связностью главного расслоения [3].

В работе [11] пространство Π^* центрированных m-мерных плоскостей P_m^* исследовалось в n-мерном проективном пространстве, при этом плоскость P_m^* — это точка пространства Π^*. Теперь пространство Π^* будем рассматривать в каждом слое $P_n^0\left(x\right)$, причем центры плоскостей P_m^* совпадают с точкой x.

Отнесем пространство центрированных плоскостей к подвижному реперу $\{ A, A_i \}$ $(i,\ldots=\overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i\,,\ dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A\,,$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i, ω_j^i удовлетворяют структурным уравнениям ([9], ср. [2; 4; 6; 7; 13])

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \ \ (i,\ldots = \overline{1,\,n}),$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R_{jkm}^i \omega^k \wedge \omega^m\,,$$

$$D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + R_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k\,,$$

при этом компоненты объекта кривизны $R = \left\{ S_{jk}^i,\, R_{jkm}^i,\, R_{ijk} \right\}$ антисимметричны, то есть $S_{(jk)}^i = 0$, $R_{j(km)}^i = 0$, $R_{i(jk)} = 0$, где круглые скобки означают симметрирование $S_{(jk)}^i = \frac{1}{2}\left(S_{jk}^i + S_{kj}^i \right)$.

Следует заметить, что деривационные формулы для проективных реперов в пространстве $P_{n,n}$ имеют аналогичный вид, что и в пространстве P_n, но структурные уравнения — более сложный вид [1].

Помещаем вершины A, A_a на m-плоскость P_m^*, причем вершину A — в центр x (здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $a, \ldots = \overline{1,\,m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1,\,n}$).

Базисными формами пространства центрированных плоскостей являются формы ω^α, ω_a^α, ω^a, число которых определяет размерность пространства Π^*:

$$\dim \Pi^* = n + m\left(n - m \right).$$

Замечание. Размерность пространства Π^* отличается от размерности многообразия Грассмана $Gr\left(m,\, n \right)$ (пространства всех m-мерных плоскостей) на величину m, то есть $\dim \Pi^* = \dim Gr\left(m,\, n \right) + m$, причем $m, n \in Z$ и $0 < m < n$.

Связь рассматриваемого пространства центрированных плоскостей с многообразием Грассмана $Gr(m,n)$ важна, поскольку многообразие Грассмана играет важную роль в геометрии и топологии, будучи базисным пространством универсального векторного расслоения. Кроме того, проективное пространство P_n можно представить как многообразие $Gr(1,n+1)$. Многообразие Грассмана [10] является пространством подпространств, погруженных в пространство более высокой размерности.

Структурные уравнения присоединенного расслоения $G(\Pi^*)$ пространства проективной связности Картана для пространства центрированных плоскостей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
D\omega^\alpha &= -\omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \omega^a \wedge \omega^\alpha_a + S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S^\alpha_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + \\
&\quad + 2S^\alpha_{a\beta}\omega^a \wedge \omega^\beta, \\
D\omega^a &= -\omega^a_b \wedge \omega^b - \omega^a_\alpha \wedge \omega^\alpha + S^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + S^a_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \\
&\quad + 2S^a_{b\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha, \\
D\omega^\alpha_a &= \left(\delta^\alpha_\beta \omega^b_a - \delta^b_a \omega^\alpha_\beta\right) \wedge \omega^\beta_b + \omega_a \wedge \omega^\alpha + R^\alpha_{a\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \\
&\quad + R^\alpha_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + 2R^\alpha_{ab\beta}\omega^b \wedge \omega^\beta;
\end{aligned} \tag{1}$$

Замечание. Первые два уравнения системы (1) являются уравнениями базы M_n, а уравнения для форм ω^α_a дополняют M_n до расширенной базы Π^*. Вся система (1) задает расслоение Π^*.

$$\begin{aligned}
D\omega^a_b &= \omega^c_b \wedge \omega^a_c - \omega^a_\alpha \wedge \omega^\alpha_b + \delta^a_b \omega_\alpha \wedge \omega^\alpha + \left(\delta^a_b \omega_c + \delta^a_c \omega_b\right) \wedge \omega^c + \\
&\quad + R^a_{b\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + R^a_{bce}\omega^c \wedge \omega^e + 2R^a_{bc\alpha}\omega^c \wedge \omega^\alpha,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
D\omega^\alpha_\beta &= \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + (\delta^\alpha_\beta \omega_\gamma + \delta^\alpha_\gamma \omega_\beta) \wedge \omega^\gamma + \omega^a_\beta \wedge \omega^\alpha_a + \delta^\alpha_\beta \omega_a \wedge \omega^a + \\
&\quad + R^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\gamma \wedge \omega^\mu + R^\alpha_{\beta ab}\omega^a \wedge \omega^b + 2R^\alpha_{\beta a\gamma}\omega^a \wedge \omega^\gamma,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega_\alpha \wedge \omega_a^\alpha + R_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + R_{abc}\omega^b \wedge \omega^c +$$
$$+2R_{ab\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha , \quad (4)$$
$$D\omega_\alpha^a = \left(\delta_b^a \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \omega_b^a\right) \wedge \omega_\beta^b + \omega_\alpha \wedge \omega^a + R_{\alpha\beta\gamma}^a \omega^\beta \wedge \omega^\gamma +$$
$$+R_{\alpha bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + 2R_{\alpha b\beta}^a \omega^b \wedge \omega^\beta , \quad (5)$$
$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + R_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + R_{\alpha ab}\omega^a \wedge \omega^b +$$
$$+2R_{\alpha a\beta}\omega^a \wedge \omega^\beta .$$

Теорема 1. Расслоение $G\left(\varPi^*\right)$ содержит четыре фактор-расслоения над $\varPi^*$:

1) фактор-расслоение плоскостных линейных реперов $L_{m^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ со структурными уравнениями (1), (2);

2) фактор-расслоение нормальных линейных реперов $\mathfrak{L}_{(n-m)^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ со структурными уравнениями (1), (3);

3) фактор-расслоение плоскостных коаффинных реперов $C_{m(m+1)}\left(P_{n,\,n}\right)$ со структурными уравнениями (1), (2), (4);

4) аффинное фактор-расслоение $H_{n(n-m)+m^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ со структурными уравнениями (1)—(3), (5).

Слоевыми формами фактор-расслоения плоскостных линейных реперов $L_{m^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ являются формы ω_b^a. Типовым слоем данного расслоения является линейная факторгруппа $L_{m^2} = GL(m) \subset G$, которая действует в пучке прямых, принадлежащих плоскости P_m^*.

Слоевыми формами фактор-расслоения $\mathfrak{L}_{(n-m)^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ являются формы ω_β^α. Данное расслоение — двойственное для фактор-расслоения плоскостных линейных реперов. Типовой слой расслоения $\mathfrak{L}_{(n-m)^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ — линейная факторгруппа

$$\mathfrak{L}_{(n-m)^2} = GL(n-m) \subset G,$$

которая действует неэффективно в проективном факторпространстве $\mathcal{P}_{n-m-1} = P_n / P_m^*$.

Пространство $\mathcal{P}_{n-m-1}$ можно представить в виде

$$\mathcal{P}_{n-m-1} = G_{(n-m-1)(n-m+1)} / GA^*(n-m-1) \text{ (ср. [8])},$$

где $G_{(n-m-1)(n-m+1)}$ — проективная группа, а $GA^*(n-m-1)$ — коаффинная (центропроективная) подгруппа проективной группы $G_{(n-m-1)(n-m+1)}$.

Слоевые формы фактор-расслоения $C_{m(m+1)}(P_{n,\,n})$ — это формы ω_b^a, ω_a. Плоскостные коаффинные реперы принадлежат центрированной плоскости P_m^*. Коаффинная (центропроективная) факторгруппа $C_{m(m+1)} = GA^*(m) \subset G$, действующая на плоскости P_m^*, является типовым слоем фактор-расслоения $C_{m(m+1)}(P_{n,\,n})$.

Формы ω_b^a, ω_β^α, ω_α^a — это слоевые формы аффинного фактор-расслоения. Типовым слоем расслоения $H_{n(n-m)+m^2}(P_{n,\,n})$ является аффинная факторгруппа $H_{n(n-m)+m^2}$ группы $G \subset GP(n)$, действующая в пучке прямых с центром в точке A.

В присоединенном расслоении $G(\Pi^*)$ зададим фундаментально-групповую связность способом Лаптева — Лумисте:

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Pi_{b\alpha}^a \omega^\alpha - \Pi_{bc}^a \omega^c - \Pi_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha$$

$$\tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Pi_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - \Pi_{\beta a}^\alpha \omega^a - \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma,$$

$$\tilde{\omega}_a = \omega_a - \Pi_{a\alpha} \omega^\alpha - \Pi_{ab} \omega^b - L_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha,$$

$$\tilde{\omega}^a_\alpha = \omega^a_\alpha - \Pi^a_{\alpha\beta}\omega^\beta - \Pi^a_{\alpha b}\omega^b - \Pi^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b ,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Pi_{\alpha\beta}\omega^\beta - \Pi_{\alpha a}\omega^a - L^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a ,$$

причем функции

$$\Pi = \Big\{ \Pi^a_{b\alpha},\ \Pi^a_{bc},\ \Pi^{ac}_{b\alpha},\ \Pi^\alpha_{\beta\gamma},\ \Pi^\alpha_{\beta a},\ \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma},\ \Pi_{a\alpha},$$

$$\Pi_{ab},\ L^b_{a\alpha},\ \Pi^a_{\alpha\beta},\ \Pi^a_{\alpha b},\ \Pi^{ab}_{\alpha\beta},\ \Pi_{\alpha\beta},\ \Pi_{\alpha a},\ L^a_{\alpha\beta} \Big\}$$

удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^α, ω^α_a, ω^a:

$$\Delta\Pi^a_{b\alpha} - \Pi^a_{bc}\omega^c_\alpha + \Pi^{ac}_{b\alpha}\omega_c - \delta^a_b\omega_\alpha \equiv 0,\ \Delta\Pi^a_{bc} - \delta^a_c\omega_b - \delta^a_b\omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta\Pi^{ac}_{b\alpha} + \delta^c_b\omega^a_\alpha \equiv 0\ ,$$

$$\Delta\Pi_{a\alpha} - \Pi_{ab}\omega^b_\alpha + (L^b_{a\alpha} + \Pi^b_{a\alpha})\omega_b \equiv 0,\ \Delta\Pi_{ab} + \Pi^c_{ab}\omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta L^b_{a\alpha} + \Pi^{cb}_{a\alpha}\omega_c + \delta^b_a\omega_\alpha \equiv 0\ ,$$

$$\Delta\Pi^a_{\alpha\beta} - \Pi^a_{\alpha b}\omega^b_\beta + \Pi^{ab}_{\alpha\beta}\omega_b - \Pi^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + \Pi^\gamma_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma \equiv 0,$$

$$\Delta\Pi^a_{\alpha b} - \Pi^a_{cb}\omega^c_\alpha + \Pi^\beta_{\alpha b}\omega^a_\beta - \delta^a_b\omega_\alpha \equiv 0,\ \Delta\Pi^{ab}_{\alpha\beta} - \Pi^{ab}_{c\beta}\omega^c_\alpha + \Pi^{\gamma b}_{\alpha\beta}\omega^a_\gamma \equiv 0\ ,$$

$$\Delta\Pi^\alpha_{\beta\gamma} - \Pi^\alpha_{\beta a}\omega^a_\gamma + \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a - \delta^\alpha_\beta\omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\omega_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta\Pi^\alpha_{\beta a} - \delta^\alpha_\beta\omega_a \equiv 0,\ \Delta\Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta\Pi_{\alpha\beta} - \Pi_{\alpha a}\omega^a_\beta + (L^a_{\alpha\beta} + \Pi^a_{\alpha\beta})\omega_a - \Pi_{a\beta}\omega^a_\alpha + \Pi^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma \equiv 0,$$

$$\Delta\Pi_{\alpha a} - \Pi_{ba}\omega^b_\alpha + \Pi^b_{\alpha a}\omega_b + \Pi^\beta_{\alpha a}\omega_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta L^a_{\alpha\beta} + \Pi^{ba}_{\alpha\beta}\omega_b - L^a_{c\beta}\omega^c_\alpha + \Pi^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma \equiv 0\ .$$

Теорема 2. Объект групповой связности Π в присоединенном расслоении $G(\Pi^*)$ пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ является квазитензором, который содержит четыре подквазитензора

$$\Pi_1 = \left\{ \Pi^a_{b\alpha},\, \Pi^a_{bc},\, \Pi^{ac}_{b\alpha} \right\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ \Pi^\alpha_{\beta\gamma},\, \Pi^\alpha_{\beta a},\, \Pi^{\alpha a}_{\beta\gamma} \right\},$$

$$\Pi_3 = \left\{ \Pi_1,\, \Pi_{a\alpha},\, \Pi_{ab},\, L^b_{a\alpha} \right\},$$

$$\Pi_4 = \left\{ \Pi_1,\, \Pi_2,\, \Pi^a_{\alpha\beta},\, \Pi^a_{\alpha b},\, \Pi^{ab}_{\alpha\beta} \right\},$$

задающие связности в соответствующих фактор-расслоениях.

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869–1951). М., 2014.

2. *Башашина К.В.* Пространство проективной связности Картана как главное расслоение без связности // Классическая и современная геометрия : матер. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева. М., 2019. С. 57—59.

3. *Башашина К.В.* Тензорность объекта кривизны связности в главном расслоении пространства проективной связности Картана // ДГМФ. Калининград, 2019. №50. С. 36—40.

4. *Близникас В.И.* О неголономной поверхности трехмерного пространства проективной связности // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1971. Т. 3. С. 115—124.

5. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

6. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1971. Т. 3. С. 49—94.

7. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

8. *Шевченко Ю.И.* Иерархия пространств проективной связности // ДГМФ. Калининград, 2018. №49. С. 178—192.

9. *Шевченко Ю.И.* Центропроективная связность в пространстве проективной связности Картана // ДГМФ. Калининград, 2005. №36. С. 154—160.

10. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Projective differential geometry of submanifolds // North-Holland Mathematical Library. Vol. 49. Amsterdam, 1993.

11. *Belova O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.
12. *Benini F.* Basics of Differential Geometry & Group Theory : PhD thesis / SISSA. Trieste, 2018.
13. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

O. O. Belova[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-4

Centered planes in the projective connection space

Submitted on April 3, 2020

The space $\varPi^*$ of centered planes is considered in the Cartan projective connection space $P_{n,n}$. The space $\varPi^*$ is important because it has connection with the Grassmann manifold, which plays an important role in geometry and topology, since it is the basic space of a universal vector bundle.

The space $P_{n,n}$ is an n-dimensional differentiable manifold V_n with each point of which an n-dimensional projective space P_n containing this point is associated. Thus, the manifold V_n is the base, and the space P_n is the n-dimensional fiber "glued" to the points of the base.

A projective space P_n is a quotient space $L_{n+1}/\sim$ of a linear space L_{n+1} with respect to the equivalence (collinearity) of non-zero vectors, that is $P_n = \left(L_{n+1} \setminus \{0\}\right)/\sim$. The projective space P_n is a manifold of dimension n.

In this paper we use the Laptev — Lumiste invariant analytical method of differential geometric studies of the space $\varPi^*$ of centered planes and introduce a fundamental-group connection in the associated bundle $G\left(\varPi^*\right)$. The bundle $G\left(\varPi^*\right)$ contains four quotient bundles. It is show that the connection object $\varPi$ is a quasi-tensor containing four subquasitensors that define connections in the corresponding quotient bundles.

Keywords: projective connection space, space of centered planes, fibering, connection.

References

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.*: Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Bashashina K.V.* The space of projective connection of Cartan as the principal bundle without connection. Classical and modern geometry. Materials of the international conference dedicated to the centenary of V.T. Bazylev's birth. Moscow. 57—59 (2019).

3. *Bashashina K.V.* Curvature tensor of connection in principal bundle of Cartan's projective connection space. DGMF. Kaliningrad. 50, 36—40 (2019).

4. *Bliznikas V.I.* A non-holonomic surface of a three-dimensional space with projective connection // Tr. Geom. Sem., 3, 115—124 (1971).

5. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

6. *Laptev G.F., Ostianu N.M.* Distributions of *m*-dimensional line elements in a space with projective connection. I. Tr. Geom. Sem., 3, 49—94 (1971).

7. *Stolyarov A.V.* The dual theory of equipped manifolds. Cheboksary (1994).

8. *Shevchenko, Yu.I.:* Hierarchy of spaces of projective connection. DGMF. Kaliningrad. 49, 178—192 (2018).

9. *Shevchenko, Yu.I.:* Centro-projective connection in Cartan's projective connection space. DGMF. Kaliningrad. 36, 154—160 (2005).

10. *Akivis, M.A., Goldberg, V.V.*: Projective differential geometry of submanifolds. In North-Holland Mathematical Library. Amsterdam. 49 (1993).

11. *Belova, O.:* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centred planes. J. Math. Sci. (New York), **162**:5, 605—632 (2009).

12. *Benini, F.*: Basics of Differential Geometry & Group Theory. PhD thesis. SISSA. Trieste (2018).

13. *Scholz, E.*: H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).

УДК 514.76

А. В. Букушева[1]
[1] Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
bukusheva@list.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-5

Поднятие полуинвариантных подмногообразий на распределения почти контактных метрических многообразий

Изучаются гладкие сечения $X \in \Gamma(D)$ распределений D почти контактных метрических многообразий *M*. Доказывается, что если $U \in \Gamma(D)$ — ковариантно постоянное векторное поле относительно N-связности ∇^N, а подмногообразие $\tilde{M}$ многообразия *M* — полуинвариантное подмногообразие, то $U(\tilde{M})$ — полуинвариантное подмногообразие продолженной структуры на распределении *D* многообразия *M*.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, сечение распределения, полуинвариантное подмногообразие, продолженная почти контактная метрическая структура.

Введение

Геометрия сечений касательных расслоений с метрикой Сасаки изучалась в работах [7; 10]. Так, например, в работе [10] было показано, что ковариантно постоянное векторное поле определяет вполне геодезическое подмногообразие касательного расслоения. Автором статьи изучались сечения распределения субриманова многообразия контактного типа [2].

Поступила в редакцию 15.05.2020 г.

Предварительно на распределении с помощью внутренней связности задавалась риманова метрика типа Сасаки. Пусть $\tilde{M} \subset M$ — подмногообразие многообразия *M*. Тогда допустимое векторное поле $U \in \Gamma(D)$ определяет подмногообразие $U(\tilde{M}) \subset D$ многообразия *D*. В настоящей работе доказывается, что если $U \in \Gamma(D)$ — ковариантно постоянное векторное поле относительно N-связности ∇^N, а подмногообразие $\tilde{M}$ многообразия *M* — полуинвариантное подмногообразие, то $U(\tilde{M})$ — полуинвариантное подмногообразие продолженной структуры на распределении *D*. Полуинвариантные подмногообразия ввел в рассмотрение А. Бежанку [8].

1. Продолженные почти контактные метрические структуры

Под *M* будем понимать почти контактное метрическое многообразие с заданной на нем структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, g, \varphi, D\right)$, где η — 1-форма, порождающая распределение *D*: $D = \ker(\eta)$; $\vec{\xi}$ — векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения *D*: $D = span(\vec{\xi})$, g — риманова метрика на многообразии *M*, относительно которой распределения *D* и $D^{\perp}$ взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства $\eta(\vec{\xi}) = 1$ и $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$.

Назовем *D* распределением почти контактной метрической структуры. Для проведения необходимых вычислений будем использовать атлас карт $K(x^{\alpha})$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n$; $a, b, c = 1, ..., n-1$, $i, j, k = 1, ..., 2n-1$) таких, что $\partial_n = \vec{\xi}$ [1]. Введем оператор проектирования *P: TM* $\to$ *D*, определяемый разложением

$TM = D \oplus D^{\perp}$. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы в каждой точке и порождают систему D: $D = span(\vec{e}_a)$. Легко проверить, что $\left[\vec{e}_a, \vec{e}_b\right] = 2\omega_{ba}\partial_n$.

Рассмотрим допустимые тензорные поля [3; 4] следующего вида:

$$hX = \frac{1}{2}\left(L_{\vec{\xi}}\varphi\right)(X),\ \ C(X,Y) = \frac{1}{2}\left(L_{\vec{\xi}}g\right)(X,Y),$$
$$\omega(X,Y) = g(\psi X, Y),\ \ g(CX,Y) = C(X,Y),\ \ X,Y \in \Gamma(TM).$$

В адаптированных координатах имеем

$$h_b^a = \frac{1}{2}\partial_n \varphi_b^a,\ \ C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ \ C_b^a = g^{da}C_{db},\ \ \psi_a^c = g^{bc}\omega_{ab}.$$

Обозначим коэффициенты связности Леви-Чивиты тензора g с помощью символов $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$. Имеет место следующее предложение [5].

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты контактного метрического многообразия в адаптированных координатах принимают вид*

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}\right),\ \ \Gamma_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},$$
$$\Gamma_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b,\ \ \Gamma_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0.$$

Пусть $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D)$, где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей, внутренняя линейная метрическая связность [3; 4].

Коэффициенты связности ∇ задаются соотношениями $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Формулы преобразования для коэффициентов связности имеют обычный вид:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_{c'}^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_{c'}^c \vec{e}_a A_b^{c'}.$$

Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, причем VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Гладкая структура на распределении D задается следующим образом. Каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M ставится в соответствие сверхкарта $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Задание связности над распределением сводится к заданию объекта $G_b^a\left(x^\alpha, x^{n+a}\right)$ такого, что $HD = span\left(\vec{\varepsilon}_a\right)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$.

Если ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N\colon D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1), то N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \tilde{H}\tilde{D} \oplus VD$, такую, что $\tilde{H}\tilde{D} = HD \oplus Span\left(\vec{\varepsilon}\right)$, где $\vec{\varepsilon} = \partial_n - (NX)^v$, $X \in D$, $(NX)^v$ — вертикальный лифт. В базисе $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{\varepsilon}$ получает следующее координатное представление:

$$\vec{\varepsilon} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}.$$

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P\left[Q[X,Y], Z\right],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером [5] тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Назовем тензор Схоутена тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Частные производные $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем $P(X,Y)$.

Векторные поля

$$(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$$

задают на D адаптированное поле базисов, а формы

$$(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n) —$$

сопряженное поле кобазисов. Имеют место следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] = 2\omega_{ba}\vec{\varepsilon} + x^{n+d}(2\omega_{ba}N^c_d + R^c_{bad})\partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}\right] = x^{n+d}(\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d)\partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+a}\right] = N^c_a \partial_{n+c}.$$

Определим на многообразии D почти контактную структуру $(\tilde{D}, J, \vec{\varepsilon}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая

$$J\,X^h = (\varphi X)^h,\ \ J\,X^v = (\varphi X)^v,\ \ J(\vec{\varepsilon}) = \vec{0}.$$

Здесь $\pi : D \to M$ — естественная проекция. Определим на многообразии D метрику $\tilde{g}$, подчиняющуюся равенствам

$$\tilde{g}(X^h, Y^h) = \tilde{g}(X^v, Y^v) = g(X, Y),$$
$$\tilde{g}(X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^h, \vec{\varepsilon}) = \tilde{g}(X^v, \vec{\varepsilon}) = 0.$$

Назовем почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, J, \vec{\varepsilon}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ продолженной структурой.

2. Поднятие полуинвариантных подмногообразий

Пусть $U \in \Gamma(D)$ — допустимое векторное поле и ∇^N — N-связность на почти контактном метрическом многообразии *M*. Для каждого вектора $\vec{v} \in TM$, $\vec{v} = v^a \vec{e}_a + v^n \partial_n$ определяется его горизонтальный лифт $\vec{v}^h = v^a \vec{\varepsilon}_a + v^n \vec{\varepsilon}$. Допустимое векторное поле $U \in \Gamma(D)$ определяет гладкое сечение *U: M→D*. Пусть $U_* : TM \to TD$ — соответствующее касательное линейное отображение. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $U \in \Gamma(D)$ *— допустимое векторное поле,* ∇^N *— N-связность на почти контактном метрическом многообразии M и* $\vec{v} \in TM$ *— произвольный касательный к многообразию M вектор. Тогда выполняется следующее условие*:

$$\nabla^N_{\vec{v}} U = 0 \Leftrightarrow U_*(\vec{v}) = \vec{v}^h.$$

Условие $\nabla^N_{\vec{v}} U = 0$ в адаптированных координатах перепишется в виде

$$v^a(\vec{e}_a U^b + \Gamma^b_{ac} U^c) = 0,\ \ v^n(\partial_n U^b + n^b_c U^c) = 0.$$

Переписывая в адаптированных координатах условие $U_*(\vec{v}) = \vec{v}^h$, после некоторых преобразований убеждаемся в справедливости теоремы.

Подмногообразие $\tilde{M}$ многообразия *M* назовем полуинвариантным подмногообразием [8], если существует гладкое распределение $\tilde{D} : x \to \tilde{D}_x \subset T_x(\tilde{M})$ на многообразии $\tilde{M}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\tilde{D}$ — инвариантное относительно эндоморфизма φ распределение, то есть $\varphi(\tilde{D}_x) \subset \tilde{D}_x$ для всех $x \in \tilde{M}$;

2) дополнительное ортогональное распределение

$$\tilde{D}^{\perp} : x \to \tilde{D}_x^{\perp} \subset T_x(\tilde{M})$$

антиинвариантно, то есть $\varphi(\tilde{D}_x^{\perp}) \subset T_x(\tilde{M})^{\perp}$ для всех $x \in \tilde{M}$.

Теорема 2. *Пусть* $U \in \Gamma(D)$ *— ковариантно постоянное векторное поле относительно N-связности* ∇^N, *а подмногообразие* $\tilde{M}$ *многообразия M — полуинвариантное подмногообразие, тогда* $U(\tilde{M})$ *— полуинвариантное подмногообразие продолженной структуры на распределении D многообразия M*.

Доказательство. Используя теорему 1, непосредственно проверяем, что выполняются следующие равенства:

$$J(U_*(\tilde{D})) \subset U_*(\tilde{D}), \;\; J(U_*(D^{\perp})) \subset U_*(T\tilde{M})^{\perp},$$

что и доказывает теорему.

Заключение

Справедливость теоремы 2 не зависит от выбора эндоморфизма N. В то же время свойства полуинвариантного подмногообразия $\tilde{M}$ зависят от класса почти контактного метрического многообразия *M*, а свойства продолженной структуры — от выбора эндоморфизма N [5; 6]. Последнее замечание служит мотивацией для дальнейшего исследования проблемы поднятия полуинвариантных подмногообразий на распределения почти контактных метрических многообразий.

Список литературы

1. *Букушева А.В.* О тензоре Схоутена — Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Тр. семин. по геометрии и математическому моделированию. 2019. №5. С. 15—19.

2. *Букушева А.В.* Геодезические подмногообразия распределений субримановых многообразий // Математика и естественные науки. Теория и практика : межвуз. сб. науч. тр. Ярославль, 2019. С. 23—27.

3. *Букушева А. В., Галаев С. В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика. 2005. №7. С. 12—14.

4. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №3. С. 17—22.

5. *Галаев С. В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, №3. С. 258—263.

6. *Галаев С. В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, №2. С. 138—147.

7. *Ямпольский А. Л.* О вполне геодезических векторных полях на подмногообразии // Мат. физ., анализ, геометрия. 1996. Т. 1, №1—2. С. 540—545.

8. *Bejancu A*. Geometry of CR-Submanifolds. Springer, 1986.

9. *Bukusheva A. V., Galaev S. V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), №2. P. 13—22.

10. *Walczak P*. On totally geodesic submanifolds of tangent bundle with Sasaki metric // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 1989. Vol. 28, iss. 3—4. P. 161—165.

A. Bukusheva[1]

[1] Saratov State University

83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia

bukusheva@list.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-5

Lifting semi-invariant submanifolds to distribution of almost contact metric manifolds

Submitted on May 15, 2020

Let M be an almost contact metric manifold of dimension $n = 2m + 1$. The distribution D of the manifold M admits a natural structure of a smooth manifold of dimension $n = 4m + 1$. On the manifold M, is defined a linear connection ∇^N that preserves the distribution D; this connection is determined by the interior connection that allows parallel transport of admissible vectors along admissible curves. The assigment of the linear connection ∇^N is equivalent to the assignment of a Riemannian metric of the Sasaki type on the distribution D. Certain tensor field of type (1,1) on D defines a so-called prolonged almost contact metric structure. Each section $U \in \Gamma(D)$ of the distribution D defines a morphism $U : M \to D$ of smooth manifolds. It is proved that if $\tilde{M} \subset M$ a semi-invariant submanifold of the manifold M and $U \in \Gamma(D)$ is a covariantly constant vector field with respect to the N-connection ∇^N, then $U(\tilde{M})$ is a semi-invariant submanifold of the manifold D with respect to the prolonged almost contact metric structure.

Keywords: almost contact metric manifold; section of a distribution; semi-invariant manifold; prolonged almost contact metric structure.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* On the Schouten — Wagner tensor of a nonholonomic Kenmotsu manifold. Proceedings of the seminar on geometry and mathematical modeling, 5, 15—19 (2019).

2. *Bukusheva, A. V.:* Geodesic submanifolds of distributions of sub-Riemannian manifolds. Mathematics and science. Theory and practice. Interuniversity collection of scientific papers. Yaroslavl. 23—27 (2019).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* On an admissible Kähler structure on a tangent bundle to a nonholonomic manifold. Mathematics. Mechanic, 7, 12—14 (2005).

4. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **12**:3, 17—22 (2012).

5. *Galaev, S. V.:* Almost contact metric spaces with N-connection. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **15**:3, 258—263 (2015).

6. *Galaev, S. V.:* Extended Structures on Codistributions of Contact Metric Manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **17**:2, 138—147 (2017).

7. *Yampolsky, A. L.*: On completely geodesic vector fields on a submanifold. Mat. physical, analysis, geometry, **1**:1-2, 540—545 (1996).

8. *Bejancu, A.*: Geometry of CR-Submanifolds. Springer (1986).

9. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bull. of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics, **4** (53):2, 13—22 (2011).

10. *Walczak, P.*: On totally geodesic submanifolds of tangent bundle with Sasaki metric. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., **28**:3-4, 161—165 (1989).

УДК 514.75

А. В. Вялова[1]
[1] Калининградский государственный технический университет, Россия
vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-6

Псевдотензоры кривизны и кручения коаффинной связности в касательном расслоении к многообразию гиперцентрированных плоскостей

В многомерном проективном пространстве рассматривается семейство гиперцентрированных плоскостей, размерность которого совпадает с размерностью образующей плоскости. Над ним возникают главные расслоения, структурные формы которых связаны соотношениями. В главном расслоении линейных корепеpов задана коаффинная связность. Доказано, что объекты кривизны и кручения коаффинной связности образуют псевдотензоры.

Ключевые слова: проективное пространство, семейство гиперцентрированных плоскостей, коаффинная связность, псевдотензор кривизны, псевдотензор кручения.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R = \{A, A_I\}$ $(I, ... = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \;\; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A\,. \tag{1}$$

Поступила в редакцию 15.05.2020 г.

