ISSN 0321-4796 (Print)
ISSN 2782-3229 (Online)

БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

IMMANUEL KANT BALTIC FEDERAL UNIVERSITY

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2024

№ 55 (1)

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта

Immanuel Kant Baltic Federal University Press

2024

12+

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2024. — №55 (1). — 89 с.

Выходит с 1970 года.
Входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.
Изданию присвоена **первая категория (К1) Перечня ВАК.**
Периодичность — 2 раза в год (начиная с 2023 г.).

Учредитель
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Адрес редакции и издателя
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Адрес типографии
236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Дата выхода в свет 13.09.2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 514.76

А. Абу-Салим[1], М. Б. Банару[2], Г. А. Банару[2]
[1] Университет Аль-аль-Байт, Мафрак, Иордания
[2] Смоленский государственный университет,
ул. Пржевальского, 4 (Смоленск), Россия
[1] dr_ahmad57@yahoo.com, [2] mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-1

Заметка об аксиомах почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий

Рассматривается вопрос о так называемых аксиомах почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий, то есть об условиях, при которых через каждую точку почти эрмитова многообразия проходит почти контактная метрическая гиперповерхность с заданными свойствами.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, почти эрмитово многообразие, аксиома почти контактных метрических гиперповерхностей, ориентируемая гиперповерхность

1. О том, что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура, известно с середины прошлого века. До последней четверти XX века наиболее содержательные работы о почти контактных метрических гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий выполнили известные японские и американские геометры: М. Окумура, С. Сасаки, С. Танно, Й. Таширо, Х. Янамото, К. Яно, Д. Блэр, С. Голдберг. С 1980-х го-

---

Поступила в редакцию 26.03.2024 г.

дов этой тематикой занимался замечательный отечественный геометр В. Ф. Кириченко, а затем и некоторые его ученики. Среди последних мы выделим Л. В. Степанову, чей фундаментальный труд [1], по нашему мнению, не только содержит множество глубоких результатов, но и задал целое направление в геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий.

В своем исследовании Л. В. Степанова неоднократно рассматривала ситуацию, когда через каждую точку некоторого почти эрмитова многообразия проходит почти контактная метрическая гиперповерхность с определенными свойствами. Так сложилось, что эту ситуацию чаще всего как в отечественных, так и в зарубежных источниках описывают следующим образом: рассматриваемое почти эрмитово многообразие удовлетворяет аксиоме соответствующих (то есть обладающих заданными свойствами) почти контактных метрических гиперповерхностей. Скорее всего, В. Ф. Кириченко был первым, кто стал использовать такую терминологию в отечественных журналах (см.: [2]). Наши попытки установить, кто именно из зарубежных авторов впервые стал употреблять данную терминологию, успехом не увенчались. Отметим только, что очень многие известные геометры использовали выражение «аксиома почти контактных метрических гиперповерхностей» еще до выхода в свет упомянутой выше статьи В. Ф. Кириченко [2]. В качестве примера приведем работу известнейшего бельгийского специалиста в области эрмитовой геометрии Л. Ванхеке [3].

2. Нам представляется достаточно очевидным, что сам термин «аксиома» не очень уместен в данном контексте. Особенно если речь идет о русскоязычном читателе, для которого термин «аксиома» традиционно означает совсем иное. Такой читатель, скорее всего, познакомился с этим понятием в школе, когда изучал геометрию по учебнику А. Н. Колмогорова, А.В. Погорелова или Л.С. Атанасяна. Потом он узнал о различных системах аксиом во время обучения в вузе (например, при изучении курсов оснований геометрии, числовых систем и т.д.). В самом деле, ведь если существуют почти эрмитовы многообразия, удовлетворяющие аксиоме тех или иных почти контактных метрический гиперповерхностей, то, следовательно, возможна и ситуация, когда многообразие не удовлетворяет той или иной аксиоме. К сожалению, случаев с неудачной терминологией в эрмитовой и контактной геометриях (под которыми мы, естественно, понимаем геометрические теории почти эрмитовых и почти контактных метрических многообразий соответственно) в научной литературе немало. Намного больше, чем должно было бы быть. Не будем приводить конкретные примеры (некоторые из них можно было бы назвать вопиющими), а ограничимся лишь замечанием о том, что на начальном этапе, то есть на этапе введения того или иного иностранного термина в отечественный оборот, следует гораздо более внимательно и продуманно подходить к этому вопросу. В качестве же положительного момента напомним читателю о первом выдающемся русском ученом М.В. Ломоносове, который не только внес огромный вклад в науку (будучи и государственным деятелем, и поэтом, и изобретателем), но и обогатил русский язык новыми научными терминами, новыми словами. Слово «равновесие» — один из самых известных примеров такого рода. Без этого точного перевода латинского термина не обходится не только отечественная наука, но и современный русский язык.

3. Закончив критиковать термин «аксиома» (на наш взгляд, более удачным было бы использовать слово «условие» для соответствующей ситуации), остановимся на математическом аспекте этой проблемы. Будучи более 30 лет связанными с тематикой геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий, будучи хорошо знакомыми со множеством работ современных геометров в данной области и, наконец, будучи авторами нескольких работ по данной тематике, мы возьмем на себя смелость сделать ряд выводов.

Во-первых, отметим, что в современной дифференциальной геометрии рассматриваются самые разнообразные виды аксиом (то есть характеристических условий) для почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий. Часть таких аксиом связана с внутренней геометрией гиперповерхностей, например со свойством эйнштейновости (вместе с частными случаями и обобщениями). Одним из первых примеров может служить работа [4].

Но гораздо чаще такого рода аксиомы связаны со свойствами вложения гиперповерхностей в объемлющее многообразие. Самый очевидный пример — когда аксиома требует, чтобы через каждую точку многообразия проходила вполне геодезическая гиперповерхность, или вполне омбилическая, или минимальная, или гиперповерхность с заданным типовым числом (в терминологии Такаги — Курихары). По этому поводу можно привести множество разнообразных примеров. Мы ограничимся лишь упоминанием исследования Л. В. Степановой [1] и обзора В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару [5], которые содержат десятки таких примеров.

И наконец, самая важная, на наш взгляд, группа аксиом требует, чтобы почти контактная метрическая структура на гиперповерхности почти эрмитова многообразия имела определенный вид. Например, принадлежала одному из наиболее важных в контактной геометрии классов почти контактных метрических структур: классу косимплектических, слабо косимплектических, сасакиевых, квазисасакиевых, кенмоцевых и т. п. структур. Непременно следует подчеркнуть, что наличие почти контактной метрической структуры определенного вида на гиперповерхности не может быть истолковано как внутреннее свойство гиперповерхности — такая почти контактная метрическая структура, как следует из дифференциально-геометрических построений В.Ф. Кириченко и Л.В. Степановой, порождается почти эрмитовой структурой на объемлющем многообразии [1]. Различные примеры, в которых аксиома требует, чтобы структура на гиперповерхности почти эрмитова многообразия принадлежала определенному классу почти контактных метрических структур, можно также найти в обзоре [5]. А вот работ, в которых исследуются более сложные случаи так называемых комбинированных аксиом (см., например, [4; 6; 7]), к сожалению, опубликовано не слишком много.

Второй важный пункт — это вопрос о том, насколько корректно наложение на почти эрмитово многообразие условия о прохождении через каждую его точку почти контактной метрической поверхности специального вида. Очевидно, что выполнение такого рода условий часто означает требование однородности и (или) изотропности многообразия, причем не в дифференциально-геометрическом, а в физическом смысле этих понятий. Если говорить о близкой нам тематике 6-мерных почти эрмитовых многообразий, то при рассмотрении подобных аксиом для 6-мерной сферы с канонической приближенно келеровой структурой (не говоря уже о тривиальном примере келерова многообразия — комплексного евклидова пространства) вопросов не возникает. Однако некоторые почти эрмитовы 6-мерные многообразия устроены не столь просто. Например, приближенно келерова структура реализуется на произведении двух трехмерных сфер. А эрмитовым 6-мерным многообразием является многообразие так называемого скрученного произведения. Существуют и гораздо более сложные примеры.

Третье наше замечание, основанное на близком знакомстве со многими результатами в данной области, заключается в том, что выполнение той или иной аксиомы почти контактных метрических гиперповерхностей практически всегда существенно упрощает почти эрмитову структуру объемлющего многообразия. Например, структура Вайсмана — Грея может стать приближенно келеровой, структура класса G_2 может оказаться эрмитовой, а эрмитова структура — келеровой и т. д. Такого плана результаты, разумеется, часто выглядят весьма красиво, они влекут за собой множество интересных следствий, тесно связанных с фактами, ранее доказанными другими геометрами. В свете полученных результатов эти факты можно развивать, обобщать, детализировать. Но, с другой стороны, в этом случае выполнение той или иной аксиомы означает существенное обеднение теории более сложных классов почти эрмитовых многообразий в смысле изучения собственных представителей таких классов. К примеру, если многообразие Вайсмана — Грея (многообразие класса $W_1 \oplus W_4$ в терминологии Грея — Хервеллы [8]), удовлетворяющее некоторой аксиоме почти контактных метрических гиперповерхностей, окажется приближенно келеровым, то результат, полученный для такого многообразия, будет содержать не слишком много информации о геометрии собственных многообразий Вайсмана — Грея. Если еще учесть проблемы, изложенные выше, то подобные результаты уже не будут выглядеть столь значительными, как может показаться на первый взгляд.

4. Окончательный вывод, который следует из всего вышесказанного, таков: теория аксиом почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий нуждается в глубокой систематизации, основательной методической проработке, упорядочении вопросов терминологии и т. п.

Примером (на наш взгляд, отличным примером) преодоления определенного кризиса и своего рода наведения порядка в одном из разделов контактной геометрии стал выход в свет монографии Г. Питиша [9] о многообразиях Кенмоцу. Эта книга не только содержит практически все результаты в данной области, известные на момент ее опубликования; она также сняла многие методологические вопросы. Еще более известный пример наведения порядка такого рода, на этот раз в эрмитовой геометрии — уже упоминавшаяся нами статья А. Грея и Л. М. Хервеллы [8].

Авторы настоящей заметки выражают искреннюю благодарность Лидии Васильевне Степановой за полезные советы.

Список литературы

1. *Степанова Л. В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М. , 1995.

2. *Кириченко В. Ф.* Аксиома голоморфных плоскостей в обобщенной эрмитовой геометрии // Доклады АН СССР. 1981. Т. 260, №4. С. 795—799.

3. *Vanhecke L.* The axiom of coholomorphic (2p + 1)-spheres for some almost Hermitian manifolds // Tensor (N. S.). 1976. Vol. 30. P. 275—281.

4. *Lindt D. van, Verstraelen L.* Some axioms of Einsteinian and conformally flat hypersurfaces // J. Differ. Geom. 1981. Vol. 16. P. 205—212.

5. *Banaru M. B., Kirichenko V. F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. Vol. 207, №4. P. 513—537.

6. *Banaru M. B., Banaru G. A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT Journal of Mathematics. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

7. *Abu-Saleem A., Banaru M. B., Banaru G. A., Stepanova L. V.* Quasi-Kählerian manifolds and quasi-Sasakian hypersurfaces axiom // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2020. Т. 93, №2. С. 68—75.

8. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.

9. *Pitiş Gh.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publ. House Transilvania Univ. Braşov, 2007.

Для цитирования: *Абу-Салим А., Банару М. Б., Банару Г. А.* Заметка об аксиомах почти контактных метрических гиперповерхностей для почти эрмитовых многообразий // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 5—13. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-1.

MSC 2010: 53B25, 53C40

A. Abu-Saleem[1], M. B. Banaru[2], G. A. Banaru[2]
[1]Al al-Bayt University, Mafraq, Jordan
[2] Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
[1] dr_ahmad57@yahoo.com, [2] mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-1

A note about almost contact metric hypersurfaces axioms for almost Hermitian manifolds

Submitted on March 26, 2024

From 1950s, it is known that an almost contact metric structure is induced on an arbitrary oriented hypersurface in an almost Hermitian manifold. In accordance with the definition, an almost Hermitian manifold satisfies the axiom of almost contact hypersurfaces endowed with a some property, if an almost contact hypersurface with this property passes through every point of considered almost Hermitian manifold.

In the present note, we discuss some problems related to almost contact metric hypersurfaces axioms for almost Hermitian manifolds. In particular, we select some special types of almost contact metric hypersurfaces axioms for almost Hermitian manifolds. We mark out the axioms consisting of the conditions for the almost contact metric structure on the hypersurface of an almost Hermitian manifold to belong to a special class (for example, to the class of Sasakian or quasi-Sasakian structures). We also mark out the axioms that are related to the second fundamental form of the immersion of the almost contact metric hypersurface into an almost Hermitian manifold.

Keywords: almost contact metric structure, almost Hermitian manifold, almost contact metric hypersurfaces axioms, oriented hypersurface

References

1. *Stepanova, L. V.:* Contact geometry of hypersurfaces of Quasi-Kählerian manifolds. PhD thesis. Moscow State Pedagogical University V.I. Lenin (1995).

2. *Kirichenko, V.:* The axiom of holomorphic planes in generalized Hermitian geometry. Sov. Math. Dokl., 24, 336—341 (1981).

3. *Vanhecke, L.:* The axiom of coholomorphic $(2p+1)$-spheres for some almost Hermitian manifolds. Tensor (N. S.), 30, 275—281 (1976).

4. *Van Lindt, D., Verstraelen, L.:* Some axioms of Einsteinian and conformally flat hypersurfaces. J. Differ, Geom., 16, 205—212 (1981).

5. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. Journal of Mathematical Sciences (New York), **207**:4, 513—537 (2015).

6. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. SUT Journal of Mathematics, **51**:1, 1—9 (2015).

7. *Abu-Saleem, A., Banaru, M. B., Banaru, G. A., Stepanova, L. V.:* Quasi-Kählerian manifolds and quasi-Sasakian hypersurfaces axiom. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, **93**:2, 68—75 (2020).

8. *Gray, A., Hervella, L. M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

9. *Pitiş, Gh.:* Geometry of Kenmotsu manifolds. Publ. House Transilvania Univ. Braşov (2007).

For citation: Abu-Saleem, A., Banaru, M. B., Banaru, G. A. A note about almost contact metric hypersurfaces axioms for almost Hermitian manifolds. DGMF, 55 (1), 5—13 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-1.

УДК 514.76

М. Б. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-2

О двух структурных тензорах acm-структуры

Доказано, что обращение в нуль пятого и шестого структурных тензоров (в терминологии Кириченко) произвольной почти контактной метрической структуры является условием, необходимым и достаточным для замкнутости контактной формы этой структуры.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, структурные уравнения Картана, структурные тензоры, контактная форма, структура Кириченко — Ускорева

1. Важными и содержательными примерами дифференциально-геометрических структур на многообразиях являются почти контактные метрические (almost contact metric, acm-) структуры. Такие структуры интенсивно изучались с середины прошлого века, причем за некоторыми важнейшими видами acm-структур закрепились названия структур Сасаки, Кенмоцу и Эндо — так отмечены заслуги этих выдающихся японских геометров. В XXI веке большой вклад в теорию acm-структур внесли и вносят математики из многих стран. Особенно выделим результаты американского специалиста Дэвида Блэра — основателя теории квазисасакиевых структур [1], а также отечественного геометра В. Ф. Кириченко, который вместе с некоторыми своими учениками получил значительные результаты в самых разных направлениях теории acm-структур — от геометрии упомянутых выше квазисасакиевых структур [2] до общей теории почти контактных метрических многообразий [3].

Поступила в редакцию 26.03.2024 г.

В данной статье рассматривается первая группа структурных уравнений Картана acm-структуры общего вида и исследуется вопрос о замкнутости контактной формы. Показано, что необходимым и достаточным условием замкнутости контактной формы произвольной acm-структуры является обращение в нуль ее пятого и шестого структурных тензоров.

2. Как известно (см.: [3]), *почти контактной метрической структурой* на ориентируемом многообразии N^{2n+1} нечетной размерности называют четверку тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, где через Φ обозначено поле тензора типа (1,1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. Обычно векторное поле ξ называют характеристическим, η называют контактной формой, а Φ — структурным эндоморфизмом. При этом должны выполняться такие условия [3]:

$$\eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0;$$
$$\Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y),$$
$$X, Y \in \aleph(N^{2n+1}),$$

где $\aleph(N^{2n+1})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N^{2n+1}.

Воспользуемся записанной в репере, адаптированном acm-структуре, первой группой структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединенной G-структуры [3]:

$$\begin{gathered} d\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + B_c^{ab}\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \\ +B_b^a\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b, \\ d\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \\ +B_a^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b, \\ d\omega = C_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + C^{bc}\omega_b \wedge \omega_c + C_c^b\omega^c \wedge \omega_b + \\ +C_b\omega \wedge \omega^b + C^b\omega \wedge \omega_b. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь и далее через $\{\omega^{\alpha}\}$ и $\{\omega_{\alpha}\}$ обозначены компоненты форм смещения ($\omega_{\alpha} = \omega^{\hat{a}}$, $\omega^{0} = \omega$); через $\{\omega_{j}^{k}\}$ — компоненты форм римановой связности; символ $[\cdot,\cdot]$ означает альтернирование;

$$k, j = 1, \ldots, 2n; \; a, b, c = 1, \ldots, n; \; \hat{a} = a + n.$$

Коэффициенты равенств (1) выражаются через компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма:

$$B_{c}^{ab} = -\frac{i}{2}\Phi_{\hat{b},c}^{a}; \;\; B^{abc} = \frac{i}{2}\Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{a}; \;\; B_{b}^{a} = i\,\Phi_{0,b}^{a};$$

$$B_{ab}^{c} = \frac{i}{2}\Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}}; \;\; B_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}; \;\; B_{a}^{b} = -i\,\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}};$$

$$B^{ab} = i\left(\Phi_{0,\hat{b}}^{a} - \frac{1}{2}\Phi_{\hat{b},0}^{a}\right); \quad B_{ab} = -i\left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2}\Phi_{b,0}^{\hat{a}}\right);$$

$$C_{b}^{a} = -i\left(\Phi_{\hat{a},b}^{0} + \Phi_{b,\hat{a}}^{0}\right); \quad C^{ab} = i\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^{0}; \;\; C_{ab} = -i\Phi_{[a,b]}^{0};$$

$$C^{a} = -i\Phi_{\hat{a},0}^{0}; \quad C_{a} = i\Phi_{a,0}^{0}.$$

Обычно равенства (1) называют *первой группой структурных уравнений Картана* acm-структуры. Их иногда более, иногда менее подробный вывод содержится в нескольких работах В. Ф. Кириченко и его учеников, связанных с почти контактными метрическими многообразиями; в частности, такие выкладки можно найти в статье [2] и в монографии [3].

Введем обозначения:

$$C^{abc} = \frac{i}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{a}; \;\; C_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}};$$

$$F^{ab} = i\,\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^{0}; \;\; F_{ab} = -i\Phi_{a,b}^{0}.$$

Следующие системы функций определяют тензоры на многообразии N^{2n+1}:

1) $F = \{F_{j}^{k}\}$, где $F_{\hat{b}}^{a} = F^{ab}$, $F_{b}^{\hat{a}} = F_{ab}$, а все прочие компоненты семейства F нулевые;

2) $G = \{G^{j}\}$, где $G^{a} = C^{a}$, $G^{\hat{a}} = C_{a}$, $G^{0} = 0$.

