

ISSN 0321-4796 (Print)
ISSN 2782-3229 (Online)

БФУ БАЛТИЙСКИЙ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

IKBFU IMMANUEL KANT
BALTIC FEDERAL
UNIVERSITY

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY
OF MANIFOLDS OF FIGURES

2026

Том 57 (1)
Vol.

Издательство Immanuel Kant
Балтийского федерального Балтийского федерального
университета им. Иммануила Канта Press
2026

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2026. — Т. 57 (1). — 103 с.

Редакционная коллегия

О. О. Белова, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта, **гл. редактор** (Калининград, Россия); *К. В. Полякова*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта, **отв. секретарь** (Калининград, Россия); *Ю. И. Шевченко*, канд. физ.-мат. наук, проф., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия); *В. Балан*, д-р, проф., Политехнический университет Бухареста (Бухарест, Румыния); *В. В. Балащенко*, канд. физ.-мат. наук, проф., Белорусский государственный университет (Минск, Беларусь); *Ш. Бачо*, д-р, проф., Университет Дебрецена (Дебрецен, Венгрия); *Р. Бешимов*, канд. физ.-мат. наук, проф., Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека (Ташкент, Узбекистан); *Т. Бокелавадзе*, канд. физ.-мат. наук, проф., Государственный университет Акакия Церетели (Кутаиси, Грузия); *Л. Велимирович*, д-р, проф., Нишский университет (Ниш, Сербия); *И. Гинтерлейтнер*, проф., Технический университет в Брно (Брно, Чехия); *Б. Кирик Рац*, проф., Университет Мармара (Стамбул, Турция); *М. В. Кретов*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия); *А. В. Кулешов*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия); *Й. Микеи*, проф., Оломоуцкий университета им. Франтишека Палацкого (Оломоуц, Чехия); *В. А. Мирзоян*, д-р физ.-мат. наук, проф., Государственный инженерный университет Армении (Ереван, Армения); *П. Т. Надь*, д-р физ.-мат. наук, проф., Обудский университет (Будапешт, Венгрия); *В. Ю. Ровенский*, д-р физ.-мат. наук, проф., Хайфский университет (Хайфа, Израиль); *Л. Л. Сабина*, канд. физ.-мат. наук, проф., Автономный университет Эстадо де Морелос (Куэрнавака, Мексика); *С. Е. Степанов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Финансовый университет при Правительстве РФ (Москва, Россия); *Дж. Фальконе*, проф., Палермский университет (Палермо, Италия); *А. Фигула*, проф., Университет Дебрецена (Дебрецен, Венгрия); *Г. С. Холл*, д-р, проф., Университет Абердина (Абердин, Великобритания); *А. М. Шелехов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Московский педагогический государственный университет (Москва, Россия)

Выходит с 1970 года.

Входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.

Изданию присвоена **первая категория (К1) Перечня ВАК**.

Учредитель

Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Адрес редакции и издателя

236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Адрес типографии

236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6



Дата выхода в свет 27.07.2026 г.

© Оформление, БФУ им. И. Канта, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Гусева Н. И., Микеш Й.</i> Профессор Л. Е. Евтушик — ученый и педагог	5
<i>Банару М. Б., Банару Г. А.</i> О геодезических точках уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав.....	28
<i>Di Bartolo A., La Rosa G.</i> Flag manifolds without one codimensional strata	39
<i>Климентов Д. С.</i> О построении второй основной формы поверхности почти ограниченного искривления положительной кривизны	52
<i>Кретов М. В., Кретова Е. М.</i> Об одном подклассе комплексов эллипсоидов, допускающем безынтегральное представление	64
<i>Stepanov S. E., Tsyganok I. I.</i> On harmonic sections of tangent bundle equipped with the Sasaki metric.....	76
<i>Субботин В. И.</i> О несоставных RR -многогранниках с условными ребрами.....	81
<i>Шевченко Ю. И., Вялова А. В.</i> Индуцированные связности двух типов на распределении 2-го рода.....	93

CONTENTS

<i>Guseva N. I., Mikes J.</i> Professor L. E. Evtushik — a scientist and a teacher	5
<i>Banaru M. B., Banaru G. A.</i> On geodesic points of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra.....	28
<i>Di Bartolo A., La Rosa G.</i> Flag manifolds without one codimensional strata	39
<i>Klimentov D. S.</i> On construction of the second basic shape of the surface of almost limited curvature of positive curvature	52
<i>Kretov M. V., Kretova E. M.</i> On a subclass of ellipsoid complexes that admits a non-integral representation	64
<i>Stepanov S. E., Tsyganok I. I.</i> On harmonic sections of tangent bundle equipped with the Sasaki metric.....	76
<i>Subbotin V. I.</i> On non-composite RR -polytopes with conditional edges	81
<i>Shevchenko Yu. I., Vyalova A. V.</i> Induced connections of two types on a distribution of the second kind	93

УДК 514.76, 51(092)

Н. И. Гусева¹, Й. Микеш² 

¹ Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия,

² Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

¹ ngus12@mail.ru, ² josef.mikes@upol.cz

¹ SPIN-код: 1093-1675, AuthorID: 4620

² Scopus Author ID: 6505921195

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-1

Профессор Л. Е. Евтушик — ученый и педагог

Статья посвящена выдающемуся ученому-геометру Леониду Евгеньевичу Евтушику, который являлся членом редакционной коллегии данного журнала на протяжении более чем двух десятилетий (1990—2013).