Структурные уравнения проективной группы $GP(n)$ (см., напр., [1]) запишем в виде

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \tag{2}$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную плоскость P_m с многомерным центром P_{m-1}, которую обозначим P_m^{m-1} [2]. Произведем разбиение значений индексов:

$$I = \{i, \alpha\}: \ i, ... = \overline{1, m}, \ \alpha, ... = \overline{m+1, n}.$$

Специализируем подвижной репер $R = \{A, A_i, A_\alpha\}$, помещая вершины A, A_i на плоскость P_m, при этом вершины A_i — в ее центр P_{m-1}. Из деривационных формул (1) имеем

$$\begin{gathered} dA = \theta A + \omega^i A_i + \omega^\alpha A_\alpha, \quad dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha + \omega_i A, \\ dA_\alpha = \theta A_\alpha + \omega_\alpha^i A_i + \omega_\alpha^\beta A_\beta + \omega_\alpha A. \end{gathered} \tag{3}$$

Формулы (3) дают уравнения стационарности гиперцентрированной плоскости P_m^{m-1} [3]:

$$\omega^\alpha = 0, \ \omega_i^\alpha = 0, \ \omega_i = 0. \tag{4}$$

Выбирая m форм ω_i в качестве базисных, запишем уравнения многообразия V_m — семейства гиперцентрированных плоскостей P_m^{m-1} в виде

$$\omega^\alpha = \Lambda^{\alpha i} \omega_i, \ \omega_i^\alpha = \Lambda_i^{\alpha j} \omega_j. \tag{5}$$

Замечание. Внешняя плоскость P_m двойственна плоскости Π_{n-m-1}, а внутренняя P_{m-1} — плоскости Π_{n-m}. Пара (P_m, P_{m-1}) двойственна обобщенному пространственному элементу (Π_{n-m-1}, Π_{n-m}), $\Pi_{n-m-1} \subset \Pi_{n-m}$.

Найдем внешние дифференциалы базисных форм

$$D\omega_i = \theta_i^j \wedge \omega_j, \quad \theta_i^j = \omega_i^j - \Lambda_i^{\alpha j}\omega_\alpha . \qquad (6)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (5) и разрешая по лемме Картана, получаем систему дифференциальных уравнений на компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda^1 = \{\Lambda^{\alpha i}, \Lambda_i^{\alpha j}\}$

$$\Delta\Lambda^{\alpha(i)} - \Lambda_j^{\alpha i}\omega^j = \Lambda^{\alpha ij}\omega_j, \quad \Delta\Lambda_i^{\alpha(j)} = \Lambda_i^{\alpha jk}\omega_k , \qquad (7)$$

где дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_i^{\alpha(j)} = d\Lambda_i^{\alpha j} + \Lambda_i^{\alpha k}\theta_k^j + \Lambda_i^{\beta j}\omega_\beta^\alpha - \Lambda_k^{\alpha j}\omega_i^k ,$$

причем $\Lambda_i^{\alpha[jk]} = 0, \ \Lambda^{\alpha[ij]} = 0$.

Утверждение 1. *Фундаментальный объект 1-го порядка* $\Lambda^1 = \{\Lambda^{\alpha i}, \Lambda_i^{\alpha j}\}$ *семейства* V_m *является псевдотензором* [1], *содержащим подпсевдотензор* $\Lambda_i^{\alpha j}$.

Исследование многообразия V_m в репере нулевого порядка приводит к разбиению структурных форм ω^I, ω_J^I, ω_I на две совокупности: первичные формы $\omega^\alpha, \omega_i^\alpha, \omega_i$, включающие базисные формы ω_i, и вторичные формы $\omega^i, \omega_j^i, \omega_\alpha, \omega_\alpha^i, \omega_\beta^\alpha$, внешние дифференциалы которых имеют вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega_j \wedge \omega^{ij}, \qquad (8)$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega_\kappa \wedge \omega_j^{ik}, \qquad (9)$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_i \wedge \omega_\beta^{\alpha i}, \qquad (10)$$

$$D\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^i + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^i + \omega_\alpha \wedge \omega^i, \qquad (11)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega_\alpha^i \wedge \omega_i, \qquad (12)$$

где

$$\omega^{ij} = \Lambda^{\alpha j}\omega_{\alpha}^{i}, \quad \omega_{j}^{ik} = \Lambda_{j}^{\alpha k}\omega_{\alpha}^{i} + \delta_{j}^{i}(\omega^{k} - \Lambda^{\alpha k}\omega_{\alpha}) + \delta_{j}^{k}\omega^{i}, \qquad (13)$$

$$\omega_{\beta}^{\alpha i} = -\Lambda_{j}^{\alpha i}\omega_{\beta}^{j} + \delta_{\beta}^{\alpha}(\omega^{i} - \Lambda^{\gamma i}\omega_{\gamma}) - \Lambda^{\alpha i}\omega_{\beta}.$$

Утверждение 2. *Уравнения (6$_1$, 8—12) являются структурными уравнениями главного расслоения $G_r(V_m)$, базой которого служит многообразие V_m, а типовым слоем — подгруппа G_r стационарности гиперцентрированной плоскости P_m^{m-1}, причем $r = n(n-m+1)+m^2$.*

Расслоение $G_r(V_m)$ содержит 4 главных фактор-расслоения над той же базой V_m со следующими структурными уравнениями:

1) (6$_1$, 9) — расслоение плоскостных линейных кореперов $L_{m^2}(V_m)$ с типовым слоем $L_{m^2} = GL(m)$ — линейной фактор-группой, действующей неэффективно во внутренней плоскости P_{m-1};

2) (6$_1$, 8, 9) — расслоение аффинных кореперов $L_{m(m+1)}(V_m)$ с типовым слоем $L_{m(m+1)} = GA(m)$ — аффинной факторгруппой, действующей в гиперцентрированной плоскости P_m^{m-1};

3) (6$_1$, 10) — расслоение нормальных линейных кореперов $L_{(n-m)^2}(V_m)$ с типовым слоем — линейной факторгруппой, действующей неэффективно в проективном факторпространстве $\mathcal{P}_{n-m-1} = P_n / P_m$;

4) (6$_1$, 10, 12) — расслоение центропроективных кореперов $L_{(n-m)(n-m+1)}(V_m)$ с типовым слоем $L_{(n-m)(n-m+1)}$ — центропроективной факторгруппой, действующей в проективном центрированном факторпространстве $\mathcal{P}_{n-m}^{0} = \mathcal{P}_{n-m} / \mathcal{P}_{n-m-1}$, где $\mathcal{P}_{n-m} = P_n / P_{m-1}$.

Продифференцируем внешним образом формы (6_2) с учетом уравнений (9, 12) и дифференциальных уравнений (7_2) на компоненты подобъекта $\{\Lambda_i^{\alpha j}\}$:

$$D\theta_i^j = \theta_i^k \wedge \theta_k^j + \omega_k \wedge \theta_i^{jk}, \tag{14}$$

где

$$\theta_i^{jk} = (\Lambda_i^{\alpha k}\omega_\alpha^j + \Lambda_i^{\alpha j}\omega_\alpha^k) + \delta_i^j(\omega^k - \Lambda^{\alpha k}\omega_\alpha) +$$

$$+ \delta_i^k(\omega^j - \Lambda^{\alpha j}\omega_\alpha) - \Lambda_i^{\alpha jk}\omega_\alpha. \tag{15}$$

Так как $\theta_i^{[jk]} = 0$, то справедлива

Теорема. *Многообразие V_m является голономным* [4] *гладким многообразием.*

Замечание. *Произвольное семейство гиперцентрированных плоскостей рассмотрено в работе* [5]. *В общем случае нельзя показать, что оно является голономным многообразием.*

Зададим связность в главном расслоении линейных кореперов $l_{m^2}(V_m)$ со структурными уравнениями (6_1, 14), где $l_{m^2}(V_m) = Gl(m)$ — линейная группа, действующая в каждом касательном пространстве к многообразию V_m. Для этого введем формы

$$\tilde{\theta}_i^j = \theta_i^j - N_i^{jk}\omega_k. \tag{16}$$

Продифференцируем эти формы внешним образом с помощью уравнений (6_1, 14), затем заменим в полученных уравнениях формы θ_i^j на их выражения из (16). Сделаем обратную замену в тех слагаемых, в которых формы умножаются внешним образом на базисные формы, тогда

$$D\tilde{\theta}_i^j = \tilde{\theta}_i^k \wedge \tilde{\theta}_k^j - (\Delta N_{(i)}^{(j)(k)} + \theta_i^{jk}) \wedge \omega_k - N_i^{kl}N_k^{jm}\omega_l \wedge \omega_m. \tag{17}$$

Здесь дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta N^{(j)(k)}_{(i)} = dN^{jk}_i + N^{lk}_i \theta^j_l + N^{jl}_i \theta^k_l - N^{jk}_l \theta^l_i .$$

В соответствии с теоремой Картана — Лаптева [6] зададим связность в главном расслоении линейных кореперов с помощью поля объекта связности $N = \{N^{jk}_i\}$ на базе V_m уравнениями

$$\Delta N^{(j)(k)}_{(i)} + \theta^{jk}_i = N^{jkl}_i \omega_l . \tag{18}$$

Утверждение 3. *Объект коаффинной связности $N = \{N^{jk}_i\}$ является квазипсевдотензором.*

Подставляя (18) в (17), получим

$$D\widetilde{\theta}^{\,j}_i = \widetilde{\theta}^{\,k}_i \wedge \widetilde{\theta}^{\,j}_k + K^{jkl}_i \omega_k \wedge \omega_l ,$$

где компоненты объекта кривизны $K = \{K^{jkl}_i\}$ выражаются по формулам

$$K^{jkl}_i = N^{j[kl]}_i - N^{m[k}_i N^{jl]}_m . \tag{19}$$

Подставляя в уравнения (6) формы связности $\widetilde{\theta}^{\,j}_i$, получим

$$D\omega_i = \widetilde{\theta}^{\,j}_i \wedge \omega_j + S^{jk}_i \omega_k \wedge \omega_j ,$$

где $S^{jk}_i = N^{[jk]}_i$ — компоненты объекта кручения.

С учетом симметрии форм θ^{jk}_i по верхним индексам, найдем дифференциальные сравнения

$$\Delta S^{(j)(k)}_{(i)} \equiv 0 \pmod{\omega_l} .$$

Утверждение 4. *Объект кручения S^{jk}_i коаффинной связности является псевдотензором* [1].

Продолжая уравнения (18), найдем сравнения

$$\Delta N_{(i)}^{(j)(k)(l)} + N_i^{mk}\theta_m^{jl} + N_i^{jm}\theta_m^{kl} - N_m^{jk}\theta_i^{ml} \equiv 0. \qquad (20)$$

Найдем дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны $K = \{K_i^{jkl}\}$. Для этого продифференцируем выражения (19) с учетом сравнений, полученных при альтернации по двум последним индексам из (18, 20). Получим

$$\Delta K_{(i)}^{(j)(k)(l)} \equiv 0 \ \ (\operatorname{mod} \omega_l).$$

Утверждение 5. *Объект кривизны* K_i^{jkl} *коаффинной связности является псевдотензором* [1].

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащение центропроективных многообразий : учеб. пособие. Калининград, 2000.

2. *Вялова А.В.* Тензорность кривизны фундаментально-групповой связности, ассоциированной с конгруэнцией гиперцентрированных плоскостей // Международная молодежная школа-семинар «Современная геометрия и ее приложения». Международная научная конференция «Современная геометрия и ее приложения» : сб. тр. Казань, 2017. С. 36—37.

3. *Вялова А.В.* Объект кривизны фундаментально-групповой связности, ассоциированной с конгруэнцией гиперцентрированных плоскостей // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 59—66.

4. *Шевченко Ю.И.* Оснащение голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

5. *Башашина К.В.* Фундаментально-групповые связности и композиционное оснащение семейства гиперцентрированных плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 19—28.

6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

A. V. Vyalova[1]
[1] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 36022, Russia
vyalova.alexa@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-6

Curvature and torsion pseudotensors of coaffine connection in tangent bundle of hypercentred planes manifold

Submitted on May 15, 2020

The hypercentered planes family, whose dimension coincides with dimension of generating plane, is considered in the projective space. Two principal fiber bundles arise over it. Typical fiber for one of them is the stationarity subgroup for hypercentered plane, for other — the linear group operating in each tangent space to the manifold. The latter bundle is called the principal bundle of linear coframes. The structural forms of two bundles are related by equations.

It is proved that hypercentered planes family is a holonomic smooth manifold.

In the principal bundle of linear coframes the coaffine connection is given. From the differential equations it follows that the coaffine connection object forms quasipseudotensor. It is proved that the curvature and torsion objects for the coaffine connection in the linear coframes bundle form pseudotensors.

Keywords: projective space, hypercentered planes family, coaffine connection, curvature pseudotensor, torsion pseudotensor.

References

1. *Shevchenko, Yu. I.:* Clothing of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).

2. *Vyalova, A. V.:* Tensority of curvature of fundamental-group connection, associated with congruence of hypercentered planes. International yonth school-seminar «Modern geometry and its applications». International scientific conference «Modern geometry and its applications». Kazan, 36—37 (2017).

3. *Vyalova, A. V.:* The curvature object for fundamental-group connection associated with congruence of hypercentred planes. DGMF. Kaliningrad. 49, 59—66 (2018).

4. *Shevchenko, Yu. I.:* The equipment of holonomic and nonholonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

5. *Bashashina, K. V.:* Fundamental-group connection andcomposite clothing for hypercentred planes family in projective space. DGMF. Kaliningrad. 49, 19—28 (2018).

6. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.*: Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

УДК 514.76

С. В. Галаев[1]

[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

sgalaev@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-7

Связности с параллельным кососимметрическим кручением на субримановых многообразиях

На субримановом многообразии M контактного типа рассматривается N-связность ∇^N, определяемая парой (∇, N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения D. Доказывается, что существует, и причем единственная, N-связность ∇^N такая, что ее кручение, представленное трехвалентным ковариантным тензором, кососимметрично. Находится строение соответствующего этой связности эндоморфизма. Приводятся условия, при которых полученная связность является метрической связностью, а ее кручение — параллельным тензорным полем.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, внутренняя связность, плоская полуметрическая связность с кососимметрическим кручением, тензор Схоутена.

Введение

Субримановым многообразием контактного типа называется гладкое многообразие M, оснащенное субримановой структурой $\left(M, \vec{\xi}, \eta, g\right)$, где η и $\vec{\xi}$ — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие ортогональные между собой

Поступила в редакцию 15.05.2020 г.

распределения D и $D^{\perp}$ соответственно. Субриманово многообразие нечетной размерности, оснащенное дополнительно эндоморфизмом $\varphi : D \to D$ таким, что $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$, называется почти контактным метрическим многообразием. Если почти контактное метрическое многообразие представляет собой интерес как обобщение поверхности эрмитова пространства, то мотивация к исследованию субриманова многообразия вызвана необходимостью построения математических моделей в задачах теории управления и неголономной механики. Различие в мотивации исследования почти контактных метрических многообразий и субримановых многообразий проявляется в выборе связностей, задающих параллельный перенос на многообразиях. Для почти контактных метрических многообразий, образующих специальный класс римановых многообразий, естественным является выбор связности Леви-Чивиты. В геометрии субримановых многообразий используются связности, обеспечивающие параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В настоящей работе такие связности определяются парой (∇ , N), где ∇ — внутренняя метрическая связность, а $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения D, называемый в работе структурным эндоморфизмом. Говоря об эндоморфизме распределения D, мы имеем в виду эндоморфизм $N : TM \to TM$ такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$.

В настоящей работе на субримановом многообразии контактного типа M наряду со связностью Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$ рассматривается N-связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением S. Здесь $N : TM \to TM$ — эндоморфизм, определяемый равенством $NX = S(\vec{\xi}, X)$. Мотивация к изучению N-связности подкрепляется богатыми приложениями римановых многообразий со связностями с кручением в теоретической физике [1; 5]. Особый интерес представляют связности с кососимметрическим кручением [6; 7; 9—11]. Известно, что метрическая связность с кососимметрическим кручением имеет те же геодезические, что и связность Леви-Чивиты. В настоящей работе доказывается, что на субримановом многообразии существует единственная N-связность ∇^N с ненулевым кососимметрическим кручением *S*, которая метрическая тогда и только тогда, когда выполняется равенство $L_{\vec{\xi}}g = 0$. Доказывается, что эта связность единственна и соответствующий ей эндоморфизм имеет следующее строение: $\mathrm{N} = 2\psi$, где эндоморфизм ψ определяется равенством $\omega(X,Y) = g(\psi X,Y)$. Особый интерес для исследователей представляют многообразия со связностями с параллельными полями кручения [11]. В работе [4] автора приведены примеры связностей с кручением, задаваемых на многообразиях с почти контактной (субримановой) структурой. Некоторые виды указанных связностей принадлежат классу N-связностей. Однако до настоящего времени не приводились примеры римановых многообразий, оснащенных метрической N-связностью с параллельным кососимметрическим кручением.

Определение и основные свойства N-связности с кососимметрическим кручением

Пусть M — гладкое многообразие размерности $n=2m+1$, $m \geq 1$, с заданной на нем субримановой структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,g,D\right)$, где η и $\vec{\xi}$ — 1-форма и единичное векторное поле, порождающие ортогональные между собой распределения D и $D^{\perp}$ соответственно. Нечетная размерность многообразия выбрана исключительно для удобства перехода к многообразиям с почти контактной метрической структурой без дополнительных рассуждений о размерности.

Известно [8], что на субримановом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением такая, что $\nabla_X g(Y,Z) = 0$, $X,Y,Z \in \Gamma(D)$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S\left(X,Y\right)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-P[X,Y]$, где $P\colon TM\to D$ — проектор, определяемый разложением $TM=D\oplus D^{\perp}$.

Пусть $K(x^{\alpha})$ ($\alpha,\beta,\gamma=1,\ldots,n;\ a,b,c=1,\ldots,n-1$) — карта многообразия M, адаптированная к распределению D [12]. Векторные поля $P(\partial_a)=\vec{e}_a=\partial_a-\Gamma_a^n\partial_n$ порождают систему D: $D=span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_{\alpha})=(\vec{e}_a,\partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a,\eta=\Theta^n=dx^n+\Gamma_a^n dx^a)$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность Леви-Чивиты и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ — ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивиты субриманова многообразия в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{c}=\Gamma_{ab}^{c},\ \tilde{\Gamma}_{ab}^{n}=\omega_{ba}-C_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^{b}=\tilde{\Gamma}_{na}^{b}=C_a^b+\psi_a^b,\ \tilde{\Gamma}_{na}^{n}=\tilde{\Gamma}_{nn}^{a}=0,$$

где

$$\Gamma_{bc}^{a}=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_b g_{cd}+\vec{e}_c g_{bd}-\vec{e}_d g_{bc}\right),\ \psi_a^b=g^{bc}\omega_{ac},$$

$$C_{ab}=\frac{1}{2}\partial_n g_{ab},\ C_a^b=g^{bc}C_{ac}.$$

Предложение 2. *Пусть $N:TM\to TM$ — эндоморфизм касательного расслоения субриманова многообразия M такой, что $N\vec{\xi}=\vec{0}$, $N(D)\subset D$. Тогда на многообразии M существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S\left(X,Y\right)$, однозначно определяемая следующими условиями:*

1) $S(X,Y)=2\omega(X,Y)\vec{\xi}+\eta(X)NY-\eta(Y)NX,\ X,Y,Z\in\Gamma\left(TM\right)$;

2) $\overset{N}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y, \ \ X, Y \in \Gamma(D)$;

3) $\overset{N}{\nabla}_X \vec{\xi} = 0, \ \ X \in \Gamma(TM)$.

Определим в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты связности $\overset{N}{\nabla}_X$, положив

$$G^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right), \ G^b_{na} = N^b_a.$$

Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям предложения 1.

Из предложения 1 следует, что

$$\overset{N}{\nabla}_X g(Y, Z) = 0, \ \ X, Y, Z \in \Gamma(D).$$

Последнее замечание подтверждает целесообразность назвать связность $\overset{N}{\nabla}$ полуметрической.

Положим $\tilde{S}(X, Y, Z) = g(S(X, Y), Z), \qquad X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах возможно, что ненулевые компоненты тензора $\tilde{S}(X, Y, Z)$ будут иметь следующий вид:

$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \vec{e}_b, \partial_n) = 2\omega_{ab},$$

$$\tilde{S}(\vec{e}_a, \partial_n, \vec{e}_b) = -g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b),$$

$$\tilde{S}(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b).$$

Как видно из полученных равенств, тензор $\tilde{S}(X, Y, Z)$ кососимметричен тогда и только тогда, когда $2\omega_{ab} = g(N\vec{e}_a, \vec{e}_b)$ или $2\omega_{ab} = g_{bc} N^c_a$. Отсюда получаем $N^c_a = 2g^{cb}\omega_{ab}$. Таким образом, в силу равенства $\psi^b_a = g^{bc}\omega_{ac}$ окончательно получаем: $N^c_a = 2\psi^c_a$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Линейная связность* ∇^N*, заданная на субримановом многообразии, кососимметрична тогда и только тогда, когда* $N = 2\psi$.

В дальнейшем будем полагать, что для связности ∇^N выполняется условие $\mathrm{N} = 2\psi$.

Теорема 2. *Линейная связность* ∇^N*, заданная на субримановом многообразии, метрическая тогда и только тогда, когда* $L_{\vec{\xi}} g = 0$.

Доказательство. Из предложения 2 следует, что

$$\nabla_c^N g_{ab} = 0.$$

Вычислим $\nabla_n^N g_{ab}$. Имеем

$$\nabla_c^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - 2\psi_a^c g_{cb} + 2\psi_b^c g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2g^{cd}\omega_{da} g_{cb} +$$
$$+2g^{cd}\omega_{db} g_{ac} = \partial_n g_{ab} + 2\omega_{ab} + 2\omega_{ba} = \partial_n g_{ab}.$$

Будем полагать в дальнейшем, что ∇^N — метрическая связность с эндоморфизмом $\mathrm{N} = 2\psi$.

Пусть $K(X,Y)Z, \quad X,Y,Z \in \Gamma(TM),$ — тензор кривизны связности ∇^N. Вычислим ненулевые компоненты тензора $K(X,Y)Z$. Имеем

$$K_{abc}^d = R_{abc}^d + 4\omega_{ab}\psi_c^d, \quad K_{anc}^d = \nabla_a N_c^d.$$

Здесь $R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e$ — компоненты тензора кривизны Схоутена [3], определяемого равенством

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P\big[Q[X,Y],Z\big],$$

$Q = I - P$.

Инвариантное представление тензора $K(X,Y)Z$ имеет вид

$$K(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \eta(X)(\nabla_X N)Z - \\ -\eta(X)(\nabla_Y N)Z + 4\omega(X,Y)\psi(Z),$$

$X,Y,Z \in \Gamma\left(TM\right)$.

После необходимых вычислений в адаптированных координатах убеждаемся в справедливости следующих теорем.

Теорема 3. *N-связность с кососимметрическим кручением, заданная на субримановом многообразии контактного типа, является плоской тогда и только тогда, когда*

$$R(X,Y)Z = -4\omega(X,Y)\psi(Z),\ \ \nabla N = 0,\ X,Y,Z \in \Gamma\left(D\right).$$

Теорема 4. *Кручение кососимметрической линейной связности ∇^N, заданной на субримановом многообразии M, параллельно тогда и только тогда, когда $\nabla\omega = 0$, где ∇ — внутренняя метрическая связность*.

Пусть субриманово многообразие *M* является многообразием Сасаки. В этом случае имеет место равенство $\nabla\omega = 0$, что позволяет в качестве следствия теоремы 4 сформулировать теорему 5.

Теорема 5. *Кручение кососимметрической линейной связности ∇^N ($N=-2\varphi$), заданной на сасакиевом многообразии M, параллельно*.

Заключение

В настоящей работе приводится новый пример многообразия Картана — Римана [5] с кососимметрическим параллельным кручением. Таким примером служит субриманово многообразие с заданной на нем N-связностью специального вида. Пока остается нерешенной следующая интересная задача: получить классификацию эндоморфизмов $N : D \to D$, основанную на изучении алгебраической структуры тензоров кручения соответствующих N-связностей.

Список литературы

1. *Букушева А.В.* Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 58—63.

2. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. 2015. №17 (214), вып. 40. С. 20—24.

3. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Геометрия почти контактных гиперкэлеровых многообразий // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 32—41.

4. *Галаев С.В.* О геометрии субримановых η-Эйнштейновых многообразий // ДГМФ. Калининград, 2019. Вып. 50. С. 68—81.

5. *Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е.* Многообразия Римана — Картана // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2009. Т. 123. С. 110—141.

6. *Agricola I., Ferreira A.C., Friedrich Th.* The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \leq 6$ // Differ. Geom. Appl., 2015. Vol. 39. P. 59—92.

7. *Alexandrov B.* Sp(n)U(1)-connections with parallel totally skew-symmetric torsion // J. Geom. Phys. 2006. Vol. 57. P. 323—337.

8. *Bukusheva A.V., Galaev S.V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), №2. P. 13—22.

9. *Cleyton R., Swann A.* Einstein metrics via intrinsic or parallel torsion Mathematische Zeitschrift. 2004. Vol. 247. P. 513—528.

10. *Dileo G., Lotta A.* A note on Riemannian connections with skew torsion and the de Rham splitting // Manuscripta math. 2018. Vol. 156, №3-4. P. 299—302.

11. *Friedrich Th.* G_2-manifolds with parallel characteristic torsion // Differ. Geom. Appl. 2007. Vol. 25. P. 632—648.

12. *Galaev S.V.* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, №1. P. 71—76.

S. Galaev[1]
[1] Saratov State University
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia
sgalaev@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-7

Connections with parallel skew-symmetric torsion on sub-Riemannian manifolds

Submitted on May 15, 2020

On a sub-Riemannian manifold M of contact type, is considered an N-connection ∇^N defined by the pair (∇ , N), where ∇ is an interior metric connection, $N : D \to D$ is an endomorphism of the distribution D. It is proved that there exists a unique N-connection ∇^N such that its torsion is skew-symmetric as a contravariant tensor field. A construction of the endomorphism corresponding to such connection is found. The sufficient conditions for the obtained connection to be a metric connection with parallel torsion are given.

Keywords: sub-Riemannian manifold of contact type, interior connection, flat semi-metric connection with skew-symmetric torsion, Schouten tensor.

References

1. *Bukusheva, A. V.:* Nonlinear connections and internal semi-pulverization on a distribution with a generalized Lagrangian metric. DGMF. Kaliningrad. 46, 58—62 (2015).

2. *Bukusheva, A. V.:* The geometry of the contact metric spaces φ-connection. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, **17** (214):40, 20—24 (2015).

3. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Geometry of almost contact hyperkähler manifolds. DGMF. Kaliningrad. 48, 32—41 (2017).

4. *Galaev, S. V.:* On a sub-Riemannian manifold of contact type a connection. DGMF. Kaliningrad. 50, 68—81 (2019).

5. *Gordeeva, I.A., Panzhensky, V.I., Stepanov, S.E.*: Riemann — Cartan manifolds. Itogi nauki i tekhn. Sovrem. math. and its app. Theme reviews, 123, 110—141 (2009).

6. *Agricola, I., Ferreira, A.C., Friedrich, Th.:* The classification of naturally reductive homogeneous spaces in dimensions $n \leq 6$. Diff. Geom. Appl., 39, 59—92 (2015).

7. *Alexandrov, B*.: Sp(n)U(1)-connections with parallel totally skew-symmetric torsion. J. Geom. Phys., 57, 323—337 (2006).

8. *Bukusheva, A.V., Galaev, S.V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bull. of the Transilvania University of Brasov, Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics, **4** (53):2, 13—22 (2011).

9. *Cleyton, R., Swann, A*.: Einstein metrics via intrinsic or parallel torsion. Math. Z., 247, 513—528 (2004).

10. *Dileo, G., Lotta, A.:* A note on Riemannian connections with skew torsion and the de Rham splitting. Manuscripta Math. **156**:3-4, 299—302 (2018).

11. *Friedrich, Th.:* G_2-manifolds with parallel characteristic torsion. Diff. Geom. Appl., 25, 632—648 (2007).

12. *Galaev, S.V.:* Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures. Lobachevskii J. of Math., **39**:1, 71—76 (2018).

УДК 514.75

Н. А. Елисеева [1]

[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
ne2705@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-8

Нормализации Нордена — Чакмазяна распределений, заданных на гиперповерхности

В проективном пространстве продолжаем изучать гиперповерхность, несущую тройку сильно взаимных распределений. Для оснащающих распределений гиперповерхности внутренним образом введена нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна.

Ключевые слова: гиперповерхность, распределение, нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна, инвариантность нормалей 1-го и 2-го рода.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\sigma,\tau=\overline{1,n-1}\,;\;\; p,q=\overline{1,r}\,;\;\; v,w=\overline{r+1,n-1}\,;\;\; i,j=\overline{r+1,m}\,;$$

$$\mu,\eta=\{\overline{1,r};\ \overline{m+1,n-1}\}\,;\;\; a,b=\overline{1,m}\,;\;\; \alpha,\beta=\overline{m+1,n-1}\,.$$

Продолжаем изучать гиперповерхность $\Omega_{n-1}\subset P_n$, несущую тройку сильно взаимных (Λ, L, E)-распределений [1]. Этот объект является элементом трехсоставного сильно взаимного распределения $VH\subset P_n$ [2] в случае, когда H-распределение голономно, при этом основные распределения связаны соотношениями

$\Lambda_r(A_0)\subset M_m(A_0)\subset H_{n-1}(A_0)$, $M_m(A_0)=\left[\Lambda_r(A_0),L_s(A_0)\right]$, $s=m-r$,

Поступила в редакцию 17.05.2020 г.

$$\Phi_{n-r-1}(A_0)=\left[L_s(A_0),E_{n-m-1}(A_0)\right],$$
$$\Psi_{n-s-1}(A_0)=\left[\Lambda_r(A_0),E_{n-m-1}(A_0)\right],$$
$$\Phi_{n-r-1}(A_0)\cap M_m(A_0)=L_s(A_0)\,,\ \Psi_{n-s-1}(A_0)\cap M_m(A_0)=\Lambda_r(A_0)\,,$$

где $\Phi_{n-r-1}(A_0)$, $\Psi_{n-s-1}(A_0)$, $E_{n-m-1}(A_0)$ — характеристики гиперплоскости $H(A_0)$ при смещениях центра A_0 вдоль интегральных кривых *Λ*-, *L*-, *M*-распределений [1].