В терминологии В. Ф. Кириченко [3] системы функций F и G — пятый и шестой структурные тензоры почти контактной метрической структуры соответственно.

Замкнутость контактной формы η выполнится тогда и только тогда, когда окажутся справедливыми равенства

$$\Phi^0_{[a,b]} = \Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]} = 0,$$

$$\Phi^0_{\hat{a},b} = \Phi^0_{a,\hat{b}} = 0,\ \Phi^0_{a,0} = \Phi^0_{\hat{a},0} = 0.$$

Следовательно,

$$C^{ab} = 0,\ C_{ab} = 0,\ C^a_b = 0,\ C^a = 0,\ C_a = 0.$$

Отсюда, среди прочего, получаем

$$F^{ab} = 0,\ F_{ab} = 0,$$

а пятый и шестой структурные тензоры рассматриваемой acm-структуры обращаются в нуль.

3. Обратим внимание на то, что замкнутость контактной формы acm-структуры связана с инвариантностью этой acm-структуры относительно так называемых канонических конформных преобразований. Впервые эту связь обнаружили и изучили В.Ф. Кириченко и И.В. Ускорев [4]. Более того, оказалось, что acm-структуры с замкнутой контактной формой обладают и многими другими интересными свойствами. Кроме того, эти структуры являются естественным обобщением таких важнейших почти контактных метрических структур, как косимплектическая структура и структура Кенмоцу. Наконец, отметим, что в последнее время такого типа acm-структуры изучались чаще всего под названием структур Кириченко — Ускорева (см., например, [5]).

Список литературы

1. *Blair D.E.* The theory of quasi-Sasakian structures // J. Diff. Geom. 1967. Vol. 1. P. 331—345.

2. *Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р.* Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Математический сборник. 2002. Т. 193, №8. С. 71—100.

3. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

4. *Кириченко В. Ф., Ускорев И. В.* Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур // Математические заметки. 2008. Т. 84, № 6. С. 838—850.

5. *Банару М. Б., Банару Г. А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в келеровых многообразиях // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

Для цитирования: *Банару М. Б.* О двух структурных тензорах acm-структуры // ДГМФ. 2024. № 55 (1). С. 14—19. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-2.

MSC 2010: 53B25

M. B. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-2

On two structural tensors of an acm-structure

Submitted on March 26, 2024

Almost contact metric structures on odd-dimensional manifolds are considered. The first group of the Cartan structural equations of an arbitrary almost contact metric structure written in an A-frame (i. e., in a frame adapted to this almost contact metric structure) is studied. It is proved that the fifth and sixth Kirichenko structural tensors of the almost contact metric structure vanish if and only if the structural contact form is closed.

Keywords: almost contact metric structure, Cartan structural equations, structural tensors, contact form, Kirichenko — Uskorev structure

References

1. *Blair, D.E.:* The theory of quasi-Sasakian structures. J. Diff. Geom., 1, 331—345 (1967).

2. *Kirichenko, V.F.; Rustanov, A.R.:* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. Sb. Math., **193**:8, 1173—1202 (2002).

3. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

4. *Kirichenko, V.F.; Uskorev, I.V.:* Invariants of conformal transformations of almost contact metric structures. Math. Notes, **84**:6, 783—794 (2008).

5. *Banaru, M.B.; Banaru, G.A.:* On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds**.** Siberian Electronic Mathematical Reports, 17, 1715—1721 (2020).

For citation: Banaru, M.B. On two structural tensors of an acm-structure. DGMF, 55 (1), 14—19 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-2.

УДК 514.76

***Н. А. Елисеева*[1] , *Ю. И. Попов*[2]**

[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-3

Оснащенное гиперполосное распределение аффинного пространства

В аффинном пространстве рассматривается гиперполосное распределение, которое в каждой точке базисной поверхности оснащено касательной плоскостью и сопряженной касательной прямой. Приведены задание изучаемого гиперполосного распределения в аффинном пространстве относительно репера 1-го порядка и теорема существования. Построены поля аффинных нормалей 1-го рода Бляшке и Трансона и найдены условия их совпадения. Приведено задание нормальной аффинной и нормальной центроаффинной связностей на изучаемом оснащенном гиперполосном распределении.

Ключевые слова: гиперполоса, регулярная гиперполоса, гиперполосное распределение, аффинные нормали, нормальная аффинная связность

§ 1. Задание оснащенного гиперполосного распределения SH_m аффинного пространства A_n

В работе используется следующая схема индексов:

$$J,K,L=\overline{1,n};\quad p,q,t,s,r=\overline{2,m};\quad \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};$$
$$i,j,k,l=\overline{1,m};\quad \hat{\alpha},\hat{\beta}=\overline{m+1,n}.$$

Поступила в редакцию 07.05.2024 г.

Применяются метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [1; 11; 15] и теоретико-групповой метод Г. Ф. Лаптева [4; 5].

Пусть $R = \{M, \bar{e}_J\}$ — подвижной репер аффинного пространства A_n, где

$$d\bar{A} = \omega^J \bar{e}_J, \;\; d\bar{e}_J = \omega_J^K \bar{e}_K, \tag{1.1}$$

а инвариантные формы ω^J, ω_J^K аффинной группы преобразований удовлетворяют уравнениям

$$d\omega^J = \omega^L \wedge \omega_L^J, \;\; d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K. \tag{1.2}$$

В аффинном пространстве A_n рассмотрим гиперполосное распределение [4; 6; 8; 10; 13], в каждой точке $A \overset{\text{def}}{=} M$ базисной поверхности V_m которого задана касательная плоскость $\Lambda_{m-1}(A) \overset{\text{def}}{=} \Delta(A)$ и сопряженная ей касательная прямая $L_1(A) \overset{\text{def}}{=} \Delta^*(A)$.

Гиперполосное распределение в A_n, несущее сопряженную систему (Δ, Δ^*), назовем кратко распределением SH_m.

Совместим вершину M репера R с текущей точкой A базисной поверхности $V_m \subset A_n$. Векторы $\{\bar{e}_p\}$ поместим в касательную плоскость $\Delta(A)$, а вектор $\bar{e}_1$ выберем параллельно прямой $L_1(A)$. Векторы $\{\bar{e}_\alpha\}$ поместим в характеристику $X_{n-m-1}(A)$ распределения SH_m, а вектор $\bar{e}_n$ пусть занимает произвольное положение, образуя с векторами $\{\bar{e}_p,\ \bar{e}_\alpha,\ \bar{e}_1\}$ репер $\{A,\ \bar{e}_J\}$ пространства A_n. Канонизированный таким образом репер $\{A,\ \bar{e}_J\}$ является репером 1-го порядка R^1, относительно которого распределение SH_m задается уравнениями

$$\omega^n = 0, \omega^\alpha = 0, \omega_\alpha^n = 0, \tag{1.3}$$

$$\omega_p^n = b_{pq}^n \omega^q, \omega_1^n = b_{11}^n \omega^1, \omega_p^\alpha = b_{pq}^\alpha \omega^q, \omega_1^\alpha = b_{11}^\alpha \omega^1, \tag{1.4}$$

$$\omega_1^p = \lambda_{1i}^p \omega^i, \omega_p^1 = \lambda_{pi}^1 \omega^i, \omega_\alpha^1 = \lambda_{\alpha i}^1 \omega^i, \omega_\alpha^p = \lambda_{\alpha i}^p \omega^i. \tag{1.5}$$

Продолжая уравнения (1.4, 1.5), получим соответственно

$$\nabla b_{pq}^n = b_{pqi}^n \omega^i, \nabla b_{11}^n = b_{11i}^n \omega^i, \tag{1.6}$$

$$\nabla b_{pq}^{\alpha} + b_{pq}^{n}\omega_{n}^{\alpha} = b_{pqi}^{\alpha}\omega^{i}, \nabla b_{11}^{\alpha} + b_{11}^{n}\omega_{n}^{\alpha} = b_{11i}^{\alpha}\omega^{i}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \lambda_{pi}^{1} + b_{pi}^{n}\omega_{n}^{1} = \lambda_{pij}^{1}\omega^{j}, \nabla \lambda_{1i}^{p} + b_{1i}^{n}\omega_{n}^{p} = \lambda_{1ij}^{p}\omega^{j}, \quad (1.8)$$

$$\nabla \lambda_{\alpha i}^{1} = \lambda_{\alpha ij}^{1}\omega^{j}, \ \ \nabla \lambda_{\alpha i}^{p} = \lambda_{\alpha ij}^{p}\omega^{j}.$$

Замыкание уравнений (1.3) приводит к соотношениям

$$b_{[pq]}^{n} = 0, \ b_{[pq]}^{\alpha} = 0, \ \lambda_{\alpha[p}^{t} b_{q]t}^{n} = 0, \quad (1.9)$$

$$\lambda_{\alpha 1}^{p} b_{pq}^{n} = \lambda_{\alpha q}^{1} b_{11}^{n} \ \Leftrightarrow \ \lambda_{\alpha q}^{1} = \lambda_{\alpha 1}^{p} b_{n}^{11} b_{pq}^{n}. \quad (1.10)$$

Мы рассматриваем регулярные распределения SH_m, для которых характеристика $X_{n-m-1}(A)$ и касательная плоскость $T_m(A)$ базисной поверхности V_m в каждой точке $A \in V_m$ находятся в общем положении:

$$X_{n-m-1}(A) \cap T_m(A) = A, [X_{n-m-1}(A), T_m(A)] = \tau(A).$$

Система функций b_{ij}^{n} образует невырожденный тензор 1-го порядка — главный фундаментальный тензор распределения SH_m [14], который распадается на два невырожденных симметрических тензора 1-го порядка b_{pq}^{n}, b_{11}^{n}:

$$[b_{ij}^{n}] = \begin{bmatrix} b_{pq}^{n} & 0 \\ 0 & b_{11}^{n} \end{bmatrix}.$$

Тензор 1-го порядка b_{pq}^{n} назовем главным фундаментальным тензором распределения SH_m, ассоциированным с расслоением плоскостей $\Delta(A)$ (Δ-подрасслоением), а тензор b_{11}^{n} — главным фундаментальным тензором распределения SH_m, ассоциированным с расслоением плоскостей $\Delta^{*}(A)$ (Δ^{*}-подрасслоением).

Для невырожденных тензоров b_{pq}^{n} и b_{11}^{n} введем обратные им тензоры b_{n}^{pq} и b_{n}^{11}, компоненты которых удовлетворяют условиям:

$$b_{pq}^{n} b_{n}^{qt} = \delta_{p}^{t}, \ \nabla b_{n}^{pq} = -b_{n}^{tp} b_{n}^{sq} b_{tsi}^{n}\omega^{i} = b_{ni}^{pq}\omega^{i}, \quad (1.11)$$

$$b_{11}^{n} b_{n}^{11} = 1, \ \nabla b_{n}^{11} = b_{ni}^{11}\omega^{i}. \quad (1.12)$$

Известно [14], что необходимым и достаточным условием сопряженности плоскости $\Delta(A)$ и прямой $\Delta^*(A)$ является обращение в нуль тензора $b^{\hat\alpha}_{1p}$:

$$b^{\hat\alpha}_{1p} = b^{\hat\alpha}_{p1} = 0. \tag{1.13}$$

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Регулярное распределение $SH_m \subset A_n$, несущее сопряженную систему (Δ, Δ^*), в репере R^1 первого порядка задается дифференциальными уравнениями (1.3—1.8) и соотношениями (1.11—1.13).*

Также имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Распределение SH_m аффинного пространства, несущее сопряженную систему (Δ, Δ^*), существует и определено с произволом $2(m-1) + m(n-m-1)$ функций m аргументов.*

§ 2. Аффинные нормали гиперполосного распределения SH_m

Главный фундаментальный тензор b^n_{ij} гиперполосного распределения SH_m удовлетворяет уравнениям [7]:

$$\nabla b^n_{ij} = b^n_{ijk}\omega^k. \tag{2.1}$$

Замыкание уравнений (2.1) приводит к условиям

$$\nabla b^n_{ijk} = b^n_{(ij} b^n_{k)l}\omega^l_n + b^n_{ijkl}\omega^l. \tag{2.2}$$

Используя уравнения (2.2), найдем дифференциальные уравнения для функций b^n_{pqi}, b^n_{11i}, придавая индексам i, j, k значения $p, q, t, 1$. В результате в силу соотношений (1.3—1.5, 1.13) получим:

$$\nabla b^n_{pqt} = b^n_{s(p} b^n_{qt)}\omega^s_n + b^n_{1(pq}\lambda^1_{t)i}\omega^i + b^n_{pqti}\omega^i,$$

$$\nabla b^n_{111} = b^n_{1(1} b^n_{11)}\omega^1_n + b^n_{p(11}\lambda^p_{1)i}\omega^i + b^n_{111i}\omega^i, \tag{2.3}$$

$$\nabla b^n_{pq1} = b^n_{pq} b^n_{11}\omega^1_n + (b^n_{pqt}\lambda^t_{1i} + b^n_{p11}\lambda^1_{qi} + b^n_{q11}\lambda^1_{pi} + b^n_{pq1i})\omega^i,$$

$$\nabla b^n_{11p} = b^n_{11} b^n_{pq}\omega^q_n + (b^n_{111}\lambda^1_{pi} + 2b^n_{1pt}\lambda^t_{1i} + b^n_{11pi})\omega^i.$$

Замечание. Уравнения (2.3) можно получить, непосредственно дифференцируя (1.6) и учитывая (1.13, 1.3—1.5, 1.9, 1.10).

Введем в рассмотрение функции 1-го порядка

$$\lambda_n^\alpha = \frac{1}{m} b_{ij}^\alpha b_n^{ij} \tag{2.4}$$

и функции 2-го порядка

$$\begin{gathered} B_n^i = -\frac{1}{m+2} b_n^{kj} b_{kjl}^n b_n^{li}, \\ A_n^p = -b_n^{11} b_{11q}^n b_n^{qp},\ A_n^1 = -\frac{1}{m-1} b_n^{qp} b_{qp1}^n b_n^{11}, \\ T_n^1 = -\frac{1}{3} b_n^{11} b_{111}^n b_n^{11},\ T_n^p = -\frac{1}{m+1} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Замечание. Здесь порядок функций определяем старшим порядком компонент, из которых они построены.

С учетом уравнений (1.6, 1.7, 1.11, 1.12, 2.1—2.3) убеждаемся, что функции (2.4, 2.5) являются квазитензорами:

$$\begin{gathered} \nabla\lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \lambda_{ni}^\alpha \omega^i,\ \nabla B_n^i + \omega_n^i = B_{nj}^i \omega^j, \\ \nabla A_n^p + \omega_n^p = A_{ni}^p \omega^i,\ \ \nabla A_n^1 + \omega_n^1 = A_{ni}^1 \omega^i, \\ \nabla T_n^1 + \omega_n^1 = T_{nj}^1 \omega^j,\ \nabla T_n^p + \omega_n^p = T_{ni}^p \omega^i. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Прежде всего отметим, что квазитензоры $\{B_n^i, \lambda_n^\alpha\}$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка задают нормаль Бляшке $B_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha,\ \bar{B}_n]$ гиперполосного распределения SH_m [7], где

$$\bar{B}_n = \bar{e}_n + B_n^i \bar{e}_i + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha.$$

Нормаль Бляшке $B_{n-m}(A)$ не зависит от подрасслоений Δ и Δ^*, а определяется гиперполосным распределением SH_m.

Прямую $B_1 = [A,\ \bar{B}_n]$ назовем *прямой Бляшке* гиперполосного распределения SH_m. Таким образом, нормаль Бляшке $B_{n-m}(A) = [A,\ \bar{B}_n, X_{n-m-1}(A)\,]$ в каждой точке $A \in V_m$ натянута на характеристику $X_{n-m-1}(A)$ гиперполосного распределения SH_m и прямую Бляшке B_1.

Для регулярных гиперполос аффинные нормали всех плоских сечений гиперповерхности V_{n-1} m-мерными плоскостями, проходящими через плоскость $\Delta(A)$, лежат в $(n-m+1)$-мерной плоскости

$$T_{n-m+1}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_1, \bar{e}_n + T_n^p \bar{e}_p], \qquad (2.7)$$

то есть в нормали Трансона Δ-подрасслоения [3].

Аналогично нормаль Трансона Δ^*-подрасслоения есть $(n-1)$-мерная плоскость (гиперплоскость)

$$T_{n-1}(A) = \left[A, \bar{e}_p, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_n + T_n^1 \bar{e}_1\right]. \qquad (2.8)$$

В формулах (2.7, 2.8) квазитензоры $\{T_n^i\}$ и $\{T_n^p\}$ имеют строение (2.5).

Определение. *Нормалью Трансона гиперполосного распределения SH_m* в каждой точке $A \in V_m$ назовем $(n-m)$-мерную плоскость $T_{n-m}(A) = T_{n-m+1}(A) \cap T_{n-1}(A)$ — плоскость пересечения нормалей Трансона Δ-подрасслоения и Δ^*-подрасслоения.

Определение. Прямую $T_1(A) = [A,\ \bar{T}_n]$, где

$$\bar{T}_n = \bar{e}_n + T_n^p \bar{e}_p + T_n^1 \bar{e}_1 + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha,$$

назовем *прямой Трансона распределения SH_m в точке A*.

Нормаль Трансона 1-го рода распределения SH_m в каждой точке $A \in V_m$ имеет вид $T_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{T}_n]$.

Введем в рассмотрение прямую $[A,\ \bar{A}_n]$, где

$$\bar{A}_n = \bar{e}_n + A_n^p \bar{e}_p + A_n^1 \bar{e}_1 + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha.$$

Учитывая (1.1, 2.6), убеждаемся, что $\delta \bar{A}_n = \pi_n^n \bar{A}_n$. Таким образом, прямая $A_1 = [A,\ \bar{A}_n]$ есть инвариантная прямая, внутренним образом присоединенная к распределению SH_m во второй дифференциальной окрестности. Прямую A_1 назовем аффинной прямой Δ-подрасслоения (или Δ^*-подрасслоения). Соответственно, плоскость $A_{n-m+1}(A) = [A, \bar{e}_1, \bar{e}_\alpha, \bar{A}_n]$ назовем *аффинной нормалью* Δ-подрасслоения, а плоскость $A_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{A}_n]$ — аффинной нормалью гиперполосного распределения SH_m.

Из формул (2.5) получаем соотношения

$$B_n^1 = T_n^1 + \frac{m-1}{m+2} A_n^1 - T_n^1, \tag{2.9}$$

$$B_n^p = A_n^p + \frac{m-1}{m+2}\left(T_n^p - A_n^p\right). \tag{2.10}$$

Из (2.9, 2.10) вытекает, что компоненты квазитензора $\{B_n^i\} = \{B_n^1, B_n^p\}$ являются линейными комбинациями компонент квазитензоров $\{A_n^i\}$ и $\{T_n^i\}$.

В результате приходим к следующим предложениям.