1. Будем говорить, что *Λ*-распределение, заданное на гиперповерхности Ω_{n-1}, нормализовано в смысле Нордена — Чакмазяна [2], если в каждой точке $A_0\in\Omega_{n-1}$ к нему инвариантным образом присоединены поля нормалей 1-го рода $N_{n\text{-}r}(A_0)$ и нормалей 2-го рода $N_{r-1}(A_0)$, определяемые, соответственно, полями квазитензоров

$$\nabla\nu_n^p+\omega_n^p=\nu_{n\sigma}^p\omega_0^\sigma\ \text{(a)},\ \ \nabla\nu_p^0+\omega_p^0=\nu_{p\sigma}^0\omega_0^\sigma\,. \qquad (1)$$

Отметим, что в каждой точке $A_0\in\Omega_{n-1}$ нормаль 1-го рода $N_{n\text{-}r}(A_0)=[\Phi_{n-r-1};X_n]$ проходит через характеристику Φ_{n-r-1} касательной гиперплоскости $H(A_0)$, полученную при смещениях точки A_0 вдоль интегральных кривых *Λ*-распределения. Требование инвариантности нормали $N_{n\text{-}r}(A_0)$, где $X_n=A_n+\nu_n^pA_p+\nu_n^vA_v$, приводит к условиям (1.a). Если потребовать, чтобы прямая $\lambda_1=[A_0,X_n]$ была инвариантна, то кроме (1.a) получим условия

$$\nabla\nu_n^v+\omega_n^v=\nu_{n\sigma}^v\omega_0^\sigma\,. \qquad (2)$$

Уравнения (2) выполняются, если охват объекта $\{\nu_n^v\}$ осуществить с помощью квазитензора

$$\Lambda_n^v=\frac{1}{r}\Lambda_{pq}^v\Lambda_n^{qp}\,,\quad \nabla\Lambda_n^v+\omega_n^v=\lambda_{n\sigma}^v\omega_0^\sigma\,,$$

где $\Lambda_{pq}^v\overset{def}{=}\{\Lambda_{pq}^i;\Lambda_{pq}^\alpha\}$ [3].

В дальнейшем считаем, что прямая $\lambda_1 = [A_0; X_n]$ инвариантна, а точка X_n имеет разложение вида

$$X_n = A_n + \nu_n^p A_p + \Lambda_n^v A_v .$$

Итак, под полем нормалей 1-го рода $N_{n\text{-}r}(A_0)$ Λ-распределения мы будем понимать поле соответствующего квазитензора $\{\nu_n^p\}$.

Если охваты квазитензоров $\{\nu_n^p\}$, $\{\nu_p^0\}$ осуществить, например, по формулам $\nu_n^p = \Lambda_n^p$, $\nu_p^0 = \lambda_p^0$, где

$$\Lambda_n^p = \frac{1}{s} \Lambda_{ij}^p \Lambda_n^{ji}, \quad \nabla \Lambda_n^p + \omega_n^p = \Lambda_{n\sigma}^p \omega_0^\sigma , \tag{3}$$

$$\lambda_p^0 = -\frac{1}{s} \Lambda_{pi}^i , \quad \nabla \lambda_p^0 + \omega_p^0 = \lambda_{p\sigma}^0 \omega_0^\sigma , \tag{4}$$

то в дифференциальной окрестности 2-го порядка к оснащающему Λ-распределению гиперповерхности Ω_{n-1} внутренним образом присоединяется нормализация Нордена — Чакмазяна $(\Lambda_n^p, \lambda_p^0)$.

Проведем аналогичные рассуждения для других оснащающих распределений гиперповерхности, что приведет нас к следующим результатам.

2. В дифференциальной окрестности 2-го порядка к L-распределению, заданному на гиперповерхности Ω_{n-1}, внутренним образом будет присоединена нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна, если охваты квазитензоров $\{\nu_n^i\}$ и $\{\nu_i^0\}$, определяющих соответственно нормаль 1-го рода

$$N_{n\text{-}s}(A_0) = [\Psi_{n-s-1}; Y_n] ,$$

где $Y_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^\mu A_\mu$, и нормаль 2-го рода

$$N_{s-1}(A_0) \subset L(A_0) , \ \mathrm{A}_0 \notin N_{s-1}(A_0),$$

осуществить по формулам $\nu_n^i = \Lambda_n^i$, $\nu_i^0 = \lambda_i^0$, где

$$\Lambda_n^i = \frac{1}{r}\Lambda_{pq}^i \Lambda_n^{qp}, \quad \nabla \Lambda_n^i + \omega_n^i = \Lambda_{n\sigma}^i \omega_0^\sigma, \tag{5}$$

$$\lambda_i^0 = -\frac{1}{r}\Lambda_{ip}^p, \quad \nabla \lambda_i^0 + \omega_i^0 = \Lambda_{i\sigma}^0 \omega_0^\sigma. \tag{6}$$

При этом прямая $l_1 = [A_0; Y_n]$ будет инвариантна, если охват объекта $\{\nu_n^\mu\}$ построить следующим образом:

$$L_n^\mu = \frac{1}{s}\Lambda_{ij}^\mu \Lambda_n^{ji}, \quad \nabla L_n^\mu + \omega_n^\mu = L_{n\sigma}^\mu \omega_0^\sigma,$$

где $\Lambda_{ij}^\mu = \{\Lambda_{ij}^p; \Lambda_{ij}^\alpha\}$ [3].

3. Нормализацию Нордена — Чакмазяна E-распределения, заданного на гиперповерхности Ω_{n-1}, определим следующим образом. В каждой точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$ для плоскости $E(A_0)$ заданы нормаль 1-го рода $N_{m+1}(A_0) = [M_m; Z_n]$, где

$$Z_n = A_n + \nu_n^\alpha A_\alpha + \nu_n^a A_a,$$

и нормаль 2-го рода

$$N_{n-m-2}(A_0) \subset E(A_0), \; A_0 \notin N_{n-m-2}(A_0),$$

условия инвариантности которых соответственно имеют вид

$$\nabla \nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{n\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma, \quad \nabla \nu_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \nu_{\alpha\sigma}^0 \omega_0^\sigma. \tag{7}$$

Соотношения (7) выполняются, если охваты квазитензоров $\{\nu_n^\alpha\}$, $\{\nu_\alpha^0\}$ представить, например, в виде

$$\nu_n^\alpha = E_n^\alpha, \; \nu_\alpha^0 = \varepsilon_\alpha^0,$$

где $E_n^\alpha = \frac{1}{m}\Lambda_{ab}^\alpha \Lambda_n^{ba}$, $\varepsilon_\alpha^0 = -\frac{1}{m}\Lambda_{\alpha a}^a$.

Если охват квазитензора $\{\nu_n^a\}$ осуществить, например, по формуле $\nu_n^a = E_n^a$, где $E_n^a = \dfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{\alpha\beta}^a \Lambda_n^{\beta\alpha}$, то прямая $\varepsilon_1 = [A_0; Z_n]$ будет инвариантна.

4. Будем говорить, что оснащающее *M*-распределение гиперповерхности Ω_{n-1} нормализовано в смысле Нордена — Чакмазяна [2], если к нему инвариантным образом присоединены поля нормалей 1-го рода $N_{n\text{-}m}(A_0) = [E_{n-m-1}; \varepsilon_n]$ и нормалей 2-го рода $N_{m\text{-}1}(A_0)$, определяемые соответственно полями квазитензоров:

$$\nabla \nu_n^a + \omega_n^a = \nu_{n\sigma}^a \omega_0^\sigma, \quad \nabla \nu_a^0 + \omega_a^0 = \nu_{a\sigma}^0 \omega_0^\sigma,$$

где $\varepsilon_n = A_n + \nu_n^a A_a + E_n^\alpha A_\alpha$.

При этом охваты квазитензоров можно осуществить, например, по формулам $\nu_n^a = \Lambda_n^a \overset{def}{=} \{\Lambda_n^p; \Lambda_n^i\}$ (3, 5), $\nu_a^0 = \lambda_a^0 \overset{def}{=} \{\lambda_p^0; \lambda_i^0\}$ (4, 6).

Прямая $\mu_1 = [A_0; \varepsilon_n]$ является инвариантной, если охват объекта $\{\nu_n^\alpha\}$ представить в виде

$$E_n^\alpha = \frac{1}{m}\Lambda_{ab}^\alpha \Lambda_n^{ba}, \quad \nabla E_n^\alpha + \omega_n^\alpha = E_{n\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma .$$

5. Для оснащающего *Ф*-распределения гиперповерхности Ω_{n-1} нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна [2] определяется следующим образом. В каждой точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$ для плоскости $\Phi(A_0)$ задается нормаль 1-го рода

$$N_{r+1}(A_0) = [\Lambda_r(A_0); \Phi_n(A_0)],$$

где $\Phi_{\text{n}} = A_n + \nu_n^{\text{v}} A_v + \nu_n^p A_p$, и нормаль 2-го рода $N_{n-r-2}(A_0)$ в смысле Нордена [4], условия инвариантности которых имеют соответственно вид

$$\nabla \nu_n^v + \omega_n^v = \nu_{n\sigma}^v \omega_0^\sigma, \quad \nabla \nu_v^0 + \omega_v^0 = \nu_{v\sigma}^0 \omega_0^\sigma .$$

Охваты квазитензоров $\{\nu_n^v\}$, $\{\nu_v^0\}$ можно осуществить, например, по формулам

$$\nu_n^v = \Lambda_n^v \overset{def}{=} \{\Lambda_n^i; \Lambda_n^\alpha\}, \quad \nu_v^0 = \lambda_v^0 \overset{def}{=} \{\lambda_i^0; \lambda_\alpha^0\},$$

где Λ_n^i, λ_i^0 определяются соответственно соотношениями (5), (6) и

$$\Lambda_n^\alpha = \frac{1}{r} \Lambda_{pq}^\alpha \Lambda_n^{qp}, \quad \nabla \Lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \Lambda_{n\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma,$$

$$\lambda_\alpha^0 = -\frac{1}{r} \Lambda_{\alpha p}^p, \quad \nabla \lambda_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \lambda_{\alpha\sigma}^0 \omega_0^\sigma .$$

Требование инвариантности прямой $\varphi_1 = [A_0; \Phi_n]$ выполняется, если охват объекта $\{\nu_n^p\}$, например, представить в виде

$$\Phi_n^p = \frac{1}{n - r - 1} \Lambda_{vw}^p \Lambda_n^{wv}, \quad \nabla \Phi_n^p + \omega_n^p = \Phi_{n\sigma}^p \omega_0^\sigma .$$

6. В дифференциальной окрестности 2-го порядка к оснащающему Ψ-распределению гиперповерхности Ω_{n-1} внутренним образом будет присоединена нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна, если охваты квазитензоров $\{\nu_n^\mu\}$ и $\{\nu_\mu^0\}$, задающих соответственно нормаль 1-го рода $N_{s+1}(A_0) = [L_s(A_0); \Psi_n(A_0)]$, где $\Psi_{\text{n}} = A_n + \nu_n^\mu A_\mu + \nu_n^i A_i$, и нормаль 2-го рода $N_{n-s-1}(A_0)$, представить в виде

$$\nu_n^\mu = \Lambda_n^\mu \overset{def}{=} \{\Lambda_n^p; \widetilde{\Lambda}_n^\alpha\}, \quad \nu_\mu^0 = \lambda_\mu^0 \overset{def}{=} \{\lambda_p^0; \widetilde{\lambda}_\alpha^0\},$$

где Λ_n^p и λ_p^0 определяются соответственно по формулам (3), (4) и

$$\widetilde{\Lambda}_n^\alpha = \frac{1}{s}\Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^{ji}, \quad \nabla\widetilde{\Lambda}_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \widetilde{\Lambda}_{n\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma,$$

$$\widetilde{\lambda}_\alpha^0 = -\frac{1}{s}\Lambda_{\alpha i}^i, \quad \nabla\widetilde{\lambda}_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \widetilde{\lambda}_{\alpha\sigma}^0 \omega_0^\sigma.$$

Прямая $\psi_1 = [A_0; \Psi_n]$ является инвариантной, если $v_n^i = \Psi_n^i$, где $\Psi_n^i = \dfrac{1}{n\text{-}s\text{-}1}\Lambda_{\mu\eta}^i \Lambda_n^{\eta\mu}$, $\nabla \Psi_n^i + \omega_n^i = \Psi_{n\sigma}^i \omega_0^\sigma$.

Список литературы

1. *Елисеева Н. А.* Гиперповерхность проективного пространства, оснащенная распределениями // ДГМФ. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 52—63.

2. *Попов Ю. И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства : монография. СПб., 1992.

3. *Елисеева Н. А.* Поля фундаментальных и охваченных объектов гиперповерхности, оснащенной распределениями // ДГМФ. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 68—77.

4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

N. A. Eliseeva[1]

[1] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prospect, Kaliningrad, 36022, Russia
ne2705@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-8

Normalization of Norden — Chakmazyan for distributions given on a hypersurface

Submitted on May 17, 2020

In the projective space, we continue to study a hypersurface with three strongly mutual distributions. For equipping distributions of a hypersurface, normalization in the sense of Norden — Chakmazyan is

introduced internally. The distribution of the equipping planes is normalized in the sense of Norden — Chakmazyan if the fields of normals of the 1st kind and normals of the 2^{nd} kind are attached to it in an invariant way. For each equipping distribution, the fields of normals of the 1^{st} and 2^{nd} kind are defined by the corresponding fields of quasitensors. At each point of the hypersurface, the normal of the 1^{st} kind of the equipping distribution of the hypersurface passes through the characteristic of the tangent hypersurface. This characteristic was obtained with displacements of the point along the integral curves of the equipping distribution.

For equipping distributions, the coverage of quasitensors is found under which the conditions of invariance of the normals of the 1^{st} and 2^{nd} kind are satisfied.

Coverage of quasitensors is found for which normalization in the sense of Norden — Chakmazyan is attached to the equipping distributions of the hypersurface in a second-order differential neighborhood.

Keywords: hypersurface, distribution, normalization in the sense of Norden — Chakmazyan, invariance of normals of the 1^{st} and 2^{nd} kind.

References

1. *Eliseeva, N. A.:* Hypersurfaces of projective space equipped with distributions. DGMF. Kaliningrad. 44, 52—63 (2013).

2. *Popov, Yu. I.:* Fundamentals of the theory of three-part distributions of projective space. St. Petersburg (1992).

3. *Eliseeva, N. A.:* Fields of the fundamental and enveloped objects of hypersurface equipped with distributions. DGMF. Kaliningrad. 47, 68—77 (2016).

4. *Norden, A. P.:* Spaces with an affine connection. Moscow (1976).

УДК 514.75

М. В. Кретов[1]
[1] _Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия_
kretov1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-9

Дифференцируемое отображение, порожденное комплексами эллиптических параболоидов

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается дифференцируемое отображение, порожденное комплексами эллиптических параболоидов. Геометрически охарактеризованы индикатриса и главное направление исследуемого отображения.

Ключевые слова: комплекс, эквиаффинное пространство, отображение, эллиптический параболоид, главное направление, индикатриса отображения, система уравнений Пфаффа, координатные векторы, репер, характеристическое многообразие.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассмотрим дифференцируемое отображение

$$f : C \in A_3 \to q \in \hat{\Pi}_3 ,$$

где C — вершина эллиптического параболоида, q — эллиптический параболоид (образующий элемент) комплекса $\hat{\Pi}_3$, рассмотренного в работе [1], когда координатные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены и лежат в касательной плоскости эллиптического параболоида в его вершине, координатный вектор $\bar{e}_3$ направлен по главному диаметру образующего элемента так,

Поступила в редакцию 27.01.2020 г.

чтобы концы P_1 и P_2 соответственно векторов $\bar{e}_1+\bar{e}_3$ и $\bar{e}_2+\bar{e}_3$ лежали на параболоиде q, при этом индикатрисы векторов $\bar{e}_i\,(i, j, k, ... = \overline{1, 3})$ описывают линии с касательными, параллельными вектору $\bar{e}_1$, а точка P_1 принадлежит характеристическому многообразию [2].

Исследование отображения f будем проводить в репере $r=\{A,\bar{e}_i\}$, где A — вершина эллиптического параболоида, векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены и лежат в касательной плоскости эллиптического параболоида в его вершине, вектор $\bar{e}_3$ направлен по главному диаметру образующего элемента так, чтобы концы P_1 и P_2 соответственно векторов $\bar{e}_1+\bar{e}_3$ и $\bar{e}_2+\bar{e}_3$ лежали на параболоиде q. При этом уравнение эллиптического параболоида согласно [1] будет иметь вид

$$(x^1)^2+(x^2)^2-x^3=0. \tag{1}$$

В репере r система уравнений Пфаффа отображения f, как показано в работах [1; 3; 4], будет иметь вид

$$\omega_1^1=-\theta^1-\theta^3,\ \omega_2^1=\lambda\theta^2,$$

$$\omega^3=\omega_1^2=\omega_1^3=\omega_2^3=\omega_3^2=\omega_2^2=\omega_3^3=0, \tag{2}$$

где $\theta^1=\omega^1$, $\theta^2=\omega^2$, $\theta^3=\omega_3^1$.

Отображение f существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента [5].

Пусть x^i — координаты точки C, тогда согласно работе [6] уравнения отображения f примут вид

$$a_{11}=1+2x^1+2x^3+3(x^1)^2-(x^2)^2+(x^3)^2+5x^1x^3+<3>,$$

$$a_{22}=1-\lambda^2(x^2)^2+<3>,\quad a_{33}=-(x^3)^2+<3>,$$

$$a_{12}=a_{21}=-\lambda x^2+\frac{3}{2}\lambda x^1x^2-\frac{1}{2}\lambda x^2x^3+<3>,$$

$$a_{13} = a_{31} = -\lambda x^3 + \frac{3}{2} x^1 x^3 + \frac{3}{2}(x^3)^2 + <3>, \qquad (3)$$

$$a_{23} = a_{32} = -\lambda x^2 x^3 + <3>,$$

$$a_1 = -x^1 - 2(x^1)^2 - \lambda(x^2)^2 + (x^3)^2 - 2x^1 x^3 + <3>,$$

$$a_2 = -x^2 + \lambda x^1 x^2 + <3>, \quad a_3 = x^1 x^3 + <3>,$$

где символ $<3>$ означает совокупность членов порядка малости не меньше трех относительно приращений координат точки области определения.

Теорема. *Индикатриса отображения* f *и конус* $K_f(0)$ *главных направлений этого отображения вырождаются в точку, совпадающую с вершиной образующего элемента исследованного в работе* [1] *комплекса эллиптических параболоидов.*

Согласно работе [3] система уравнений индикатрисы I_f отображения f имеет вид

$$x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^1(3x^1 - 2) = 0, \quad x^1(2x^1 - 1) = 0. \qquad (4)$$

По методике, изложенной в работе [6], находим систему уравнений $K_f(0)$ — главных направлений отображения f. Эта система уравнений имеет вид

$$x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^1(3x^1 + 5x^3) = 0, \quad x^1(x^1 + x^3) = 0. \qquad (5)$$

Из систем уравнений (4) и (5) непосредственно следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. *Виноградова Н.В., Кретов М.В.* Комплексы эллиптических параболоидов // ДГМФ. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 35—38.

2. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1974. Т. 6. С. 113—134.

3. *Кретов М.В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированные с многообразиями гиперквадрик // Междунар. конф. по геометрии и приложениям. Смолян, 1986. С. 23.

4. *Кретов М.В.* О подклассах дифференцируемого отображения, порожденного комплексами гиперквадрик // ДГМФ. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 70—74.

5. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

6. *Кретов М.В.* О главных точках дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами гиперквадрик // ДГМФ. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 51—58.

M. V. Kretov[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
kretov1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-9

Differentiable mapping generated by elliptic paraboloid complexes

Submitted on January 27, 2020

In three-dimensional equiaffine space, we consider a differentiable map generated by complexes with three-parameter families of elliptic paraboloids according to the method proposed by the author in the materials of the international scientific conference on geometry and applications in Bulgaria in 1986, as well as in works published earlier in the scientific collection of *Differ. Geom. Mnogoobr. Figur*. The study is carried out in the canonical frame, the vertex of which coincides with the top of the generating element of the manifold, the first two coordinate vectors are conjugate and lie in the tangent plane of the elliptic paraboloid at its vertex, the third coordinate vector is directed along the main diameter of the generating element so that the ends are, respectively, the sums of the first and third, and also the sums of the second and third coordinate vectors lay on a paraboloid, while the indicatrixes of all three coordinate vectors describe lines with tangents, parallel to the first coordinate vector. The existence theorem of the mapping under study is proved, according to which it exists and is determined with the arbitrariness of one function of one argument. The systems of equations of the indicatrix and the main directions of the mapping under consideration are obtained. The indicatrix and the cone of the main directions of the indicated mapping are geometrically characterized.

Keywords: complex, equiaffine space, mapping, elliptical paraboloid, main direction, display index, system of Pfaff equations, coordinate vectors, reference, characteristic variety.

References

1. *Vinogradova, N. V., Kretov, M. V.:* Complexes of elliptic paraboloids. DGMF. Kaliningrad. 41, 35—38 (2010).

2. *Malakhovsky, V. S., Makhorkin, V. V.:* Differential geometry of manifolds of hyperquadrics in *n*-dimensional projective space. Tr. Geom. Sem., 6, 113—134 (1974).

3. Kretov, M. V.: Differentiable mappings associated with hyperquadric varieties. International Conference on Geometry and Applications. Smolyan. P. 23 (1986).

4. *Kretov, M. V.:* On subclasses of a differentiable map generated by complexes of hyperquadrics. DGMF. Kaliningrad. 41, 70—74 (2010).

5. *Malakhovsky, V. S.:* Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978).

6. *Kretov, M. V.:* On the main points of differentiable mappings associated with complexes of hyperquadrics. DGMF. Kaliningrad. 37, 51—58 (2006).

УДК 574.76

В. С. Малаховский[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[1]nikolaymal@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-10

Как без компьютера найти простые числа, следующие за данным простым числом

Показано, как без использования компьютера с помощью нескольких арифметических прогрессий можно определить одно или несколько простых чисел, следующих за данным простым числом. Даны пять примеров нахождения таких простых чисел.

Ключевые слова: простое число, составное число, арифметическая прогрессия.

1. Строение множества простых чисел $P^{*} = P \setminus \{2,3\}$

На протяжении тысячелетий математики и философы пытались найти формулу для получения простых чисел, но все попытки установить закон их возникновения не увенчались успехом. По-видимому, такой формулы не существует. В работах [1; 2] показано, что для определения структуры множества P^{*} простых чисел надо воспользоваться тем, что любое простое число $P \geq 5$ может быть представлено в виде

$$P_1 = 6k_1 - 1, \ \ P_2 = 6k_2 + 1 \quad (k_1, k_2 \in N)\,. \tag{1}$$

Значит, можно рассматривать множества

$$A_1 = \{k_1\}, \ \ A_2 = \{k_2\}\,,$$

однозначно определяющие простые числа (1).

Поступила в редакцию 14.03.2020 г.

Рассмотрим подмножества составных чисел

$$g_1 = 6j_1 - 1,\ \ g_2 = 6j_2 + 1\ \ (j_1, j_2 \in N)$$

и подмножества $B_1 = \{j_1\}$, $B_2 = \{j_2\}$, однозначно определяющие эти составные числа.

Очевидно, что

$$A_1 = N \setminus B_1,\ \ A_2 = N \setminus B_2\,,$$

то есть множества A_1 и A_2 образованы пропущенными в B_1 и B_2 натуральными числами.

В [1; 2] показано, что множества B_1 и B_2 определяются арифметическими прогрессиями:

B_1		B_2		
$1+5n$	$-1+7n$	$1+7n$	$-1+5n$	
$2n+11n$	$-2+13n$	$2n+13n$	$-2+11n$	
$3n+17n$	$-3+19n$	$3n+19n$	$-3+17n$	(2)
$4n+23n$	$-4+25n$	$4n+25n$	$-4+23n$	
…	…	…	…	

2. Нахождение простых чисел, следующих за данным простым числом P > 5

Зададим произвольное простое число $P > 5$. Вычитая из него или прибавляя к нему единицу, получаем число, кратное шести. Делим его на шесть. Получаем число a. Рассматриваем промежуток $[a, a+3]$. С помощью арифметических прогрессий (обычно их небольшого числа из первых строк формулы (2)) находим соответствующие подмножества множеств B_1 и B_2. Из пропущенных натуральных чисел в этих подмножествах находим подмножества множеств A_1 и A_2. По формулам (1) находим простые числа, следующие за числом P.

Если в указанном промежутке не окажется ни одного простого числа, расширяем промежуток:

$$[a,\ a+4],\ [a,\ a+5],\ \ldots$$

3. Примеры

1. $P = 2851$.

Имеем $\dfrac{2851-1}{6} = 475$. Промежуток: [475, 478]. Находим с помощью двух первых строчек прогрессий (2) в этом промежутке числа из B_1 и B_2:

$$\{475, 476, 478\};\ \{477, 478\}.$$

Следовательно, подмножество чисел из A_1 и A_2 в этом промежутке $\{477\}$, $\{475, 476\}$. Используя формулы (1), находим, что за простым числом 2851 следуют простые числа 2857, 2861.

2. $P = 13721$.

Промежуток: [2287, 2290]. Находим в этом промежутке числа из B_1 и B_2:

$$\{2288, 2289, 2290\};\ \{2289, 2290\}.$$

Следовательно, числа из A_1 и A_2 в этом промежутке

$$\{2287\},\ \{2287, 2288\}$$

Используя формулы (1), убеждаемся, что за простым числом 13721 следуют простые числа 13723, 13729.

3. $P = 27791$.

Промежуток: [4632, 4635]. Находим в этом промежутке числа из B_1 и B_2: $\{4633\}$; $\{4633, 4635\}$. Следовательно, числами из A_1 и A_2 являются числа

$$\{4632, 4634, 4635\},\ \{4632, 4633\}.$$

Значит, за простым числом 27791 следуют простые числа 27793, 27799, 27803, 27809.

4. $P = 64151$.

Промежуток: [10692, 10695]. Находим в этом промежутке числа из B_1 и B_2:

$$\{10694, 10695\};\ \{10693, 10694\}.$$

Следовательно, элементами из A_1 и A_2 являются числа

$$\{10692,\ 10693\},\ \{10692,\ 10695\}.$$

Значит, за простым числом 64151 следуют простые числа 64153, 64157, 64171.

5. $P = 99823$.

Промежуток: [16637, 16640]. Находим в этом промежутке числа из B_1 и B_2:

$$\{16637,\ 16638\};\ \{16639,\ 16640\}.$$

Следовательно, элементами из A_1 и A_2 являются числа

$$\{16639,\ 16640\},\ \{16637,\ 16638\}.$$

Значит, за простым числом 99823 следуют простые числа 99829, 99833, 99839.

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Удивительный мир простых чисел. Калининград, 2019.

2. *Малаховский В. С.* Об одном способе нахождения простых чисел // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер. Физико-математические и технические науки. 2019. №2. С. 21—24.

V. S. Malakhovsky[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
nikolaymal@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-10

About finding of prime numbers that follow after given prime number without using computer

Submitted on March 14, 2020

It is shown how to define one or several prime numbers following after given prime number without using computer only by calculating several arithmetic progressions. Five examples of finding such prime numbers are given.

Keywords: prime number, compound number, arithmetic progression.

References

1. *Malakhovsky, V. S.:* Wonderful world of prime numbers. Kaliningrad (2019).
2. *Malakhovsky, V. S.:* About one way of determination of prime numbers. IKBFU's Vestnik. Physics, Mathematics, and Technology, 2, 21—24 (2019).

УДК 514.76

К. В. Полякова[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

polyakova_@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-11

Продолжения аффинной связности и горизонтальных векторов

Рассмотрено расслоение линейных реперов над гладким многообразием. Отображение *de*, определяемое дифференциалами векторов репера *e* 1-го порядка, является лифтом в нормаль *N,* то есть пространство, дополняющее касательное пространство 1-го порядка до касательного пространства 2-го порядка к этому расслоению. В частности, отображение, определяемое дифференциалами вертикальных векторов этого репера, является вертикальным лифтом в нормаль *N*. Нормальный (вертикальный) лифт определяет нормальное (вертикальное) продолжение касательного пространства (то есть нормаль *N*) и его вертикального подпространства. Дифференциал произвольного векторного поля на расслоении линейных реперов является полным лифтом из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка к этому расслоению.

На расслоении базисные горизонтальные векторы играют двойную роль: во-первых, они служат операторами ковариантного дифференцирования геометрических объектов на расслоении; во-вторых, дифференциалы этих геометрических объектов можно рассматривать как формы, значения которых на базисных горизонтальных векторах дают ковариантные производные этих геометрических объектов.

Поступила в редакцию 30.04.2020 г.

Для объектов, ковариантные производные которых требуют привлечения связности 2-го порядка, ковариантные производные равны значениям дифференциалов этих объектов на горизонтальных векторах в продолженной аффинной связности. Построены продолжения горизонтальных векторов, то есть горизонтальные векторы 2-го порядка для продолженной связности. Касательное пространство 2-го порядка представлено в виде прямой суммы касательного пространства 1-го порядка, вертикальных продолжений вертикального и горизонтального подпространств, горизонтального продолжения горизонтального подпространства.

Ключевые слова: тангенциальнозначные формы, касательное пространство 2-го порядка, продолжение аффинной связности, горизонтальные векторы 1-го и 2-го порядков.

1. Каноническая форма на расслоении линейных реперов

Рассмотрим над m-мерным гладким многообразием X_m главное расслоение касательных реперов 2-го порядка со структурными уравнениями [3]

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{1}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{2}$$

$$d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}.$$

Структурные уравнения (1, 2) задают расслоение линейных реперов $L(X_m)$. Его типовым слоем является линейная группа $GL(m)$, действующая в касательном пространстве TX_m.

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m, а значит, и слой расслоения

$L(X_m)$. Следовательно, касательное пространство $TL(X_m)$ содержит вертикальное пространство $VL(X_m)=[e_i^j]$, касательное к слою в точке A.

Каноническая (структурная [1, с. 48]) форма на многообразии $L(X_m)$ имеет вид

$$\theta_{L(X_m)} = \omega^i e_i + \omega_j^i e_i^j . \tag{3}$$

Двойственным к реперу $e=\left\{e_j^i, e_k\right\}$ касательного пространства $TL(X_m)=span(e_j^i, e_k)$ является корепер $\{\omega^i, \omega_k^j\}$ пространства $T^*L(X_m)$: $\omega^i(e_j)=\delta_j^i$, $\omega^i(e_j^k)=0$, $\omega_j^i(e_k)=0$ $\omega_j^i(e_l^k)=\delta_l^i\delta_j^k$. Пусть текущая точка многообразия X_m в некоторой окрестности определяется локальными координатами x^i (*i, j, k, … =* 1, …, *m*). Формы инвариантного корепера $\left\{\omega^i, \omega_i^j\right\}$ относительно натурального корепера $\left\{dx^i, dx_j^k\right\}$ выражаются по формулам [3]

$$\begin{pmatrix} \omega^i \\ \omega_j^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_l^i & 0 \\ -x_{js}^k x_l^s & -\delta_p^k \overset{*}{x}{}_j^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^l \\ dx_q^p \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}_j^i \end{pmatrix}$ — матрица, обратная к матрице (x_i^j), $x_{jk}^i = x_{kj}^i$. Будем считать, что все слоевые координаты $x_{jk}^i, x_{jkl}^i, \ldots$ симметричны по нижним индексам, а значит, симметричны формы

$$\omega_{jk}^i = dx_{jk}^i + x_{jk}^l\omega_l^i - x_{lk}^i\omega_j^l - x_{jl}^i\omega_k^l + (x_{jk}^m x_{ml}^i - x_{jkl}^i)\omega^l .$$

Векторы (точнее, векторные поля) репера $e=\left\{e_j^i, e_k\right\}$ в натуральном репере $\left\{\partial_j^i = \partial/\partial x_i^j,\ \partial_k = \partial/\partial x^k\right\}$ выражаются по формулам

$$e_j^i = -x_k^i \partial_j^k,\ e_k = \overset{*}{x}{}_k^j \partial_j + x_{jk}^l\ e_l^j .$$

2. Лифты векторов из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка

Векторы e_i^j, e_i репера 1-го порядка являются дифференцированиями на функциях, точнее, операторами пфаффовых производных этих функций. При этом дифференциал d переводит касательные векторы 1-го порядка в тангенциальнозначные формы со значениями в касательном пространстве порядка 2 (соприкасающемся пространстве [7]) $T^2L(X_m)$, то есть

$$d: \Omega_0^1 = TL(X_m) \to \Omega_1^2 = \Omega_1\,(T^2L(X_m)).$$

Вертикальные e_i^j и невертикальные e_i векторы репера 1-го порядка задают отображения [5]

$$\begin{aligned} de_i^j &= -e_i^k\omega_k^j + e_{ik}^j\omega^k + e_{ik}^{jl}\omega_l^k , \\ de_i &= e_j\omega_i^j + e_k^j\omega_{ji}^k + e_{ij}\omega^j + e_{ij}{}^k\omega_k^j \end{aligned} \qquad (4)$$

из касательного пространства $TL(X_m) = span(e_j^i, e_k)$ в касательное пространство 2-го порядка $T^2L(X_m) = span(e_j^i,\ e_k,\ e_{ik}^j,$ $e_{ik}^{jl},\ e_{ij})$, причем $e_{ij} = e_{ji}$, $e_{ij}{}^k = e_{ji}^k$, $e_{ik}^{jl} = e_{ki}^{lj}$.

Векторы из совокупности $e' = \{e_{ik}^j, e_{ik}^{jl}, e_{ij}\}$ через операторы частных дифференцирований выражаются по формулам

$$e_{ik}^{jl} = x_s^j \frac{\partial^2}{\partial x_s^i \partial x_p^k} x_p^l, \quad e_{ik}^j = -x_{sk}^j e_i^s + x_{pk}^q e_{iq}^{jp} - x_l^j \overset{*}{x}{}_k^s \frac{\partial^2}{\partial x_l^i \partial x^s},$$

$$e_{ij} = x_{ij}^k e_k + (x_{lij}^k - x_{ij}^s x_{ls}^k) e_k^l + 2x_{l(i}^k e_{|k|j)}^l + x_{sj}^k x_{pi}^q e_{kq}^{sp} + \overset{*}{x}{}_i^l \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k} \overset{*}{x}{}_j^k .$$

Для линейного отображения $de: \ TL(X_m) \ \to \ T^2 L(X_m)$ из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка, определяемого по (4), имеем $de(e) = \dot{e}$:

$$de_i^j(e_k^l) = \dot{e}_{ik}^{jl}, \quad de_i^j(e_k) = \dot{e}_{ik}^j, \quad de_i(e_j^k) = \dot{e}_{ij}{}^k, \quad de_i(e_j) = \dot{e}_{ij}.$$

Векторы из совокупности $\dot{e} = \left\{ \dot{e}_{ik}^{jl}, \dot{e}_{kj}^l, \dot{e}_{il}{}^k, \dot{e}_{ij} \right\}$ выражаются по формулам [5]

$$\dot{e}_{ik}^{jl} = e_{ik}^{jl} - \delta_k^j e_i^l, \quad \dot{e}_{ik}^j = e_{ik}^j, \quad \dot{e}_{ij} = e_{ij} + e_k^l (x_{li}^s x_{sj}^k - x_{lij}^k),$$

$$\dot{e}_{ij}{}^k = e_{ij}{}^k + \delta_i^k e_j + e_p^q (\delta_j^p x_{qi}^k - \delta_q^k x_{ji}^p - \delta_i^k x_{qj}^p)$$

и удовлетворяют сравнениям на базе $L(X_m)$

$$d\dot{e}_{ik}^j \cong \dot{e}_{is}^{jl} \omega_{lk}^s, \ \ d\dot{e}_{ik}^{jl} \cong 0, \ \ d\dot{e}_{ij} \cong \dot{e}_{il}{}^k \omega_{kj}^l + \dot{e}_{kj}^l \omega_{li}^k, \ \ d\dot{e}_{ij}{}^k \cong \dot{e}_{sj}^{lk} \omega_{li}^s.$$

Векторы 2-го порядка образуют подпространство $N = span(\dot{e}_{ik}^{jl}, \dot{e}_{kj}^l, \dot{e}_{il}{}^k, \dot{e}_{ij})$, не содержащее векторы 1-го порядка, то есть $T^2 L(X_m) \ = \ TL(X_m) \oplus N$. Подпространство N является *нормалью 1-го порядка*. Векторы из совокупности $\dot{e}$ назовем *нормальными векторами*, а репер $\dot{e}^2 = \left\{ e, \dot{e} \right\}$ — *нормальным репером 2-го порядка*.

Для векторов репера $e = \left\{ e_j^i, e_k \right\}$ и их дифференциалов $de = \left\{ de_j^i, de_k \right\}$ имеем

$$L(X_m) \xrightarrow{\ e\ } TL(X_m) \xrightarrow{\ de\ } N = T^2 L(X_m) \setminus TL(X_m).$$

Отображение $de = \left\{ de_j^i, de_k \right\}$ (4) является лифтом отображения e; будем называть его *лифтом в нормаль* N (*нормальным лифтом)*, отображение de_j^i — *вертикальным лифтом в* *нормаль N*. Лифт $de = \{de^i_j, de_k\}$ позволяет строить продолжение касательного пространства $TL(X_m)$ и его вертикального подпространства $VL(X_m) = [e^j_i]$ в нормаль

$$N = T^2 L(X_m) \setminus TL(X_m) .$$

Нормаль N содержит подпространства

$$ {}^vV = span(\dot{e}^{jl}_{ik}), \quad {}^vT = span(\dot{e}^{jl}_{ik}, \dot{e}^{\,l}_{kj}), \quad {}^nV = span(\dot{e}^{jl}_{ik}, \dot{e}_{il}{}^{k}) ;$$

$$ {}^vV = {}^vT \cap {}^nV .$$

Теорема 1. *Нормальный лифт de определяет:*

1) нормаль N, то есть продолжение ${}^nT$ пространства $TL(X_m)$,

$$de\colon\ TL(X_m) \to N = span(\dot{e}^{jl}_{ik}, \dot{e}^{\,l}_{kj}, \dot{e}_{il}{}^{k}, \dot{e}_{ij}) = {}^nT \subset T^2 L(X_m) ;$$

2) продолжение ${}^nV$ пространства $VL(X_m)$

$$de\colon\ VL(X_m) \to {}^nV = span(\dot{e}^{jl}_{ik}, \dot{e}_{il}{}^{k}) \subset N \subset T^2 L(X_m) .$$

Теорема 2. *Вертикальный лифт de^i_j определяет:*

1) вертикальное продолжение ${}^vT$ пространства $TL(X_m)$

$$de^i_j\colon\ TL(X_m) \to {}^vT = span(\dot{e}^{jl}_{ik}, \dot{e}^{k}_{il}) \subset N \subset T^2 L(X_m) ;$$

2) вертикальное продолжение ${}^vV$ пространства $VL(X_m)$

$$de^i_j\colon\ VL(X_m) \to {}^vV = span(\dot{e}^{jl}_{ik}) \subset N \subset T^2 L(X_m) .$$

Для произвольного вектора $u = u^i e_i + u^i_j e^j_i \in TL(X_m)$ функции u^i, u^i_j удовлетворяют уравнениям

$$du^i = u^i{}_{,j}\omega^j + u^{i,k}_{,j}\omega^j_k , \quad du^i_j + u^k\omega^i_{jk} - u^i_k\omega^k_j = u^i_{j,k}\omega^k + u^{i,l}_{j,k}\omega^k_l ,$$

следовательно, $u^i = u^i(x^j, x^k_l)$, $u^i_j = -u^k x^i_{jk}$. При отображении $d: TL(X_m) \to \Omega_1(T^2L(X_m))$ получим

$$du = \hat{u}_i \omega^i + \hat{u}^i_j \omega^j_i , \qquad (5)$$

где

$$\hat{u}_i = u^j_i e_j + u^k_{ji} e^j_k + u^j e_{ji} + u^k_j e^j_{ki} ,\text{-}$$

$$\hat{u}^i_j = u^{ki}_j e_k + u^{ki}_{lj} e^l_k + u^k (e^i_{kj} + \delta^i_k e_j) + u^k_l (e^{li}_{kj} - \delta^l_j e^i_k) .$$

Теорема 3. *Пусть* $u: L(X_m) \to TL(X_m)$ *— векторное поле на* $L(X_m)$. *Тогда дифференциал отображения и является полным лифтом* $du: TL(X_m) \to T^2L(X_m)$ *из касательного пространства* $TL(X_m)$ *в касательное пространство 2-го порядка* $T^2L(X_m)$, *то есть*

$$du: \ v \in TL(X_m) \ \to \ {}^l v = \hat{u}_i v^i + \hat{u}^i_j v^j_i \ \in \ T^2L(X_m) ;$$

$${}^l v = du(v) = e_i(u^i_j v^j + u^{ik}_j v^j_k + u^j v^i_j) + e^j_i (u^i_{kj} v^k + u^{ik}_{jl} v^l_k - u^i_k v^k_j) +$$

$$+ e^{jl}_{ik} u^i_j v^k_l + e^j_{ik}(u^i_j v^k + u^k v^i_j) + e_{ij} v^i u^j .$$

3. Горизонтальные векторы и ковариантные производные

Зададим аффинную связность в расслоении $L(X_m)$ касательных линейных реперов способом Лаптева — Лумисте [8] с помощью форм $\widetilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$, причем компоненты объекта аффинной связности Γ^i_{jk} удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l}\omega^l . \qquad (6)$$

Внося в структурные уравнения (1, 2) формы связности $\tilde{\omega}^i_j$, получим структурные уравнения Э. Картана:

$$\mathrm{D}\omega^i = \Theta^i, \quad \mathrm{D}\tilde{\omega}^i_j = \Omega^i_j, \tag{7}$$

где $\Theta^i = T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$, $\Omega^i_j = R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l$ — *формы кручения и кривизны*, D — символ внешнего ковариантного дифференциала:

$$\mathrm{D}\omega^i = d\omega^i + \omega^j \wedge \tilde{\omega}^i_j, \quad \mathrm{D}\tilde{\omega}^i_j = d\tilde{\omega}^i_j - \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k.$$

Объекты кручения T^i_{jk} и кривизны R^i_{jkl} являются тензорами на базе X_m и выражаются по формулам

$$T^i_{jk} = \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}), \quad R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[k,l]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]}.$$

Дифференцируя уравнения (7) внешним образом, найдем тождества Бьянки в *бескоординатном индексном* представлении:

$$\mathrm{D}\Theta^i = \Omega^i_j \wedge \omega^j, \quad \mathrm{D}\Omega^i_j = 0, \tag{8}$$

где $\mathrm{D}\Theta^i = d\Theta^i + \Theta^j \wedge \tilde{\omega}^i_j$, $\mathrm{D}\Omega^i_j = d\Omega^i_j + \Omega^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k - \Omega^i_k \wedge \tilde{\omega}^k_j$ — внешние ковариантные дифференциалы форм кручения и кривизны.

Отображение $dR_g = (d - \omega^i_j de^j_i)\Big|_{\omega^i = 0}$ [6] осуществляет действие структурной группы в расслоении $TL(X_m)$, при этом уравнения инфинитезимального действия группы [10] для касательных векторов имеют вид

$$dR_g(e_i) = e_j\overline{\omega}^j_i + e^j_k\overline{\omega}^k_{ji}, \quad dR_g(e^j_i) = 2e^j_k\overline{\omega}^k_i,$$

$$dR_g(u) = [(u^{ki}_j + \delta^k_j u^i)e_k + (u^{ki}_{lj} - u^k_j\delta^i_l + u^i_l\delta^k_j)e^l_k]\overline{\omega}^j_i,$$

где формы $\overline{\omega} = \omega\Big|_{\omega^i = 0}$ являются структурными формами линейной группы $GL(m)$ расслоения $L(X_m)$.

Для произвольного вертикального вектора $v = u^i_j e^j_i$ координаты u^i и их пфаффовы производные u^{ik}_j равны нулю, и отображение dR_g переводит вертикальные векторы в вертикальные $dR_g(v) = (u^{ki}_{lj} - \delta^i_l u^k_j + \delta^k_j u^i_l)\overline{\omega}_i^{\,j} e^l_k$.

В аппарате, основанном на применении тангенциальнозначных форм, понятие инвариантности векторов и подпространств удобно определять следующим образом. Подпространство $L = span(u)$ является *инвариантным относительно отображения f*, если образ векторов *u* представляет собой векторнозначную 1-форму со значениями в подпространстве L, то есть $f(u) \in \Omega_1(L)$.

Применяя действие оператора $dR_g = (d - \omega^i_j de^j_i)\Big|_{\omega^i = 0}$ к векторам $\widetilde{e}_k = e_k + \Gamma^i_{jk} e^j_i$, аннулирующим формы связности, получим $dR_g(\widetilde{e}_k) = (d - \omega^i_j de^j_i)(\widetilde{e}_k)\Big|_{\omega^i = 0} = \widetilde{e}_i \pi^i_k$. Следовательно, *горизонтальные* векторы $\widetilde{e}_k$ инвариантны в совокупности.

На расслоении $Y \to X$ определены формы различных типов. Форма является *горизонтальной* (*вертикальной*), если она аннулируется вертикальными (горизонтальными) векторами. Форма является *горизонтальнозначной* (*HY-значной*), если она принимает значения в горизонтальном подпространстве *HY*. Форма является *вертикальнозначной* (*VY-значной*), если она принимает значения в вертикальном подпространстве *VY*. Например, горизонтальные вертикальнозначные формы — это формы $Y \to T^*X \otimes VY$; горизонтальные горизонтальнозначные формы — это $Y \to T^*X \otimes HY$.

Рассмотрим следующие тангенциальнозначные формы на многообразии $L(X_m)$ с привлечением векторов $\widetilde{e}_i$, e^j_k пространства $TL(X_m)$:

$\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \widetilde{e}_i \omega^i \in HL(X_m) \otimes T^* X_m \subset \Omega_1\,(HL(X_m))$ — горизонтальнозначная горизонтальная 1-форма связности;

$\overset{v}{\widetilde{\omega}} = e_i^j \widetilde{\omega}_j^i \in VL(X_m) \otimes V^* L(X_m) \subset \Omega_1\,(VL(X_m))$ — вертикальнозначная вертикальная 1-форма связности;

$\Theta = \widetilde{e}_i \Theta^i \in HL(X_m) \otimes \overset{2}{\wedge} T^* X_m \subset \Omega_2\,(HL(X_m))$ — горизонтальнозначная горизонтальная 2-форма кручения;

$\Omega = e_i^j \Omega_j^i \in VL(X_m) \otimes \overset{2}{\wedge} T^* X_m \subset \Omega_2\,(VL(X_m))$ — вертикальнозначная горизонтальная 2-форма кривизны.

Используя введенные тангенциальнозначные формы, структурные уравнения (7) и тождества (8) на многообразии $L(X_m)$ можно записать в *бескоординатном безындексном* виде:

$$\mathrm{D}\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \Theta, \quad \mathrm{D}\overset{v}{\widetilde{\omega}} = \Omega; \quad \mathrm{D}\Theta = [\Omega, \overset{h}{\widetilde{\omega}}], \quad \mathrm{D}\Omega = 0. \tag{9}$$

Действительно, справедливо

$$\mathrm{D}\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \widetilde{e}_i \mathrm{D}\omega^i = \widetilde{e}_i \Theta^i = \Theta, \ \mathrm{D}\overset{v}{\widetilde{\omega}} = e_i^j \mathrm{D}\widetilde{\omega}_j^i = e_i^j \Omega_j^i = \Omega,$$

$$\mathrm{D}\Omega = e_i^j \mathrm{D}\Omega_j^i = 0.$$

Коммутатор векторнозначных 1-форм $\overset{1}{\vartheta}$ и $\overset{2}{\vartheta}$ выражается по формуле (см., напр., [2, с. 135]):

$$[\overset{1}{\vartheta}, \overset{2}{\vartheta}] = [X_i \overset{1}{\vartheta}{}^i, Y_j \overset{2}{\vartheta}{}^j] = [X_i, Y_j] \overset{1}{\vartheta}{}^i \wedge \overset{2}{\vartheta}{}^j.$$

Поэтому

$$\mathrm{D}\Theta = \widetilde{e}_i \mathrm{D}\Theta^i = \Omega_j^i \wedge \omega^k \delta_k^j \widetilde{e}_i = \Omega_j^i \wedge \omega^k [e_i^j, \widetilde{e}_k] = [\Omega, \overset{h}{\widetilde{\omega}}].$$

Замечание. Все рассмотренные выше тангенциальнозначные формы заданы в репере $e = \left\{ e_j^i, \widetilde{e}_k \right\}$ касательного пространства $TL(X_m)$, но тождества (9) также выполняются, если вместо горизонтальных векторов $\widetilde{e}_k$ рассматривать касательные векторы $\varepsilon_k = \overset{*}{x}{}^j_k \partial_j$ из пространства TX_m. Принято использовать в (9) каноническую форму $\omega = \varepsilon_i \omega^i \in TX_m \otimes T^* X_m$ многообразия X_m вместо горизонтальной горизонтальнозначной формы $\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \widetilde{e}_i \omega^i \in HL(X_m) \otimes T^* X_m$. Также обычно используют форму $\Theta = \varepsilon_i \Theta^i \in TX_m \otimes \overset{2}{\wedge} T^* X_m$ вместо горизонтально-значной формы кручения $\Theta = \widetilde{e}_i \Theta^i \in HL(X_m) \otimes \overset{2}{\wedge} T^* X_m$.

Лемма 1. *Внешний ковариантный дифференциал канонической формы* θ *равен сумме форм кручения и кривизны* $\mathrm{D}\theta = \Theta + \Omega$.

Действительно, раскладывая каноническую форму на вертикальный $\overset{v}{\widetilde{\omega}}$ и горизонтальный $\overset{h}{\widetilde{\omega}}$ проекторы, то есть

$$\theta = e^j_i \widetilde{\omega}^i_j + \widetilde{e}_i \omega^i = \overset{v}{\widetilde{\omega}} + \overset{h}{\widetilde{\omega}},$$

получим $\mathrm{D}\theta = \mathrm{D}\overset{v}{\widetilde{\omega}} + \mathrm{D}\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \Theta + \Omega$.

Лемма 2. *Скобка горизонтальных форм связности равна сумме ее форм кручения и кривизны, то есть* $[\overset{h}{\widetilde{\omega}}, \overset{h}{\widetilde{\omega}}] = \Theta + \Omega$.

Действительно,

$$[\overset{h}{\widetilde{\omega}}, \overset{h}{\widetilde{\omega}}] = [\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j] \omega^i \wedge \omega^j = \widetilde{e}_i T^i_{kl} \omega^i \wedge \omega^j + e^j_i R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l = \Theta + \Omega.$$

4. Продолжение аффинной связности и горизонтальных векторов

Зададим формы [3, с. 167; 7]

$$\widetilde{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \Gamma^i_{jkl} \omega^l;$$

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{sl} \omega^s_{jk} + \Gamma^s_{jl} \omega^i_{sk} + \Gamma^s_{kl} \omega^i_{js} + \omega^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl,s} \omega^s.$$

Объект аффинной связности 2-го порядка $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jkl}\}$ задает связность в расслоении реперов 2-го порядка.

Ковариантные производные объекта связности Γ^i_{jk} относительно аффинной связности 2-го порядка $\overset{2}{\Gamma}$ выражаются по формуле

$$\nabla^2_l \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{kl} - \Gamma^i_{jkl} \tag{10}$$

и образуют самостоятельный тензор на многообразии X_m, то есть $\Delta\left(\nabla^2_l \Gamma^i_{jk}\right) \equiv 0$. Альтернируя ковариантные производные (10) по k и l, получим

$$\nabla^2_{[l}\Gamma^i_{jk]} = R^i_{jkl} + \Gamma^i_{js}T^s_{kl} - T^i_{jkl}.$$

Объект $T^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{jl]}$ в совокупности с объектом T^s_{kl} образует *кручение аффинной связности 2-го порядка* $T^2 = \{T^i_{jk}, T^i_{jkl}\}$ [9]. Кручение 2-го порядка T^2 является тензором: $\Delta T^i_{jkl} \equiv -T^s_{kl}\omega^i_{js}$.

В аффинной связности 1-го порядка производные тензора Q по направлению базисных горизонтальных векторов совпадают с образами горизонтальных векторов при линейном отображении, определенном дифференциалом этого тензора, то есть $\partial_{\tilde{e}_k} Q = dQ(\tilde{e}_k)$, и это суть ковариантные производные тензора Q в связности Γ^i_{jk}. Для ковариантных производных $\nabla_i u = \hat{u}_i + \hat{u}^k_j \Gamma^j_{ki}$ произвольного вектора $u = u^i e_i + u^i_j e^j_i$ касательного пространства 1-го порядка $TL(X_m)$ справедливы равенства $\nabla_i u = \partial_{\tilde{e}_i} u = du(\tilde{e}_i)$. В частности, для ковариантных производных базисных векторов 1-го порядка (вертикальных и горизонтальных) справедливо

$$\nabla_l e^i_j = \partial_{\tilde{e}_l} e^i_j = de^i_j(\tilde{e}_l), \quad \nabla_l \tilde{e}_k = d\tilde{e}_k(\tilde{e}_l) = \partial_{\tilde{e}_l}\tilde{e}_k.$$

В связности 2-го порядка аналогичное выполняется, в частности, для самого объекта аффинной связности Γ^i_{jk}:

$$\nabla^2_l \Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk}(\widetilde{e}_l) = \partial_{\widetilde{e}_l}\Gamma^i_{jk}, \tag{11}$$

если

$$\omega^i_{jk}(\widetilde{e}_l) = \Gamma^i_{jkl}. \tag{12}$$

Формы ω^i_{jk} и горизонтальные векторы $\widetilde{e}_l$ порождают основной объект Γ^i_{jkl} аффинной связности 2-го порядка.

Равенства (12) и (11) имеют место, если

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl} = x^s_{jk}x^i_{sl} - x^i_{jkl} + x^s_{jk}\Gamma^i_{sl} - x^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - x^i_{js}\Gamma^s_{kl}.$$

Связность $\overset{0}{\Gamma}{}^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl}\}$ является *продолженной связностью 2-го порядка*, а компоненты $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl}$ — *продолжением* связности Γ^i_{jk} [4].

Теорема 4 [4]. *Ковариантные производные объекта связности Γ^i_{jk} в продолженной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^2$ являются образами горизонтальных векторов при линейных отображениях, определенных дифференциалами объекта, а также производными по направлению горизонтальных векторов $\widetilde{e}_l$, то есть справедливы равенства*

$$\overset{0}{\nabla}{}^2_l \Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk}(\widetilde{e}_l) = \widetilde{e}_l(\Gamma^i_{jk}).$$

Теорема 5. *Нормальный лифт $de = \left\{de^i_j, de_k\right\}$ (4) порождает горизонтальные векторы 2-го порядка для продолженной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{0}{L}{}^i_{jkl}\}$, то есть*

$$de:\ \widetilde{e} = \{\widetilde{e}_k\} \in HL(X_m) \to {}^n\widetilde{e} = span(\widetilde{e}^i_{jk}, \widetilde{e}_{ik}) \in {}^nHL(X_m).$$

Применяя отображения de^i_j, de_k к горизонтальным векторам $\widetilde{e}_k$, получим *продолжения горизонтальных векторов* $\widetilde{e}_k$, то есть *горизонтальные векторы 2-го порядка для продолженной связности* [5; 11]

$$\widetilde{e}^i_{jk} = de^i_j(\widetilde{e}_k) = e^i_{jk} - e^l_j \Gamma^i_{lk} + e^{is}_{jl}\Gamma^l_{sk},$$

$$\widetilde{e}_{jk} = de_j(\widetilde{e}_k) = e_{jk} + e^{\ s}_{jl}\Gamma^l_{sk} + e_l \Gamma^l_{jk} + e^l_s \Gamma^s_{ljk},$$

причем инвариантными на $L(X_m)$ являются совокупности векторов $\{\widetilde{e}^i_{jk}\}$, $\{\widetilde{e}^i_{jk}, \widetilde{e}_{jk}\}$.

В частности, отображение

$$de^i_j:\ \widetilde{e} = \{\widetilde{e}_k\} \in HL(X_m) \to {}^v\widetilde{e} = span(\widetilde{e}^i_{jk}) \in {}^vHL(X_m)$$

порождает вертикальное продолжение ${}^v\widetilde{e} = span(\widetilde{e}^i_{jk})$ горизонтальных векторов, то есть пространство ${}^vHL(X_m)$.

Отображение [11]

$$d\widetilde{e}_k:\ \widetilde{e} = \{\widetilde{e}_l\} \in HL(X_m) \to {}^h\widetilde{e} = span(\widetilde{\widetilde{e}}_{kl}) \in {}^hHL(X_m)$$

порождает горизонтальное продолжение ${}^h\widetilde{e} = span(\widetilde{\widetilde{e}}_{kl})$ горизонтальных векторов, где

$$\widetilde{\widetilde{e}}_{kl} = d\widetilde{e}_k(\widetilde{e}_l) = \widetilde{e}_{kl} + \Gamma^i_{jk}\widetilde{e}^j_{il} + \nabla_l \Gamma^i_{jk} e^j_i,$$

причем $\widetilde{\widetilde{e}}_{[kl]} = R^i_{jkl}e^j_i + T^i_{kl}\widetilde{e}_i$.

Утверждение. *Для касательного пространства 2-го порядка* $T^2L(X_m)$ *справедливо разложение*

$$T^2L(X_m) = TL(X_m) \oplus {}^vVL(X_m) \oplus {}^vHL(X_m) \oplus {}^hHL(X_m),$$

где

$$TL(X_m) = span(e^i_j, \widetilde{e}_k), \quad {}^vVL(X_m) = span(\dot{e}^{ik}_{jl}),$$

$${}^vHL(X_m) = span(\widetilde{e}^i_{jk}), \quad {}^hHL(X_m) = span(\widetilde{\widetilde{e}}_{kl}).$$

Действительно, для горизонтального пространства 2-го порядка ${}^{n}HL(X_m)$ имеем

$$^{n}HL(X_m) = {}^{v}HL(X_m) \oplus {}^{h}HL(X_m) .$$

Принимая во внимание

$$T^2L(X_m) = TL(X_m) \oplus N , \quad N = {}^{v}VL(X_m) \oplus {}^{n}HL(X_m) ,$$

получаем требуемое разложение.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

2. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.

3. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С.139—189.

4. *Полякова К.В.* Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 114—128.

5. *Полякова К.В.* О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков // ДГМФ. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 108—125.

6. *Полякова К.В.* О действии структурной группы главного расслоения в его касательном пространстве // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 73—85.

7. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки, 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.

8. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 179—187.

9. *Janyska J., Kolář I.* On the connections naturally induced on the second order frame bundle // Archivum Mathematicum. 1986. Vol. 22, №1. P. 21—28.

10. *Kolář I., Vitolo R.* Absolute contact differentiation on submanifolds of Cartan space // Diff. Geom. and its Appl. 2010. Vol. 28, iss. 1. P. 19—32.

11. *Polyakova K.V.* Prolongations generated by horizontal vectors // J. Geom. 2019. №110. P. 53.

K. V. Polyakova[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-11

Prolongations of affine connection and horizontal vectors

Submitted on April 30, 2020

The linear frame bundle over a smooth manifold is considered. The mapping *de* defined by the differentials of the first-order frame *e* is a lift to the normal *N*, i. e., a space complementing the first-order tangent space to the second-order tangent space to this bundle. In particular, the mapping defined by the differentials of the vertical vector of this frame is a vertical lift into normal *N*.

The lift *de* allows us to construct a prolongation both of the tangent space and its vertical subspace into the second-order tangent space, more precisely into the normal *N*. The normal lift *de* defines the normal prolongation of the tangent space (i. e. the normal *N*) and its vertical subspace. The vertical lift defines the vertical prolongation of the tangent space and its vertical subspace. The differential of an arbitrary vector field on the linear frame bundle is a complete lift from the first-order tangent space to the second-order tangent space to this bundle.

It is known that the action of vector fields as differential operators on functions coincides with action of the differentials of these functions as 1-forms on these vector fields. Horizontal vectors played a dual role in the fibre bundle. On the one hand, the basic horizontal vectors serve as operators for the covariant differentiation of geometric objects in the bundle. On the other hand, the differentials of these geometric objects can be considered as forms (including tangential-valued ones) and their values on basic horizontal vectors give covariant derivatives of these geometric objects.

For objects which covariant derivatives require the second-order connection, the covariant derivatives are equal to the values of the differentials of these objects on horizontal vectors in prolonged affine connectivity. Prolongations of the basic horizontal vectors, i. e., the second-order horizontal vectors for prolonged connection, were constructed. The sec-

ond-order tangent space is represented as a straight sum of the first-order tangent space, vertical prolongations of the vertical and horizontal subspaces, and horizontal prolongation of the horizontal subspace.

Keywords: tangent-valued forms, second-order tangent space, prolongation of affine connection, covariant derivatives, first- and second-order horizontal vectors.

References

1. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

2. *Sulanke, R., Wintgen, P.:* Differentialgeometrie und faserbundel. Birkhauser, Basel (1972).

3. *Laptev, G. F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

4. *Polyakova, K. V.:* Special affine connection of the 1st and 2nd orders. DGMF. Kaliningrad. 46, 114—128 (2015).

5. *Polyakova, K. V.:* Vector-valued forms of the 1st, 2nd and 3rd orders for affine connection of the 2nd order. DGMF. Kaliningrad. 47, 108—125 (2016).

6. *Polyakova, K. V.:* On action of structure group of principal fibre bundle in its tangent space. DGMF. Kaliningrad. 48, 73—85 (2017).

7. *Rybnikov, A. K.:* Affinee connections of second order. Math. Notes, **29**:2, 143—149 (1981).

8. *Shevchenko, Yu. I.:* Laptev and Lumiste methods for the specication of a connection in a principal bundle. DGMF. Kaliningrad. 37, 179—187 (2006).

9. *Janyska, J., Kolář, I.:* On the connections naturally induced on the second order frame bundle. Archivum Mathematicum, **22**:1, 21—28 (1986).

10. *Kolář, I., Vitolo, R.:* Absolute contact differentiation on submanifolds of Cartan space. Differential Geometry and its Applications, **28**:1, 19—32 (2010).