Теорема 3. *Аффинные нормали 1-го рода Δ^*-подрасслоения гиперполосного распределения SH_m образуют однопараметрический пучок гиперплоскосктей, определяемый пучком квазитензоров*

$$N_n^1(\varepsilon) = A_n^1 + \varepsilon(T_n^1 - A_n^1), \tag{2.11}$$

причем нормаль Бляшке $B_{n-1}(A)$ высекается из пучка (2.11) при $\varepsilon = \frac{3}{m+2}$.

Теорема 4. *Нормали 1-го рода $N_{n-m+1}(A)$ Δ-подрасслоения образуют однопараметрический пучок, определяемый пучком квазитензоров*

$$N_n^p(\gamma) = T_n^p + \gamma\left(A_n^p - T_n^p\right),$$

причем нормаль Бляшке $B_{n-m+1}(A)$ Δ-подрасслоения соответствует параметру $\gamma = \frac{1}{m+2}$.

Отметим еще одну особенность тройки нормалей 1-го рода Бляшке, Трансона и аффинной нормали A_{n-m}.

Теорема 5. *Нормали 1-го рода Бляшке $B_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, B_1]$, Трансона $T_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, T_1]$, аффинная нормаль $A_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, A_1]$ гиперполосного распределения SH_m принадлежат одному однопараметрическому пучку:*

$$N_n^i(\eta) = T_n^i + \eta\left(A_n^i - T_n^i\right). \tag{2.12}$$

Если нормаль Трансона $T_{n-1}(A)$ совпадает с аффинной нормалью гиперполосного распределения SH_m, то, как следует из формул (2.9, 2.10), нормаль Бляшке $B_{n-m}(A)$ тоже совпадает с нормалью Трансона, то есть все три нормали совпадают.

Аналогично при совпадении любых двух нормалей гиперполосного распределения SH_m из указанных трех (A_{n-m}, B_{n-m}, T_{n-m}) все три нормали совпадают.

Определение. Гиперполосное распределение SH_m назовем *коинцидентным* [9], если пучок нормалей (2.12) вырождается в одну нормаль.

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Гиперполосное распределение SH_m коинцидентно тогда и только тогда, когда любые две его нормали из трех $A_{n-m}(A), B_{n-m}(A), T_{n-m}(A)$ совпадают.*

§ 3. Задание нормальной аффинной связности на оснащенном регулярном распределении SH_m

1. Адаптируем репер полю нормалей $N(A)$ 1-го рода гиперполосного распределения SH_m, выбирая вектор $\bar{e}_n \parallel N(A)$. В этом случае

$$\omega_n^1 = \lambda_{ni}^1 \omega^i,\ \omega_n^p = \lambda_{ni}^p \omega^i,\ \omega_n^\alpha = \lambda_{ni}^\alpha \omega^i, \qquad (3.1)$$

а поле нормалей 1-го рода $N_{n-m}(A)$ определяется уравнениями

$$\nabla\lambda_{ni}^1 = \lambda_{nij}^1 \omega^j,\ \nabla\lambda_{ni}^\alpha = \lambda_{nij}^\alpha \omega^j. \qquad (3.2)$$

Таким образом, уравнения (1.3—1.8, 3.1, 3.2, 1.9, 1.10, 1.13) задают оснащенное полем нормалей 1-го рода $N_{n-m}(A)$ гиперполосное распределение $SH_m \subset A_n$.

При фиксации точки $A \stackrel{\text{def}}{=} x$ базисной поверхности $V_m \subset SH_m$ нормаль 1-го рода N_x гиперполосного распределения SH_m в точке $x \in V_m$ и касательная плоскость T_x базисной поверхности V_m остаются неподвижными. Следовательно, на базисной поверхности V_m возникает нормальное $N(V_m)$ и касательное $T(V_m)$ расслоения [12].

Структурные уравнения касательного расслоения $T(V_m)$ в силу формул (1.2, 1.3—1.10, 1.13, 3.1) имеют следующий вид:

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ d\omega_p^q = \omega_p^s \wedge \omega_s^q + \Omega_p^q,\ d\omega_1^1 = \Omega_1^1,$$

$$d\omega_1^p = \omega_1^i \wedge \omega_i^p + \Omega_1^p,\ d\omega_p^1 = \omega_p^i \wedge \omega_i^1 + \Omega_p^1, \qquad (3.3)$$

где

$$\Omega_p^q = \omega_p^1 \wedge \omega_1^q + \omega_p^\alpha \wedge \omega_\alpha^q + \omega_p^n \wedge \omega_n^q = (\lambda_{p[i}^1 \lambda_{|1|j]}^q +$$

$$+ b_{pt}^\alpha \delta_{[i}^t \lambda_{|\alpha|j]}^q + b_{pt}^n \delta_{[i}^t \lambda_{|n|j]}^q)\omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{pij}^q \omega^i \wedge \omega^j,$$

$$\Omega_1^1 = \omega_1^p \wedge \omega_p^1 + \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \omega_1^n \wedge \omega_n^1 = (\lambda_{1[i}^p \lambda_{|p|j]}^1 +$$

$$+ b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^1)\omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{1ij}^1 \omega^i \wedge \omega^j,$$

$$\Omega_1^p = \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^p + \omega_1^n \wedge \omega_n^p = (b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^p +$$

$$+ b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^p)\omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{1ij}^p \omega^i \wedge \omega^j, \qquad (3.4)$$

$$\Omega_p^1 = \omega_p^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \omega_p^n \wedge \omega_n^1 = (b_{pq}^\alpha \delta_{[i}^q \lambda_{|\alpha|j]}^1 +$$

$$+ b_{pq}^n \delta_{[i}^q \lambda_{|n|j]}^1)\omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{pij}^1 \omega^i \wedge \omega^j;$$

$$R_{pij}^q = 2\left(\lambda_{p[i}^1 \lambda_{|1|j]}^q + b_{pt}^\alpha \delta_{[i}^t \lambda_{|\alpha|j]}^q + b_{pt}^n \delta_{[i}^t \lambda_{|n|j]}^q\right),$$

$$R_{1ij}^1 = 2\left(\lambda_{1[i}^p \lambda_{|p|j]}^1 + b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^1\right),$$

$$R_{1ij}^p = 2\left(b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^p + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^p\right), \qquad (3.5)$$

$$R_{pij}^1 = 2\left(b_{pq}^\alpha \delta_{[i}^q \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{pq}^n \delta_{[i}^q \lambda_{|n|j]}^1\right).$$

Следуя работе [12], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T(V_m)$ возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности $\{\omega^i, \omega_j^i\}$ (3.3), которую, следуя работе [7], назовем внутренней (касательной) аффинной связностью оснащенного гиперполосного распределения SH_m.

Теорема 7. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное гиперполосное распределение SH_m индуцирует* *внутреннюю аффинную связность γ в касательном расслоении $T(V_m)$ с формами связности $\{\omega^i, \omega^i_j\}$ (3.3) и 2-формами кривизны (3.4). Компоненты тензора $R^l_{kij} = \{R^q_{pij}, R^1_{1ij}, R^p_{1ij}, R^1_{pij}\}$ связности γ имеют строение (3.5).*

2. Структурные уравнения нормального расслоения $N(V_m)$ [12] с учетом уравнений (1.2, 1.3—1.10, 1.13, 3.1) можно представить в виде:

$$d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha \ \text{(a)}, \quad d\omega^n_\alpha = 0,$$

$$d\omega^\alpha_n = \omega^\beta_n \wedge \omega^\alpha_\beta + \omega^n_n \wedge \omega^\alpha_n + \Omega^\alpha_n, \ d\omega^n_n = \Omega^n_n, \qquad (3.6)$$

где

$$\Omega^\beta_\alpha = \omega^i_\alpha \wedge \omega^\beta_i = \lambda^i_{\alpha[k} b^\beta_{l]i} \omega^k \wedge \omega^l = \frac{1}{2} R^\beta_{\alpha kl} \omega^k \wedge \omega^l \ \text{(a)},$$

$$\Omega^\alpha_n = \omega^i_n \wedge \omega^\alpha_i = \lambda^i_{n[k} b^\alpha_{l]i} \omega^k \wedge \omega^l = \frac{1}{2} R^\alpha_{nkl} \omega^k \wedge \omega^l,$$

$$\Omega^n_\alpha = \lambda^i_{\alpha[k} b^n_{l]i} \omega^k \wedge \omega^l = 0, \qquad (3.7)$$

$$\Omega^n_n = \omega^i_n \wedge \omega^n_i = \lambda^i_{n[k} b^n_{l]i} \omega^k \wedge \omega^l = \frac{1}{2} R^n_{nkl} \omega^k \wedge \omega^l;$$

$$R^\beta_{\alpha kl} = 2\lambda^i_{\alpha[k} b^\beta_{l]i} \ \text{(a)}, \quad R^\alpha_{nkl} = 2\lambda^i_{n[k} b^\alpha_{l]i}, \qquad (3.8)$$

$$R^n_{\alpha kl} = 2\lambda^i_{\alpha[k} b^n_{l]i}, R^n_{nkl} = 2\lambda^i_{n[k} b^n_{l]i}.$$

Согласно работе [12], получаем, что в нормальном расслоении $N(V_m)$ возникает центроаффинная связность $\gamma^\perp$, которую назовем нормальной центроаффинной связностью оснащенного гиперполосного расслоения SH_m.

Теорема 8. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное гиперполосное распределение SH_m индуцирует в расслоении $N(V_m)$ нормалей 1-го рода нормальную центроаффинную связность $\gamma^\perp$ с формами связности $\{\omega^{\hat\alpha}_{\hat\beta}\}$ и 2-формами кривизны (3.7), компоненты тензора кривизны $R^{\hat\alpha}_{\hat\beta kl}$ которой имеют строение (3.8).*

Поскольку в каждой точке $x \in V_m$ определена характеристика X_{n-m-1} гиперполосного распределения SH_m [7; 14], причем $X_{n-m-1}(x) \subset N_x$, то на базисной поверхности V_m определено расслоение характеристик $X(V_m)$, которое представляет собой нормальное $(n-m-1)$-мерное подрасслоение $N_{n-m-1}(V_m)$ [12].

Структурные уравнения расслоения $X(V_m)$ определяются уравнениями (3.6, a), 2-форма Ω_α^β определена уравнением (3.7, a), а тензор кривизны $R_{\alpha kl}^\beta$ имеет вид (3.8, a). Связность в расслоении характеристик $X(V_m)$ назовем нормальной центроаффинной характеристической связностью $\eta^\perp$ оснащенного гиперполосного распределения SH_m.

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 197—272.

3. *Елисеева Н.А., Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение, оснащенное полем сопряженных плоскостей // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 78—91.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 4. С. 7—70.

6. *Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение аффинного пространства // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 203. С. 84—99.

7. *Попов Ю.И.* Гиперполосные распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

8. *Попов Ю.И.* Введение в теорию регулярного гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. №10. С. 49—56.

9. *Попов Ю. И.* Специальные классы гиперполосного распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

10. *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

11. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.

12. *Чакмазян А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

13. *An-Min L., Udo S., Guosong Zh., Zejun H.* Global Affine. Differential Geometry of Hypersurfaces. De Gruyter, 2015. (Expositions in Mathematics ; vol. 11).

14. *Akivis M. A.* Selected Papers. Heldermann, 2008.

15. *Ivey Th. A., Landsberg J. M.* Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems, 2003. (Graduate Studies in Mathematics ; vol. 61).

Для цитирования: *Елисеева Н. А., Попов Ю. И.* Оснащенное гиперполосное распределение аффинного пространства // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 20—33. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-3.

MSC 2010: 58A05, 53A20

N. A. Eliseeva[1], *Yu. I. Popov*[2]

[1] *Kaliningrad State Technical University,*
1 Sovietsky Prospect, Kaliningrad, 236022, Russia
[2] *Immanuel Kant Baltic Federal University,*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-3

Framed hyperstrip affine space distribution

Submitted on May 7, 2024

A rigged hyperstrip distribution is a special class of hyperstrips. The study of hyperstrips and their generalizations in spaces with various fundamental groups is of great interest due to numerous applications in mathematics and physics. A special place is occupied by regular hyperstrips, for which the characteristic planes of families of principal tangent hyperplanes do not contain directions tangent to the base surface of the hyperstrip. In this work, we use E. Cartan's method of external differential forms and the group-theoretic method of G. F. Laptev.

In affine space, a hyperstrip distribution is considered, which at each point of the base surface is equipped with a tangent plane and a conjugate tangent line. The specification of the studied hyperstrip distribution in an affine space with respect to a 1st order reference and an existence theorem are given. The fields of affine normals of the 1st kind for Blaschke and Transon are constructed and the conditions for their coincidence are found. The definition of normal affine connection and normal centroaffine connection on the studied framed hyperstrip distribution is given.

Keywords: hyperstrip, regular hyperstrip, hyperstrip distribution, affine normals, normal affine connection

References

1. *Akivis, M. A., Rosenfeld, B. A.:* Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Vagner, V. V.:* The theory of the field of local hyperstrips. Tr. Semin. Vectorn. Tensorn. Anal., 8, 197—272 (1950).

3. *Eliseeva, N. A., Popov, Yu. I.:* Hyperband distribution equipped with a field of conjugate planes. DGMF, 54 (1), 78—91 (2023).

4. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

5. *Ostianu, N. M., Ryzhkov, V. V., Shveikin P. I.:* Outline of scientific research by German Fedorovich Laptev. Tr. Geom. Sem., 4, 7—70 (1975).

6. *Popov, Yu. I.:* Hyperband distribution of an affine space. Itogi Nauki i Tekhn. 203, 84—99 (2021).

7. *Popov, Yu. I.:* Hyperband distributions of affine space. Kaliningrad (2021).

8. *Popov, Yu. I.:* Introduction to the theory of a regular hyper-band distribution of an affine space. IKBFU's Vestnik, 10, 49—56 (2013).

9. *Popov, Yu. I.:* Special classes of hyperband distribution of an affine space. Kaliningrad (2021).

10. *Stolyarov, A. V.:* Projective-differential geometry of a regular hyperstrip distribution of *m*-dimensional linear elements. Problems of Geom., 7, 117—151 (1975).

11. *Finikov, S.P.:* Cartan's exterior form method in differential geometry. Moscow (1948).

12. *Chakmazyan, A.V.:* Normal connection in the geometry of submanifolds. Yerevan (1990).

13. *An-Min, L., Simon, U., Guosong, Zh., Zejun, H.:* Global Affine. Differential Geometry of Hypersurfaces, De Gruyter (Expositions in Mathematics, 11) (2015).

14. *Akivis, M.A.:* Selected Papers. Heldermann (2008).

15. *Ivey, Th.A., Landsberg, J.M.:* Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems. Amer. Math. Soc. (Graduate Studies in Mathematics, 61) (2003).

For citation: Eliseeva, N.A., Popov, Yu.I. Framed hyperstrip affine space distribution. DGMF, 55 (1), 20—33 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-3.

УДК 514.76

А. В. Кулешов

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

arturkuleshov@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6856-4126

doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-4

О скалярных компонентах канонической формы на расслоениях реперов высших порядков

Произведен подробный вывод выражений для скалярных компонент канонической формы на расслоениях реперов высших порядков над гладким многообразием. Каноническая форма на расслоении реперов порядка $p+1$ над n-мерным гладким многообразием является векторнозначной дифференциальной 1-формой, принимающей значения в касательном пространстве к расслоению реперов порядка p над n-мерным арифметическим пространством, в единице дифференциальной группы. Ее скалярные компоненты являются дифференциальными 1-формами и представляют собой коэффициенты ее разложения по натуральному базису данного касательного пространства. Поскольку каждый репер представляется некоторым полиномиальным отображением в заданной локальной карте на гладком многообразии, то касательный вектор к расслоению реперов представляется разложением однопараметрического семейства полиномиальных отображений по формуле Маклорена первого порядка относительно параметра. Искомые формулы получаются приравниванием коэффициентов двух разложений для одного и того же касательного вектора.

Ключевые слова: гладкое многообразие, струя, расслоение реперов, каноническая форма

Поступила в редакцию 05.06.2024 г.

1. Введение. В статье [4] нами дано подробное доказательство корректности построения канонической формы Θ на расслоении реперов p-го порядка, где $p \in \mathbb{N}$. Цель настоящей работы — произвести настолько же подробный вывод выражений для ее скалярных компонент в локальных координатах. Необходимость в такой работе вызвана тем, что в имеющейся литературе (см., напр., [1; 2; 5—9]) таковой вывод, по всей видимости, отсутствует. Так, например, в статье [1] лишь указано, что искомые выражения получаются из формулы, имеющей в наших обозначениях вид (20), однако последняя приведена без обоснования. Наша работа призвана восполнить подобные пробелы.

2. Список обозначений [4]:

M — гладкое многообразие, $\dim M = n$;

$j_0^p \varphi$ — p-струя гладкого отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$ с началом $0 \in \mathbb{R}^n$ (φ — отображение, представляющее репер θ);

D_n^p — дифференциальная группа порядка p с единицей e и алгеброй Ли $\mathfrak{g}_n^p$;

$H^p(M)$ — расслоение p-реперов («p-й этаж») над гладким многообразием M со структурной группой $D_n^p \subset H^p(\mathbb{R}^n)$ и канонической проекцией $\pi^p\colon H^p(M) \to M$;

$\pi_q^p\colon H^p(M) \to H^q(M)$ — проекция p-го этажа на q-й;

$T_\theta H^p(M)$ — касательное пространство к расслоению $H^p(M)$ в точке $\theta \in H^p(M)$;

$TH^p(M)$ — касательное расслоение к $H^p(M)$;

$\varphi^p\colon H^p(\mathbb{R}^n) \to H^p(M)$ — p-е продолжение отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$, действующее по правилу $j_0^p \psi \mapsto j_0^p(\varphi \circ \psi)$, где $j_0^p \psi \in H^p(\mathbb{R}^n)$;

$\Phi_\theta = d_e \varphi^p\colon T_e H^p(\mathbb{R}^n) \to T_\theta H^p(M)$ — дифференциал отображенияφ^p в точке $e \in H^p(\mathbb{R}^n)$;

$x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на многообразии M;

$(x^i, x^i_j, x^i_{jk}, \dots, x^i_{j_1 \dots j_p})$ — соответствующие локальные координаты на расслоении $H^p(M)$, симметричные по всем нижним индексам, пробегающим значения от 1 до n;

$t = (t^1, \dots, t^n)$ — стандартные координаты на $\mathbb{R}^n$;

$(u^i, u^i_j, u^i_{jk}, \dots, u^i_{j_1 \dots j_p})$ — соответствующие глобальные координаты на расслоении $H^p(\mathbb{R}^n)$, симметричные по всем нижним индексам;

$a_{(i_1 \dots i_p)} := \frac{1}{p!} \sum_\sigma a_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)}$ — симметрирование по индексам i_1, …, i_p (здесь суммирование производится по всевозможным перестановкам σ данных индексов);

$a_i b^i := \sum_i a_i b^i$ — суммирование по повторяющемуся индексу.

3. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Напомним [7], что каноническая форма Θ на расслоении $H^{p+1}(M)$ — это векторнозначная дифференциальная 1-форма

$$\Theta: TH^{p+1}(M) \to T_e H^p(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^p_n,$$

определенная следующим образом.