11. *Polyakova, K. V.:* Prolongations generated by horizontal vectors. J. Geom., 110, 53 (2019).

УДК 514.76

Ю. И. Попов[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-12

Поля геометрических объектов, ассоциированных со скомпонованным гиперплоскостным $\mathcal{H}(\Lambda_{n-2}, L_1)$-распределением аффинного пространства

В данной работе рассмотрены фокальные многообразия, ассоциированные с $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределением аффинного пространства. В нормальных и касательных расслоениях L-, Λ-, H-подрасслоений введены аффинные (внутренние) связности и нормальные центроаффинные связности соответственно. Найдены тензоры кривизны полученных связностей.

Ключевые слова: расслоение, подрасслоение, фокальное многообразие расслоения, 2-форма кривизны, тензор кривизны, нормальная центроаффиная связность, внутренняя аффинная связность.

В работе используется следующая схема индексов:

$$I, J, K = \overline{1, n}; \alpha, \beta, \gamma = \overline{2, n-1}; \xi, \eta = \{1, n\};$$
$$i, j, k = \overline{1, n-1}; a, b = \overline{2, n}.$$

1. Фокальные многообразия, ассоциированные с $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределением аффинного пространства

Известно [1], что скомпанованное распределение-$\mathcal{H}(\Lambda_{n-2}, L_1)$ аффинного пространства (в дальнейшем кратко $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределение) задается системой уравнений

Поступила в редакцию 22.05.2020 г.

$$\omega_1^n = \Lambda_{1K}^n \omega^K ,\ \omega_1^\alpha = \Lambda_{1K}^\alpha \omega^K ,\ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K ,\ \omega_\alpha^1 = \Lambda_{\alpha K}^1 \omega^K , \quad (1)$$

коэффициенты которой удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} &\nabla \Lambda_{1K}^n = \Lambda_{1KL}^n \omega^L ,\ \nabla \Lambda_{1K}^\alpha + \Lambda_{1K}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{1KL}^\alpha \omega^L , \\ &\nabla \Lambda_{\alpha K}^n = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L ,\ \nabla \Lambda_{\alpha K}^1 + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^1 = \Lambda_{\alpha KL}^1 \omega^L . \end{aligned} \quad (2)$$

Имеет место теорема существования $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределения:

Теорема 1. *$\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределение существует с произволом (3n −5) функций n аргументов.*

Действительно, с одной стороны, утверждение теоремы 1 непосредственно следует из уравнений (1). С другой стороны, теорема 1 является при $m = n - 2$ следствием теоремы 1 [1].

Определение 1. *Фокальной точкой* текущего элемента $H(L)$-распределения с центром в точке A, соответствующей определенному направлению смещения центра A, называется точка F этого элемента, которая принадлежит также (с точностью до величины первого порядка малости) соседнему элементу этого распределения, получаемого смещением центра A в данном направлении (фокальном направлении, соответствующем данной точке F) [2].

Среди фокальных многообразий, ассоциированных с L-распределением, выделим прежде всего характеристику гиперплоскости $H(L)$ при смещении центра по кривым, принадлежащим L-распределению. Найдем уравнения, определяющие это фокальное многообразие. Относительно репера R_0, присоединенного к текущей точке A $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределения, конечное уравнение плоскости имеет вид

$$y^n = 0 . \quad (3)$$

Точка $F \in H(A)$ определяется координатами y^J, удовлетворяющими уравнению (3). При смещении H-плоскости вдоль некоторого направления точка F перейдет в новую точку $\tilde{F}$, координаты $\tilde{y}^J$ которой относительно исходной системы координат определяются соотношениями [2]

$$\tilde{y}^J = y^J - \omega_K^J y^K .$$

Потребовав, чтобы точки $\tilde{F}$ принадлежали исходной плоскости $H(A)$, получим

$$y^1 \omega_1^n + y^\alpha \omega_\alpha^n = 0, \; y^n = 0 .$$

Систему уравнений теперь представим в виде

$$y^1 \Lambda_{1K}^n \omega^K + y^\alpha \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K = 0, \; y^n = 0 .$$

При смещении центра вдоль кривых, принадлежащих L-распределению, многообразие фокальных точек F гиперплоскости $H(A)$ определяется системой уравнений

$$y^1 \Lambda_{11}^n + y^\alpha \Lambda_{\alpha 1}^n = 0, \; y^n = 0 . \tag{4}$$

Разделив уравнение (4_1) на объект Λ_n^{11}, получим

$$y^1 + y^\alpha \Lambda_\alpha^1 = 0, \; y^n = 0 , \tag{5}$$

где $\Lambda_\alpha^1 = \Lambda_{\alpha 1}^n / \Lambda_n^{11}$.

В репере R_1 величины Λ_α^1 удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \Lambda_\alpha^1 = M_{\alpha K}^1 \omega^K . \tag{6}$$

В общем случае, то есть когда ранг системы (4) максимальный (ранг системы равен двум), эта система в гиперплоскости $H(A)$ определяет $(n-2)$-мерную плоскость $\Lambda(A)$, проходящую через центр A. Плоскость $\Lambda(A)$ (5) является характеристикой гиперплоскости $H(A)$ при смещении центра A по кривым, принадлежащим L-распределению. Таким образом, тензор $\{\Lambda_\alpha^1\}$ первого порядка является структурным объектом поля плоскостей $\Lambda(A)$, и система (6) дифференциальных уравнений определяет поле Λ-плоскостей.

Определение 2. Геометрические образы, принадлежащие текущей плоскости H, которые ассоциируются с L-распределением, будем называть *HL-виртуальными геометрическими образами* [3].

Поскольку плоскость $\Lambda(A)$ и прямая $L(A)$ имеют лишь одну общую точку A, то плоскость $\Lambda(A)$ можно интерпретировать как $H(L)$-виртуальную нормаль 1-го рода прямой $L(A)$ внутри гиперплоскости $H(A)$.

Итак, поле тензора $\left\{\Lambda_\alpha^1\right\}$ определяет поле $H(L)$-виртуальных нормалей 1-го рода L-распределения.

Поле нормалей 1-го рода (поле прямых ν) $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения в аффинном пространстве A_n определяется полем квазитензора $\left\{\nu_n^i\right\}$, компоненты которого в репере R_0 удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\nu_n^i+\omega_n^i=\nu_{nK}^i\omega^K . \tag{7}$$

Таким образом, произвольную инвариантную одномерную нормаль ν 1-го рода гиперплоскости $H(A)$ относительно локального репера R_1 можно задать системой уравнений

$$y^i-\nu_n^i y^n=0 . \tag{8}$$

Плоскость $\Omega_{n-1}(A)=\left[\nu,\Lambda\right]$, натянутая на инвариантную прямую $\nu(A)$ и характеристику $\Lambda(A)$ гиперплоскости $H(A)$, является инвариантной нормалью 1-го рода прямой $L(A)$ в каждом центре A $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения пространства A_n. В локальном репере R_1 плоскость $\Omega_{n-1}(A)$ определяется уравнением вида

$$y^1=\Lambda_\alpha^1 y^\alpha+(\nu_n^1-\Lambda_\alpha^1\nu_n^\alpha)y^n . \tag{9}$$

Следуя работам [2; 4], построим фокальные многообразия $F_{n-2}(\Omega,L)$, $F_{n-3}(\Lambda,L)$ соответственно в Ω_{n-1} и Λ_{n-2} при смещении центра A по кривым, принадлежащим L-распределению, то есть по кривым

$$\omega^{\alpha}=0,\ y^1=\mu^1\theta\text{, где }\nabla\mu^1-\mu^1\widetilde{\theta}=\mu_1^1\theta. \tag{10}$$

Точка $F\in\Omega_{n-1}(A)$ является фокальной точкой при смещении центра A по кривым, принадлежащим L-распределению (9), когда координаты точки F удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 1+y^{\alpha}\tilde{\Lambda}_{\alpha}+y^n\tilde{\nu}_n=0, \\ y^1=\Lambda_{\alpha}^1y^{\alpha}+(\nu_n^1-\Lambda_{\alpha}^1\nu_n^{\alpha})y^n, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha}=\Lambda_{\alpha 1}^1-\Lambda_{\alpha 1}^n(\nu_n^1-\Lambda_{\beta}^1\nu_n^{\beta})-\Lambda_{\alpha}^1\Lambda_{11}^n(\nu_n^1-\Lambda_{\beta}^1\nu_n^{\beta})-\Lambda_{\beta}^1\Lambda_{\alpha}^1\Lambda_{11}^{\beta},$$

$$\tilde{\nu}_n=\nu_{n1}^1-\Lambda_{\alpha 1}^1\nu_n^{\alpha}-\Lambda_{\alpha}^1\nu_{n1}^{\alpha}-\Lambda_{\alpha}^1\Lambda_{11}^{\alpha}(\nu_n^1-\Lambda_{\beta}^1\nu_n^{\beta})-$$
$$-\Lambda_{11}^n(\nu_n^1-\Lambda_{\alpha}^1\nu_n^{\alpha})(\nu_n^1-\Lambda_{\beta}^1\nu_n^{\beta}),$$

$$\nabla\tilde{\Lambda}_{\alpha}=\tilde{\Lambda}_{\alpha K}\omega^K,\ \nabla\tilde{\nu}_n=\tilde{\nu}_{nK}\omega^K.$$

Система (11) определяет в плоскости $\Omega_{n-1}(A)$ алгебраическое $(n-2)$-многообразие порядка один — фокальное многообразие $F_{n-2}(\Omega,L)$, соответствующее прямой L. Многообразие F_{n-2} есть плоскость размерности $(n-2)$, которую в дальнейшем будем обозначать через $F_{n-2}(A)$, причем $F_{n-2}(A)\subset\Omega_{n-1}(A)$, $A\notin F_{n-2}(A)$.

Плоскость Λ_{n-2} пересекает фокальное многообразие $F_{n-2}(A)$ по плоскости $F_{n-3}(A)$ размерности $(n-3)$, которая в репере R_1 задается системой уравнений

$$y^n=0,\ y^1=\Lambda_{\alpha}^1y^{\alpha},\ 1+\tilde{\Lambda}_{\alpha}y^{\alpha}=0. \tag{12}$$

Плоскость $F_{n-3}(A)$, определяемая системой уравнений (12), есть фокальное многообразие $F_{n-3}(\Lambda,L)$ плоскости Λ, соответствующей прямой L, то есть полученное при смещении центра A вдоль кривых, принадлежащих L-распределению.

В результате приходим к следующему предложению.

Теорема 2. *Геометрический объект* $\{\Lambda^1_\alpha, \tilde{\Lambda}_\alpha\}$ *— тензор 2-го порядка* $\mathcal{H}(\Lambda,L)$*-распределения определяет в* Λ*-плоскости* $(n-3)$*-мерную плоскость* $F_{n-3}(\Lambda,L)$ *(12), не проходящую через центр* A*, которая является аналогом плоскости Кенигса* [5; 6] *для пары распределений* (L, Λ).

2. Задание нормальных и внутренних аффинных связностей на оснащенном $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределении

1. Адаптируем репер R_1 полю нормалей $N_1(A)$ 1-го рода H-распределения, выбирая вектор $\vec{e}_n \parallel N_1(A)$. В этом случае

$$\omega^1_n = \lambda^1_{nK}\omega^K, \ \omega^\alpha_n = \lambda^\alpha_{nK}\omega^K, \tag{13}$$

а поле нормалей 1-го рода $N_1(A)$ H-подрасслоения определяется уравнениями

$$\nabla\lambda^1_{nK} = \lambda^1_{nKL}\omega^L, \ \nabla\lambda^\alpha_{nK} = \lambda^\alpha_{nKL}\omega^L. \tag{14}$$

Таким образом, уравнения (1, 2, 13, 14) задают оснащенное полем нормалей 1-го рода $N_1(A)$ $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределение. При фиксации точки $A \overset{def}{=} x$ (центра $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения) плоскости $N_1(x), N_{n-1}(x), N_2(x)$ и $T_{n-1}(x), T_1(x), T_{n-2}(x)$ остаются неподвижными. Следовательно, $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределение индуцирует нормальные $N_1(A), N_{n-1}(A), N_2(A)$ и $T_{n-1}(A), T_1(A), T_{n-2}(A)$ касательные подрасслоения [7].

Структурные уравнения касательного расслоения $T_{n-1}(A)$ в силу формул (1, 2, 13) имеют следующий вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K,\ d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta,$$
$$d\omega_1^1 = \Omega_1^1,\ d\omega_\alpha^1 = \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^1 + \Omega_\alpha^1,$$
$$d\omega_1^\alpha = \omega_1^i \wedge \omega_i^\alpha + \Omega_1^\alpha,$$

где

$$\Omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^n \wedge \omega_n^\beta + \omega_\alpha^1 \wedge \omega_1^\beta = (\Lambda_{\alpha[L}^n \lambda_{|n|K]}^\beta + \Lambda_{\alpha[L}^1 \lambda_{|1|K]}^\beta) \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{\alpha LK}^\beta \omega^L \wedge \omega^K, \tag{15}$$

$$\Omega_1^1 = (\Lambda_{1[L}^\alpha \lambda_{|\alpha|K]}^1 + \Lambda_{1[L}^n \lambda_{|n|K]}^1) \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{1LK}^1 \omega^L \wedge \omega^K, \tag{16}$$

$$\Omega_\alpha^1 = \Lambda_{\alpha[L}^n \lambda_{|n|K]}^1 \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{\alpha LK}^1 \omega^L \wedge \omega^K, \tag{17}$$

$$\Omega_1^\alpha = \Lambda_{1[L}^n \lambda_{|n|K]}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{1LK}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K, \tag{18}$$

$$R_{\alpha LK}^\beta = 2(\Lambda_{\alpha[L}^n \lambda_{|n|K]}^\beta + \Lambda_{\alpha[L}^1 \lambda_{|1|K]}^\beta), \tag{19}$$

$$R_{1LK}^1 = 2(\Lambda_{1[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^1 + \Lambda_{1[L}^n \lambda_{|n|K]}^1), \tag{20}$$

$$R_{\alpha LK}^1 = 2\Lambda_{\alpha[L}^n \lambda_{|n|K]}^1, \tag{21}$$

$$R_{1LK}^\alpha = 2\Lambda_{1[L}^n \lambda_{|n|K]}^\alpha. \tag{22}$$

Следуя работе [7], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T_{n-1}(A)$ возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности $\{\omega^K, \omega_j^i\}$, которую назовем внутренней (касательной) аффинной связностью оснащенного $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределения.

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределение (полем нормалей 1-го рода $N_1(x)$ H-подрасслоения) индуцирует внутреннюю аф-*

финную связность γ *в касательном расслоении* $T_{n-1}(A)$ *с формами связности* $\{\omega^K, \omega^i_j\}$ *и 2-формами кривизны (15—18). Компоненты тензора кривизны* $R^i_{jKL} = \{R^1_{1KL}, R^1_{\alpha KL}, R^\alpha_{1KL}, R^\beta_{\alpha KL}\}$ *связности* γ *имеют строение (19—22).*

2. Структурные уравнения нормального расслоения $N_1(A)$ с учетом уравнений (1, 2) и (13) можно представить в виде

$$d\omega^n_n = \Omega^n_n,$$

где

$$\Omega^n_n = \omega^1_n \wedge \omega^n_1 + \omega^\alpha_n \wedge \omega^n_\alpha = (\lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]} + \lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]})\omega^L \wedge \omega^K = = \frac{1}{2} R^n_{nLK}\omega^L \wedge \omega^K, \tag{23}$$

$$R^n_{nLK} = 2(\lambda^1_{n[L}\Lambda^n_{|1|K]} + \lambda^\alpha_{n[L}\Lambda^n_{|\alpha|K]}). \tag{24}$$

Согласно работе [7] получаем, что в нормальном расслоении $N_1(A)$ возникает центроаффинная связность $\gamma^\perp$ с формой связности $\{\omega^n_n\}$ и 2-формой кривизны (23), которую назовем нормальной центроаффинной связностью оснащенного $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределения.

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное* $\mathcal{H}(\Lambda, L)$*-распределение индуцирует в расслоении* $N_1(A)$ *нормалей 1-го рода H-подрасслоения нормальную центроаффинную связность* $\gamma^\perp$ *с формой связности* $\{\omega^n_n\}$ *и 2-формой кривизны (23). Компоненты тензора кривизны* R^n_{nLK} *связности* $\gamma^\perp$ *имеют строение (24).*

3. Аналогично можно построить нормальную центроаффинную связность $\eta^\perp$ в расслоении $N_{n-1}(A)$ нормалей 1-го рода базисного L-подрасслоения данного $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределения.

Структурные уравнения нормального расслоения $N_1(A)$ имеют следующий вид:

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \Omega_\alpha^\beta ,$$

$$d\omega_\alpha^n = \omega_\alpha^n \wedge \omega_n^n + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^n + \omega_\alpha^1 \wedge \omega_1^n = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a^n + \Omega_\alpha^n ,$$

$$d\omega_n^\alpha = \omega_n^a \wedge \omega_a^\alpha + \Omega_n^\alpha ,$$

$$d\omega_n^n = \Omega_n^n ,$$

где

$$\Omega_n^\alpha = \lambda_{n[L}^1 \Lambda_{|1|K]}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{nLK}^\alpha \omega^L \wedge \omega^K , \qquad (25)$$

$$\Omega_\alpha^n = \lambda_{\alpha[L}^1 \Lambda_{|1|K]}^n \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{\alpha LK}^n \omega^L \wedge \omega^K , \qquad (26)$$

Ω_α^β (15), Ω_n^n (23),

$$R_{nLK}^\alpha = 2\lambda_{n[L}^1 \Lambda_{|1|K]}^\alpha , \qquad (27)$$

$$R_{\alpha LK}^n = 2\lambda_{\alpha[L}^1 \Lambda_{|1|K]}^n , \qquad (28)$$

$R_{\alpha LK}^\beta$ (19), R_{nLK}^n (24).

Теорема 5. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределение индуцирует в расслоении $N_1(A)$ нормалей 1-го рода нормальную центроаффинную связность $\eta^\perp$ с формой связности $\{\omega_b^a\}$ и 2-формами кривизны (15, 23, 25, 26). Компоненты тензора кривизны R_{bLK}^a связности $\eta^\perp$ имеют строение (19, 24, 27, 28).*

Связность $\eta^\perp$ назовем в дальнейшем нормальной центроаффинной связностью L-подрасслоения.

4. Структурные уравнения соответствующего касательного расслоения $T_1(A)$ в силу формул (1, 2, 13) имеют следующий вид:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \ d\omega_1^1 = \Omega_1^1,$$

где Ω_1^1 (16), R_{1LK}^1 (20).

Теорема 6. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределение (полем нормалей 1-го рода $N_1(x)$) индуцирует внутреннюю аффинную связность η в касательном расслоении $T_1(A)$ с формами связности $\{\omega^K, \omega_1^1\}$ и 2-формой кривизны (16). Компоненты тензора кривизны R_{1LK}^1 связности η имеют строение (20).*

5. Построим нормальную центроаффинную связность $\vartheta^\perp$ в расслоении $N_2(A)$ нормалей 1-го рода Λ-подрасслоения данного $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения и связности ϑ в касательном расслоении $T_{n-2}(A)$.

Структурные уравнения нормального распределения $N_2(A)$ имеют следующий вид:

$$d\omega_1^1 = \Omega_1^1, \ d\omega_n^n = \Omega_n^n,$$
$$d\omega_n^1 = \omega_n^1 \wedge \omega_1^1 + \omega_n^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \omega_n^n \wedge \omega_n^1 = \omega_n^\xi \wedge \omega_\xi^1 + \Omega_n^1,$$
$$d\omega_1^n = \omega_1^1 \wedge \omega_1^n + \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^n + \omega_1^n \wedge \omega_n^n = \omega_1^\xi \wedge \omega_\xi^n + \Omega_1^n,$$

где Ω_1^1 (16), Ω_n^n (23),

$$\Omega_n^1 = \lambda_{n[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^1 \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{nLK}^1 \omega^L \wedge \omega^K, \tag{29}$$

$$\Omega_1^n = \lambda_{1[L}^\alpha \Lambda_{|\alpha|K]}^n \omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R_{1LK}^n \omega^L \wedge \omega^K, \tag{30}$$

R_{1LK}^1 (20), R_{nLK}^n (24),

$$R^{1}_{nLK} = 2\lambda^{\alpha}_{n[L}\Lambda^{1}_{|\alpha|K]}, \qquad (31)$$

$$R^{n}_{1LK} = 2\lambda^{\alpha}_{1[L}\Lambda^{n}_{|\alpha|K]}. \qquad (32)$$

Теорема 7. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределение индуцирует внутреннюю нормальную центроаффинную связность $\vartheta^{\perp}$ в расслоении $N_2(A)$ нормалей 1-го рода Λ-подрасслоения с формами связности $\{\omega^{\xi}_{\eta}\}$ и 2-формами кривизны $\{\Omega^{\xi}_{\eta}\}$, компоненты тензора кривизны $R^{\xi}_{\eta LK}$ которой имеют строение (20, 24, 31, 32).*

6. Структурные уравнения касательного расслоения $T_{n-2}(x)$ имеют вид

$$d\omega^{K} = \omega^{L}\wedge\omega^{K}_{L},\ d\omega^{\beta}_{\alpha} = \omega^{\gamma}_{\alpha}\wedge\omega^{\beta}_{\gamma} + \Omega^{\beta}_{\alpha},$$

где Ω^{β}_{α} (15), $R^{\beta}_{\alpha LK}$ (19).

Теорема 8. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределение индуцирует внутреннюю аффинную связность ϑ в касательном расслоении $T_{n-2}(A)$ с формами связности $\{\omega^{K},\omega^{\beta}_{\alpha}\}$ и 2-формами кривизны (15). Компоненты тензора $R^{\beta}_{\alpha LK}$ связности ϑ имеют строение (19).*

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Нормализация основных структурных подрасслоений $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределений аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 2018. №3. С. 5—14.

2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределение *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1971. Т. 3. С. 49—94.

3. *Попов Ю.И.* Трехсоставное распределение проективного пространства // ДГМФ. Калининград, 1987. Вып. 18. С. 65—86.

4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
5. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
6. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. 1975. Т. 7. С. 117—151.
7. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1999.

Yu. I. Popov[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-12

Fields of geometric objects associated with compiled hyperplane $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-distribution in affine space

Submitted on May 22, 2020

A compiled hyperplane distribution $\mathcal{H}(\Lambda_{n-2},L_1)$ is considered in an n-dimensional projective space P_n. We will briefly call it a $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-distribution. Note that the plane $\Lambda(A)$ is the distribution characteristic obtained by displacement in the center belonging to the L-subbundle. The following results were obtained:

a) The existence theorem is proved: $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-distribution exists with arbitrary $(3n-5)$ functions of n arguments.

b) A focal manifold $F_{n-2}(\Omega,L)$ is constructed in the normal plane Ω_{n-1} of the 1st kind of L-subbundle. It was obtained by shifting the center A along the curves belonging to the L-distribution. *A* focal manifold $F_{n-3}(\Lambda,L)$ is also given, which is an analog of the Koenigs plane for the distribution pair (Λ, L).

c) It is shown that a framed $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-distribution in the 1st kind normal field of H-distribution induces tangent $T_{n-1}(A), T_1(A)$, $T_{n-2}(A)$ and $N_1(A), N_{n-1}(A), N_2(A)$ normal bundles.

d) Six connection theorems induced by a framed $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-distribution in these bundles are proved.

In each of the bundles $(T_{n-1}(A), N_1(A))$, $(T_1(A), N_{n-1}(A))$, $(T_{n-2}(A), N_2(A))$ the framed $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-distribution induces an intrinsic torsion-free affine connection in the tangent bundle and a centro-affine connection in the corresponding normal bundle.

e) In each of the bundles (d) in the differential neighborhood of the 2nd order, the covers of 2-forms of curvature and curvature tensors of the corresponding connections are constructed.

Keywords: bundle, subbundle, focal bundle manifold, 2-form of curvature, curvature tensor, normal centro-affine connection, inner affine connection.

References

1. *Popov Yu. I.:* Normalization of main structural subbundles $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-distributions of affine space. IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and Technology, 3, 5—14 (2018).

2. *Laptev, G.F., Ostianu, N.M.:* Distributions of m-dimensional line elements in a space with projective connection. Tr. Geom. Sem., 3, 49—94 (1971).

3. *Popov, Yu. I.:* Three-part distribution of projective space. DGMF. Kaliningrad. 18, 65—86 (1987).

4. *Norden, A.P.:* Normalization theory and vector bundles. Tr. Geom. Sem. Kazan Univ. 9, 68—76 (1976).

5. *Laptev, G.F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

6. *Stoljarov, A.V.:* The projective differential geometry of a regular hyperband distribution of *m*-dimensional line elements. Itogi nauki i tekhn. Ser. Probl. Geom., 7, 117—151 (1975).

7. *Chakmazyan, A.V.:* Normal connection in the geometry of framed submanifolds. Yerevan (1999).

УДК 514.764

***S. E. Stepanov*[1], *I. I. Tsyganok*[2]**

[1, 2] *Financial University under the Government of the Russian Federation*

s.e.stepanov@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-13

On the Tachibana numbers of closed manifolds with pinched negative sectional curvature

Conformal Killing form is a natural generalization of conformal Killing vector field. These forms were extensively studied by many geometricians. These considerations were motivated by existence of various applications for these forms. The vector space of conformal Killing *p*-forms on an *n*-dimensional $(1 \le p \le n-1)$ closed Riemannian manifold *M* has a finite dimension $t_p(M)$ named the *Tachibana number*. These numbers are conformal scalar invariant of *M* and satisfy the duality theorem: $t_p(M) = t_{n-p}(M)$.

In the present article we prove two vanishing theorems. According to the first theorem, there are no nonzero Tachibana numbers on an *n*-dimensional $(n \ge 4)$ closed Riemannian manifold with pinched negative sectional curvature such that $-1-\delta \le \sec \le -1$ for some pinching constant $\delta < (n-1)^{-1}$. From the second theorem we conclude that there are no nonzero Tachibana numbers on a three-dimensional closed Riemannian manifold with negative sectional curvature.

Keywords: Riemannian manifold, conformal Killing — Yano tensor, sectional curvature, vanishing theorem.

Поступила в редакцию 22.02.2020 г.

1. Introduction and results

Conformal Killing p-forms or, in other words, *conformal Killing — Yano p-tensors* have been defined on n-dimensional Riemannian manifolds $(1 \le p \le n-1)$ more than fifty years ago by S. Tachibana and T. Kashiwada (see [1; 2]) as a natural generalization of conformal Killing vector fields. Since then these forms were extensively studied by many geometricians. These considerations were motivated by existence of various applications for these forms (see, for example, [3; 4]).

The vector space of conformal Killing p-forms on an n-dimensional closed (i.e. compact without boundary) Riemannian manifold (M, g) has a finite dimension $t_p(M)$ named the *Tachibana number* (see [5—7] and etc.). These numbers $t_1(M), \dots, t_{n-1}(M)$ are conformal scalar invariant of (M, g) and satisfy the duality theorem: $t_p(M) = t_{n-p}(M)$. The theorem is an analog of the well known *Poincaré duality theorem* for the Betti numbers of closed (M, g). Moreover, we proved in [7] that Tachibana numbers $t_1(M), \dots, t_{n-1}(M)$ are equal to zero for an n-dimensional ($n \ge 2$) closed Riemannian manifold (M, g) with negative *curvature operator* $\overset{\circ}{R} : S_0^2 M \to S_0^2 M$ defined on the vector bundle of traceless symmetric tensor fields of order 2 (see [8]). Based on this theorem, we prove here the following theorem.

Theorem 1. *Let (M, g) be an n-dimensional* ($n \ge 4$) *closed Riemannian manifold with pinched negative sectional curvature. Suppose that $-1-\delta \le \sec \le -1$ for an arbitrary $\delta < (n-1)^{-1}$, then Tachibana numbers $t_1(M), \dots, t_{n-1}(M)$ of (M, g) are equal to zero.*

Remark. We recall here that for every $n \ge 4$ there exists a closed n-dimensional Riemannian manifold (M, g) such that its sectional curvatures satisfy the inequalities $-H \le \sec \le -1$ for some pinching constant H, but M does not admit a metric g of constant negative sectional curvature (see [9]).

For the case when $n = 3$ the following theorem is true.

Theorem 2. *If (M, g) is an 3-dimensional closed Riemannian manifold with negative sectional curvature then its Tachibana numbers $t_1(M)$ and $t_2(M)$ are equal to zero.*

2. Proofs of Theorems

Let (M, g) be an n-dimensional $(n \ge 2)$ Riemannian manifold and $S_0^2 M$ is a vector bundle of symmetric traceless 2-forms. For any point $x \in M$ there exists an orthonormal eigen-frame $e_1, \ldots, e_n$ of $T_x M$ such that $\varphi_{ij} = \varphi_x(e_i, e_j) = \mu_i \, \delta_{ij}$ for any $\varphi \in C^\infty(S_0^2 M)$ and for the Kronecker delta δ_{ij}. Then we have the formula (see [10, p. 388])

$$R_{ij} \, \varphi^{ik} \varphi^{j}{}_{k} + R_{ijkl} \, \varphi^{il} \varphi^{jk} = 2 \sum_{i<j} \sec(e_i \wedge e_j)(\mu_i - \mu_j)^2 \qquad (2.1)$$

where $\sec(e_i \wedge e_j) = R(e_i, e_j, e_i, e_j)$ is the *sectional curvature* $\sec \sigma_x$ of (M, g) in the direction of the tangent two-plane section $\sigma_x = \operatorname{span}\{e_i, e_j\}$ at $x \in M$. In turn, the components of the curvature tensor R and the Ricci tensor Ric are denoted by $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$ and $R_{ij} = Ric(e_i, e_j)$, respectively.

If in addition, suppose that there is a point $x \in M$ where all sectional curvatures satisfies the double inequality $-A \le \sec \le -B$ for some constant $A > B > 0$, then from equation (2.1) we obtain the inequality (see [11])

$$-n A \varphi^{ij} \varphi_{ij} \le R_{ij} \, \varphi^{ik} \varphi^{j}{}_{k} + R_{ijkl} \, \varphi^{il} \varphi^{jk} \le -n B \varphi^{ij} \varphi_{ij} \qquad (2.2)$$

for an arbitrary nonzero $\varphi_x \in S_0^p\left(T_x^*M\right)$. In addition, we have the double inequality

$$-(n-1)A\varphi^{ij}\varphi_{ij} \le R_{ij}\,\varphi^{ik}\varphi^{j}_{\ k} \le -(n-1)B\varphi^{ij}\varphi_{ij} \qquad (2.3)$$

If we suppose that $\|\varphi\|^2 = \varphi^{ij}\varphi_{ij}$, then from (2.2) and (2.3) we obtain the following inequalities

$$\left(-nA+(n-1)B\right)\|\varphi\|^2 \le g\,(\overset{\circ}{R}(\varphi),\varphi) \le \left(-nB+(n-1)A\right)\|\varphi\|^2,$$

where $g(\overset{\circ}{R}(\varphi),\varphi) = R_{ijkl}\,\varphi^{il}\varphi^{jk}$ for the curvature operator

$$\overset{\circ}{R} : S_0^2\left(T_x^*M\right) \to S_0^2\left(T_x^*M\right).$$

Let $A = \varepsilon B$, then we have $g(\overset{\circ}{R}(\varphi),\varphi) < 0$ for any nonzero $\varphi \in C^\infty\left(S_0^2M\right)$ for an arbitrary $0 < \varepsilon < 1+(n-1)^{-1}$. Theorem 1 is proved.

In dimension three we have (see [12])

$$R_{ijkl} = g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik} - \tfrac{1}{2}\,s\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right).$$

On the other hand, we can always diagonalize the Ricci tensor Ric at an arbitrary point $x \in M$, so that $R_{ij} = \lambda_i\,\delta_{ij}$ where $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ are its eigenvalue. Then in three dimensions the only nonzero components of the curvature tensor R are components of the form

$$R_{1212} = \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3);\ \ R_{1313} = \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3-\lambda_2);$$
$$R_{2323} = \tfrac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1).$$

Thus, the condition for negative sectional curvature in three dimensions is that each eigenvalue of the Ricci tensor is bigger than sum of other two. Then we have the proposition (compare this statement with Corollary 8.2 of [12]).

Proposition. *In dimension three a metric g has negative sectional curvature if and only if* $Ric > \tfrac{1}{2}s\,g$ *for the scalar curvature* $s = trace_g Ric$.

Then in dimension three we can deduce the inequalities

$$g(\overset{\circ}{R}(\varphi),\varphi) < \tfrac{1}{2} s \|\varphi\|^2 < 0$$

for a nonzero $\varphi \in C^\infty\left(S_0^2 M\right)$. In this case, the curvature operator $\overset{\circ}{R} : S_0^2 M \to S_0^2 M$ is negative definite. At the same time, the vanishing theorem from the paper [7] is the stating that Tachibana numbers $t_1(M) = 0, \ldots, t_{n-1}(M) = 0$ for an n-dimensional ($n \geq$) closed Riemannian manifold (M, g) with negative curvature operator $\overset{\circ}{R} : S_0^2 M \to S_0^2 M$. Then in dimension three we have $t_1(M) = t_2(M) = 0$. Thus, Theorem 2 is proved.

References

1. *Kashiwada, T.*: On conformal Killing tensor. Natural. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., **19**:2, 67—74 (1968).

2. *Tachibana, S.:* On conformal Killing tensor in a Riemannian space. Tohoku Math. J., 21, 56—64 (1969).

3. *Benn, M., Charlton, P.:* Dirac symmetry operators from conformal Killing — Yano tensors. Class. Quantum Grav., 14, 1037—1042 (1997).

4. *Stepanov, S. E.:* On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field. J. of Geom. and Phys., **33**:3-4, 191—209 (2000).

5. *Stepanov, S. E., Mikeš, J.:* Betti and Tachibana numbers of compact Riemannian manifolds. Diff. Geom. and its Appl., **31**:4, 486—495 (2013).

6. *Stepanov, S. E.:* Curvature and Tachibana numbers. Sb. Math., **202**:7, 135—146 (2011).

7. *Stepanov, S. E., Tsyganok, I. I.:* Theorems of existence and of vanishing of conformally Killing forms. Russian Mathematics, **58**:10, 46—51 (2014).

8. *Bourguignon, J. P., Karcher, H.:* Curvature operators: pinching estimates and geometric examples. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris, 11, 71—92 (1978).

9. *Gromov, M., Thurston, W.:* Pinching constants for hyperbolic manifolds. Invent. Math., 89, 1—12 (1987).

10. *Berger, M., Ebin, D.:* Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold. J. Diff. Geom., 3, 379—392 (1969).

11. *Rovenski, V., Stepanov, S.E., Tsyganok, I.I.:* On the Betti and Tachibana numbers of compact Einstein manifolds. Mathematics, **7**:12, 1210 (2019).

12. *Hamilton, R.S.:* Three-manifolds with positive Ricci curvature. J. Diff. Geom., 17, 255—306 (1982).

С.Е. Степанов[1], *И.И. Цыганок*[2]

[1,2] *Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия*

s.e.stepanov@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-13

Числа Тачибаны замкнутых многообразий с защемленной отрицательной секционной кривизной

Поступила в редакцию 22.02.2020 г.

Конформная форма Киллинга является естественным обобщением конформного векторного поля Киллинга. Эти формы широко изучались многими геометрами, что было мотивировано существованием различных приложений для этих форм. Векторное пространство конформных p-форм Киллинга имеет на замкнутом n-мерном $(1 \le p \le n-1)$ римановом многообразии M конечную размерность $t_p(M)$, называемую числом Тачибана. Эти числа являются конформными скалярными инвариантами многообразия и удовлетворяют теореме двойственности $t_p(M) = t_{n-p}(M)$.

В данной статье мы доказываем две «теоремы исчезновения». В соответствии в первой теоремой не существует ненулевых чисел Тачибаны на n-мерном $(n \ge 4)$ замкнутом римановом многообразии с защемленной отрицательной секционной кривизной такой, что $-1-\delta \le \sec \le -1$ для постоянной $\delta < (n-1)^{-1}$. Согласно второй теореме не существует ненулевых чисел Тачибаны на трехмерном замкнутом римановом многообразии с отрицательной секционной кривизной.

Ключевые слова: риманово многообразие, конформный тензор Киллинга — Яно, секционная кривизна, теорема исчезновения.

Список литературы

1. *Kashiwada T.* On conformal Killing tensor // Natural. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 1968. Vol. 19, №2. P. 67—74.

2. *Tachibana S.* On conformal Killing tensor in a Riemannian space // Tohoku Math. J. 1969. №21. P. 56—64.

3. *Benn M., Charlton P.* Dirac symmetry operators from conformal Killing — Yano tensors // Class. Quantum Grav. 1997. №14. P. 1037—1042.

4. *Stepanov S.E.* On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field // J. of Geom. and Phys. 2000. Vol. 33, №3-4. P. 191—209.

5. *Stepanov S.E., Mikeš J.* Betti and Tachibana numbers of compact Riemannian manifolds // Diff. Geom. and its Appl. 2013. Vol. 31, №4. P. 486—495.

6. *Stepanov S.E.* Curvature and Tachibana numbers // Mat. Sb. 2011. Vol. 202, №7. P. 135—146.

7. *Stepanov S.E., Tsyganok I.I.* Theorems of existence and of vanishing of conformally killing forms // Russian Mathematics. 2014. Vol. 58, №10. P. 46—51.

8. *Bourguignon J.P., Karcher H.* Curvature operators: pinching estimates and geometric examples // Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris. 1978. №11. P. 79—92.

9. *Gromov M., Thurston W.* Pinching constants for hyperbolic manifolds // Invent. Math. 1987. №89. P. 1—12.

10. *Berger M., Ebin D.* Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold // J. Diff. Geom. 1969. №3. P. 379—392.

11. *Rovenski V., Stepanov S.E., Tsyganok I.I.* On the Betti and Tachibana numbers of compact Einstein manifolds // Mathematics. 2019. Vol. 7, №12. P. 1210.

12. *Hamilton R.S.* Three-manifolds with positive Ricci curvature // J. Diff. Geom. 1982. №17. P. 255—306.

УДК 512.81

В. Б. Цыренова[1]

[1] *Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, Россия*

v.ts@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-14

Линии на поверхности в квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$

Квазигиперболические пространства являются проективными пространствами с распадающимся абсолютом. Данная работа продолжает работу [7], в которой рассмотрены поверхности в одном из этих пространств методами внешних форм и подвижного репера. Изучены получебышевские и чебышевские сети линий на поверхности в пространстве $^{11}S_3^1$.

Доказаны три теоремы. В теореме 1 получено натуральное уравнение негеодезических линий, входящих в сопряженную получебышевскую сеть на поверхности так, что вдоль них параллельно переносятся касательные к линиям другого семейства. В теореме 2 получено натуральное уравнение негеодезических линий, входящих в чебышевскую сеть. В теореме 3 доказано, что сопряженные чебышевские сети, одно семейство которых не является ни геодезическими линиями, ни евклидовыми сечениями, имеются на поверхностях с произволом четырех функций одного аргумента.

Ключевые слова: квазигиперболическое пространство, абсолют, поверхность, канонический репер, инварианты, линии на поверхности, геодезические линии, получебышевские и чебышевские сети.

Поступила в редакцию 26.04.2020 г.

Введение

Квазиэллиптическое и квазигиперболические пространства изучались многими учениками Б. А. Розенфельда и Р. Н. Щербакова (напр., [3; 4]). Во всех указанных пространствах нами изучены линейчатые поверхности и конгруэнции, построены и геометрически характеризованы их канонические реперы, получены геометрические характеристики инвариантов и простейшие классы.

В данной работе продолжим рассмотрение поверхности в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$, сетей линий на поверхности.

1. Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$

Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$ — это проективное 3-пространство, в котором метрика определяется абсолютом, заданным совокупностью пары действительных плоскостей и пары действительных точек на прямой их пересечения.

Будем пользоваться такой системой координат, в которой абсолютные плоскости q_1, q_2, абсолютная прямая T_0 и абсолютные точки на ней Q_1, Q_2 имеют соответственно уравнения

$$(X,X)_1 = (x^0)^2 + 2x^0x^1 = 0,\ x^0 = x^1 = 0,$$

$$(X,X)_2 = (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0.$$

Абсолютные плоскости пространства ${}^{11}S_3^1$ разбивают многообразие точек проективного пространства, не принадлежащих абсолюту, на две связные области. Мы рассматриваем ту область, для точек которой $(X,X)_1 > 0$, а их координаты и координаты точек абсолютной прямой будем нормировать соответственно условиям $(X,X)_1 = 1$ и $(X,X)_2 = 1$.

Расстояния δ_0, d и δ_1 между точками X и $У$ с нормированными координатами гиперболической, абсолютной и евклидовой прямых находятся по формулам

$$ch\delta_0 = (X,У)_1 \,, ch\delta_1 = (X,У)_2 \,,\ d^2 = (X,У)_2 \,.$$

Деривационные формулы наиболее общего репера пространства ${}^{11}S_3^1$ имеют вид

$$dA_0 = \omega_0^0(A_0 - A_1) + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3,$$
$$dA_1 = -\omega_0^0 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3,$$
$$dA_2 = \omega_2^3 A_3, dA_3 = \omega_2^3 A_2.$$

2. Поверхности в пространстве ${}^{11}S_3^1$

В работе [7] автором был построен полуканонический и два канонических репера поверхности. При этом поверхность задается параметрическим уравнением $A = A(u^1, u^2)$. Точка поверхности и касательная плоскость (а следовательно, и нормаль) включены в репер в качестве точки A_0 и плоскости $(A_0 A_1 A_2)$. Деривационные формулы полуканонического репера поверхности получены в виде

$$\begin{aligned} &dA_0 = \omega_0^0 A_0 - \omega_0^0 A_1 + \omega_0^2 A_2, \\ &dA_1 = -\omega_0^0 A_1 + (\mu\omega_0^0 + \nu\omega_0^2)A_2 + (\alpha\omega_0^0 + \beta\omega_0^2)A_3, \\ &dA_2 = (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2)A_3, \\ &dA_3 = (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2)A_3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для базисных форм ω_0^0 и ω_0^2 имеем $D\omega_0^0 = 0$, $D\omega_0^2 = (1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2$, а основная система дифференциальных уравнений [7] имеет вид

$$d\alpha \wedge \omega_0^0 + d\beta \wedge \omega_0^2 = (\gamma\mu + \beta(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2;$$
$$d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 = \gamma(1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \tag{2.2}$$
$$d\mu \wedge \omega_0^0 + d\nu \wedge \omega_0^2 = (\nu^2 - 2\nu + \alpha\gamma + \beta^2)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2.$$

Решение этой системы существует с произволом в две функции двух аргументов, что соответствует произволу существования поверхности, отнесенной к произвольному семейству линий [7].

Полную систему инвариантов поверхности образуют инварианты $\gamma, I = \beta^2 + 2\alpha\gamma$ и значения μ и ν при какой-либо канонизации репера.

При $\alpha = 0, \beta \neq 0$ и $\beta = 0, \alpha \neq 0$ получаются канонические реперы R_1 и R_2.

Полную систему инвариантов линии $\omega_0^2 = 0$ на поверхности составляют значения коэффициентов $\alpha, \beta, \mu,$ вычисленных вдоль этой линии. Линии $\omega_0^0 = 0$ высекаются на поверхности евклидовыми плоскостями и называются евклидовыми сечениями [5]. В [4] они названы изотропными линиями кривизны.

На поверхности определены две первые квадратичные формы:

$$\varphi_1 = (dA_0, dA_0)_1 = -(\omega_0^0)^2; \varphi_1' = (dA_0, dA_0)_2 = (\omega_0^2)^2.$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$\varphi_2 = (d^2 A_0, A_0, A_1, A_2) = -\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2.$$

Геометрическое значение второй квадратичной формы получается из соотношения $\varphi_2 = \pm 2\delta$, где δ — расстояние между точками A_0 и $B = pr^{A_3}_{A_0A_1A_2}(A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2 A_0 + [3])$.

Уравнения торсов конгруэнции $\{A_0 A_3\}$ нормалей поверхности имеют вид $\omega_0^0 = 0$ и $\beta\omega_0^0 - \gamma\omega_0^2 = 0$, фокусами образующих являются точки $F_1 = A_0 + \frac{1}{\gamma} A_3$ и $F_2 = A_3$, это означает, что одна из эволют вырождается в абсолютную прямую.

Инвариант $a = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ называют нормальной кривизной линии $\omega_0^0 : \omega_0^2$ на поверхности [7]. Для линии $\omega_0^0 = 0$ форма $\varphi_1 = 0$, а нормальная кривизна $a = \frac{\varphi_2}{\varphi_1'} = \gamma$.

Поверхности $\nu = 0$ характеризуются тем, что евклидово сечение $\omega_0^0 = 0$ является горловой линией регулюса $\{A_0 A_1\}$ касательных к асимптотической линии $\omega_0^2 = 0$ и существуют с произволом трех функций одного аргумента.

3. Линии на поверхности

Полагая $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^0 = ds, \mu = m, \alpha = a, \beta = b$, получим деривационные формулы канонического репера линии на поверхности:

$$\frac{dA_0}{ds} = A_0 - A_1, \frac{dA_1}{ds} = -A_1 + mA_2 + aA_3, \frac{dA_2}{ds} = -bA_3, \frac{dA_3}{ds} = -bA_2 .$$

Формулы Френе пространственной кривой можно получить в виде

$$\frac{dA_0}{ds} = A_0 - A_1, \frac{dA_1}{ds} = -A_1 + kA_2, \frac{dA_2}{ds} = \kappa A_3, \frac{dA_3}{ds} = \kappa A_2 .$$

Сравнивая эти формулы, видим, что s есть длина дуги линии на поверхности, а для кривизн k^*, κ^* линии на поверхности получаем $(k^*)^2 = a^2 + m^2, \kappa^* = -b$. Из деривационных формул канонического репера линии на поверхности получаются вычислительные формулы для инвариантов линии на поверхности:

$$a = \left(-\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2\right) : (\omega_0^0)^2,$$
$$b = (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2) : \omega_0^0,$$
$$m = (\mu\omega_0^0 + (1-\nu)\omega_0^2) : \omega_0^0 - (\omega_0^0 d\omega_0^2 - \omega_0^2 d\omega_0^0) : (\omega_0^0)^3$$

Видим отсюда, что только инвариант m является инвариантом второго порядка.

Нами выделены следующие три основных класса линий на поверхности:

1) $a = 0$ — асимптотические линии, для них репер совпадает с каноническим репером R_1, а также может служить каноническим репером пространственной кривой, рассматриваемой независимо от поверхности;

2) $b = 0$ — конические линии (конусы, описываемые касательными к этим линиям, имеют вершины на абсолютной прямой); нормаль A_0A_3 также описывает такой конус;

3) $m = 0$ — квазигиперболические геодезические линии с гиперболическими касательными.

4. Получебышевские и чебышевские сети линий на поверхности

В нашем репере $(A_0A_1A_2)$ — касательная плоскость к поверхности (A_0) в точке A_0. Будем говорить [6], что гиперболическая прямая (A_0M), $M = A_1 + xA_2$ «переносится параллельно» вдоль некоторой линии $y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0$ на поверхности, если вдоль этой линии $((dM)^*, A_0, M) = 0$, где точка $\dfrac{M+(dM)^*}{\sqrt{1+(\omega_0^0)^2}}$

есть проекция точки $\frac{M+(dM)}{\sqrt{1+(\omega_0^0)^2}}$ из несобственной точки A_3 квазигиперболической нормали на касательную плоскость $(A_0 A_1 A_2)$, причем дифференциал dM здесь находится вдоль линии $y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0$.

Пусть $(A_0 A_1 A_2)$ — касательная плоскость к поверхности в точке A_0. Будем говорить, что гиперболическая прямая $(A_0 M)$, где $M = A_1 + xA_2$, «переносится параллельно» вдоль некоторой линии $y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0$ на поверхности, если вдоль этой линии

$$((dM)^*, A_0, M) = 0, \tag{4.1}$$

где точка $M+(dM)^*$ является проекцией точки $M + (dM)_{y\omega_0^0+z\omega_0^2=0}$ из несобственной точки A_3 квазигиперболической нормали на плоскость $(A_0 A_1 A_2)$.

Условие (4.1) для линий $y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0$ имеет вид

$$dx + x\omega_0^0 + \frac{\mu z - \nu y}{z}\omega_0^0 = 0. \tag{4.2}$$

Если переносится прямая $(A_0 A_1)$, то равенство (4.2) в терминах любого из наших реперов дает

$$\mu z = \nu y. \tag{4.3}$$

Теперь, учитывая, что $dx = x_1\omega_0^0 + x_2\omega_0^2$, получаем условие (4.2) параллельного перенесения прямой $(A_0 M)$ вдоль линии семейства $\omega_0^2 = 0$ в виде

$$x + \mu + x_1 = 0. \tag{4.4}$$

Если прямая (A_0M) переносится вдоль геодезической линии, то (4.4) имеет вид $x + x_1 = 0$. При этом вдоль них касательные к геодезическим переносятся параллельно.

В работе [6] по аналогии с евклидовой геометрией получебышевской сетью линий на поверхности называется сеть, у которой касательные к линиям одного семейства переносятся параллельно вдоль линий другого семейства, а сеть, у которой касательные к линиям каждого семейства переносятся параллельно вдоль линий другого семейства, называется чебышевской.

Если семейство негеодезических линий $\omega_0^2 = 0$ включено в получебышевскую сеть так, что касательные (A_0A_1) к его линиям переносятся параллельно, то второе семейство в силу (4.3) имеет уравнение

$$\mu\omega_0^0 + \nu\omega_0^2 = 0\,. \tag{4.5}$$

При $\nu = 0$ касательные к негеодезическим линиям переносятся параллельно вдоль евклидовых сечений.

Если же семейство $\omega_0^2 = 0$ включено в получебышевскую сеть так, что вдоль его линий параллельно переносятся линии другого семейства, то уравнение последнего можно записать в виде

$$\omega_0^0 + q\omega_0^2 = 0\,, \tag{4.6}$$

При этом функция q удовлетворяет уравнению

$$q_1 = \mu q^2 - q\,. \tag{4.7}$$

Теорема 4.1. *Линии семейства* $\omega_0^2 = 0$*, входящие в сопряженную получебышевскую сеть так, что вдоль них параллельно переносятся касательные к линиям другого семейства, имеют натуральное уравнение*

$$a\frac{db}{ds} - b\frac{da}{ds} = mb^2 - ab\,.$$

Доказательство. Получебышевская сеть линий на поверхности $\omega_0^2(\overset{*}{\omega}{}_0^0+q\overset{*}{\omega}{}_0^2)=0$ будет сопряженной, если $q=\dfrac{\beta}{\alpha}$, так как уравнение сопряженной сети имеет вид

$$\omega_0^2(\alpha\overset{*}{\omega}{}_0^0+\beta\overset{*}{\omega}{}_0^2)=0\,.$$

Тогда условие (4.7) дает искомое натуральное уравнение.

Теорема 4.2. *Если семейство негеодезических линий* $\omega_0^2=0$ *можно включить в чебышевскую сеть, то*

$$\mu\nu^2-\mu\nu_1+\nu\mu_1-\mu\nu=0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Искомое соотношение получается из (4.5), (4.6) и (4.7). Этих семейств на поверхности имеется бесчисленное множество.

Теорема 4.3. *Если семейство линий* $\omega_0^2=0$*, не являющихся ни геодезическими линями, ни линиями* $\nu=0$*, можно включить в сопряженную чебышевскую сеть, то*

$$\alpha\nu-\beta\mu=\mu\nu^2-\mu\nu_1+\nu\mu_1-\mu\nu=0. \tag{4.9}$$

Такие сети имеются на поверхностях, определяемых с произволом четырех функций одного аргумента.

Доказательство. Объединяя условие сопряженности сети с условием теоремы 4.2, получаем соотношение (4.9).

Присоединяя эти соотношения, а также замыкания равенств $d\mu=\mu_1\omega_0^0+\mu_2\omega_0^2, d\nu=\nu_1\omega_0^0+\nu_2\omega_0^2$ к основной системе (2.2), получаем систему, состоящую из внешних уравнений

$$\begin{gathered}
d\alpha\wedge\omega_0^0+d\beta\wedge\omega_0^2=(\gamma\mu+\beta(\nu-1)\omega_0^0\wedge\omega_0^2;\\
d\beta\wedge\omega_0^0-d\gamma\wedge\omega_0^2=\gamma(1-\nu)\omega_0^0\wedge\omega_0^2;\\
d\mu_1\wedge\omega_0^0+d\mu_2\wedge\omega_0^2=\mu_2(\nu-1)\omega_0^0\wedge\omega_0^2;\\
d\nu_1\wedge\omega_0^0+d\nu_2\wedge\omega_0^2=\nu_2(\nu-1)\omega_0^0\wedge\omega_0^2
\end{gathered} \tag{4.10}$$

и следующих трех конечных соотношений:

$$\alpha\nu - \beta\mu = 0, \mu\nu^2 + \nu\mu_1 - \mu\nu_1 - \mu\nu = 0,$$
$$\nu_1 - \mu_2 = \nu^2 - 2\nu + \alpha\gamma + \beta^2.$$

Обозначив здесь и далее буквами Q_i выражения, не имеющие значения для определения произвола решения системы, из этих конечных соотношений при $\mu\nu \neq 0$ находим

$$d\alpha = \frac{\mu}{\nu} d\beta + Q_1\omega_0^0 + Q_2\omega_0^2;$$

$$d\nu_1 = \frac{\nu}{\mu} d\mu_1 + Q_3\omega_0^0 + Q_4\omega_0^2;$$

$$d\mu_2 = \frac{\nu}{\mu} d\mu_1 + \frac{\gamma\mu + 2\beta\nu}{\nu} d\beta + \alpha d\gamma + Q_5\omega_0^0 + Q_6\omega_0^2.$$

Подставив полученные значения дифференциалов в систему (4.10), получаем стандартную систему внешних дифференциальных уравнений

$$\mu d\beta \wedge \omega_0^0 + \nu d\beta \wedge \omega_0^2 = Q_7\omega_0^0 \wedge \omega_0^2,$$
$$d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 = \gamma(1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2,$$
$$d\mu_1 \wedge \omega_0^0 + (\frac{\nu}{\mu} d\mu_1 + \frac{\gamma\mu + 2\beta\nu}{\nu} d\beta + \alpha d\gamma) \wedge \omega_0^2 = Q_8\omega_0^0 \wedge \omega_0^2,$$
$$\frac{\nu}{\mu} d\mu_1 \wedge \omega_0^0 + d\nu_2 \wedge \omega_0^2 = Q_8\omega_0^0 \wedge \omega_0^2$$

со старшим характером $s_1 = 4$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы пространства. М., 1969.

2. *Щербаков Р.Н.* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.

3. *Гурьева В.П., Абдурахманова Х.К.* К теории поверхностей в трехмерных квазиэллиптическом и квазигиперболических пространствах // Геом. сб. [Вып.] 17. Томск, 1976. С. 132—139.

4. *Слободской В.И.* Теория поверхностей в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{10}S_3^1$ // Геом. сб. [Вып.] 21. Томск, 1980. С. 55—67.

5. *Цыренова В.Б., Щербаков Р.Н.* Основы теории поверхностей трехмерного квазиэллиптического пространства // Геом. сб. [Вып.] 15. Томск, 1975. С. 183—204.

6. *Цыренова В.Б.* К теории поверхностей в квазиэллиптическом пространстве. // Геом. сб. [Вып.] 19. Томск, 1978. С. 96—108.

7. *Цыренова В.Б.* Поверхности в квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$ // Геометрия многообразий и ее приложения : матер. V науч. конф. с междунар. участием, посвященной 100-летию профессора Р.Н. Щербакова. Улан-Удэ, 2018. С. 56—60.

V.B. Tsyrenova[1]

[1] Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude, Russia, 670000
v.ts@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-14

Lines on the surface in the quasi-hiperbolic space ${}^{11}S_3^1$

Submitted on April 26, 2020

Quasi-hyperbolic spaces are projective spaces with decaying absolute. This work is a continuation of the author's work [7], in which surfaces in one of these spaces are examined by methods of external forms and a moving frame. The semi-Chebyshev and Chebyshev networks of lines on the surface in quasi-hyperbolic space ${}^{11}S_3^1$ are considered. In this paper we use the definition of parallel transfer adopted in [6]. By analogy with Euclidean geometry, the semi-Chebyshev network of lines on the surface is the network in which the tangents to the lines of one family are carried parallel along the lines of another family. A Chebyshev network is a network in which tangents to the lines of each family are carried parallel along the lines of another family.

We proved three theorems. In Theorem 1, we obtain a natural equation for non-geodesic lines that are part of a conjugate semi-Chebyshev network on the surface so that tangents to lines of another family are transferred in parallel along them. In Theorem 2, the natural equation of non-geodesic lines in the Chebyshev network is obtained. In Theorem 3 we prove that conjugate Chebyshev networks, one family of which is neither geodesic lines, nor Euclidean sections, exist on surfaces with the latitude of four functions of one argument.

Keywords: quasi-hyperbolic space, absolute, surface, canonical frame, invariants, lines on the surface, geodesic lines, semi-Chebyshev and Chebyshev networks.

References

1. *Rosenfeld, B. A.:* Non-Euclidean spaces. Moscow (1969).

2. *Scherbakov, R. N.:* Course of affine and projective differential geometry. Tomsk (1960).

3. *Guryeva, V. P., Abdurakhmanova, Kh. K.:* On the theory of surfaces in three-dimensional quasi-elliptic and quasi-hyperbolic spaces. Geom. Sb. Tomsk. 17, 132—139 (1976).

4. *Slobodskoy, V. I.:* The theory of surfaces in three-dimensional quasi-hyperbolic space. Geom. Sb. Tomsk. 21, 55—67 (1980).

5. *Tsyrenova, V. B., Scherbakov, R. N.:* Fundamentals of the theory of surfaces of three-dimensional quasielliptic space. Geom. Sb. Tomsk. 15, 183—204 (1975).

6. *Tsyrenova, V. B.:* On the theory of surfaces in quasielliptic space. Geom. Sb. Tomsk. 19, 96—108 (1978).

7. *Tsyrenova, V. B.:* Surfaces in quasi-hyperbolic space ${}^{11}S_3^1$. Geometry of manifolds and its applications: materials of the Fifth Scientific Conference. Ulan-Ude. 56—60 (2018).

УДК 514.75

М. А. Чешкова[1]
[1] *Алтайский государственный университет, Барнаул*
cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-15

Преобразование Бианки волчка Миндинга

Работа посвящена изучению преобразования Бианки для поверхностей вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — волчка Миндинга, катушки Миндинга и псевдосферы (поверхности Бельтрами). Изучение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны (псевдосферических поверхностей) имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с теорией сетей, теорией солитонов, нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона. Уравнение sin-Гордона играет важную роль в современной физике. Преобразования Бианки позволяют по данной псевдосферической поверхности получить новые псевдосферические поверхности. Построено преобразование Бианки для волчка Миндинга. Волчок Миндинга и его преобразование Бианки строятся с использованием математического пакета.

Ключевые слова: гауссова кривизна, поверхность вращения, волчок Миндинга, преобразование Бианки.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси.

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.

Обозначим через $k=(0,0,1)$ орт оси, а через $e(v)=(\cos(v),\sin(v),0)$ — радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k, \tag{1}$$

где f — дифференцируемая функция, v, u — параметры.

Обозначим через n орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f'e-k}{\sqrt{(f')^2+1}}. \tag{2}$$

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}},\ k_2 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2+1}\right)^3}.$$

Гауссова кривизна $K = k_1k_2$ равна

$$\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2+1}}\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2+1}\right)^3} = K.$$

Требуя $K = const$, получим два решения:

$$f(u) = \int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2-(c-1)}{c-Kt^2}}dt + c_1,$$

$$f(u) = -\int_0^u \sqrt{\frac{Kt^2-(c-1)}{c-Kt^2}}dt + c_1, \tag{3}$$

где c_1, c — произвольные константы.

В [1, с. 100] форма меридиана $f = f(u)$ исследована без использования вычисления эллиптического интеграла. Мы построим данные поверхности, используя математический пакет.

Рассмотрим случай, когда $K < 0$, $c = a^2 < 1$. Для определенности полагаем $K = -1$. Из (3) имеем

$$f(u) = \pm \int_0^u \sqrt{\frac{-t^2 - a^2 + 1}{a^2 + t^2}} dt + c_1 .$$

При $0 < c < 1$ имеем волчок Миндинга.

Требуя, чтобы $1 - c - u^2 > 0$, получим $u \in [-\sqrt{1-c}, 0]$.

Полагая $c = \dfrac{1}{4}$, с использованием математического пакета находим решение (3).

Имеем

$$f(u) = \pm(2\text{EllipticF}(\frac{2u\sqrt{3}}{3}\sqrt{3i}) - \frac{1}{2}\text{EllipticE}(\frac{2u\sqrt{3}}{3}\sqrt{3i})) + C,$$

$$f'(u) = \pm \frac{\sqrt{\frac{3}{4} - u^2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + u^2}}.$$

Выбираем знак плюс и $C = 0$.

Введем обозначение

$$b = f(-\sqrt{1-c} = -2\text{EllipticK}(\sqrt{3}i) + 1/2\text{EllipticE}(\sqrt{3}i)$$

и рассмотрим поверхности

$$V1 : r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), f(u)),$$

$$V2 : r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), -f(u) + 2b),$$

$$V3 : r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), -f(u)),$$

$$V4 : r(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), f(u) - 2b),$$

$$u \in [-\sqrt{\frac{3}{4}}, 0], \;\; v \in [-\pi, \pi].$$

Эта поверхность называется волчком Миндинга.

Построим волчок Миндинга (4 секции) (рис. 1).