Пусть $X \in T_\theta H^{p+1}(M)$, где $\theta = j_0^{p+1} \varphi \in H^{p+1}(M)$, и пусть $\underline{X} := d\pi_p^{p+1}(X) \in T_{\underline{\theta}} H^p(M)$, где $\underline{\theta} = \pi_p^{p+1}(\theta)$. Тогда по определению полагают

$$\Theta(X) := \Phi_\theta^{-1}(\underline{X}). \tag{1}$$

Обозначим через $\overline{x}^i$, $\overline{x}^i_j$, …, $\overline{x}^i_{j_1 \dots j_{p+1}}$ локальные координаты репера θ, т. е. положим

$$\overline{x}^i := x^i(\theta), \quad \overline{x}^i_j := x^i_j(\theta), \dots, \overline{x}^i_{j_1 \dots j_{p+1}} := x^i_{j_1 \dots j_{p+1}}(\theta). \tag{2}$$

Разложим вектор X по натуральному базису касательного пространства $T_\theta H^{p+1}(M)$:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_\theta + \xi^i_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}\bigg|_\theta + \xi^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i_{jk}}\bigg|_\theta + \dots + \xi^i_{j_1 \dots j_{p+1}} \frac{\partial}{\partial x^i_{j_1 \dots j_{p+1}}}\bigg|_\theta,$$

где

$$\xi^i := dx^i(X),\ \xi^i_j := dx^i_j(X),\ \dots,\ \xi^i_{j_1\dots j_{p+1}} := dx^i_{j_1\dots j_{p+1}}(X). \quad (3)$$

Тогда

$$\underline{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\underline{\theta}} + \xi^i_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}\Big|_{\underline{\theta}} + \dots + \xi^i_{j_1\dots j_p} \frac{\partial}{\partial x^i_{j_1\dots j_p}}\Big|_{\underline{\theta}}. \quad (4)$$

Разложим форму Θ по скалярным компонентам $\omega^i,\ \omega^i_j,\ \dots,\ \omega^i_{j_1\dots j_p}$ относительно натурального базиса касательного пространства $T_e H^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\Theta = \omega^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_e + \omega^i_j \otimes \frac{\partial}{\partial u^i_j}\Big|_e + \dots + \omega^i_{j_1\dots j_p} \otimes \frac{\partial}{\partial u^i_{j_1\dots j_p}}\Big|_e,$$

где

$$\omega^i,\ \omega^i_j,\ \dots,\ \omega^i_{j_1\dots j_p}: TH^{p+1}(M) \to \mathbb{R}.$$

Обозначим вектор $V := \Theta(X)$, тогда V имеет следующее разложение по данному базису:

$$V = v^i \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_e + v^i_j \frac{\partial}{\partial u^i_j}\Big|_e + \dots + v^i_{j_1\dots j_p} \frac{\partial}{\partial u^i_{j_1\dots j_p}}\Big|_e, \quad (5)$$

где

$$v^i := \omega^i(X),\ v^i_j := \omega^i_j(X),\ \dots,\ v^i_{j_1\dots j_p} := \omega^i_{j_1\dots j_p}(X). \quad (6)$$

При этом равенство (1) можно представить в виде

$$\underline{X} = \Phi_\theta(V). \quad (7)$$

Дальнейший ход действий следующий: используя (7), мы получим соотношения, связывающие коэффициенты (3) и (6). Эти соотношения определят в неявной форме искомые выражения для скалярных компонент $\omega^i,\ \omega^i_j,\ \dots,\ \omega^i_{j_1\dots j_p}$ канонической формы Θ.

4. Разложим гладкое отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$, представляющее репер θ, по формуле Маклорена порядка $p+1$ в локальных координатах на M. Коэффициентами такого разложения являются координаты данного репера:

$$\varphi^i(t) = \overline{x}^i + \overline{x}^i_j t^j + \frac{1}{2!}\overline{x}^i_{jk} t^j t^k + \cdots +$$

$$+\tfrac{1}{p!}\overline{x}^i_{j_1\cdots j_p} t^{j_1} \dots t^{j_p} + \tfrac{1}{(p+1)!}\overline{x}^i_{j_1\cdots j_{p+1}} t^{j_1} \dots t^{j_{p+1}} + o(\rho^{p+1}), \quad (8)$$

где

$$\rho = \sqrt{(t^1)^2 + \cdots + (t^n)^2}.$$

Очевидно, что полиномы

$$P^i_\theta(t) := \overline{x}^i + \overline{x}^i_j t + \frac{1}{2!}\overline{x}^i_{jk} t^j t^k + \cdots + \frac{1}{(p+1)!}\overline{x}^i_{j_1\cdots j_{p+1}} t^{j_1} \dots t^{j_{p+1}},$$

фигурирующие в правой части (8), зависят лишь от репера θ, но не от выбора его представителя φ. Рассматривая их с точностью до $o(\rho^p)$, получим

$$P^i_\theta(t) = P^i_{\underline{\theta}}(t) + o(\rho^p),$$

где

$$P^i_{\underline{\theta}}(t) := \overline{x}^i + \overline{x}^i_j t + \tfrac{1}{2!}\overline{x}^i_{jk} t^j t^k + \cdots + \tfrac{1}{p!}\overline{x}^i_{j_1\cdots j_p} t^{j_1} \dots t^{j_p}. \quad (9)$$

Действие p-го продолжения φ^p можно выразить следующим образом. Пусть $\eta = j^p_0\psi \in H^p(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\psi^i(t) = P^i_\eta(t) + o(\rho^p),$$

где $P^i_\eta(t)$ — многочлены от $t^1,\ \dots,\ t^n$ степени не выше p каждый. Тогда образ репера η при отображении φ^p есть p-струя композиции $\varphi \circ \psi$ с началом $0 \in \mathbb{R}^n$, координатное представление которой имеет вид

$$(\varphi \circ \psi)^i(t) = P^i_\theta\left(P^1_\eta(t),\ \dots,\ P^n_\eta(t)\right) + o(\rho^p). \quad (10)$$

5. Как известно (см., напр., [3; 7]), всякий касательный вектор к гладкому многообразию есть вектор скорости некоторого пути на этом многообразии. Тогда вектор $V \in T_e H^p(\mathbb{R}^n)$ можно описать следующим образом. Пусть

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to H^p(\mathbb{R}^n),\ \varepsilon \mapsto \gamma(\varepsilon)$$

— путь на $H^p(\mathbb{R}^n)$ такой, что V — его вектор скорости при $\varepsilon = 0$. Пусть уравнения пути γ в глобальной карте на $H^p(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$u^i = u^i(\varepsilon),\ u^i_j = u^i_j(\varepsilon),\ \dots,\ u^i_{j_1\dots j_p} = u^i_{j_1\dots j_p}(\varepsilon). \qquad (11)$$

Заметим, что, поскольку $V \in T_e H^p(\mathbb{R}^n)$, то $\gamma(0) = e$. Единица e имеет координаты $u^i(e) = 0$, $u^i_j(e) = \delta^i_j$, $u^i_{jk}(e) = 0$, …, $u^i_{j_1\dots j_p}(e) = 0$. Тогда в силу (5) уравнения (11) с точностью до бесконечно малых высших порядков относительно ε можно представить в виде

$$u^i = v^i\varepsilon + o(\varepsilon),\quad u^i_j = \delta^i_j + v^i_j\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$u^i_{jk}(\varepsilon) = v^i_{jk}\varepsilon + o(\varepsilon),\ \dots,\ u^i_{j_1\dots j_p}(\varepsilon) = v^i_{j_1\dots j_p}\varepsilon + o(\varepsilon). \qquad (12)$$

Пусть $\gamma(\varepsilon) = j^p_0\psi_\varepsilon$, тогда в силу (11) имеем

$$\psi^i_\varepsilon(t) = u^i(\varepsilon) + u^i_j(\varepsilon)t^j + \frac{1}{2!}u^i_{jk}(\varepsilon)t^j t^k + \dots +$$

$$+\frac{1}{p!}u^i_{j_1\dots j_p}(\varepsilon)t^{j_1}\dots t^{j_p} + o(\rho^p). \qquad (13)$$

Формула (13) с учетом (12) принимает вид

$$\psi^i_\varepsilon(t) = t^i + P^i_V(t)\varepsilon + o(\varepsilon), \qquad (14)$$

где

$$P^i_V(t) := v^i + \frac{1}{1!}v^i_j t^j + \frac{1}{2!}v^i_{jk}t^j t^k + \dots + \frac{1}{p!}v^i_{j_1\dots j_p}t^{j_1}\dots t^{j_p}. \qquad (15)$$

Поскольку Φ_θ — дифференциал отображения φ^p, то вектор $\Phi_\theta(V)$ является касательным вектором к пути

$$\tilde\gamma = \varphi^p \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to H^p(M)$$

на $H^p(M)$. Тогда в силу (10) координатное выражение для композиции $\varphi_\varepsilon := \varphi \circ \psi_\varepsilon$ получается путем замены в формуле (8) каждой из переменных t^i на $\psi_\varepsilon^i(t)$ с последующей подстановкой выражения (14):

$$\varphi_\varepsilon^i(t) = (\varphi \circ \psi_\varepsilon)^i(t) = \overline{x}^i + \overline{x}_j^i\big(t^j + P_V^j(t)\varepsilon\big) +$$
$$+\frac{1}{2!}\overline{x}_{jk}^i\big(t^j + P_V^j(t)\varepsilon\big)\big(t^k + P_V^k(t)\varepsilon\big) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{p!}\overline{x}_{j_1\dots j_{p+1}}^i\Big(t^{j_1} + P_V^{j_1}(t)\varepsilon\Big)\dots\Big(t^{j_{p+1}} + P_V^{j_{p+1}}(t)\varepsilon\Big) +$$
$$+o(\rho^{p+1}) + o(\varepsilon).$$

Раскрывая скобки и используя симметрию всех $\overline{x}_{jk}^i, \dots, \overline{x}_{j_1\dots j_{p+1}}^i$ по всем нижним индексам, получим с учетом (9), что

$$\varphi_\varepsilon^i(t) = P_\theta^i(t) + (\overline{x}_m^i + \frac{1}{(2-1)!}\overline{x}_{mj}^i t^j + \frac{1}{(3-1)!}\overline{x}_{mjk}^i t^j t^k +$$
$$+ \cdots + \frac{1}{p!}\overline{x}_{mj_1\dots j_p}^i t^{j_1}\dots t^{j_p})P_V^m\big(t^k\big)\varepsilon + o(\rho^{p+1}) + o(\varepsilon) =$$
$$= P_{\underline{\theta}}^i(t) + \left(\sum_{s=0}^{p}\frac{1}{s!}\overline{x}_{mj_1\dots j_s}^i t^{j_1}\dots t^{j_s}\right)P_V^m(t)\varepsilon +$$
$$+o(\rho^p) + o(\varepsilon). \qquad (16)$$

6. Представим координатное выражение $\varphi_\varepsilon^i(t)$ для пути $\tilde{\gamma}$ в другой форме, используя равенство (7). А именно, в силу равенства (7) касательный вектор к пути $\tilde{\gamma}$ при $\varepsilon = 0$ равен $\underline{X}$. Координатное выражение для $\underline{X}$ имеет вид (4), причем $\tilde{\gamma}(0) = \underline{\theta}$, а значит, уравнения пути $\tilde{\gamma}$ в локальных координатах на $H^p(M)$ имеют вид

$$x^i(\varepsilon) = \overline{x}^i + \xi^i\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$x_{j_1\dots j_s}^i(\varepsilon) = \overline{x}_{j_1\dots j_s}^i + \xi_{j_1\dots j_s}^i\varepsilon + o(\varepsilon), \quad s = \overline{1,p}. \qquad (17)$$

Тогда путь $\tilde{\gamma}$ имеет следующее координатное представление:

$$\varphi_{\varepsilon}^{i}(t) = x^{i}(\varepsilon) + x_{j}^{i}(\varepsilon)t^{j} +$$

$$+\frac{1}{2!}x_{jk}^{i}(\varepsilon)t^{j}t^{k} + \cdots + \frac{1}{p!}x_{j_1\dots j_p}^{i}(\varepsilon)t^{j_1}\dots t^{j_p} + o(\rho^{p}) =$$

$$= (\overline{x}^{i} + \xi^{i}\varepsilon) + (\overline{x}_{j}^{i} + \xi_{j}^{i}\varepsilon)t^{j} + \frac{1}{2!}(\overline{x}_{jk}^{i} + \xi_{jk}^{i}\varepsilon)t^{j}t^{k} + \cdots +$$

$$+\frac{1}{p!}\left(\overline{x}_{j_1\dots j_p}^{i} + \xi_{j_1\dots j_p}^{i}\varepsilon\right)t^{j_1}\dots t^{j_p} + o(\rho^{p}) + o(\varepsilon) =$$

$$= P_{\underline{\theta}}^{i}(t) + P_{\underline{X}}^{i}(t)\varepsilon + o(\rho^{p}) + o(\varepsilon), \qquad (18)$$

где

$$P_{\underline{X}}^{i}(t) = \xi^{i} + \xi_{j}^{i}t^{j} + \frac{1}{2!}\xi_{jk}^{i}t^{j}t^{k} + \cdots + \frac{1}{p!}\xi_{j_1\dots j_p}^{i}t^{j_1}\dots t^{j_p}. \qquad (19)$$

Приравняем в (16) и (18) члены при первой степени ε:

$$P_{\underline{X}}^{i}(t) = \left(\sum_{s=0}^{p}\frac{1}{s!}\overline{x}_{mj_1\dots j_s}^{i}t^{j_1}\dots t^{j_s}\right)P_{V}^{m}\left(t^{k}\right) + o(\rho^{p}).$$

Распишем полученное равенство подробнее с учетом формул (15) и (19):

$$\xi^{i} + \xi_{j}^{i}t^{j} + \frac{1}{2!}\xi_{jk}^{i}t^{j}t^{k} + \cdots + \frac{1}{p!}\xi_{j_1\dots j_p}^{i}t^{j_1}\dots t^{j_p} =$$

$$= \left(\overline{x}_{m}^{i} + \frac{1}{1!}\overline{x}_{mj}^{i}t^{j} + \frac{1}{2!}\overline{x}_{mjk}^{i}t^{j}t^{k} + \cdots + \frac{1}{p!}\overline{x}_{mj_1\dots j_p}^{i}t^{j_1}\dots t^{j_p}\right)\times$$

$$\times\left(v^{m} + \frac{1}{1!}v_{j}^{m}t^{j} + \cdots + \frac{1}{p!}v_{j_1\dots j_p}^{m}t^{j_1}\dots t^{j_p}\right) + o(\rho^{p}). \qquad (20)$$

Раскрывая скобки в правой части (20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых мономах вида $t^{j_1}\dots t^{j_s}$, получим

$$\xi_{j_1\dots j_s}^{i} = \sum_{\alpha=0}^{s}\frac{s!}{\alpha!(s-\alpha)!}\overline{x}_{m(j_1\dots j_\alpha}^{i}v_{j_{\alpha+1}\dots j_s)}^{m}, \qquad (21)$$

где $s = \overline{0,p}$. С учетом обозначений (2, 3) и (6) формула (21) принимает вид

$$dx_{j_1\dots j_s}^{i}(X) = \sum_{\alpha=0}^{s}\frac{s!}{\alpha!(s-\alpha)!}x_{m(j_1\dots j_\alpha}^{i}(\theta)\,\omega_{j_{\alpha+1}\dots j_s)}^{m}(X),$$

и в силу произвола выбора вектора X получаем окончательно:

Теорема ([1; 2]). *Скалярные компоненты $\omega^i,\ \omega^i_j,\ \ldots,\ \omega^i_{j_1\ldots j_p}$ канонической формы Θ на расслоении $H^{p+1}(M)$ определяются по следующим неявным формулам:*

$$dx^i_{j_1\ldots j_s} = \sum_{\alpha=0}^{s} \frac{s!}{\alpha!(s-\alpha)!} x^i_{m(j_1\ldots j_\alpha} \omega^m_{j_{\alpha+1}\ldots j_s)}, \quad s = \overline{0,p}. \qquad (22)$$

Замечание. Последовательно придавая индексу s значения $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ p$, получаем из (22) следующие хорошо известные формулы для $\omega^i,\ \omega^i_j,\ \ldots,\ \omega^i_{j_1\ldots j_p}$, имеющие рекуррентный вид:

$$\omega^i = \tilde{x}^i_m dx^m, \quad \omega^i_j = \tilde{x}^i_m \left(x^m_k dx^k_j - x^m_{jk}\omega^k\right),$$

$$\omega^i_{j_1\ldots j_s} = \tilde{x}^i_m \left(dx^m_{j_1\ldots j_s} - \sum_{\alpha=1}^{s} C^\alpha_s x^i_{m(j_1\ldots j_\alpha} \omega^m_{j_{\alpha+1}\ldots j_s)} \right), \ s = \overline{2,p},$$

где матрица $(\tilde{x}^i_j)$ — обратная к матрице (x^i_j), т. е. $\tilde{x}^i_k x^k_j = \delta^i_j$.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Тр. Геом. семин. М., 1969. Т. 2. С. 119—150.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. М., 1979. Т. 9. С. 5—246.

3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М., 1981.

4. *Кулешов А.В.* О конструкции канонической формы на расслоении реперов // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 5—17. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-1.

5. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

6. *Юмагужин В.А.* Интегрируемые геометрические структуры конечного типа // Фундамент. и прикл. матем. 2004. Т. 10, вып. 1. С. 255—269.

7. *Kolář I., Michor P., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. Berlin ; Heidelberg, 1993.

8. *Kolář I.* Canonical forms on the prolongations of principalfibre bundles // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1971. Vol. 16. P. 1091—1106.

9. *Kurek J., Mikulski W.* Canonical vector valued 1-forms on higher order principal prolongations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2008. Vol. 29. P. 24—26. https://doi.org/10.1134/S199508020801006X.

Для цитирования: *Кулешов А.В.* О скалярных компонентах канонической формы на расслоениях реперов высших порядков // ДГМФ. 2024. № 55 (1). С. 34—44. doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-4.

MSC 2010: 58A10, 58A20, 58A32

A. V. Kuleshov

Immanuel Kant Baltic Federal University

14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia

arturkuleshov@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-4

On the scalar components of the canonical form on higher order frame bundles

Submitted on June 5, 2024

A detailed obtaining of the expressions for the scalar components of the canonical form on higher order frame bundles over a smooth manifold has been done. The canonical form on the frame bundle of order $p+1$ over an n-dimensional smooth manifold is a vector-valued differential 1-form with values in the tangent space to the p-th order frame bundle over the n-dimensional arithmetical space at the unit of the p-th order differential group. The scalar components of the canonical form are its coefficients with respect to natural basis of the tangent space. For every frame, there exists a polynomial mapping representing the frame in a given local chart on the manifold. Therefore, for any tangent vector to the frame bundle there is a first order Taylor expansion of one-parametric family of polynomial mappings representing the tangent vector. We obtain the formulas of the scalar components from the equations for coefficients of the two expansions for some tangent vector.

Keywords: smooth manifold, jet, frame bundle, canonical form

References

1. *Evtushik, L.E.:* Differential connections and infinitesimal transformations of a prolonged pseudogroup. Tr. Geom. Sem., 2, 119—150 (1969).

2. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet. Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

3. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Foundations of differential geometry. Interscience publishers, New York, London (1963).

4. *Kuleshov A. V.:* On construction of the canonical form on the frame bundle. DGMF, **54**:2, 5—17 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-1.

5. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

6. *Yumaguzhin, V.A.:* Finite-type integrable geometric structures. J. Math. Sci., **136**:6, 4401—4410 (2006).

7. *Kolář, I., Michor, P., Slovák J.:* Natural operations in differential geometry. Springer, Berlin (1993).

8. *Kolář, I.:* Canonical forms on the prolongations of principalfibre bundles. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 16, 1091—1106 (1971).

9. *Kurek, J., Mikulski, W.:* Canonical vector valued 1-forms on higher order principal prolongations. Lobachevskii J. Math., **29**:1, 24—26 (2008). https://doi.org/10.1134/S199508020801006X.

For citation: Kuleshov, A.V. On the scalar components of the canonical form on higher order frame bundles. DGMF, 55 (1), 34—44 (2024). doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-4.

УДК 514.76

Н.Д. Никитин , О.Г. Никитина
Пензенский государственный университет, Россия
nikitina1005@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-5

Об аффинных движениях с одномерными орбитами в общих пространствах путей

Понятие общего пространства путей ввел Дж. Дуглас. Аффинные и проективные движения в этих пространствах первым начал рассматривать М.С. Кнебельман. Общее пространство путей является обобщением пространства аффинной связности. В статье исследуются пространства путей, допускающие группы аффинных движений с одномерными орбитами. Для каждого представления абелевой алгебры Ли и алгебры L_r, содержащей абелев идеал $L_{r\text{-}1}$, в виде алгебры векторных полей составляется система уравнений инфинитезимальных аффинных движений. Векторные поля каждого из этих представлений являются операторами группы преобразований с одномерными орбитами. Путем интегрирования системы определяются общие пространства путей, допускающие группу аффинных движений с одномерными орбитами, операторами которой являются векторные поля этих представлений. Установлен максимальный порядок этих групп. Показано, что пространства путей, допускающие группу аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка, являются проективно плоскими. Приводятся условия, необходимые и доста-

Поступила в редакцию 23.04.2024 г.

точные для того, чтобы пространство путей допускало группу аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка.

Ключевые слова: касательное расслоение, общее пространство путей, проективно плоское пространство, производная Ли, инфинитезимальное аффинное преобразование

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие, $T(M)$ — его касательное расслоение, $\pi\colon T(M) \to M$ — каноническая проекция [3].

Общее пространство путей есть пара (M, H) [1; 8], где H — дифференциально-геометрический объект, заданный на касательном расслоении. Пусть $\left(x^i\right)$, где $i = \overline{1,n}$, — система координат окрестности $U \subset M$. В окрестности $\overline{U} = \pi^{-1}(U)$ относительно индуцированных координат $\left(x^i, y^j\right)$ объект имеет компоненты $H^i(x^1, \dots, x^n,\ y^1, \dots, y^n)$, однородные второй степени относительно слоевых координат $y^1, \dots, y^n$.

При допустимых преобразованиях координат

$$\bar{x}^i = f\,(x^1, \dots, x^n), \qquad \bar{y}^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^s} y^s$$

окрестности $\overline{U}$ компоненты $H^i(x^1, \dots, x^n,\ y^1, \dots, y^n)$ объекта H преобразуются по закону

$$\overline{H}^i = -\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^m \partial x^\sigma} y^m y^\sigma + H^m \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \qquad (i, m, \sigma = \overline{1,n}).$$

На многообразии M пространства путей задаются кривые (пути), которые в окрестности U определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + H^i\left(x^1, \dots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}\right) = 0,$$

t — аффинный параметр.

Локальная однопараметрическая группа преобразований $\varphi_\tau = \varphi(x,\tau)$, $-\varepsilon < \tau < \varepsilon$, порожденная векторным полем $X \in F(U)$, называется *группой аффинных движений пространства путей*, если при любом τ путь l: $x = x(t)$ переводит в путь $\overline{l}: \varphi_\tau = \varphi(x(t),\tau)$, сохраняя аффинный параметр пути.

Векторное поле $X \in F(U)$, $X = \xi^i(x^1, \dots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$ [5], является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве путей тогда и только тогда, когда

$$L_{X^C} H^i = 0, \tag{1}$$

где L_{X^C} — символ производной Ли [2] вдоль полного лифта X^C векторного поля X. Условие (1) равносильно условию $L_{X^C}\Gamma^i_{jk} = 0$, где $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} H^i_{\cdot j \cdot k}$ — компоненты объекта аффинной связности Γ пространства путей, тензор кручения которой равен нулю, $H^i_{\cdot j \cdot k} = \frac{\partial^2 H^i}{\partial y^j \partial y^k}$.

Дифференциальные уравнения $L_{X^C}\Gamma^i_{jk} = 0$ в координатах (x^i, y^j) окрестности $\overline{U}$ запишутся в виде

$$\partial^2_{jk}\xi^i - \partial_m \xi^i \Gamma^m_{jk} + \partial_j \xi^m \Gamma^i_{mk} + \partial_k \xi^m \Gamma^i_{jm} + \xi^m \partial_m \Gamma^i_{jk} +$$
$$+\partial_m \xi^\sigma y^m \Gamma^i_{jk\cdot\sigma} = 0,$$

где $\Gamma^i_{jk\cdot\sigma} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^\sigma}$.

Обозначим через $L_r = \{X_1, X_2 \dots, X_r\}$ алгебру Ли группы преобразований G_r многообразия M. В работе [4] показано, что если $L_{X^C}\Gamma^i_{jk} = 0$ для каждого $X \epsilon L_r$, то группа G_r является группой аффинных движений пространства путей.

Теорема 1. *Максимальный порядок групп G_r аффинных движений в пространствах путей с одномерными орбитами равен n+1. Пространства (M, H), допускающие группу аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка, являются проективно плоскими.*

Доказательство. Пусть L_r — алгебра Ли группы G_r аффинных движений с одномерными орбитами в пространстве путей. В работе [6] показано, что алгебра L_r либо абелева, либо имеет структуру

$$(X_k, X_2) = X_k,\ \left(X_\mu, X_\nu\right) = 0 \quad (k, \mu, \nu = 1, 3, 4, \dots, r). \tag{2}$$

В работе [7] приводятся все представления абелевой алгебры L_r и алгебры $\bar{L}_r$ со структурой (2) в виде алгебры Ли инфинитезимальных преобразований $X_\beta = \xi_\beta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = \overline{1, n}$, $\beta = \overline{1, r}$, в координатной окрестности U, когда $rang\left(\xi_\beta^i\right) = 1$.

Приведем эти представления. Представления абелевой алгебры L_r:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots,\ X_r = x^r \frac{\partial}{\partial x^1} \quad (r \le n); \tag{3}$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots,\ X_l = x^l \frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$X_{l+1} = \varphi_{l+1}(x^2, \dots, x^l) \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots,\ X_r = \varphi_r(x^2, \dots, x^l) \frac{\partial}{\partial x^1} \tag{4}$$

$$(l \le n - 1,\ l < r).$$

Представление алгебры L_r со структурой (2):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \dots,\ X_r = x^{r-1} \frac{\partial}{\partial x^1} \tag{5}$$

$(r \le n + 1)$;

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},\ X_2 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots,\ X_l = x^{l-1} \frac{\partial}{\partial x^1},$$

$$X_{l+1} = \varphi_{l+1}(x^2, \dots, x^{l-1}) \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, X_r = \varphi_r(x^2, \dots, x^{l-1}) \frac{\partial}{\partial x^1} \tag{6}$$

$(l \le n + 1)$.

Найдем компоненты H^i дифференциального геометрического объекта H общего пространства путей, допускающего алгебру L_r инфинитезимальных аффинных движений (3) при $r = n$. Запишем для каждого векторного поля из (3) уравнения аффинных движений (1):

$$\begin{cases} -\delta_1^i H^a + H^i_{\cdot 1} y^a = 0, \\ \partial_{x^1} H^i = 0 \quad \left(a = \overline{2,n};\ i = \overline{1,n}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Из уравнений (7) получим, что

$$H^1 = B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n) y^1 + D(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n),$$
$$H^a = y^a B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n).$$

Покажем, что пространства (M, H) не допускают в качестве группы аффинных движений группу G_r с алгеброй L_r (4). Предположим, что группа G_r является группой аффинных движений. Запишем уравнения инфинитезимальных движений для алгебры L_r (4):

$$\begin{cases} -\delta_1^i H^k + H^i_{\cdot 1} y^k = 0, \quad \partial_{x^1} H^i = 0, & (8) \\ \delta_1^i \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} y^\alpha y^\rho - \frac{\partial \varphi_s}{\partial x^\rho} H^\rho \delta_1^i + H^i_{\cdot 1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x^\rho} y^\rho = 0 & (9) \\ \left(i = \overline{1,n};\ k, \alpha, \rho = \overline{2,l};\ s = \overline{l+1,r}\right). \end{cases}$$

Из уравнений (8) получим, что

$$H^1 = B(x^2, \dots, x^n) y^1 + D(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n),$$
$$H^k = y^k B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n).$$

Учитывая это, из уравнений (9) при $i = 1$ получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^\alpha \partial x^\rho} y^\alpha y^\rho = 0, \qquad \varphi_s = a_{s\alpha} x^\alpha + b_s.$$

Поскольку $X_s = \sum_{\alpha=2}^{l} a_{s\alpha} X_\alpha + b_s X_1$, то пришли к противоречию. По условию инфинитезимальные преобразования линейно независимы.

Найдем теперь составляющие объекта $H\left(H^i\right)$ общего пространства путей, допускающих алгебру Ли инфинитезимальных аффинных движений L_{n+1} (5). Так как алгебра Ли L_n (3) является идеалом алгебры L_{n+1}, то составляющие объекта H пространства (M, H) определим из уравнений

$$L_{X_2^c} H^i = 0, \tag{10}$$

где

$$H^1 = B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n)y^1 + D(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n),$$

$$H^a = y^a B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n),\ X_2 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1},\quad a = \overline{2, n}.$$

Из дифференциальных уравнений (10) относительно H^i получим, что $D(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n) = 0$. Следовательно, $H^i = y^i B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n)$, а компоненты объекта аффинной связности

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} H^i_{\cdot j \cdot k} = \delta^i_j \Phi_{\cdot k} + \delta^i_k \Phi_{\cdot j} + y^i \Phi_{\cdot j \cdot k}\ ,$$

где $\Phi = \frac{1}{2} B(x^2, \dots, x^n,\ y^2, \dots, y^n)$ — однородная функция первой степени относительно слоевых координат $y^2, \dots, y^n$. Значит, пространства (*M*, *H*) с алгеброй инфинитезимальных движений $\overline{L}_{n+1}$ (5) являются проективно плоскими.

Нетрудно показать, что инфинитезимальные преобразования алгебры $\overline{L}_r$ (6) не являются аффинными движениями пространства путей. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пространство путей (M, H) допускает группу G аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка тогда и только тогда, когда оно является проективно плоским и тензор* $\overline{\Gamma}\left(\Gamma^i_{jkl}\right),\ \Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{jk \cdot l}$ *:*

$$\Gamma^i_{jkl} = \delta^i_j \Phi_{kl} + \delta^i_k \Phi_{jl} + \delta^i_l \Phi_{jk} + y^i \Phi_{jkl},\ \ \Phi_{jk} = \Phi_{\cdot j \cdot k},$$

и тензор кривизны

$$K^i_{jkl} = \delta^i_j \left(\Phi_{k,l} - \Phi_{l,k}\right) + \delta^i_k \left(\Phi_{j,l} - \Phi_j \Phi_l - \Phi_{jl}\right) -$$
$$-\delta^i_l \left(\Phi_{j,k} - \Phi_k \Phi_j - \Phi_{jk}\right) +\ y^i \left(\Phi_{jk,l} - \Phi_{jl,k}\right)$$

удовлетворяют условию: существует такое векторное поле $X = v^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$, *что*

$$v^\sigma \Phi_{\cdot\sigma} = 0, \quad L_{X^c} \Phi = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть пространство путей (*M, H*) допускает группу G_r аффинных движений с одномерными орбитами максимального порядка. Из теоремы 1 следует, что $r = n + 1$ и пространство является проективно плоским. Объект аффинной связности

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \Phi_k + \delta^i_k \Phi_j + y^i \Phi_{jk} \,,$$

где Φ не зависит от x^1, y^1, $\Phi_k = \Phi_{\cdot k}$, $\Phi_{jk} = \Phi_{\cdot j \cdot k}$. Тогда тензор

$$\Gamma^i_{jkl} = \delta^i_j \Phi_{kl} + \delta^i_k \Phi_{jl} + \delta^i_l \Phi_{jk} + y^i \Phi_{jkl} \,,\ \Phi_{jkl} = \Phi_{jk \cdot l},$$

а тензор кривизны

$$K^i_{jkl} = \delta^i_j \left(\Phi_{k,l} - \Phi_{l,k} \right) + \delta^i_k \left(\Phi_{j,l} - \Phi_j \Phi_l - \Phi_{jl} \right) -$$
$$-\delta^i_l \left(\Phi_{j,k} - \Phi_k \Phi_j - \Phi_{jk} \right) + \ y^i \left(\Phi_{jk,l} - \Phi_{jl,k} \right)$$
$$(i, j, k, l = \overline{1, n}).$$

Рассмотрим векторное поле $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, ставляющие которого $v^i = \delta^i_1$. Поскольку функция Φ не зависит от x^1, y^1, то

$$v^\sigma \Phi_{\cdot \sigma} = 0, \ \ L_{X^c} \Phi = 0.$$

Пусть теперь пространство путей (*M, H*) проективно плоское и выполняются условия (11). Существует система координат $\left(x^i\right)$ окрестности *U*, в которой компоненты $v^i = \delta^i_1$. Тогда из условий (11) следует, что Φ не зависит от x^1, y^1. Общий оператор группы *G* аффинных движений с одномерными орбитами в пространстве (*M, H*) возьмем в виде

$$X = \varphi(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^1} \,.$$

Запишем уравнения инфинитезимальных аффинных движений для векторного поля $X = \varphi(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^1}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} \Gamma^\sigma_{jk} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \Gamma^1_{1k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \Gamma^1_{j1} + \Gamma^1_{jk \cdot 1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} y^\sigma + \\ \qquad + \varphi \partial_{x^1} \Gamma^1_{jk} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \Gamma^\lambda_{1k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \Gamma^\lambda_{j1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} y^\sigma \Gamma^\lambda_{jk \cdot 1} + \varphi \partial_{x^1} \Gamma^\lambda_{jk} = 0 \quad (\lambda = \overline{2, n}). \end{cases} \tag{12}$$

Введем новые функции $u_j = \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}$. Тогда система (12) равносильна системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно φ и u_j:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j} = u_j, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x^k} - u_\sigma \Gamma^\sigma_{jk} + u_j \Gamma^1_{1k} + u_k \Gamma^1_{j1} + \Gamma^1_{jk\cdot 1} u_\sigma y^\sigma + \varphi \partial_{x^1} \Gamma^1_{jk} = 0, \\ u_j \Gamma^\lambda_{1k} + u_k \Gamma^\lambda_{j1} + u_\sigma y^\sigma \Gamma^\lambda_{jk\cdot 1} + \varphi \partial_{x^1} \Gamma^\lambda_{jk} = 0 \quad (\lambda = \overline{2,n}). \end{cases} \quad (13)$$

Первая серия условий интегрируемости [9] системы (13)

$$L_X c\Gamma^i_{jkl} = 0, \quad L_X cK^i_{jkl} = 0$$

выполняется тождественно.

Действительно,

$$L_X c\Gamma^i_{jkl} = \varphi \partial_{x^1} \Gamma^i_{jkl} + \Gamma^i_{jkl\cdot 1} \partial_\sigma \varphi y^\sigma - \delta^i_1 \partial_\sigma \varphi \Gamma^\sigma_{jkl} + \Gamma^i_{1jk} \partial_j \varphi +$$
$$+ \Gamma^i_{j1l} \partial_k \varphi + \Gamma^i_{jk1} \partial_l \varphi = \delta^i_1 \Phi_{jkl} \partial_\sigma \varphi y^\sigma -$$
$$- \delta^i_1 \partial_\sigma \varphi \left(\delta^\sigma_j \Phi_{kl} + \delta^\sigma_k \Phi_{jl} + \delta^\sigma_l \Phi_{jk} + y^\sigma \Phi_{jkl} \right) +$$
$$+ \delta^i_1 \Phi_{lk} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \delta^i_1 \Phi_{jl} \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + \delta^i_1 \Phi_{jk} \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} = 0.$$

Аналогично можно показать, что $L_X cK^i_{jkl} = 0$.

Поскольку первая серия условий интегрируемости выполняется тождественно, то составляющая φ векторного поля X, являющаяся решением системы (13), содержит $n+1$ постоянных. Придавая последовательно одной из постоянных значение 1, а остальным 0, получим базис алгебры Ли группы аффинных движений с одномерным орбитами в пространстве (M, H) порядка $n+1$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Douglas J.* The general geometry of pahts // Annalas of Math. 1928. Vol. 29. P. 143—168.

2. *Yano K.* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam, 1957.

3. *Yano K., Isihara S.* Tangent and Cotangent Bundles Differential Geometry. N. Y., 1973.

4. *Knebelman M. S.* Collineations and motions in generalized spaces // American Journal of Mathematics. 1929. Vol. 51. P. 527—564.

5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М., 1981.

6. *Никитин Н.Д.* Об аффинных движениях в общих пространствах путей // Известия вузов. Математика. 1996. №2. С. 21—25.

7. *Никитин Н.Д.* О проективных движениях в общих пространствах путей // ДГМФ. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 100—107.

8. *Никитин Н.Д., Никитина О.Г.* Аффинные преобразования касательного расслоения общего пространства путей // ДГМФ. Калининград, 2023. Вып. 54 (2). С. 18—26.

9. *Okubo T.* On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of paths. I // Tensor. 1956. Vol. 6. P. 141—158.

Для цитирования: *Никитин Н.Д., Никитина О.Г.* Об аффинных движениях с одномерными орбитами в общих пространствах путей // ДГМФ. 2024. № 55 (1). С. 45—54. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-5.

MSC 2010: 53A35

N. D. Nikitin, O. G. Nikitina

Penza State University

37 Lermontova St., Penza, 440026, Russia

nikitina1005@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-5

On affine motions with one-dimensional orbits in common spaces of paths

Submitted on April 23, 2024

The concept of a common path space was introduced by J. Duqlas. M.S. Knebelman was the first to consider affine and projective movements in these spaces. The general path space is a generalization of the space of affine connectivity. In this paper, we study spaces of paths that admit groups of affine motions with one-dimensional orbits. For each representation in the form of algebra of vector fields of the abelian Lie algebra and the L_r algebra containing the abelian ideal $L_{r\text{-}1}$, a system of equations of infinitesimal affine motions is compiled. The vector fields of each of these representations are operators of a group of transformations with one-dimensional orbits. Integrating this system, general spaces of paths are defined that admit a group of affine motions with one-dimensional orbits, the operators of which are the vector fields of these representations. The maximum order of these groups is set. It is shown that the spaces of paths admitting a group of affine motions with one-dimensional orbits of maximum order are projectively flat. The conditions that are necessary and sufficient for the space of paths to admit a group of affine motions with one-dimensional orbits of maximum order are given.