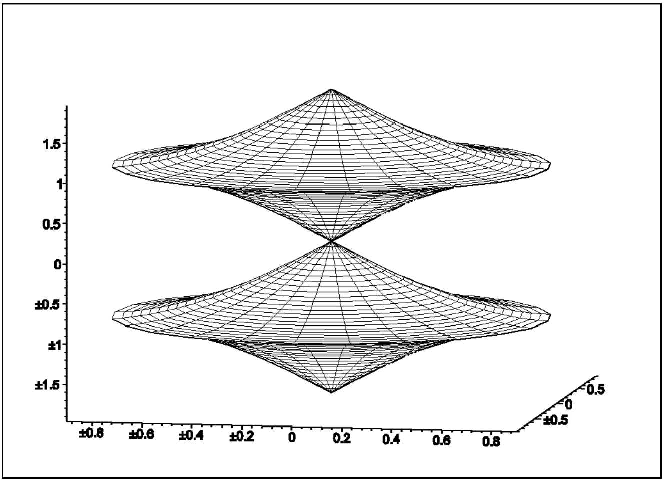

Рис. 1. Волчок Миндинга (4 секции)

Рассмотрим две гладкие поверхности $M, \overline{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \overline{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем вектор $p\vec{f}(p) = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$. Обозначим через n орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности $\overline{M}$ в точке $f(p) \in \overline{M}$ имеет вид

$$T_{f(p)}\overline{M} = (f(p), n, V).$$

Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$, то и поверхность $\overline{M}$ имеет ту же кривизну.

Обозначим через r радиус-вектор поверхности M, а через R — радиус-вектор поверхности $\overline{M}$. Полагаем $K=-1$ и рассмотрим отображение $f: M \to \overline{M}$ [2, с. 489]. Имеем

$$R = r - V.$$

Из условия $<R_i[n,V]> = 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n.$$

Так как $<V,V> = 1, <\partial_i V, V> = 0,$ то

$$\omega(r_i) = <r_i\ ,V>,\ \nabla_i V = r_i - \omega(r_i)V.$$

Имеем

$$\nabla_1 V^1 = 1 - g_{11}(V^1)^2,\ \nabla_1 V^2 = -g_{11}V^1V^2,$$

$$\nabla_2 V^1 = -g_{22}V^1V^2,\ \nabla_2 V^2 = 1 - g_{22}(V^2)^2,$$

$$V = V^i r_i\ g_{ij} = <r_i, r_j>,\ r_1 = \partial_u r,\ r_2 = \partial_v r. \tag{4}$$

Следуя Миндингу [3, с. 175], введем обозначение

$$u = ash(t), a = \frac{1}{2}.$$

Имеем

$$f(t) = \int \sqrt{1 - \frac{1}{4}ch^2(t)dt},$$

$$f(t) = 2EllipticF(\frac{1}{3\sqrt{3}}sh(t), \sqrt{3}i) - \frac{1}{2}EllipticE(\frac{1}{3\sqrt{3}}sh(t), \sqrt{3}i),$$

$$r = \frac{1}{2}sh(t)e(v) + f(t)k, r_1 = \frac{1}{2}ch(t)e(v) + \sqrt{1 - \frac{1}{4}ch^2(t)}k,$$

$$r_2 = \frac{1}{2}sh(t)e'(v), g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = \frac{1}{4}sh^2(t).$$

Определим символы Кристоффеля

$$\Gamma_{22}{}^{1} = -1/4\mathrm{sh}(\mathrm{t})\mathrm{ch}(\mathrm{t}), \quad \Gamma_{12}{}^{2} = \Gamma_{21}{}^{2}\mathrm{cth}(\mathrm{t}), \mathrm{cth}(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{ch}(\mathrm{t})}{\mathrm{sh}(\mathrm{t})}.$$

Остальные Γ_{ij}^{k} равны нулю. Формулы (4) примут вид

$$\partial_t V^1 = 1 - (V^1)^2, \tag{5.1}$$

$$\partial_t V^2 + \frac{ch(t)}{sh(t)} V^2 = -V^1 V^2, \tag{5.2}$$

$$\partial_v V^1 - \frac{1}{4} ch(t) sh(t) V^2 = -\frac{1}{4} 4sh^2(t) V^1 V^2, \tag{5.3}$$

$$\partial_v V^2 + \frac{ch(t)}{sh(t)} V^1 = 1 - \frac{1}{4} sh^2(t)(V^2)^2. \tag{5.4}$$

Чтобы определить решение, рассмотрим равенства (5.1), (5.3). Имеем

$$V^1 = th(t + F(v)), V^2 = \frac{-4\partial_v F(v) th(t + F(v))^2 + 4\partial_v F(v)/sh(t)}{-th(t + F(v)) sh(t) + ch(t)}.$$

Потребуем, чтобы $< V, V > = 1$. Тогда

$$(1^*):\ F(v) = \pm t + arcth \frac{e^4 - 1}{1 + e^4 - 2e^2},$$

$$(2^*):\ F(v) = ln(\pm tg(C/4 - v/4)),\ C = const.$$

Если выполняется (1*), то $V^2 = 0, V = r_1$. Нормаль к поверхности $\overline{M}$ имеет вид $\overline{n} = [n, V] = r_2 / |r_2| = e'(v)$. Тогда $\partial_t e'(v) = 0$, поверхность $\overline{M}$ вырожденная. Остается случай (2*).

Имеем

$$V^1 = \frac{(e^{2t} + 1)cos^2(C/4 - v/4) - e^{2t}}{(e^{2t} - 1)cos^2(C/4 - v/4) - e^{2t}}, \tag{6}$$

$$V^2 = \pm \frac{8\,e^{2t}\ sin(C/4 - v/4)\,cos(C/4 - v/4)}{((e^{2t} - 1)\,cos^2(C/4 - v/4)\,) - e^{2t}}\ ,$$

$$\overline{M}\ : R(u,v) = \frac{1}{2} sh(t)e(v) + f(t)k - V^1 r_1 - V^2 r_2. \qquad (7)$$

Равенства (5.2), (5.4) в силу (6) выполняются.

При $1 - \frac{1}{4} ch^2(t) > 0$ имеем $t \in [0, arcch(2)]$.

Построим преобразования Бианки волчка Миндинга (7) (рис. 2).

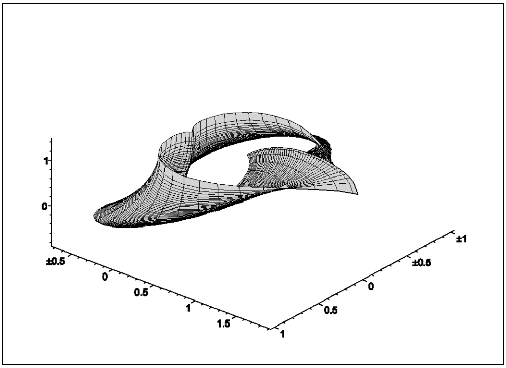

Рис. 2. Преобразования Бианки волчка Миндинга

При этом мы выбрали V^2 со знаком плюс при $C = \pi,\ t \in [0, arcch(2)],\ v \in [-2\pi, 2\pi]$.

Список литературы

1. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М. ; Л., 1948. Ч. 2.

2. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.

3. *Норден А. П.* Об основаниях геометрии. М., 1956.

M. A. Cheshkova[1]
[1] *Altai State University*
61 Prosp. Lenina, Barnaul, 656049, Russia
cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-15

Transformation of Bianchi for Minding Top

Submitted on May 8, 2020

The work is devoted to the study of the Bianchi transform for surfaces of revolution of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Minding top, the Minding coil, the pseudosphere (Beltrami surface). The study of surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospherical surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. The connection of the geometric characteristics of pseudospherical surfaces with the theory of networks, with the theory of solitons, with nonlinear differential equations and sin-Gordon equations is established. The sin-Gordon equation plays an important role in modern physics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudospherical surface. The Bianchi transform for the Minding top is constructed. Using a mathematical package, Minding's top and its Bianchi transform are constructed.

Keywords: Gaussian curvature, surface of revolution, Minding top, Bianchi transform.

References

1. *Kagan, V. F.:* Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition. Part 2, Moscow, Leningrad (1948).
2. *Shulikovsky, V. I.:* Classical differential geometry in tensor exposition. Moscow (1963).
3. *Norden, A. P.:* On the foundations of geometry. Moscow (1956).

УДК 514.76

Е. Р. Шамардина[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
katerina.r2805@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-2542-9167
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-16

Классификация трехмерных алгебр Ли над полем комплексных чисел

В данной работе изучен вопрос о классификации трехмерных алгебр Ли над полем комплексных чисел с точностью до изоморфизма. Предложенная классификация основана на рассмотрении объектов, инвариантных относительно изоморфизма, а именно таких величин, как производная подалгебра и центр алгебры Ли. Приведенную классификацию отличает от других более подробное и простое изложение.

Ключевые слова: алгебры Ли, поле комплексных чисел, алгебра Гейзенберга.

Утверждение 1. Для произвольной двумерной неабелевой алгебры Ли L_2 над полем C найдется базис $\{x, y\}$ такой, что $[x, y] = x$ [2, p. 20].

Доказательство. Пусть L'_2 — производная подалгебра алгебры Ли L. Для L'_2 возможны следующие случаи:

$$\dim L'_2 = 0,\ \ \dim L'_2 = 1,\ \ \dim L'_2 = 2\ .$$

Пусть $\dim L'_2 = 0$. Тогда все структурные уравнения равны нулю, значит L — абелева. Возникло противоречие с условием, значит, $\dim L'_2 \neq 0$.

Поступила в редакцию 06.05.2020 г.

Пусть $\dim L_2' = 1$, $x \in L'_2$, а $y \notin L'_2$. Тогда

$$[x, y] \in L'_2, \ [x, y] = \lambda x,$$

где $\lambda \neq 0, \lambda \in C.$ Преобразуем

$$[x, y] = \lambda x \Leftrightarrow [x, \widetilde{y}] = x,$$

где $\widetilde{y} = \dfrac{1}{\lambda} y$.

Таким образом, если $\dim L'_2 = 1$, то найдется базис $\{x, y\}$ такой, что $[x, y] = x$.

Пусть $\dim L'_2 = 2$ и $x, y \in L'_2$, тогда $[x, y] \in L'_2$. Рассмотрим все возможные структурные уравнения от этих элементов $[x, y] = -[y, x], [x, x] = [y, y] = 0.$ Откуда следует, что $\dim L'_2 = 1$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть C — поле комплексных чисел. Существует единственная (с точностью до изоморфизма) двумерная неабелева алгебра Ли L_2 над полем C. При этом L_2 обладает базисом $\{x, y\}$ таким, что $[x, y] = x$.*

Утверждение 2 [1, с. 21]. Если L — трехмерная алгебра Ли над полем C, где $\dim L' = 1$, то:

1) $L' \subset Z(L)$ либо $L' \cap Z(L) = 0;$

2) если $L' \subset Z(L)$, то существует базис $\{f, g, h\}$ такой, что $[f, g] = h$, $h \in Z(L);$

3) если $L' \cap Z(L) = 0$, то $L = L_2 \oplus C$.

Доказательство.

1. Покажем, что $\dim Z(L) = 1.$ Пусть $\{x, y, z\}$ — базис L и $x \in L'$, тогда структурные уравнения от базисных элементов примут вид

$$[x, y] = x, [x, z] = \lambda x, [y, z] = \mu x.$$

Рассмотрим произвольный элемент $u \in L$: $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Элемент $u \in Z(L)$ тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми базисными элементами алгебры Ли L, то есть $[u,x] = [u,y] = [u,z] = 0$. Рассмотрим систему этих скобок Ли:

$$[u,x] = 0,\ [u,y] = 0,\ [u,z] = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (-\beta - \lambda\gamma)x = 0,\ (\alpha - \mu\gamma)x = 0,\ (\alpha\lambda + \beta\mu)x = 0.$$

Отсюда в силу $x \neq 0$ имеем следующие уравнения:

$$-\beta - \lambda\gamma = 0,\ \alpha - \mu\gamma = 0,\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0.$$

Примем за неизвестные α, β, γ, а за числовые коэффициенты λ и μ. Тогда матрица данной системы однородных линейных уравнений примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & -\mu \\ \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы A нечетной размерности и сама матрица имеют кососимметрический вид, то $\det A = 0$. Минор матрицы A: $M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, значит, $rankA = 2$ и система линейных уравнений будет иметь бесконечно много решений. Найдутся такие коэффициенты α, β, γ, одновременно не равные нулю, следовательно, $\dim Z(L) = 1$.

Поскольку $\dim Z(L) = 1$, то пусть $z \in Z(L) (z \neq 0)$, а $x, y \notin Z(L)$. Если $L' \subset Z(L)$ и $\dim L' = \dim Z(L)$, значит $L' = Z(L)$, тогда

$$[x,y] = \lambda z,\quad [x,z] = 0,\quad [y,z] = 0.$$

Если $L' \cap Z(L) = 0$, то имеем

$$[x,y] = \lambda x,\quad [x,z] = 0,\quad [y,z] = 0,\ \lambda \in C,\ \lambda \neq 0.$$

2. Пусть $\{f,g,h\}$ — базис L, где $h \in Z(L)$. Модифицируем этот базис. Основываясь на первом пункте, запишем структурные уравнения в виде

$$[f,g]=\lambda h,\ [g,h]=0,\ [h,f]=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f,\widetilde{g}]=h,\ [\widetilde{g},h]=0,\ [h,f]=0,$$

где $\lambda \neq 0, \lambda \in C, \widetilde{g}=\frac{1}{\lambda}g$. В результате имеем базис $\{f,g,h\}$ такой, что $[f,g]=h, h \in Z(L)$.

3. Пусть $\{f,g,h\}$ — базис L, где $h \in Z(L), f \in L'$. Тогда, основываясь на первом пункте, структурные уравнения от этих базисных элементов запишем в виде

$$[f,g]=\lambda f,\quad [g,h]=0,\quad [h,f]=0,\ \ \lambda \neq 0, \lambda \in C.$$

Модифицировав этот базис, имеем

$$[f,\widetilde{g}]=f,\quad [\widetilde{g},h]=0,\quad [h,f]=0,$$

где $\widetilde{g}=\frac{1}{\lambda}g$.

Двумерную алгебру Ли L_2 можем представить как линейную оболочку, натянутую на векторы $\{f,g\}$. Так как $[f,g]=f$, то L_2 будет идеалом. Поле комплексных чисел C изоморфно $Z(L)$, который также является идеалом. Так как $Z(L)\cap L_2=0$, то алгебру Ли L можем представить в виде

$$L=L_2\oplus Z(L) \Leftrightarrow L=L_2\oplus C.$$

Теорема 2. *Пусть C — поле комплексных чисел. Существуют ровно две (с точностью до изоморфизма) трехмерные алгебры Ли L над полем C такие, что* $\dim L'=1$*:*

1) алгебра Гейзенберга: $L' \subset Z(L)$;

2) $L=L_2\oplus C$, причем $L' \cap Z(L)=0$.

Утверждение 3 [2, p. 22]. Если L — трехмерная алгебра Ли над полем C такая, что $\dim L' = 2$, то:

1) L' — абелева;

2) $ad_x|_{L'} : L' \to L'$ — изоморфизм $(\forall x \notin L')$.

Доказательство.

1. Пусть $x \notin L'$. Составим структурные уравнения базиса $\{x, y, z\}$:

$$[x, y] = \gamma y + \delta z,\ \ [y, z] = \alpha y + \beta z,\ \ [x, z] = \xi y + \varsigma z. \qquad (1)$$

Для элементов базиса рассмотрим тождество Якоби

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 .$$

Подставим соответствующие разложения скобок Ли от базисных элементов и упростим $\alpha\delta z + \beta\xi y - \alpha\varsigma y - \beta\gamma z = 0$.

Сгруппируем слагаемые двумя способами:

$$\alpha(\delta z - \varsigma y) + \beta(\xi y - \gamma z) = 0, \qquad (2)$$

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)z + (\beta\xi - \alpha\varsigma)y = 0. \qquad (3)$$

Так как z и y линейно независимы, то для (3) справедливо

$$\beta\xi - \alpha\varsigma = 0,\ \ \alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$

то есть $\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \varsigma & \xi \end{pmatrix} = 0$.

Составим матрицу коэффициентов системы (1):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \xi \\ \beta & \delta & \varsigma \end{pmatrix}.$$

Поскольку размерность L' равна 2, ее ранг будет равен двум. Так как два ее минора второго порядка равны нулю, то третий минор будет отличен от нуля, а именно

$$\det\begin{pmatrix} \gamma & \xi \\ \delta & \varsigma \end{pmatrix} = \gamma\varsigma - \xi\delta \neq 0 .$$

Введем новые обозначения в (2): $y' = \delta z - \varsigma y, z' = -\gamma z + \xi y$. Составим матрицу коэффициентов правой части и найдем, чему будет равен ее определитель:

$$\det\begin{pmatrix} \delta & -\varsigma \\ -\gamma & \xi \end{pmatrix} = \delta\xi - \gamma\varsigma \neq 0 .$$

Значит, y' и z' линейно независимы и в (2) коэффициенты α и β равны нулю. Тогда система (1) примет вид

$$[x,y] = \gamma y + \delta z,\ [x,z] = \xi y + \varsigma z\ ,\ [y,z] = 0. \tag{4}$$

Так как $y,z \in L'$ и $[y,z]=0$, то L' — абелева.

2. Пусть $\{x,y,z\}$ — базис L. В силу предыдущего пункта структурные уравнения от базисных элементов примут вид (4). Так как $[x,y]\neq 0, [x,z]\neq 0$ и $[x,y],\ [x,z]\in L'$, то $[x,y],[x,z]$ — линейно независимы, где $ad_x|_{L'}(y)=[x,y]$ и $ad_x|_{L'}(z)=[x,z]$. Значит, $ad_x|_{L'}\colon L'\to L'$ — изоморфизм $(\forall x \notin L')$.

Утверждение 4. Если L — трехмерная алгебра Ли над полем C, $\dim L' = 2$, и найдется $h \notin L'$ такой, что оператор $ad_h|_{L'}\colon L' \to L'$ диагонализируем, то:

1) L имеет вид L_μ для некоторого $\mu\neq 0, \mu\in C$, где L_μ — трехмерная алгебра Ли над полем C, в которой существует базис $\{u,v,w\}$ со структурными уравнениями

$$[u,v]=v,[u,w]=\mu w,[v,w]=0\,;$$

2) для любого $\widetilde{x}\notin L'$ присоединенный оператор $ad_{\widetilde{x}}|_{L'}\colon L'\to L'$ также диагонализируем;

3) $L_\mu \cong L_\vartheta$ тогда и только тогда, когда $\mu=\vartheta$ либо $\mu=\dfrac{1}{\vartheta}$.

Доказательство.

1. Так как $\dim L = 3$ и $\dim L' = 2$, то из утверждения 3 (п. 1) следует, что L' — абелева. Пусть $\{x, y\}$ — базис L', тогда $[x, y] = 0$.

Рассмотрим присоединенный оператор $ad_h (h \notin L')$, действующий на элементы x, y. Так как по условию $ad_h |_{L'} : L' \to L'$ диагонализируемый, то

$$ad_h |_{L'} (x) = [h, x] = \alpha x + 0 \cdot y \text{ и } ad_h |_{L'} (y) = [h, y] = 0 \cdot x + \beta y .$$

Матрица присоединенного оператора ad_h является диагональной и имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ввиду изоморфизма ad_h, доказанного в утверждении 3 (п. 2).

Рассмотрим базис $\{x, y, h\}$ алгебры Ли L и модифицируем его:

$$[x, y] = 0,\ [h, x] = \alpha x,\ [h, y] = \beta y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [x, y] = 0,\ [\widetilde{h}, x] = x,\ [\widetilde{h}, y] = \mu y,$$

где изоморфизм φ задается следующим образом

$$\varphi : x \mapsto v, y \mapsto w, \widetilde{h} = \frac{1}{\alpha} h \mapsto u,$$

где $\mu = \dfrac{\beta}{\alpha} \neq 0$. Отсюда следует, что $L \cong L_\mu$.

2. Представим $\widetilde{x} \notin L'$ в виде $\widetilde{x} = \lambda h + w$, где $\lambda \neq 0, \lambda \in C$, $h \notin L', w \in L'$. Тогда подействуем присоединенным оператором на данное равенство $ad_{\widetilde{x}} = ad_{\lambda h} + ad_w$. За счет линейности оператора имеем $ad_{\widetilde{x}} = \lambda ad_h + ad_w$. Рассмотрим его сужение по L' $ad_{\widetilde{x}} |_{L'} = \lambda ad_h |_{L'} + ad_w |_{L'}$. Так как L' — абелева и $w \in L'$, то $ad_w |_{L'} = 0$, исходя из чего перепишем предыдущее равенство следующим образом: $ad_{\widetilde{x}} |_{L'} = \lambda ad_h |_{L'}$.

Так как оператор $ad_{\tilde{x}}|_{L'}$ является по условию диагонализируемым, то $ad_h|_{L'}$ также будет диагонализируемым и они оба будут задаваться диагональными матрицами, собственные значения которых отличаются друг от друга лишь на коэффициент λ.

3. *Необходимость.* Пусть $L_\mu \cong L_\vartheta$. Покажем, что $\mu = \vartheta$ либо $\mu = \dfrac{1}{\vartheta}$, $\mu \neq 0, \vartheta \neq 0$.

Рассмотрим L_μ и L_ϑ. Пусть $\{x, y, z\}$ — базис L_μ. Тогда структурные уравнения от базисных элементов примут вид $[x, y] = y$, $[x, z] = \mu z$, $[y, z] = 0$. Аналогично и для L_ϑ. Пусть $\{u, v, w\}$ — базис L_ϑ, тогда $[u, v] = v$, $[u, w] = \vartheta w$, $[v, w] = 0$.

Рассмотрим производные подалгебры L'_μ, L'_ϑ.

Пусть $x \notin L'_\mu, y, z \in L'_\mu$, тогда, опираясь на предыдущий пункт, мы можем утверждать, что существует присоединенный оператор $ad_x : L'_\mu \to L'_\mu$, причем он является диагонализируемым и задается диагональной матрицей $diag(1, \mu)$ с собственными значениями $1, \mu$.

Пусть $u \notin L'_\vartheta$ и $v, w \in L'_\vartheta$, тогда существует присоединенный оператор $ad_u : L'_\vartheta \to L'_\vartheta$, являющийся диагонализируемым и задаваемый диагональной матрицей $diag(1, \vartheta)$ с собственными значениями $1, \vartheta$.

Так как $L_\mu = L_\vartheta$, то существует изоморфизм $\varphi : L'_\mu \to L'_\vartheta$, $x \mapsto \varphi(x)$. Запишем u в виде $u = \lambda\varphi(x) + s$, где $\varphi(x) \notin L'_\vartheta$, $s \in L'_\vartheta, \lambda \in C$. Тогда рассмотрим действие присоединенного оператора на это равенство $ad_u = \lambda ad(\varphi(x)) + ad_s$ и сузим его на L'_ϑ: $ad_u|_{L'_\vartheta} = \lambda ad(\varphi(x))|_{L'_\vartheta} + ad_s|_{L'_\vartheta}$. Так как L'_ϑ — абелева и $s \in L'_\vartheta$, то $ad_s|_{L'_\vartheta} = 0$ и получим следующее равенство:

$ad_u|_{L'_\vartheta} = \lambda ad(\varphi(x))|_{L'_\vartheta}$. Так как $ad_u|_{L'_\vartheta}$ диагонализируемый оператор, то и $ad(\varphi(x))|_{L'_\vartheta}$ также диагонализируем. Тогда, исходя из доказанного выше, их собственные значения отличаются лишь на λ, откуда имеем $\vartheta = \mu$ либо $\mu = \dfrac{1}{\vartheta}$.

Достаточность. Пусть $\mu = \vartheta$ либо $\mu = \dfrac{1}{\vartheta}$. Покажем, что $L_\mu \cong L_\vartheta$. В случае когда $\vartheta = \mu,$ изоморфизм очевиден.

Рассмотрим второй случай, когда $\dfrac{1}{\vartheta} = \mu$. Запишем для каждой из алгебр их систему структурных уравнений от базисных элементов.

$$L_\mu : [x,y] = y,\ [x,z] = \mu z,\ [y,z] = 0;$$

$$L_\vartheta : [u,v] = v,\ [u,w] = \vartheta w,\ [v,w] = 0.$$

Преобразуем первую систему структурных уравнений:

$$[x,y] = y,\ [x,z] = \mu z,\ [y,z] = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [\widetilde{x}, y] = \vartheta y,\ [\widetilde{x}, z] = z,\ [y,z] = 0.$$

Отсюда имеем, что $L_\mu \cong L_\vartheta$, где φ — искомый изоморфизм $\varphi : \vartheta x = \widetilde{x} \mapsto u, y \mapsto w, z \mapsto v.$

Утверждение 5. Если L — трехмерная алгебра Ли над полем C, $\dim L' = 2$, и оператор $ad_x : L' \to L'$ не диагонализируем ни для какого $x \notin L'$, то найдется такой $x \notin L'$, что ad_x задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Так как оператор $ad_x : L' \to L'$ не диагонализируем ни для какого элемента $x \notin L'$, значит, и матрица оператора не приводится к диагональному виду. Следовательно, ее собственные значения равны друг другу и жорданова нормальная форма этой матрицы имеет вид [1, с. 264] $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0$. Нужно показать, что ad_x можно задать матрицей вида $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть что существует изоморфизм φ:

$$[x,y]=\lambda y,\ [x,z]=y+\lambda z,\ [y,z]=0 \xrightarrow{\varphi}$$

$$\xrightarrow{\varphi} [\bar{x},\bar{y}]=\bar{y},\ [\bar{x},\bar{z}]=\bar{y}+\bar{z},\ [\bar{y},\bar{z}]=0.$$

Модифицируем исходную систему структурных уравнений:

$$[x,y]=\lambda y,\ [x,z]=y+\lambda z,\ [y,z]=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [\tilde{x},y]=y,\ [\tilde{x},\tilde{z}]=y+\tilde{z},\ [y,\tilde{z}]=0.$$

Получили искомый изоморфизм φ:

$$\varphi: \frac{1}{\lambda}x=\tilde{x} \mapsto \bar{x},\ \ y \mapsto \bar{y}, \lambda z=\tilde{z} \mapsto \bar{z}.$$

Теорема 3. *Существует бесконечно много (с точностью до изоморфизма) трехмерных комплексных алгебр Ли* L *над полем комплексных чисел таких, что* $\dim L'=2$*:*

1) алгебра Ли вида L_μ*, где* $\mu \in C, |\mu| \geq 1$*;*

2) алгебра Ли, описанная в утверждении 5.

Утверждение 6 [1, с. 24]**.** *Если* L *— трехмерная комплексная алгебра Ли и* $L=L'$*, то:*

1) для любого ненулевого элемента $x \in L$ *ранг оператора* $ad_x : L \to L$ *равен двум;*

2) существует $h \in L$ *такой, что* ad_h *обладает ненулевым собственным значением;*

3) собственные значения оператора ad_h *имеют вид* $\alpha, 0, -\alpha$*, где* $\alpha \neq 0$*;*

4) элемент h *можно дополнить до базиса* $\{h,x,y\}$ *алгебры* L *такого, что* $[h,x]=\alpha x, [h,y]=-\alpha y, [x,y]=h$;

5) $L\cong sl(2,C)$.

Доказательство.

1. Так как $x\neq 0$, можем дополнить его до базиса пространства L': $\{x,y,z\}$. Так как $L=L'$, то $Span\{[x,y],[y,z],[z,x]\}$. Найдем образ оператора ad_x: $\mathrm{Im}(ad_x)=Span\{[x,y],[z,x]\}$. Так как $[x,y],[y,z],[z,x]$ — линейно независимая система, то и ее подсистема $[x,y],[z,x]$ будет также линейно независимой. Отсюда имеем, что $\dim(\mathrm{Im}(ad_x))=2$, тогда и $rank(ad_x)=2$.

2. Если для $x\in L$ оператор ad_x обладает ненулевым собственным значением, то положим $h=x$. Пусть для $x\neq 0$ оператор ad_x имеет лишь нулевые собственные значения.

Тогда жорданова форма его матрицы имеет вид

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пусть $\{x,y,z\}$ — соответствующий базис L. Тогда положим $h=y$.

3. $h\in L=L'$. Из предыдущего пункта известно, что $tr(ad_h)=0$ и что хотя бы одно из собственных значений отлично от нуля. Пусть нам даны собственные значения $0,\alpha,\beta$, одно из которых отлично от нуля. Так как $tr(ad_h)=0$, то $0+\alpha+\beta=0$, то есть $\alpha=-\beta\neq 0$. Значит, оператор ad_h имеет следующие собственные значения: $\{0,\alpha,-\alpha\}$.

4. Пусть x,z — собственные элементы оператора ad_h, отвечающие собственным значениям α и $-\alpha$ соответственно. Тогда в силу тождества Якоби $ad_h([x,z])=[h,[x,z]]=0$, откуда имеем $[x,z]=\lambda h, \lambda\neq 0.$ Полагая $y=\lambda^{-1}z$, получаем искомый базис.

5. Пусть дан базис

$$\{x, y, z\} \in L : [h, x] = \alpha x, \quad [h, y] = -\alpha y, \ [x, y] = h$$

и базис

$$\{f, g, e\} \in sl(2, C) : [e, f] = g, [e, g] = -2e, \ [f, g] = 2f.$$

Установим изоморфизм между L и $sl(2, C)$:

$$[h, x] = \alpha x, \ [h, y] = -\alpha y, \ [x, y] = h \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ [\tilde{h}, x] = 2x, \ [\tilde{h}, \tilde{y}] = -2\tilde{y}, \ [x, \tilde{y}] = \tilde{h}.$$

Таким образом, задан изоморфизм

$$\varphi : \frac{2}{\lambda} h = \tilde{h} \to g, \quad \frac{2}{\lambda} y = \tilde{y} \to e, x \to f \ .$$

Значит, $L \cong sl(2, C)$.

Теорема 4. *Каждая трехмерная комплексная алгебра Ли* L *такая, что* $L = L'$, *изоморфна* $sl(2, C)$.

На основе рассмотренных объектов, инвариантных относительно изоморфизма, представим классификацию трехмерных алгебр Ли над полем комплексных чисел в виде следующей таблицы.

Классификация трехмерных алгебр Ли над полем комплексных чисел

Класс над C	$\dim L'$	Признаки класса
1	0	Абелева алгебра Ли
2	1	$L' = Z$ алгебра Гейзенберга
3	1	$L' \cap Z = 0, L = L_2 \oplus C$
4	2	Диагонализируемый оператор ad_h, L_μ, где $\mu \in C, \vert \mu \vert \geq 1$
5	2	Оператор ad_h не диагонализируемый
6	3	$L = L'$

Список литературы

1. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. М., 2013.
2. *Erdmann K., Wildon J.* Introduction to Lie Algebras. L., 2006.

E.R. Shamardina[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
katerina.r2805@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-16

The classification of three-dimensional Lie algebras on complex field

Submitted on May 6, 2020

In this paper, we study the classification of three-dimensional Lie algebras over a field of complex numbers up to isomorphism. The proposed classification is based on the consideration of objects invariant with respect to isomorphism, namely such quantities as the derivative of a subalgebra and the center of a Lie algebra. The above classification is distinguished from others by a more detailed and simple presentation.