Keywords: tangent bundle, general path space, a projectively flat space, Lie derivative, infinitesimal affine transformation

References

1. *Douglas, J.:* The general geometry of paths. Annalas of Math., 29, 143—168 (1928).
2. *Yano, K.:* The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam (1957).
3. *Yano, K., Isihara, S.:* Tangent and Cotangent Bundles Differential Geometry. New York (1973).
4. *Knebelman, M.S.:* Collineations and motions in generalized spaces. Amer. J. Math., 51, 527—564 (1929).
5. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Fundamentals of differential geometry, 1. Moskow (1981).
6. *Nikitin, N.D.:* On affine motions in general spaces of path. Izvestia vuzov. Math., 2, 21—25 (1996).
7. *Nikitin, N.D.:* On projective movements in common spaces of path. DGMF, 43, 100—107 (2012).
8. *Nikitin, N.D.*, *Nikitina, O.G.:* Affine transformations of the tangent bundle of a common path space. DGMF, **54**:2, 18—26 (2023).
9. *Okubo, T.:* On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of paths. I. Tensor, 6, 141—158 (1956).

For citation: Nikitin, N.D., Nikitina, O.G. On affine motions with one-dimensional orbits in common spaces of paths. DGMF, 55 (1), 45—54 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-5.

УДК 514.76

М. В. Сорокина, О. П. Сурина
Пензенский государственный университет, Россия
sorokina_m@list.ru, o.surina2013@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7335-9016, https://orcid.org/0000-0002-4575-3984
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-6

Левоинвариантная параконтактная метрическая структура на группе *Sol*

В известном списке восьми трехмерных геометрий Тёрстона находится геометрия многообразия *Sol*. Многобразие *Sol* — связная односвязная группа Ли вещественных матриц специального вида. На многообразии *Sol* имеется левоинвариантная псевдориманова метрика, для которой группа левых сдвигов является максимальной просто-транзитивной группой изометрии. В настоящей работе доказано, что на многообразии *Sol* существует левоинвариантная дифференциальная 1-форма, которая вместе с левоинвариантной псевдоримановой метрикой определяют на *Sol* параконтактную метрическую структуру. Найдено трехпараметрическое семейство левоинвариантных параконтактных метрических связностей, то есть линейных связностей, инвариантных относительно левых сдвигов, в которых структурные тензоры параконтактной структуры ковариантно постоянны. Среди этих связностей выделена плоская связность. Установлено, что часть геодезических плоской связности являются геодезическими усеченной связности, представляющей собой ортогональную проекцию исходной связности на $2n$-мерное контактное распределение. Это означает, что данная связность согласована с контактным распределением. Таким образом, на многообразии *Sol* имеется псевдосубриманова струк-

---

Поступила в редакцию 22.04.2024 г.

тура, определяемая вполне неголономным контактным распределением и ограничением на него исходной псевдоримановой метрики.

Ключевые слова: группа *Sol*, параконтактная метрическая структура, параконтактная метрическая связность, усеченная связность

1. Введение

В известном списке восьми трехмерных геометрий Тёрстона находится геометрия многообразия *Sol* [1]. Многообразие *Sol* — это односвязная группа Ли матриц следующего вида:

$$Sol = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где определяющие ее элементы x, y, z — действительные числа. Умножая матрицу (1) на такую же матрицу с определяющими элементами c_1, c_2, c_3, заключаем, что левые сдвиги на *Sol* определяются формулами

$$\bar{x} = e^{-c_3}x + c_1,\ \bar{y} = e^{c_3}y + c_2,\ \bar{z} = z + c_3. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) по параметрам c_1, c_2, c_3, находим левоинвариантные векторные поля — базис алгебры Ли группы Ли *Sol*:

$$X_1 = \partial_1,\ X_2 = \partial_2,\ X_3 = -x\partial_1 + y\partial_2 + \partial_3, \tag{3}$$

где $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ — естественный базис векторных полей на *Sol*.

Структурные уравнения группы имеют вид

$$[X_1, X_2] = 0,\ \ [X_1, X_3] = -X_1,\ \ [X_2, X_3] = X_2.$$

Здесь $[X, Y] = XY - YX$ — коммутатор векторных полей *X*, *Y*.

Левые сдвиги образуют полную разрешимую просто-транзитивную группу изометрий многообразия *Sol* с левоинвариантной римановой метрикой [1]

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}\,dy^2 + dz^2.$$

2. Параконтактная метрическая структура

В настоящее время продолжается исследование контактных и параконтактных метрических структур [2—12]. Если исходное многообразие является группой Ли, то, как правило, исследуются левоинвариантные структуры.

Параконтактной метрической структурой на $(2n+1)$-мерном гладком многообразии M называется четверка тензорных полей (η, ξ, φ, g), где η — линейная дифференциальная форма, ξ — векторное поле, φ — эндоморфизм модуля векторных полей на M , g — псевдориманова метрика, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varphi^2 = id - \eta \otimes \xi, \tag{4}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y), \tag{5}$$

$$d\eta(X,Y) = g(X, \varphi Y). \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0. \tag{7}$$

Условие (7) означает, что форма η является контактной, а ранг дифференциальной 2-формы $d\eta$ равен $2n$.

В равенствах (4—7) использованы следующие обозначения: $\otimes$ — тензорное произведение, $\wedge$ — внешнее дифференцирование, d — внешний дифференциал, X, Y — произвольные векторные поля на M.

Для параконтактной метрической структуры выполняются следующие равенства:

$$\begin{gathered}\eta(\xi) = 1, d\eta(X,\xi) = 0, \varphi(\xi) = 0,\\ \eta \circ \varphi = 0, g(X,\xi) = \eta(X)\end{gathered} \tag{8}$$

Отметим также, что $2n$-мерное контактное распределение $H = \ker \eta$ называется *горизонтальным*, а 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$ — *вертикальным*.

Пусть $f_t = exp\, tX$ — однопараметрическая подгруппа группы левых сдвигов на Sol, порожденная векторным полем X. Если η — левоинвариантная форма, то производная Ли вдоль X от формы η равна нулю: $L_X\eta = 0$. В координатах имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$X^p\partial_p\eta_i + \partial_i X^p\eta_p = 0. \tag{9}$$

Интегрируя уравнения (9) для базисных левоинвариантных векторных полей (3), находим общее решение:

$$\eta = a_1e^z dx + a_2e^{-z}dy + a_3dz, \tag{10}$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные. Поскольку

$$d\eta = -a_1e^z dx \wedge dz + a_2e^{-z}dy \wedge dz,$$

$$\eta \wedge d\eta = a_1a_2dx \wedge dy \wedge dz,$$

то при $a_1a_2 \neq 0$ формы вида (10) являются контактными. Анализируя алгебраические условия на структурные тензоры (4—6, 8) и условия их левоинвариантности, нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *На группе Ли Sol существует левоинвариантная параконтактная структура. Определяющие ее тензоры имеют следующий вид:*

$$\eta = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^z & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{z} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{z} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{z} & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z} & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Левоинвариантную псевдориманову метрику g можно получить, сдвинув псевдоевклидову метрику $ds^2 = = dx^2 + dy^2 - dz^2$ касательного пространства единицы группы в произвольную точку. Заметим, что контактная форма η и метрика g однозначно определяют инвариантные векторное поле ξ и структурный эндоморфизм φ.

3. Левоинвариантные параконтактные метрические связности

Пусть $\nabla(\Gamma_{ij}^k)$ — связность Леви-Чивиты, то есть линейная метрическая связность без кручения. Линейная связность $\tilde{\nabla}(\tilde{\Gamma}_{ij}^k)$ называется *параконтактной метрической связностью*, если $\tilde{\nabla} g = 0, \tilde{\nabla}\eta = 0$. Так как разность двух связностей является тензором, то $\tilde{\nabla} = \nabla + T$, где $T(T_{ij}^k)$ — тензор деформации связности ∇. Связность $\tilde{\nabla}$ является метрической тогда и только тогда, когда ковариантный тензор деформации T_{ijk} кососимметричен по последним двум аргументам, то есть

$$T_{ijk} + T_{ikj} = 0, \;\; T_{ijk} = T_{ij}^p g_{kp}.$$

Связность Леви-Чивиты ∇ псевдоримановой метрики g определяется коэффициентами

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *На многообразии Sol существует трехпараметрическое семейство левоинвариантных параконтактных метрических связностей. Ковариантный тензор деформации таких связностей имеет вид*

$$T = c_{113} e^{2z} dx \otimes dx \wedge dz + c_{223} e^{-2z} dy \otimes dy \wedge dz +$$

$$+c_{331}e^{z}dz \otimes dz\wedge dx + c_{332}e^{-z}dz\otimes dz\wedge dy +$$

$$+c_{123}dx \otimes dy\wedge dz + c_{213}dy\otimes dx\wedge dz,$$

где постоянные c_{ijk} удовлетворяют условиям

$$1 - c_{113} - c_{123} = 0, \quad 1 + c_{213} + c_{223} = 0, \quad c_{331} + c_{332} = 0.$$

Доказательство. Ковариантное постоянство контактной формы принимает следующий вид:

$$\tilde{\nabla}_i\eta_j = \partial_i\eta_j - \tilde{\Gamma}^p_{ij}\eta_p = \partial_i\eta_j - \Gamma^p_{ij}\eta_p - T^p_{ij}\eta_p =$$

$$= \partial_i\eta_j - \frac{1}{2}g^{ps}\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right)\eta_p - T_{ijs}g^{sp}\eta_p =$$

$$= \partial_i\eta_j - \frac{1}{2}\xi^s\left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is}\right) - T_{ijs}\xi^s = 0.$$

Здесь мы учли, что $g_{ij} = g_{ij}(z)$, $\xi^3 = 0, \xi^i = g^{ip}\eta_p$.

Расписывая полученные равенства для различных индексов, находим, что

$$\begin{array}{l} T_{112} = T_{212} = T_{312} = 0, \; e^z + e^{-z}T_{131} + e^{z}T_{132} = 0, \\ e^{-z} - e^{-z}T_{231} - e^{z}T_{232} = 0, \; e^{-z}T_{331} + e^{z}T_{332} = 0. \end{array} \tag{11}$$

Поскольку связность Леви-Чивиты ∇ инвариантна относительно левых сдвигов, то $\tilde{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации T, следовательно, производная Ли вдоль базисных левоинвариантных векторных полей (3) равна нулю, а значит, компоненты T_{ijk} должны быть решением следующей системы уравнений:

$$X^p_\alpha\partial_p T_{ijk} + \partial_i X^p_\alpha T_{pjk} + \partial_j X^p_\alpha T_{ipk} + \partial_k X^p_\alpha T_{ijp} = 0, \;\; \alpha = 1,2,3.$$

Интегрируя данную систему и учитывая (11), находим:

$$T_{113} = c_{113}e^{2z}, \; T_{223} = c_{223}e^{-2z}, \; T_{331} = c_{331}e^{z},$$

$$T_{332} = c_{332}e^{-z}, \;\; T_{123} = c_{123}, \; T_{213} = c_{213},$$

что и доказывает данное утверждение.

Если тензор кривизны $\tilde{R}$ связности $\tilde{\nabla}$ равен нулю (связность плоская, но с кручением), то

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ce^{-z} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -ce^{z} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ce^{z} & -ce^{-z} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Связность, согласованная с контактным распределением

Линейная связность ∇ называется *согласованной с распределением H*, если через каждую точку в каждом направлении, принадлежащем H, проходит единственная геодезическая связности ∇, касающаяся распределения H [13]. Горизонтальная кривая γ: $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$, s — канонический параметр, называется *геодезической усеченной связности* $\overline{\nabla}$, если $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, где $\overline{\nabla}$ — ортогональная проекция связности ∇ на распределение H, $\dot{\gamma}$ — касательный вектор кривой γ [14; 15].

Теорема 3. *Контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с ненулевыми компонентами $\tilde{\Gamma}_{31}^1 = 1$, $\tilde{\Gamma}_{32}^2 = -1$ согласована с контактным распределением $H = ker\,\eta$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо установить, что часть геодезических связности $\tilde{\nabla}$ совпадает с геодезическими усеченной связности $\overline{\nabla}$. Общее решение дифференциальных уравнений геодезических $\tilde{\nabla}$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

имеет следующий вид:

$$x = -\frac{a^1}{a}e^{-as} + b^1, \;\; y = -\frac{a^2}{a}e^{as} + b^2, \;\; z = as + b^3 \quad (a \neq 0).$$

В силу однородности многообразия Sol можно ограничиться геодезическими, выходящими из единицы группы. В этом случае при $s = 0$ x, y, z должны обращаться в нуль. Поэтому

$$\frac{a^1}{a} = b^1, \quad \frac{a^2}{a} = -b^2, \quad b^3 = 0,$$

а уравнения геодезических примут вид

$$x = -b^1 a^{-as} + b^1, \quad y = -b^2 e^{as} + b^2, \quad z = as.$$

Для нахождения геодезических усеченной связности рассмотрим неголономное поле ортонормированных реперов $\{p, E_i\}$, адаптированное к структуре почти произведения $H \oplus V$:

$$E_1 = \partial_3, \qquad E_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} \partial_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{z} \partial_2,$$

$$E_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} \partial_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{z} \partial_2, \tag{12}$$

где E_1 и E_2 принадлежат контактному распределению:

$$\eta(E_1) = \eta(E_2) = 0,$$

а $E_3 = \xi$;

$$g(E_1, E_1) = -1, \; g(E_2, E_2) = g(E_3, E_3) = 1,$$

$$g(E_i, E_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Дуальный реперу $\{p, E_i\}$ корепер $\{p, \theta^j\}$ определяется условием $\theta^j(E_i) = \delta_i^j$ и имеет следующие координатные формы:

$$\theta^1 = dz, \qquad \theta^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{z} dx - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} dy,$$

$$\theta^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{z} dx + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-z} dy.$$

Вычисляя неголономные коэффициенты связности Леви-Чивиты ∇, находим

$$\nabla_{E_2} E_3 = \nabla_{E_3} E_2 = E_1, \qquad \nabla_{E_3} E_1 = E_2, \qquad \nabla_{E_2} E_1 = E_3,$$

$$\nabla_{E_1} E_1 = \nabla_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} E_3 = \nabla_{E_2} E_2 = \nabla_{E_3} E_3 = 0,$$

откуда следует, что

$$\overline{\nabla}_{E_i}E_j = 0, \qquad i,j = 1,2,\ E_i \in H.$$

Пусть v^k — естественные координаты векторного поляv, ω^k — неголономные:

$$v = v^k\partial_k = \omega^k E_k.$$

Из (12) получим

$$\partial_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^z E_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^z E_3,$$
$$\partial_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z} E_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z} E_3,$$
$$\partial_3 = E_1,$$

поэтому

$$v = v^1\partial_1 + v^2\partial_2 + v^3\partial_3 =$$
$$= v^3E_1 + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}v^1e^z - \tfrac{\sqrt{2}}{2}v^2e^{-z}\right)E_2 + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}v^1e^z + \tfrac{\sqrt{2}}{2}v^2e^{-z}\right)E_3.$$

Если $v \in H$, $v = \omega^1E_1 + \omega^2E_2$, то условие горизонтальности векторного поля v примет вид

$$v^1e^z + v^2e^{-z} = 0,$$

а

$$\omega^1 = v^3, \qquad \omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v^1e^z - \frac{\sqrt{2}}{2}v^2e^{-z}.$$

Заменяя неголономные координаты в уравнениях геодезических усеченной связности естественными, получаем те же дифференциальные уравнения геодезических, что и для связности $\widetilde{\nabla}$ с дополнительным условием горизонтальности касательного поля $\dot{\gamma}$. В результате получаем параметрические уравнения геодезических усеченной связности, выходящих из единицы группы *Sol*:

$$x = b(1 - e^{-as}),\ \ y = b(1 - e^{as}),\ \ z = as,$$

которые являются частью геодезических связности $\widetilde{\nabla}$ при $b^1 = b^2 = b$, что и доказывает данное утверждение.

Заметим, что при $b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\dot{\gamma}| = 0$ имеем две изотропные геодезические, выходящие из единицы группы, — изотропный конус.

Псевдориманову метрику g на многообразии *Sol* запишем следующим образом:

$$ds^2 = {\theta^3}^2 + {\theta^2}^2 - {\theta^1}^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^z dx + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z}dy\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^z dx - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z}dy\right)^2 - dz^2.$$

Так как контактное распределение *H* определяется уравнением $\theta^3 = 0$, то ограничение метрики g на распределение *H* имеет вид

$$ds^2|_H = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^z dx + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z}dy\right)^2 - dz^2.$$

Нетрудно убедиться, что связность $\widetilde{\nabla}$, указанная в теореме 3, согласована с метрикой, то есть $\widetilde{\nabla} g|_H = 0$, и если векторные поля X, Y горизонтальные, то и векторное поле $Z = \widetilde{\nabla}_X Y$ также является горизонтальным.

Таким образом, на многообразии *Sol* имеем псевдосубриманову структуру, определяемую вполне неголономным контактным распределением $H = \ker\eta$ и псевдоримановой метрикой $g|_H$, а ограничение $\widetilde{\nabla}$ на *H* является внутренней метрической связностью.

Список литературы

1. *Терстон У.* Трехмерная геометрия и топология. М., 2001.

2. *Банару М.В.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2018. Т. 1. С. 67—70.

3. *Галаев С.В.* ∇_N-Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. №70. С. 5—15.

4. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии *Sol* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, №1. С. 77—90.

5. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2022. №75. С. 38—51.

6. *Смоленцев Н.К.* Левоинвариантные парасасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. №62. С. 27—37.

7. *Смоленцев Н.К., Шагабудинова И.Ю.* О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестник Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. №69. С. 37—52.

8. *Calvaruso G.* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // J. Geom. Phys. 2013. Vol. 69. P. 60—63.

9. *Calvaruso G., Martin-Molina V.* Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle // Annali di Matematica Puraed Applicata. 2015. Vol. 194. P. 1359—1380.

10. *Calvaruso G., Perrone A.* Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups // Periodica Mathematica Hungarica. 2014. Vol. 69. P. 97—108.

11. *Calvaruso G., Perrone A.* Five-dimensional paracontact Lie algebras // Diff. Geom. and its Appl. 2016. Vol. 45. P. 115—129.

12. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2008. Vol. 26, №5. P. 544—552.

13. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Контактная и почти контактная структура на вещественном расширении плоскости Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2021. Т. 163, №3-4. С. 291—303.

14. *Вершик А.М., Фадеев Л.Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении. Проблемы теоретической физики. Л., 1975. С. 129—141.

15. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. 1987. Т. 16. С. 5—85.

Для цитирования: *Сорокина М.В., Сурина О.П.* Левоинвариантная параконтактная метрическая структура на группе *Sol* // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 55—67. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-6.