Any two abelian Lie algebras of the same dimension over the same field are isomorphic, so we understand them completely, and from now on we shall only consider non-abelian Lie algebras. Six classes of three-dimensional Lie algebras not isomorphic to each other over a field of complex numbers are presented. In each of the classes, its properties are described, as well as structural equations defining each of the Lie algebras. One of the reasons for considering these low dimensional Lie algebras that they often occur as subalgebras of large Lie algebras

Keywords: Lie algebras, complex field, Heisenberg algebra.

References

1. *Vinberg, E.B.:* A course in algebra. Moscow (2013).
2. *Erdmann, K., Wildon, J.:* Introduction to Lie Algebras. London (2006).

УДК 514.76

Ю. И. Шевченко[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

ESkrydlova@kantiana.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-17

Квазитензор кривизны-кручения фундаментально-групповой связности Лаптева

Рассмотрено пространство с фундаментально-групповой связностью Лаптева, обобщающее пространства со связностями Картана. Структурные уравнения Лаптева приведены к более простому виду. Продолжение приведенных структурных уравнений позволило найти дифференциальные сравнения для коэффициентов в этих уравнениях. Доказано, что одна часть этих коэффициентов образует тензор, а другая часть — квазитензор, что обосновывает название «квазитензор кривизны-кручения» для всей совокупности. Из дифференциальных сравнений для компонент этого квазитензора получены сравнения для компонент тензора кривизны-кручения Лаптева, который содержит 9 подтензоров, входящих в неприведенные структурные уравнения.

В двух особых случаях пространство с фундаментально-групповой связностью является пространством со связностью Картана, обладающим квазитензором кривизны-кручения, который содержит квазитензор кручения. В редуктивном случае пространство картановой связности превращается в такое главное расслоение со связностью, которое имеет не только тензор кривизны, но и тензор кручения.

Ключевые слова: фундаментально-групповая связность, связность Картана, квазитензор кривизны-кручения, тензор кривизны-кручения.

Поступила в редакцию 27.04.2020 г.

1. Преобразование структурных уравнений Лаптева

Понятие связности Картана используется в трех смыслах: 1) главная связность — связность в главном расслоении; 2) неглавная связность, например, классическая проективная связность; 3) общая связность — объединяющая оба предыдущих случая. Рассмотрим фундаментально-групповую связность Лаптева, которая включает общую связность Картана. Запишем структурные уравнения пространства фундаментально-групповой связности [4, с. 311, 316, 339, 342] в подробном виде:

$$d\omega^{s_0} = R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_0}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_0}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} d\omega^{s_1} &= C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + 2C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \\ &+ R^{s_1}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_1}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d\omega^{s_2} &= C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2} + 2C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + C^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + \\ &+ R^{s_2}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_2}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где индексы принимают следующие значения:

$$s_0,\ldots = \overline{-m+1,0};\; s_1,\ldots = \overline{1,n};\; s_2,\ldots = \overline{n+1,n+r};$$
$$s_{01},\ldots = \overline{-m+1,n};\; s_{12},\ldots = \overline{1,n+r};\; s_{012},\ldots = \overline{-m+1,n+r}.$$

Здесь $C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}$ — постоянные $(n+r)$-мерной группы Ли G_{n+r}, содержащей r-членную подгруппу H_r. Они антисимметричны и удовлетворяют тождествам Якоби, причем часть постоянных равна нулю:

$$C^{s_{12}}_{(p_{12}q_{12})} = 0,\; C^{s_{12}}_{p_{12}\{q_{12}}C^{p_{12}}_{r_{12}t_{12}\}} = 0,\; C^{s_1}_{p_2q_2} = 0, \quad (4)$$

где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные скобки — циклирование. Коэффициенты $R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}$, удовлетворяющие условию антисимметрии $R^{s_{012}}_{(p_{01}q_{01})}=0$, образуют тензор кривизны кручения [4, с. 339, 340, 342]. Если тензор кривизны-кручения $R=\{R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}\}$ обращается в нуль, то уравнение (1) принимает вид $d\omega^{s_0}=0$, а уравнения (2, 3) превратятся в структурные уравнения группы G_{n+r} с подгруппой H_r (ср. [1, с. 320]), иначе говоря, в уравнения главного расслоения $H_r(E_n)$ с базой — однородным пространством $E_n=G_{n+r}/H_r$ и типовым слоем H_r.

Обозначим пространство фундаментально-групповой связности Лаптева через $L_{m,n,r}$. Система уравнений $\omega^{s_{01}}=0$ вполне интегрируема, поэтому пространство $L_{m,n,r}$ имеет базу — $(m+n)$-мерное многообразие V_{m+n} со структурными уравнениями (1, 2). Уравнения (1—3) пространства $L_{m,n,r}$ показывают, что оно есть главное расслоение $H_r(V_{m+n})$ над многообразием V_{m+n} с типовым слоем H_r. Если выполняется условие редуктивности (см., напр., [1, с. 176; 2, с. 357; 6, с. 456])

$$C^{s_2}_{p_1q_2}=0, \tag{5}$$

то расслоение $H_r(V_{m+n})$ становится пространством с главной связностью $H_{r,m+n}$.

Замечание 1. Для подмножеств форм связности $\omega^{s_{012}}$ можно использовать следующие названия (названия Лаптева [4, с. 305, 306] приведены в скобках):

ω^{s_0} — чисто базисные (побочные) формы,

ω^{s_1} — базисно-слоевые (главные) формы,

ω^{s_2} — чисто слоевые (вторичные) формы,

$\omega^{s_{01}}$ — базисные (первичные) формы,

$\omega^{s_{12}}$ — слоевые (специализированные) формы.

Структурные уравнения (2, 3) запишем короче:

$$d\omega^{s_1} = 2C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + R^{s_1}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + \\ + 2R^{s_1}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + K^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \tag{6}$$

$$d\omega^{s_2} = C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2} + 2C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \\ + R^{s_2}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_2}_{p_0q_1}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + K^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \tag{7}$$

где

$$K^{s_1}_{p_1q_1} = R^{s_1}_{p_1q_1} + C^{s_1}_{p_1q_1},\ K^{s_2}_{p_1q_1} = R^{s_2}_{p_1q_1} + C^{s_2}_{p_1q_1}\,. \tag{8}$$

Назовем $K = \{R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}, R^{s_{12}}_{p_0q_{01}}, K^{s_{12}}_{p_1q_1}\}$ преобразованным объектом кривизны-кручения. Найдем дифференциальные сравнения, которым удовлетворяют компоненты объекта *K*.

2. Побочный тензор кручения

Дифференцируя уравнения (1) внешним образом и используя уравнения (6), получим уравнения следующего вида:

$$\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}\wedge[dR^{s_0}_{p_0q_0} + (\dots)^{s_0}_{[p_0q_0]t_{01}}\omega^{t_{01}}] + \\ + 2\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1}\wedge[dR^{s_0}_{p_0q_1} - R^{s_0}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + (\dots)^{s_0}_{p_0q_1t_1}\omega^{t_1}] + \\ + \omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}\wedge[dR^{s_0}_{p_1q_1} - R^{s_0}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1} - R^{s_0}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1} + (\dots)^{s_0}_{[p_1q_1]t_1}\omega^{t_1}] = 0,$$

где

$$\omega^{t_1}_{q_1} = 2C^{t_1}_{q_1r_2}\omega^{r_2}\,. \tag{9}$$

Для справедливости этих кубичных уравнений необходимо, чтобы выражения в квадратных скобках являлись линейными комбинациями базисных форм:

$$dR^{s_0}_{p_0q_0} + (\dots)^{s_0}_{[p_0q_0]t_{01}}\omega^{t_{01}} = R^{s_0}_{p_0q_0t_{01}}\omega^{t_{01}}, \\ dR^{s_0}_{p_0q_1} - R^{s_0}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + (\dots)^{s_0}_{p_0q_1t_1}\omega^{t_1} = R^{s_0}_{p_0q_1t_{01}}\omega^{t_{01}}, \\ dR^{s_0}_{p_1q_1} - R^{s_0}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1} - R^{s_0}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1} + (\dots)^{s_0}_{[p_1q_1]t_1}\omega^{t_1} = R^{s_0}_{p_1q_1t_{01}}\omega^{t_{01}}.$$

Такие дифференциальные уравнения используются в обобщенных тождествах Бьянки [4, с. 339]. Запишем эти уравнения в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм:

$$dR^{s_0}_{p_0q_0} \cong 0 \pmod{\omega^{t_{01}}}, \; dR^{s_0}_{p_0q_1} - R^{s_0}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} \cong 0, \\ dR^{s_0}_{p_1q_1} - R^{s_0}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1} - R^{s_0}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1} \cong 0. \tag{10}$$

Значит, на базе V_{m+n} пространства $L_{m,n,r}$ заданы $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ однокомпонентных тензоров, или абсолютных инвариантов, $R^{s_0}_{p_0q_0}$ (см.: [4, с. 299, 331]), m^2 одновалентных тензоров $R^{s_0}_{p_0} = \{R^{s_0}_{p_0q_1}\}$ и m двухвалентных кососимметрических тензоров $R^{s_0} = \{R^{s_0}_{p_1q_1}\}$ (см.: [4, с. 297, 331]). Отметим, что тензоры Лаптева не являются классическими тензорами.

Замечание 2. Поскольку объект $R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}$ состоит из тензоров $R^{s_0}_{p_0q_0}$, $R^{s_0}_{p_0}$, R^{s_0}, он является тензором, который назовем побочным тензором кручения (см.: [5]). Инвариантные равенства $R^{s_0}_{p_{01}q_{01}} = 0$ делают уравнения (1) тривиальными: $d\omega^{s_0} = 0$, но не меняют уравнения (2, 3), то есть приводят к специализированной фундаментально-групповой связности [4, с. 331].

3. Главный квазитензор кручения

Замыкая уравнения (6) с помощью уравнений (1, 7), получим

$$\omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0} \wedge [dR^{s_1}_{p_0q_0} + R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_1}_{t_1} + (\ldots)^{s_1}_{[p_0q_0]t_{01}}\omega^{t_{01}}] + \\ + 2\omega^{p_0} \wedge \omega^{q_1} \wedge [dR^{s_1}_{p_0q_1} + R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_1}_{t_1} - R^{s_1}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + (\ldots)^{s_1}_{p_0q_1t_{01}}\omega^{t_{01}}] + \\ + \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} \wedge [\mathit{\Delta} K^{s_1}_{p_1q_1} + 4C^{s_1}_{r_2[p_1}C^{r_2}_{q_1]t_2}\omega^{t_2} + (\ldots)^{s_1}_{[p_1q_1]t_{01}}\omega^{t_{01}}] + \\ + 2\omega^{p_1} \wedge \omega^{q_2} \wedge \omega^{r_2}(C^{s_1}_{t_2p_1}C^{t_2}_{q_2r_2} + 2C^{s_1}_{t_1[q_2}C^{t_1}_{r_2]p_1}) = 0, \tag{11}$$

где $\mathit{\Delta} K^{s_1}_{p_1q_1} = dK^{s_1}_{p_1q_1} + K^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_1}_{t_1} - K^{s_1}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1} - K^{s_1}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1}$.

Последнее слагаемое в уравнениях (11) равно нулю согласно тождествам Якоби. Действительно, соответствующая этому слагаемому часть тождеств (4_2) имеет вид

$$C^{s_1}_{t_{12}\{p_1}C^{t_{12}}_{q_2r_2\}} = 0\,.$$

Раскрывая циклирование, записывая подробнее суммирование и учитывая условие (4_3), выделяющее подгруппу H_r, получим тождество

$$C^{s_1}_{t_1q_2}C^{t_1}_{r_2p_1} + C^{s_1}_{t_1r_2}C^{t_1}_{p_1q_2} + C^{s_1}_{t_2p_1}C^{t_2}_{q_2r_2} = 0,$$

левая часть которого находится в скобках последнего слагаемого уравнений (11). Следовательно, эти уравнения принимают вид

$$\begin{gathered}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}\wedge(dR^{s_1}_{p_0q_0} + R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_1}_{t_1} + \ldots) + \\ + 2\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1}\wedge(dR^{s_1}_{p_0q_1} + R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_1}_{t_1} - R^{s_1}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + \ldots) + \\ + \omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}\wedge(\Delta K^{s_1}_{p_1q_1} + 4C^{s_1}_{r_2[p_1}C^{r_2}_{q_1]t_2}\omega^{t_2} + \ldots) = 0.\end{gathered}$$

Эти кубичные уравнения могут выполняться лишь тогда, когда выражения в скобках являются линейными комбинациями базисных форм, что приводит к дифференциальным сравнениям

$$\begin{gathered}dR^{s_1}_{p_0q_0} + R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_1}_{t_1} \cong 0 \ (\operatorname{mod}\omega^{t_{01}}), \\ dR^{s_1}_{p_0q_1} + R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_1}_{t_1} - R^{s_1}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} \cong 0, \\ \Delta K^{s_1}_{p_1q_1} + 4C^{s_1}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2}\omega^{r_2} \cong 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Итак, получили $\frac{1}{2}m(m-1)$ одновалентных тензоров $R_{p_0q_0} = \{R^{s_1}_{p_0q_0}\}$, m двухвалентных тензоров $R_{p_0} = \{R^{s_1}_{p_0q_1}\}$ и кососимметрический квазитензор $K^{s_1}_{p_1q_1}$ (см.: [4, с. 297, 330]). Квазитензор станет тензором при выполнении условия

$$C^{s_1}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2} = 0. \tag{13}$$

Составной объект $\{R^{s_1}_{p_0 q_{01}}, K^{s_1}_{p_1 q_1}\}$ назовем главным квазитензором кручения.

4. Квазитензор кривизны-кручения

Дифференцируем внешние уравнения (7), используя уравнения (1, 6):

$$\begin{aligned}
&\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}\wedge(dR^{s_2}_{p_0q_0}+R^{t_2}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_2}+R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_1}+\ldots)+\\
&+2\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1}\wedge(dR^{s_2}_{p_0q_1}+R^{t_2}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_2}-R^{s_2}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1}+R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_1}+\ldots)+\\
&+\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}\wedge(\Delta K^{s_2}_{p_1q_1}+K^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1}+4C^{s_2}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2}\omega^{r_2}+\ldots)+\\
&+2\omega^{r_1}\wedge\omega^{q_2}\wedge\omega^{t_2}(2C^{s_2}_{p_2[q_2}C^{p_2}_{t_2]r_1}+2C^{s_2}_{p_1[q_2}C^{p_1}_{t_2]r_1}+\\
&+C^{s_2}_{p_2r_1}C^{p_2}_{q_2t_2})+2\omega^{q_2}\wedge\omega^{r_2}\wedge\omega^{t_2}C^{s_2}_{p_2\{q_2}C^{p_2}_{r_2t_2\}}=0,
\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$\omega^{s_2}_{t_2}=2C^{s_2}_{t_2r_2}\omega^{r_2},\quad \omega^{s_2}_{t_1}=2C^{s_2}_{t_1r_2}\omega^{r_2},\tag{15}$$

$$\Delta K^{s_2}_{p_1q_1}=dK^{s_2}_{p_1q_1}+K^{t_2}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_2}-K^{s_2}_{t_1q_1}\omega^{t_1}_{p_1}-K^{s_2}_{p_1t_1}\omega^{t_1}_{q_1}.$$

В уравнениях (14) два последних слагаемых равны нулю в силу тождеств Якоби и условия существования подгруппы H_r. В самом деле, запишем соответствующие части тождеств (4_2) и учтем условие (4_3):

$$\begin{aligned}
&C^{s_2}_{p_2q_2}C^{p_2}_{t_2r_1}+C^{s_2}_{p_2t_2}C^{p_2}_{r_1q_2}+C^{s_2}_{p_2r_1}C^{p_2}_{q_2t_2}+C^{s_2}_{p_1q_2}C^{p_1}_{t_2r_1}+\\
&+C^{s_2}_{p_1t_2}C^{p_1}_{r_1q_2}=0,\quad C^{s_2}_{p_2\{q_2}C^{p_2}_{r_2t_2\}}=0.
\end{aligned}$$

Левые части этих тождеств, среди которых присутствуют тождества Якоби для подгруппы H_r, являются множителями в слагаемых уравнений (14), поэтому уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
&\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}\wedge(dR^{s_2}_{p_0q_0}+R^{t_2}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_2}+R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_1}+\ldots)+\\
&+2\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1}\wedge(dR^{s_2}_{p_0q_1}+R^{t_2}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_2}-R^{s_2}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1}+R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_1}+\ldots)+\\
&+\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}\wedge(\Delta K^{s_2}_{p_1q_1}+K^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1}+4C^{s_2}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2}\omega^{r_2}+\ldots)=0.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекают дифференциальные сравнения

$$
\begin{gathered}
dR^{s_2}_{p_0q_0} + R^{t_2}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_2} + R^{t_1}_{p_0q_0}\omega^{s_2}_{t_1} \cong 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^{r_{01}}),\\
dR^{s_2}_{p_0q_1} + R^{t_2}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_2} - R^{s_2}_{p_0t_1}\omega^{t_1}_{q_1} + R^{t_1}_{p_0q_1}\omega^{s_2}_{t_1} \cong 0,\\
\Delta K^{s_2}_{p_1q_1} + K^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1} + 4C^{s_2}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2}\omega^{r_2} \cong 0.
\end{gathered}
\qquad (16)
$$

Таким образом, имеем $\frac{1}{2}m(m-1)$ одновалентных тензоров $\mathbb{R}_{p_0q_0} = \{R^{s_{12}}_{p_0q_0}\}$, содержащих подтензоры $R_{p_0q_0}$, m двухвалентных тензоров $\mathbb{R}_{p_0} = \{R^{s_1}_{p_0q_1}\}$ с подтензорами R_{p_0} и квазитензор $K^{s_{12}}_{p_1q_1}$, включающий подквазитензор $K^{s_1}_{p_1q_1}$. Если выполняется условие

$$
C^{s_{12}}_{t_2[p_1}C^{t_2}_{q_1]r_2} = 0\,, \qquad (17)
$$

содержащее условие (13), то квазитензор $K^{s_{12}}_{p_1q_1}$ становится тензором с подтензором $K^{s_1}_{p_1q_1}$.

Теорема 1. *Преобразованный объект кривизны-кручения* $K = \{R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}, R^{s_{12}}_{p_0q_{01}}, K^{s_{12}}_{p_1q_1}\}$ *пространства фундаментально-групповой связности Лаптева* $L_{m,n,r}$ *с приведенными структурными уравнениями (1, 6, 7) образует квазитензор, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (10, 12, 16). Квазитензор кривизны-кручения K распадается на* $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ *инвариантов* $R^{s_0}_{p_0q_0}$, $\frac{1}{2}m(3m-1)$ *одновалентных тензоров* $R^{s_0}_{p_0q_1}$, $R^{s_{12}}_{p_0q_0}$, $2m$ *двухвалентных тензоров* $R^{s_0}_{p_1q_1}$, $R^{s_{12}}_{p_0q_1}$ *и квазитензор* $K^{s_{12}}_{p_1q_1}$. *При условии (17) K превращается в тензор приведенной кривизны-кручения.*

Следствие. Квазитензор кривизны-кручения K имеет подквазитензор кручения $\overline{K} = \{R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}, R^{s_1}_{p_0q_{01}}, K^{s_1}_{p_1q_1}\}$, состоящий из побочного тензора кручения и главного квазитензора кручения. Если выполняется условие (13), то квазитензор кручения $\overline{K}$ становится тензором приведенного кручения.

5. Тензор кривизны-кручения

Получим дифференциальные сравнения для компонент тензора кривизны-кручения R из сравнения для компонент квазитензора. Подставим выражения (8) в сравнения (12_3, 16_3):

$$\Delta R^{s_1}_{p_1q_1} + \Delta C^{s_1}_{p_1q_1} + 4C^{s_1}_{r_2[p_1}C^{r_2}_{q_1]t_2}\omega^{t_2} \cong 0,$$

$$\Delta R^{s_2}_{p_1q_1} + \Delta C^{s_2}_{p_1q_1} + R^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1} + C^{t_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{t_1} + 4C^{s_2}_{r_2[p_1}C^{r_2}_{q_1]t_2}\omega^{t_2} \cong 0.$$

Подействуем дифференциальным оператором Δ на постоянные $C^{s_{12}}_{p_1q_1}$ и раскроем альтернирования:

$$\Delta R^{s_1}_{p_1q_1} + (C^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_1}_{r_1} - C^{s_1}_{r_1q_1}\omega^{r_1}_{p_1} - C^{s_1}_{p_1r_1}\omega^{r_1}_{q_1}) + \\ + 2(C^{s_1}_{r_2p_1}C^{r_2}_{q_1t_2} - C^{s_1}_{r_2q_1}C^{r_2}_{p_1t_2})\omega^{t_2} \cong 0,$$

$$\Delta R^{s_2}_{p_1q_1} + (C^{r_2}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_2} - C^{s_2}_{r_1q_1}\omega^{r_1}_{p_1} - C^{s_2}_{p_1r_1}\omega^{r_1}_{q_1}) + R^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_1} + \\ + C^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_1} + 2(C^{s_2}_{r_2p_1}C^{r_2}_{q_1t_2} - C^{s_2}_{r_2q_1}C^{r_2}_{p_1t_2})\omega^{t_2} \cong 0.$$

Воспользуемся обозначениями (9, 15):

$$\Delta R^{s_1}_{p_1q_1} + 2(C^{r_1}_{p_1q_1}C^{s_1}_{r_1t_2} - C^{s_1}_{r_1q_1}C^{r_1}_{p_1t_2} - C^{s_1}_{p_1r_1}C^{r_1}_{q_1t_2} + \\ + C^{s_1}_{r_2p_1}C^{r_2}_{q_1t_2} - C^{s_1}_{r_2q_1}C^{r_2}_{p_1t_2})\omega^{t_2} \cong 0,$$

$$\Delta R^{s_2}_{p_1q_1} + R^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_1} + 2(C^{r_2}_{p_1q_1}C^{s_2}_{r_2t_2} - C^{s_2}_{r_1q_1}C^{r_1}_{p_1t_2} - C^{s_2}_{p_1r_1}C^{r_1}_{q_1t_2} + \\ + C^{r_1}_{p_1q_1}C^{s_2}_{r_1t_2} + C^{s_2}_{r_2p_1}C^{r_2}_{q_1t_2} - C^{s_2}_{r_2q_1}C^{r_2}_{p_1t_2})\omega^{t_2} \cong 0.$$

Записывая соответствующие части тождеств Якоби (4_2), используя условия антисимметрии (4_1) и существования подгруппы (4_3), получаем, что выражения в скобках равны нулю, поэтому сравнения принимают вид

$$\Delta R^{s_1}_{p_1q_1} \cong 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^{t_{01}}), \quad \Delta R^{s_2}_{p_1q_1} + R^{r_1}_{p_1q_1}\omega^{s_2}_{r_1} \cong 0. \qquad (18)$$

Теорема 2. *Компоненты тензора кривизны-кручения* $R=\{R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}\}$ *пространства фундаментально-групповой связности Лаптева* $L_{m,n,r}$ *с неприведенными структурными уравнениями (1—3) удовлетворяют дифференциальным сравнениям (10, 12*$_{1,\,2}$*, 16*$_{1,\,2}$*, 18). Тензор R состоит из абсолютных инвариантов* $R^{s_0}_{p_0q_0}$*, одновалентных тензоров* $R^{s_0}_{p_0q_1}$*,* $R^{s_{12}}_{p_0q_0}$*, двухвалентных тензоров* $R^{s_0}_{p_1q_1}$*,* $R^{s_{12}}_{p_0q_1}$ *и тензора* $R^{s_{12}}_{p_1q_1}$*. Тензор кривизны-кручения R содержит тензор кручения* $R^{s_{01}}_{p_{01}q_{01}}$.

Замечание 3. Тензор R имеет 23 подтензора [4, с. 340], из которых только 8 не являются составными:

$$R^{s_0}_{p_0q_1},\ R^{s_0}_{p_1q_1},\ R^{s_1}_{p_0q_0},\ R^{s_1}_{p_0q_1},\ R^{s_1}_{p_1q_1},\ R^{s_{12}}_{p_0q_0},\ R^{s_{12}}_{p_0q_1},\ R^{s_{12}}_{p_1q_1}.$$

Компоненты этих тензоров вместе с особым тензором $R^{s_0}_{p_0q_0}$, состоящим из инвариантов, служат коэффициентами в структурных уравнениях (1—3).

6. Пространства со связностями Картана

Если тензорная часть квазитензора кривизны-кручения K равна нулю:

$$R^{s_0}_{p_{01}q_{01}}=0,\ R^{s_{12}}_{p_0q_{01}}=0, \tag{19}$$

то уравнения (1) вырождаются: $d\omega^{s_0}=0$, а уравнения (6, 7) принимают вид (см.: [1, с. 175; 4, с. 356])

$$d\omega^{s_1}=\omega^{p_1}\wedge(2C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{q_2}+K^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{q_1}), \tag{20}$$

$$d\omega^{s_2}=C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+2C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+K^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}. \tag{21}$$

Эти же уравнения получаются тогда, когда побочные формы ω^{s_0} отсутствуют.

Если выполняется условие редуктивности (5), то структурные уравнения (21) становятся проще (см. [1, с. 176; 4, с. 357]):

$$d\omega^{s_2} = C^{s_2}_{p_2 q_2}\omega^{p_2} \wedge \omega^{q_2} + K^{s_2}_{p_1 q_1}\omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1}. \qquad (22)$$

В этом случае справедливо условие тензорности (17) и в силу обозначения (15_2) аннулируются формы $\omega^{s_2}_{t_1} = 0$, поэтому дифференциальные сравнения (12_3, 16_3) принимают простейший вид:

$$\Delta K^{s_1}_{p_1 q_1} \cong 0, \; \Delta K^{s_2}_{p_1 q_1} \cong 0.$$

Значит, квазитензор кривизны-кручения $K^{s_{12}}_{p_1 q_1}$, содержащий квазитензор кручения $K^{s_1}_{p_1 q_1}$, превратился в тензор, который распался на 2 подтензора $K^{s_1}_{p_1 q_1}$ и $K^{s_2}_{p_1 q_1}$.

Выводы

1. Если в пространстве фундаментально-групповой связности Лаптева $L_{m,n,r}$ с приведенными уравнениями (1, 6, 7) выполнится условие (19), то оно станет пространством картановой связности со структурными уравнениями (20, 21), причем побочные формы превратятся в полные дифференциалы, не играющие существенной роли.

2. С другой стороны, если побочных форм нет, то имеем особое пространство Лаптева $L_{0,n,r}$ с теми же структурными уравнениями (20, 21), являющееся пространством со связностью Картана.

3. Пространство картановой связности есть специальное главное расслоение $H_r(V_n)$ над n-мерным многообразием V_n с типовым слоем — подгруппой $H_r \subset G_{r+n}$, причем расслоение $H_r(V_n)$ не обладает главной связностью [3, с. 167].

4. В общем случае пространство со связностью Картана имеет квазитензор кривизны-кручения, содержащий квазитензор кручения (ср. [8; 9]). При выполнении условия тензорности (17) квазитензоры становятся тензорами. Так происходит в случае классической проективной связности (см.: [7]).

5. В редуктивном случае главное расслоение $H_r(V_n)$ является пространством главной связности $H_{r,n}$ со структурными уравнениями (20, 22), причем это пространство наряду с тензором кривизны $K^{s_2}_{p_1q_1}$ имеет тензор кручения $K^{s_1}_{p_1q_1}$, то есть непосредственно обобщает пространство аффинной связности.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е.* Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученные методом подвижного репера // Геометрия — 3. Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. М., 2002. Т. 30. С. 170—204.

2. *Евтушик Л.Е.* Структуры высших порядков. М., 2014.

3. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. об-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Лаптев Г.Ф.* О многообразиях геометрических элементов с дифференциальной связностью // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, №1. С. 17—20.

6. *Лумисте Ю.Г.* Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т. 69, №3. С. 434—469.

7. *Шевченко Ю.И.* Иерархия пространств проективной связности // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 178—192.

8. *Шевченко Ю.И.* Тензор кривизны-кручения связности Картана // ДГМФ. Калининград, 2019. Вып. 50. С. 155—168.

9. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* Интерпретация связности Картана с помощью двухъярусной главной связности // Соврем. геом. и ее прилож. — 2019 : сб. тр. междунар. науч. конф. Казань, 2019. С. 166—169.

Yu. I. Shevchenko[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
ESkrydlova@kantiana.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-17

Curvature-torsion quasitensor of Laptev fundamental-group connection

Submitted on April 27, 2020

We consider a space with Laptev's fundamental group connection generalizing spaces with Cartan connections. Laptev structural equations are reduced to a simpler form. The continuation of the given structural equations made it possible to find differential comparisons for the coefficients in these equations. It is proved that one part of these coefficients forms a tensor, and the other part forms is quasitensor, which justifies the name quasitensor of torsion-curvature for the entire set. From differential congruences for the components of this quasitensor, congruences are obtained for the components of the Laptev curvature-torsion tensor, which contains 9 subtensors included in the unreduced structural equations.

In two special cases, a space with a fundamental connection is a space with a Cartan connection, having a quasitensor of torsion-curvature, which contains a quasitensor of torsion. In the reductive case, the space of the Cartan connection is turned into such a principal bundle with connection that has not only a curvature tensor, but also a torsion tensor.

Keywords: fundamental group connection, Cartan connection, quasitensor of torsion-curvature, torsion-curvature tensor.

References

1. *Evtushik, L. E.:* Cartan connections and Kawaguchi geometry of spaces obtained by the moving frame method, Geometry — 3, Itogi nauki i tekhn. Sovrem. Math. and its app. Theme reviews. Moscow. 30, 170—204 (2002).

2. *Evtushik, L. E.:* Structures of higher orders. Moscow (2014).

3. *Kobayashi, S.:* Transformation groups in differential geometry. Moscow (1986).

4. *Laptev, G.F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

5. *Laptev, G.F.:* On manifolds of geometric elements with differential connection. Dokl. Akad. Nauk USSR, **78**:1, 17—20 (1950).

6. *Lumiste, Yu. G.:* Connections in homogeneous bundles. Math. Sb., 69, 434—469 (1966).

7. *Shevchenko, Yu. I.:* The hierarchy of spaces of projective connection. DGMF. Kaliningrad. 49, 178—192 (2018).

8. *Shevchenko, Yu. I.:* Curvature-torsion tensor of Cartan connection. DGMF. Kaliningrad. 50, 155—168 (2019).

9. *Shevchenko, Yu. I., Skrydlova, E.V.:* Interpretation of Cartan connectivity using two-tier principal connectivity. Modern geom. and its app. — 2019. Kazan, 166—169 (2019).

Abstracted in:
Zentralblatt für Mathematik, Mathematical Reviews

ISSN: 0321-4796

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia)

Put to the Press:

August 28, 2020

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 51

Межвузовский тематический сборник
научных трудов

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 28.08.2020 г.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 10,7
Тираж 150 экз. (1-й завод 48 экз.). Заказ 71

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236022, г. Калининград, ул. Гайдара, 6