MSC 2010: 58A05 53D10

M. V. Sorokina , O. P. Surina
Penza State University
40 Krasnay str., Penza, 440026, Russia
sorokina_m@list.ru, o.surina2013@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-6

Left-invariant paracontact metric structure on a group *Sol*

Submitted on April 22, 2024

Among Thurston's famous list of eight three-dimensional geometries is the geometry of the manifold *Sol*. The variety *Sol* is a connected simply connected Lie group of real matrices of a special form. The manifold *Sol* has a left-invariant pseudo-Riemannian metric for which the group of left shifts is the maximal simply transitive isometry group. In this paper, we prove that on the manifold *Sol* there exists a left-invariant differential 1-form, which, together with the left-invariant pseudo-Riemannian metric, defines a paracontact metric structure on *Sol*. A three-parameter family of left-invariant paracontact metric connections is found, that is, linear connections invariant under left shifts, in which the structure tensors of the paracontact structure are covariantly constant. Among these connections, a flat connection is distinguished. It has been established that some geodesics of a flat connection are geodesics of a truncated connection, which is an orthogonal projection of the original connection onto a 2n-dimensional contact distribution. This means that this connection is consistent with the contact distribution. Thus, the manifold *Sol* has a pseudo-sub-Riemannian structure determined by a completely non-holonomic contact distribution and the restriction of the original pseudo-Riemannian metric to it.

Keywords: Sol group, paracontact metric structure, paracontact metric connection, truncated connection

References

1. *Thurston, W.:* Three-dimensional geometry and topology. Moscow (2001).

2. *Banaru, M. V.:* The Almost Contact Metric Hypersurfaces with Small Type Numbers in W_4-manifolds. Moscow Univ. Math. Bull., 73, 38—40 (2018).

3. *Galaev, S. V.:* ∇_N-Einstein almost contact metric manifolds. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 70, 5—15 (2021).

4. *Panzhenskii, V. I., Rastrepina, A. O.:* The left-invariant contact metric structure on the Sol manifold. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki. **162**:1, 77—90 (2020).

5. *Panzhensky, V. I., Rastrepina, A. O.:* Left-invariant para-Sasakian structure on the Heisenberg group. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 75, 38—51 (2022).

6. *Smolentsev, N. K.:* Left-invariant para-Sasakian structures on Lie groups. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 62, 27—37 (2019).

7. *Smolentsev, N. K., Shagabudinova, I. Yu.:* On para-Sasakian structures on five-dimensional Lie algebras. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 69, 37—52 (2021).

8. *Calvaruso, G.:* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures. J. Geom. Phys., 69, 60—63 (2013).

9. *Calvaruso, G., Martin-Molina V.:* Paracontact metric structures on the unit tangent spherebundle. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 194, 1359—1380 (2015).

10. *Calvaruso, G., Perrone, A.:* Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups. Periodica Mathematica Hungarica, 69, 97—108 (2014).

11. *Calvaruso, G., Perrone, A.:* Five-dimensional paracontact Lie algebras. Diff. Geom. and its Appl., 45, 115—129 (2016).

12. *Diatta, A.:* Left invariant contact structures on Lie groups. Diff. Geom. and its Appl., **26**:5, 544—552 (2008).

13. *Panzhensky, V. I., Rastrepina, A. O.:* Contact and almost contact structure on the real extension of the Lobachevsky plane. Uchen. zap. Kazan. univ. Ser. Fiz.-math. sciences. **163**:3-4, 291—303 (2021).

14. *Vershik, A. M., Fadeev, L. D.:* Lagrangian mechanics in an invariant presentation. Problems of theoretical physics. Leningrad, 129—141 (1975).

15. *Vershik, A. M., Gershkovich, V. Ya.:* Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 16, 5—85 (1987).

For citation: Sorokina, M. V., Surina, O. P. Left-invariant paracontact metric structure on a group Sol. DGMF, 55 (1), 55—67 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-6.

MSC 2010: 53A45, 53C20

S. E. Stepanov*, *I. I. Tsyganok
Department of Mathematics,Financial University,Russia
s.e.stepanov@mail.ru, i.i.tsyganok@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-7

On the differentiable sphere theorem for manifolds with Ricci curvatures bounded from above

In the present paper, we prove that if (M, g) is an n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Riemannian manifold and if $Ric_{\max}(x) < n\, K_{\min}(x)$, where $K_{\min}(x) = \inf_{\pi \subset T_x M} K(\pi)$, $Ric_{\max}(x) = Ric_{X \in T_x M} Ric(X), K(\cdot)$ and $Ric(\cdot)$ are the sectional and Ricci curvatures of (M, g) respectively, then (M, g) is diffeomorphic to a spherical space form $\mathbb{S}^n/\Gamma$ where Γ is a finite group of isometries acting freely. In particular, if (M, g) is simply connected, then it is diffeomorphic to the Euclidian sphere $\mathbb{S}^n$.

Keywords: Riemannian manifold, sectional curvature, Ricci curvature, sphere theorem, spherical space form

1. Introduction: Sphere theorems

Let (M, g) be an n-dimensional $(n \geq 2)$ Riemannian manifold and $x \in M$. The *sectional curvature* in x of a 2-plane $\pi(x)$ spanned by an orthonormal basis $X, Y \in T_x M$ is given by $K(X, Y) = Rm(X, Y, X, Y)$ where Rm denotes the Riemannian curvature tensor.

Denote by $K_{\min}(x)$ the minimum of the sectional curvature of a Riemannian manifold (M, g) at a point $x \in M$. Since the unit sphere in $T_x M$ is a compact set, there exists a 2-plane $\pi(x) \subset T_x M$

Submitted on January 5, 2024

such that $K_{\min}(x) = K(\pi(x))$ — the sectional curvature in the direction of $\pi(x) \subset T_xM$. In other words,

$$K_{\min}(x) := \inf_{\pi(x) \subset T_xM} K(\pi(x)).$$

Since (M, g) is a compact manifold, we can define a scalar invariant $K_{\min} := \inf_{x \in M} K(x)$ of (M, g).

In a similar way we can define the maximum of the sectional curvature of (M, g) at a point $x \in M$. Namely, we let $K_{\max}(x) := \sup_{\pi(x) \subset T_xM} K(\pi(x))$.Next, to determine $K_{\max}(x)$ we use the condition $K_{\max} := \sup_{x \in M} K(x)$.

Berger proved in [1] the following “topological sphere theorem”: a compact, simply connected Riemannian manifold (M, g) whose sectional curvatures satisfy the condition $0 < K_{\min} \leq K(x) \leq K_{\max} = 4K_{\min}$ at an arbitrary point $x \in M$, is either homeomorphic to $\mathbb{S}^n$ or isometric to a compact symmetric space of rank one.

On other hands, Brendle and Shoen proved in [2] “the differential sphere theorem”: if a compact, simply connected Riemannian manifold (M, g) is not locally symmetric space and its sectional curvatures satisfy the condition

$$0 \leq K_{\min}(x) \leq K(x) \leq K_{\max}(x) = 4K_{\min}(x)$$

at an arbitrary point $x \in M$, then (M, g) is diffeomorphic to a spherical space form.

Contractions of sectional curvature leads to the *Ricci curvature* Ric. Namely, it can be show that

$$Ric(X) = \sum_{a=2}^{n} K(X, e_a)$$

for given any unit vector $X \in T_xM$, pick an orthonormal basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ for T_xM such that $X = e_1$. Therefore, the *Ricci tensor* Ric can be interpreted as the sum of sectional curvatures of planes spanned by a unit vector X in the tangent space and other elements of an orthonormal basis to which X belongs. In this case, we can obtain the well-known double inequality

$$(n-1)K_{\min}(x) \ \leq Ric(X) \leq (n-1)K_{\max}(x) \tag{1}$$

where $X \in T_xM$ is an arbitrary unit vector at $x \in M$. Since the unit sphere in T_xM at an arbitrary point $x \in M$ is a compact set, there exists $Ric_{\min}(x) \coloneqq \inf_{X \in T_xM} Ric(X)$.

Xu and Gu proved in [3] the following "differentiable sphere theorem": a compact Riemannian manifold whose Ricci curvature and sectional curvatures satisfy the inequality

$$Ric_{\min}(x) > \big((n-1) - 6/5\big)K_{\max}(x) \tag{2}$$

for any unit vector $X \in T_xM$ at an arbitrary point $x \in M$ is diffeomorphic to a spherical space form $\mathbb{S}^n/\Gamma$, where Γ is a finite group of isometries acting freely. In particular, if (M, g) is simply connected, then (M, g) is diffeomorphic to the standard Euclidian n-sphere $\mathbb{S}^n$.

From (1) and (2) we obtain the double inequality

$$(n-1)K_{\max}(x) - 6/5\, K_{\max}(x) < Ric(X) \leq (n-1)K_{\max}(x),$$

where $X \in T_xM$ is an arbitrary unit vector at $x \in M$. At the same time, one can obtain from (1) and (2) that the Ricci curvature $Ric(\cdot) > 0$ at each point $x \in M$. Therefore, the above theorem is called "the differentiable sphere theorem for manifolds with positive Ricci curvature" (see [3]).

2. New version of the Sphere theorem

Since the unit sphere in T_xM at an arbitrary point $x \in M$ is a compact set, there exists $Ric_{\max}(x) \coloneqq \inf_{X \in T_xM} Ric(X)$. Then we, in turn, will be able to prove our "differentiable sphere theorem" for Riemannian manifolds with Ricci curvatures bounded from above.

Theorem. *Let (M, g) be an n-dimensional $(n \geq 3)$ compact Riemannian manifold and Ric be its Ricci tensor satisfying the inequality*

$$Ric_{\max}(x) < nK_{min}(x) \tag{3}$$

at each point $x \in M$. Then (M, g) is diffeomorphic to a spherical space form $\mathbb{S}^n/\Gamma$. In particular, if (M, g) is simply connected, then (M, g) is diffeomorphic to the Euclidian sphere $\mathbb{S}^n$.

Proof. First, from (1) and (3) we obtain the double inequality

$$(n-1)K_{\min}(x) \leq Ric(X) < (n-1)K_{min}(x) + K_{min}(x)$$

where $X \in T_x M$ is an arbitrary unit vector at $x \in M$. At the same time, one can obtain from (1) and (3) that the sectional curvature $K(\cdot) > 0$ at each point $x \in M$.

Second, we recall the definition of *the curvature operator of the second kind* (see [4]). Namely, the Riemann curvature tensor Rm induces an algebraic curvature operator $\overset{\circ}{R}: S_0^2 M \to S_0^2 M$ for the space $S_0^2 M$ of trace-free symmetric two-tensor fields (see, for example, [4]). The symmetries of Rm imply that $\overset{\circ}{R}$ is a selfadjoint operator, with respect to the point-wise inner product on $S_0^2 M$. In this case, $\overset{\circ}{R}$ is called as *the curvature operator of the second kind* (see [4]). Moreover, the map $\overset{\circ}{R}: S_0^2 M \to S_0^2 M$ induces a bilinear form $\Phi: S_0^2 M \times S_0^2 M \to \mathbb{R}$, which is defined by the equlity $\Phi(\varphi) = g\left(\overset{\circ}{R}(\varphi), \varphi\right)$ for an arbitrary $\varphi \in S_0^2 M$. Accordingly, we will say that $\overset{\circ}{R} > 0$ if the eigenvalues of $\overset{\circ}{R}$ as a bilinear form on $S_0^2 M$ are positive.

Thirdly, we will prove our theorem. The bilinear form Φ satisfies the inequality (see [5])

$$\Phi(\varphi) \geq nK_{\min}(x)\|\varphi\|^2 - R_{ij}\varphi^{ik}\varphi_k^j. \tag{4}$$

for the local components φ^{ik} and $\varphi_k^j$of an arbitrary $\varphi \in S_0^2(T_x M)$ at each point $x \in M$. In addition, the following inequality $R_{ij}\varphi^{ik}\varphi_k^j \leq Ric_{\max}(x)\|\varphi\|^2$ holds. Then from (4) we deduce the inequality

$$\Phi(\varphi) \geq \left(nK_{\min}(x) - Ric_{\max}(x)\right)\|\varphi\|^2. \tag{5}$$

In this case, we conclude from (5) that $\overset{\circ}{R} > 0$ if $Ric_{\max}(x) < n\, K_{\min}(x)$ at each point $x \in M$. At the same time, we know from [3] that if (M, g) be an n-dimensional ($n \geq 3$) compact Riemannian manifold such that $\overset{\circ}{R}$ is strictly positive, then M is diffeomorphic to a spherical space form $\mathbb{S}^n/\Gamma$. In this case, if (M, g) is simply connected, then (M, g) is diffeomorphic to the Euclidian n-sphere $\mathbb{S}^n$. Therefore, our theorem holds.

References

1. *Berger, M.:* Sur quelques varieties riemaniennes suffisamment pincées. Bull. Soc. Math. France, 88, 57—71 (1960).

2. *Brendle, S., Schoen, R. M.:* Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures. Acta Math., 200, 1—13 (2008).

3. *Xu, H.-W., Gu, J.-Ru.:* The differentiable sphere theorem for manifolds with positive Ricci curvature. Proc. AMS, **140**:3, 1011—1021 (2012).

4. *Cao, X., Gursky, M. J., Tran, H.:* Curvature of the second kind and a conjecture of Nishikawa. Commentarii Mathematici Helvetici, **98**:1, 195—216 (2023).

5. *Rovenski, V., Stepanov, S., Tsyganok, I.:* On the Betti and Tachibana numbers of compact Einstein manifolds. Mathematics, 7, 1210 (2019).

For citation: Stepanov, S. E., Tsyganok, I. I. On the differentiable sphere theorem for manifolds with Ricci curvatures bounded from above. DGMF, 55 (1), 68—73 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-7.

УДК 514.764

С. Е. Степанов, И. И. Цыганок
Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия
s.e.stepanov@mail.ru, i.i.tsyganok@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-7

Теоремы о дифференцируемых сферах для многообразий с ограниченными сверху кривизнами Риччи

Поступила в редакцию 05.01.2024 г.

В представленной статье мы доказываем, что если (M, g) — это -мерное $(n \geq 3)$ компактное риманово многообразие и если $Ric_{\max}(x) < nK_{\min}(x)$, где $K_{\min}(x) = \inf_{\pi \subset T_xM} K(\pi)$, $Ric_{\max}(x) =$

$= Ric_{X \in T_x M} Ric(X)$, $K(\cdot)$ и $Ric(\cdot)$ — секционная кривизна и кривизна Риччи многообразия (M, g), то оно будет диффеоморфным сферической пространственной форме $\mathbb{S}^n/\Gamma$. В частности, если (M, g) односвязное, то оно диффеоморфно евклидовой сфере $\mathbb{S}^n$.

Ключевые слова: риманово многообразие, секционная кривизна, кривизна Риччи, теорема о сфере, сферическая пространственная форма

Список литературы

1. *Berger M.* Sur quelques varietiesr iemaniennes suffisamment pincées // Bull. Soc. Math. France. 1960. Vol. 88. P. 57—71.
2. *Brendle S., Schoen R.M.* Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures // Acta Math. 2008. Vol. 200. P. 1—13.
3. *Xu H.-W., Gu J.-R.* The differentiable sphere theorem for manifolds with positive Ricci curvature // Proc. AMS. 2012. Vol. 140, №3. P. 1011—1021.
4. *Cao X., Gursky M.J., Tran H.* Curvature of the second kind and a conjecture of Nishikawa // Commentarii Mathematici Helvetici. 2023. Vol. 98, №1. P. 195—216.
5. *Rovenski V., Stepanov S., Tsyganok I.* On the Betti and Tachibana numbers of compact Einstein manifolds // Mathematics. 2019. Vol. 7. Art. №1210.

Для цитирования: *Степанов С.Е., Цыганок И.И.* Теоремы о дифференцируемых сферах для многообразий с ограниченными сверху кривизнами Риччи // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 68—73. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-7.

УДК 514.76

А.Я. Султанов , О.А. Монахова , О.В. Болотникова
Пензенский государственный университет, Россия
sultanovaya@rambler.ru, oxmonakh@mail.ru, olgavs3011@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-8

О дифференцированиях линейных алгебр специального типа

Изучаются алгебры Ли дифференцирований линейной алгебры, операция умножения в которой определяется с помощью линейной формы и двух фиксированных элементов основного поля. Дано определение дифференцирования линейной алгебры, получена система линейных однородных уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного дифференцирования. Построено вложение алгебры Ли дифференцирований в алгебру Ли квадратных матриц порядка n над полем $\boldsymbol{P}$. Это позволило дать оценку размерности алгебры Ли дифференцирований сверху. Доказано, что размерность алгебры дифференцирований изучаемых алгебр равна $n^2 - n$, где n — размерность алгебры. Далее приводится результат о максимальной размерности алгебры Ли дифференцирований линейной алгебры, обладающей единицей. С опорой на приведенные факты доказано, что изучаемые алгебры не могут иметь единицы.

Ключевые слова: линейная алгебра над полем, линейная форма, дифференцирование линейной алгебры, алгебра Ли дифференцирований, алгебра Ли матриц, единица линейной алгебры

Поступила в редакцию 20.04.2024 г.

1. Основные определения и понятия

Основные понятия этого пункта приводятся с использованием источников [1—6].

Линейная алгебра $\boldsymbol{A}=A(\theta, \alpha, \beta)$ определяется как векторное пространство V над полем $\boldsymbol{P}$, на котором операция умножения задается формулой

$$ab=\alpha\theta(b)a+\beta\theta(a)b \qquad (1)$$

для любых a, b из векторного пространства V. В этом равенстве θ — ненулевая линейная форма, заданная на V со значениями в поле $\boldsymbol{P}$, α и β — фиксированные скаляры поля $\boldsymbol{P}$, не равные нулю одновременно. Легко установить, что введенная операция умножения линейна по каждому аргументу. *Дифференцированием линейной алгебры* $\boldsymbol{A}$ называется линейное отображение D: $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$, удовлетворяющее условию

$$D(ab)=D(a)b+aD(b).$$

Множество $Der\ \boldsymbol{A}$ всех дифференцирований линейной алгебры $\boldsymbol{A}$ образует алгебру Ли относительно операции коммутирования [,], определяемой условием

$$[D_1, D_2]=D_1{\circ}D_2-D_2{\circ}D_1,$$

где символ $\circ$ означает композицию линейных отображений.

Будем считать, что алгебра $\boldsymbol{A}$ конечномерна, то есть $\dim\boldsymbol{A}=n$, характеристика поля $\boldsymbol{P}$ отлична от 2. Тогда в силу первого условия можно выбрать произвольный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Для произвольного дифференцирования D найдем разложения образов базисных элементов $D(e_i)$ по элементам выбранного базиса:

$D(e_i)=x_i^k e_k$ (по индексу k ведется суммирование от 1 до n).

Набор скаляров x_i^k однозначно определяет отображение D. Матрица $M(D)=\|x_i^k\|$, где нижний индекс i указывает номер столбца, а верхний индекс k — номер строки, называется матрицей дифференцирования D относительно базиса $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Как известно, пространство $Mat(n, \boldsymbol{P})$ квадратных матриц над полем $\boldsymbol{P}$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования $[A, B] = AB - BA$ для матриц $A, B \in Mat(n, \boldsymbol{P})$. Можно доказать, что отображение h: $Der\,\boldsymbol{A} \to Mat(n, \boldsymbol{P})$, заданное условием $h(D) = M(D)$, является изоморфизмом, что влечет соотношение $\dim(Der\,\boldsymbol{A}) \leq n^2$.

2. Размерность алгебры *Der A* дифференцирований алгебры *A*

Пусть D — произвольное дифференцирование алгебры $\boldsymbol{A}$. Тогда, подействовав этим дифференцированием на левую и правую части равенства (1), получим

$$D(a)b + aD(b) = \alpha\theta(b)D(a) + \beta\theta(a)D(b).$$

В левой части полученного равенства вычислим произведения по формуле (1). Тогда

$$\alpha\theta(b)D(a) + \beta\theta(D(a))b + \alpha\theta(D(b))a + \beta\theta(a)D(b) =$$
$$= \alpha\theta(b)D(a) + \beta\theta(a)D(b).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha\theta(D(b))a + \beta\theta(D(a))b = 0.$$

Подставив вместо элементов a и b базисные элементы алгебры $\boldsymbol{A}$, получим

$$\alpha\theta(D(e_j))e_i + \beta\theta(D(e_i))e_j = 0.$$

Учитывая, что $D(e_i) = x_i^k e_k$, из последнего соотношения найдем

$$\alpha x_j^k \theta_k e_i + \beta x_i^k \theta_k e_j = 0,$$

где $\theta_k = \theta(e_k)$. Считая, что единица алгебры $\boldsymbol{A}$ отождествляется с единицей поля $\boldsymbol{P}$, положим, что $e_i = \delta_i^h e_k$, где δ_i^h — символ Кронекера:

$$\delta_i^h = \begin{cases} 1, \text{ если } i = h; \\ 0, \text{ если } i \neq h. \end{cases}$$

Здесь 1 — единица поля $\boldsymbol{P}$. Тогда получим следующие равенства:

$$\alpha\, x_j^k \theta_k \delta_i^h + \beta\, x_i^k \theta_k \delta_j^h = 0. \qquad (2)$$

В равенствах (2) выполним операцию свертки: сначала по индексам h, i, затем по индексам h, j. Тогда

$$(\alpha n + \beta) x_i^k \theta_k = 0 \text{ и}$$

$$(\alpha + \beta n) x_i^k \theta_k = 0\ .$$

В этих равенствах $\alpha n + \beta$ или $\alpha + \beta n$ не всегда одновременно равны нулю. В противном случае будем иметь

$$\alpha n + \beta = 0,$$

$$\alpha + \beta n = 0.$$

Решая данную систему и учитывая, что $\begin{vmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = n^2 + 1 \neq 0$, получим $\alpha = \beta = 0$, чего быть не может по определению алгебры $\boldsymbol{A}$.

Отсюда следует, что размерность пространства решений системы линейных однородных уравнений (2), задающей дифференцирования алгебры $\boldsymbol{A}$, равна $n^2 - n$. Действительно, система (2) равносильна системе $x_i^k \theta_k = 0$. Поскольку θ — ненулевая линейная форма, то хотя бы одна компонента θ_k отлична от нуля. Поэтому система линейных уравнений $x_i^k \theta_k = 0$ имеет ранг, равный n. Таким образом,

$$\dim_P(Der\, \boldsymbol{A}) = n^2 - n.$$

3. Исследование существования единицы алгебры *A* с умножением, определенным равенством (1)

Как известно, элемент δ алгебры $\boldsymbol{A}$ называется единицей (единичным элементом) алгебры $\boldsymbol{A}$, если выполняются условия $x\delta = \delta x = x$ для любого элемента $x \in \boldsymbol{A}$.

В работе [7] доказано, что если алгебра $\boldsymbol{A}$ размерности n обладает единицей, то

$$\dim(Der\,\boldsymbol{A}) \le (n-1)^2$$

при условии, что характеристика поля $\boldsymbol{P}$ не равна 2.

На основании этого результата и результата, полученного в пункте 2, докажем, что ни в одной алгебре $A(\theta, \alpha, \beta)$ не существует единицы.

Действительно, если допустим существование единицы в алгебре $A(\theta, \alpha, \beta)$, то в силу того, что $\dim_P(Der\,\boldsymbol{A}) \le (n-1)^2$ и с другой стороны $\dim_P(Der\,\boldsymbol{A}) = n^2 - n$, получим $n^2 - n \le (n-1)^2$. Но $n^2 - n - (n-1)^2 = n-1 > 0$ при $n \ge 2$. То есть равенство размерностей не достигается. Это противоречие и доказывает, что в алгебре $A(\theta, \alpha, \beta)$ нет единицы.

Список литературы

1. *Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1978.
2. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру : в 3 ч. М., 2000.
3. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М., 1970.
4. *Мельников О.В., Ремесленников В.А., Романьков В.А. и др.* Общая алгебра. Т. 1. М., 1990.
5. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М., 1986.
6. *Султанов А.Я.* О дифференцированиях линейных алгебр // Движения в обобщенных пространствах : межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 2005. С. 111—136.
7. *Султанов А.Я., Глебова М.В., Султанова Г.А.* Дифференцирование линейных алгебр с единицей над полем // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 54—62.

Для цитирования: *Султанов А.Я., Монахова О.А., Болотникова О.В.* О дифференцированиях линейных алгебр специального типа // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 74—80. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-8.

MSC 2010:16P10

A. Ya. Sultanov, *O. A. Monakhova*, *O. V. Bolotnikova*
Penza State University
37, Lermontova St., Penza, 440026, Russia
sultanovaya@rambler.ru, oxmonakh@mail.ru, olgavs3011@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-8

On derivations of linear algebras of a special type

Submitted on April 20, 2024

In this work, Lie algebras of differentiation of linear algebra, the operation of multiplication in which is defined using a linear form and two fixed elements of the main field are studied. In the first part of the work, a definition of differentiation of linear algebra is given, a system of linear homogeneous equations is obtained, which is satisfied by the components of arbitrary differentiation. An embedding of the Lie algebra of differentiations into the Lie algebra of square matrices of order n over the field $\boldsymbol{P}$ is constructed. This made it possible to give an upper bound for the dimension of the Lie algebra of derivations. It has been proven that the dimension of the algebra of differentiation of the algebras under study is equal to n^2-n, where n is the dimension of the algebra. Next we give a result on the maximum dimension of the Lie algebra of derivations of a linear algebra with identity. Based on the above facts, it is proven that the algebras under study cannot have a unit.

Keywords: linear algebra over a field, linear form, differentiation of linear algebra, Lie algebra of differentiation, Lie algebra of matrices, unit of linear algebra

References

1. *Zhevlakov, K. A., Slinko A. M., Shestakov, I. P., Shirshov, A. I.:* Rings close to associative. Moscow (1978).
2. *Kostrikin, A. I.:* Introduction to algebra, parts 1—3. Moscow (2000).
3. *Maltsev, A. I.:* Basics of linear algebra. Moscow (1970).

4. *Melnikov, O. V., Remeslennikov, V. A., Romankov, V. A. et al.:* General algebra, 1. Moscow (1990).

5. *Pierce, R.:* Associative algebras. Moscow (1986).

6. *Sultanov, A. Ya.:* On differentiations of linear algebras. Movements in generalized spaces. Interuniversity collection of scientific papers. Penza, 111—136 (2005).

7. *Sultanov, A. Ya., Glebova, M. V., Sultanova, G. A.:* Differentiation of linear algebras with a unit over a field. DGMF, **54**:2, 54—62 (2023).

For citation: Sultanov, A. Ya., Monakhova, O. A., Bolotnikova, O. V. On derivations of linear algebras of a special type. DGMF, 55 (1), 74—80 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-8.

УДК 514.75

М. А. Чешкова
Алтайский государственный университет, Барнаул
cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-9

Преобразование Бианки катушки Миндинга

Исследуется преобразование Бианки для поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера (поверхность Бельтрами). К поверхностям постоянной отрицательной гауссовой кривизны относятся также поверхность Куэна и поверхность Дини. Изучение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны (псевдосферических поверхностей) имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с теорией сетей, теорией солитонов, нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона. Уравнение sin-Гордона играет важную роль в современной физике. Преобразования Бианки позволяют получить по данной псевдосферической поверхности новые псевдосферические поверхности.

С использованием математического пакета строятся катушка Миндинга и ее преобразования Бианки.

Ключевые слова: гауссова кривизна, поверхность вращения, катушка Миндинга, преобразование Бианки

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси. Обозначим через $\mathrm{k} = (0, 0, 1)$ орт оси, а через $e(v) =$

Поступила в редакцию 12.02.2024 г.

$= (\cos(v), \sin(v), 0)$ — радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k\ ,$$

где f — дифференцируемая функция, u, v — параметры.

Обозначим через n орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f'e - k}{\sqrt{(f')^2 + 1}}.$$

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}}, \qquad k_2 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2 + 1}\right)^3}.$$

Гауссова кривизна $K = k_1 k_2$ равна

$$K = \frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}} \frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2 + 1}\right)^3}.$$

Требуем $K = const$, получим решение

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{Ku^2 - (c - 1)}{c - Ku^2}}\, du,$$

где c — произвольная константа.

Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга $0 < c < 1$, катушка Миндинга $c < 0$, псевдосфера $c = 0$ [1, с. 100], [2, с. 175].

Для $K = -1$, следуя Миндингу, для катушки

$$c = -a^2, \quad u = ach(t), \quad a = 1.$$

Имеем:

$$f(t) = \int \sqrt{1 - sh^2(t)}\, dt,$$

$$f(t) = 2\big(\mathrm{Elliptic}F(sh(t), i) - \mathrm{Elliptic}E(sh(t), i)\big) + C,$$

$$C = const,$$

где $\mathrm{Elliptic}F(sh(t), i)$, $\mathrm{Elliptic}E(sh(t), i)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

При С = 0 имеем

$$f(t) = 2(\mathrm{Elliptic}F(sh(t), i) - \mathrm{Elliptic}E(sh(t), i)).$$

Рассмотрим катушку Миндинга. Имеем

$$t \in \left[-\ln\left(1+\sqrt{2}\right), \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right], v \in [-\pi, \pi].$$

Положим $f = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ и определим еще две секции катушки Миндинга:

$$M1: r(t, v) = ch(t)e(v) + (f(t) + 2m)k,$$

$$M2: r(t, v) = ch(t)e(v) + (f(t) + 4m)k.$$

Построим три секции катушки Миндинга (рис. 1).

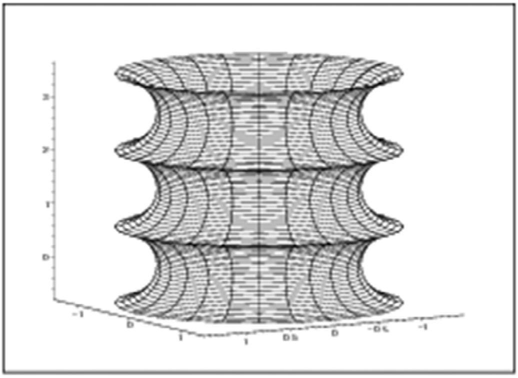

Рис. 1. Три секции катушки Миндинга

Определим метрический тензор g_{ij} и символы Кристоффеля Γ_{ij}^{k}.

Имеем

$$f(t) = \int \sqrt{1 - sh^2(t)}dt,$$

$$r = ch(t)e(v) + f(t)k, \; r_1 = sh(t)e(v) + \sqrt{1 - sh^2(t)}k,$$

$$r_2 = ch(t)\acute{e}(v), \; g_{11} = 1, \; g_{12} = 0, \; g_{22} = ch^2(t).$$

Рассмотрим две гладкие поверхности $M, \bar{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$. Обозначим через n орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид $T_{f(o)}\bar{M} = \{f(p), n, V_p\}$. Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность $\bar{M}$ имеет ту же кривизну.

Обозначим через r радиус-вектор поверхности M, а через R — радиус-вектор поверхности $\bar{M}$. Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение $M \to \bar{M}$ [3, с. 489].

Имеем $R = r - V,\ V = V^s r_s$.

Из условия $< R_{i,}[n, v] >= 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n.$$

Поскольку $< \mathrm{V}, \mathrm{V} >= 1, < \partial_i V, V >= 0$, то

$$\omega(r_i) =< r_i, V >,\ \ \nabla_i \mathrm{V} = r_i - \omega(r_i)V.$$

Имеем

$$\begin{gathered} \nabla_1 V^1 = 1 - g_{11}(V^1)^2, \quad \nabla_1 V^2 = -g_{11}V^1V^2, \\ \nabla_2 V^1 = -g_{22}V^1V^2, \quad \nabla_2 V^2 = 1 - g_{22}(V^2)^2. \end{gathered} \tag{1}$$

Система (1) имеет решение

$$V^1(t, v) = \frac{e^{2t}A1(v) + A2(v)}{e^{2t}A1(v) - A2(v)},$$

$$V^2(t, v) = 4\frac{e^{2v}C1 + C2}{(e^t A1(v) - e^{-t}A2(v))(e^t + e^{-t})},$$

$$A1(v) = 2e^v + e^{2v}C1 - C2,$$

$$A2(v) = 2e^v - e^{2v}C1 + C2,$$
$$C1, C2 - const.$$

Потребуем, чтобы $< V, V >= 1$. Тогда $C1C2 + 1 = 0$. Введем обозначение $c_1 = {}^1\!/_{C1}$. Имеем

$$V^1(t, v) = \frac{e^{2t}(e^v + c_1)^2 - (e^v - c_1)^2}{e^{2t}(e^v + c_1)^2 + (e^v - c_1)^2},$$

$$V^2(t, v) = \frac{4(e^{2v} - c_1)}{(e^{2t}(e^v + c_1)^2 + (e^v - c_1)^2)(e^t + e^{-t})}.$$

Рассмотрим уравнение поверхности $\bar{M}$

$$R = \big(ch(t) - V1(t, v)sh(t)\big)e(v) - V2(t, v)ch(t)e\acute{(}v) + 2\big(\mathrm{Elliptic}F(sh(t), i) - \mathrm{Elliptic}E(sh(t), i)\big)k.$$

Построим эту поверхность, полагая $c_1 = e^2$ (рис. 2).

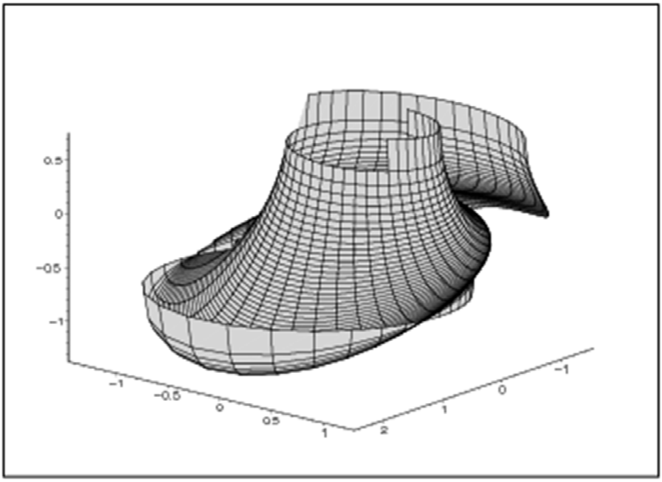

Рис. 2. Преобразование Бианки катушки, $c_1 = e^2$

Построим также поверхность, полагая $c_1 = e$ (рис. 3).

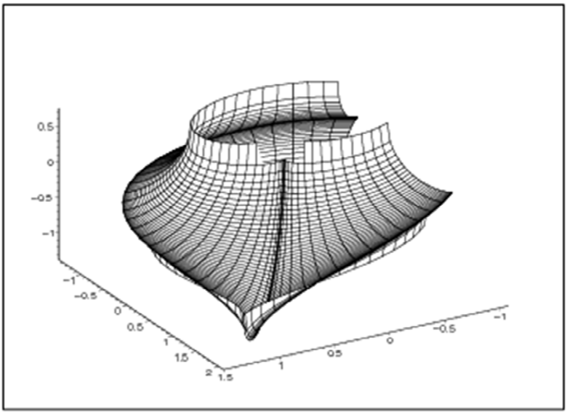

Рис. 3. Преобразование Бианки катушки, $c_1 = e$

Рассмотрим случай при $c_1 = 0$ и построим поверхность (рис. 4).

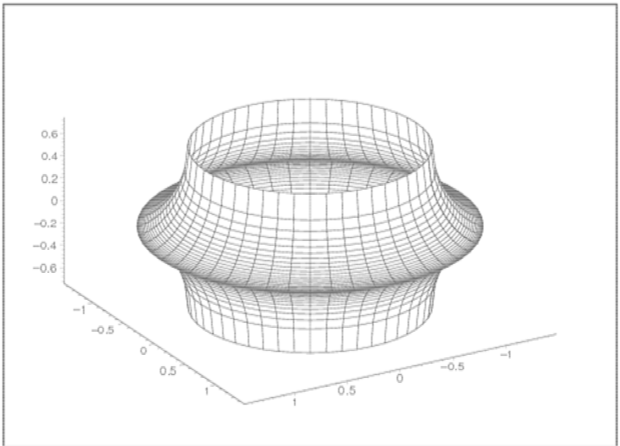

Рис. 4. Преобразование Бианки катушки, $c_1 = 0$

Замечаем, что для этого случая преобразование Бианки катушки есть катушка.

Список литературы

1. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. М. ; Л., 1948.
2. *Норден А.П.* Об основаниях геометрии. М., 1956.
3. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.

Для цитирования: *Чешкова М.А.* Преобразование Бианки катушки Миндинга // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 81—88. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-9.

MSC 2010: 53A05

M.A. Cheshkova
Altai State University
61 Pr. Lenina, Barnaul, 656049, Russia
cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-9

Bianchi transformation of the Minding coil

Submitted on February 12, 2024

The work is devoted to the study of the Bianchi transform for surfaces of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Mining top, the Minding coil, the pseudosphere (Beltrami surface). Surfaces of constant negative Gaussian curvature also include Kuens surface and the Dinis surface. The study of surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospherical surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. The connection of the geometric characteristics of pseudospherical surfaces with the theory of networks, with the theory of solitons, with non-linear differential equations and sin-Gordon equations is established. The sin-Gordon equation plays an important role in modern physics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudospherical surface. The Bianchi transform for the Minding coil is constructed. Using a mathematical package, the Minding coil and its Bianchi transform are constructed.

Keywords: Gaussian curvature, surface of revolution, the Minding coil, Bianchi transform

References

1. *Kagan, V. F.:* Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition, 2. Moscow, Leningrad (1948).

2. *Norden, A. P.:* On the foundations of geometry. Moscow (1956).

3. *Shulikovsky, V. I.:* Classical differential geometry in tensor exposition. Moscow (1963).

For citation: Cheshkova, M. A. Bianchi transformation of the Minding coil. DGMF, 55 (1), 81—88 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-9.

Published since 1970.
Indexing: MathSciNet (American Mathematical Society), ZBMATH — The database Zentralblatt MATH.
Frequency — twice a year (from 2023)

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2024

№ 55 (1)

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 27.08.2024 г.
Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 5,6
Тираж 50 экз. Заказ 80

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14