Изложена биография и основные этапы научной работы Л. Е. Евтушика. Его научные интересы включали проблемы современной геометрии, теорию связности, теорию дифференциальных уравнений и лагранжианов высших порядков.

В Московском государственном университете Л. Е. Евтушик читал следующие курсы: «Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Геометрические структуры анализа на многообразиях», «Инвариантные методы в геометрии и анализе», «Лагранжианы и гамильтоновы системы высшего порядка», «Теория связностей», «Структуры высших порядков».

Л. Е. Евтушик подготовил 14 кандидатов наук. Он являлся автором 66 научных работ.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, метод Картана — Лаптева, дифференциально-геометрические структуры, многообразия

Поступила в редакцию 20.03.2026 г.

© Гусева Н. И., Микеш Й., 2026

25 мая 2026 года исполняется 95 лет со дня рождения известного российского геометра, заслуженного профессора МГУ Леонида Евгеньевича Евтушика — дорогого человека



для многих людей, которые связали свою жизнь с геометрией.

В его жизни, как в капле воды, отразилась непростая, но во многом славная история нашей страны. Леонид Евгеньевич родился в городке Прилуки — районном центре Черниговской области Украинской ССР. В 1937 году его отец, будучи заместителем министра правительства Украины, по ложному доносу был обвинен и расстрелян, а мать как жена «врага

народа» сослана в степи Казахстана, где вплоть до 1954 года, до реабилитации, когда были сняты все обвинения, отбывала наказание.

Маленький Леонид благодаря стараниям маминой сестры не был помещен в детский дом и не лишился фамилии отца, что часто практиковалось в те годы в подобных ситуациях, а был перевезен в свои родные Прилуки. В годы войны он попал в эвакуацию в Куйбышев. При возвращении из эвакуации на небольшой станции Конотоп (Украина) в результате случайного взрыва брошенного без присмотра боеприпаса 13-летний Леонид получил ранения, после которых остался без левой руки и глаза, а также обширное ранение живота.

В обычной школе своего родного городка Прилуки по совету сельского учителя он начал свое первое знакомство с неевклидовой геометрией — геометрией Лобачевского. Эта теория произвела такое сильное впечатление на юного Леонида

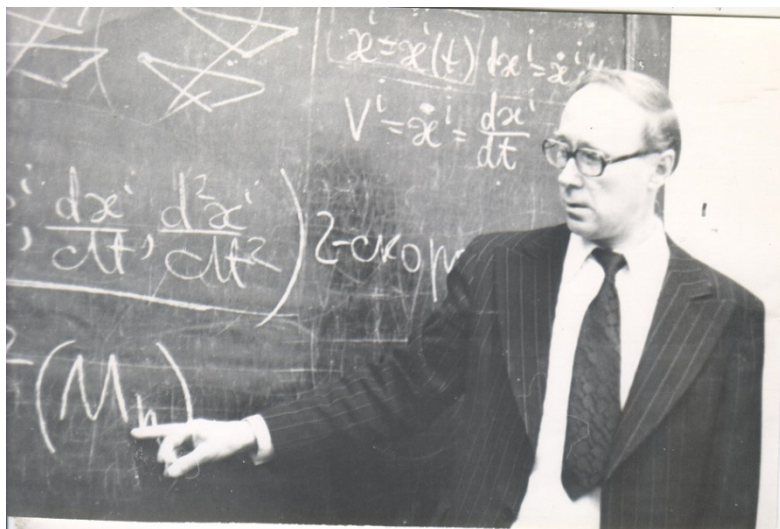
своей оригинальностью и красотой, что определила его дальнейший жизненный и научный путь. По окончании школы в 1949 году он блестяще сдает экзамены на механико-математический факультет Московского государственного университета и всю свою дальнейшую жизнь связывает с этим факультетом.

МГУ им. М.В. Ломоносова — самый прославленный вуз нашей страны. В те годы в нем были сосредоточены лучшие умы передовой математической мысли. Среди преподавателей Леонида Евгеньевича Евтушика были такие выдающиеся геометры XX века, как Сергей Павлович Фиников, Пётр Константинович Рашевский, Герман Фёдорович Лаптев и многие другие. Их эрудиция и непререкаемый авторитет повлияли на зарождение и развитие интереса Леонида Евгеньевича к тем разделам геометрии, в которые он сам в дальнейшем внесет большой вклад. Его первым успехом в этом направлении стала защита дипломной работы (под руководством Германа Фёдоровича Лаптева) о геометрии двойного интеграла, которая была рекомендована к публикации и опубликована (*Евтушик Л.Е. К геометрии двойного интеграла // Математический сборник. 1955. Т. 37 (79), вып. 1. С. 197—208*).

В 1954 году, с отличием закончив механико-математический факультет, он опять подвергается суровым жизненным испытаниям. В очередной анкете (как он сам говорил, «поддавшись пропаганде»), он указывает обстоятельства гибели отца, и это лишает его шансов на блестящие перспективы. Несмотря на красный диплом и первые научные успехи, один из лучших студентов механико-математического факультета МГУ получает распределение (обязательная отработка в течение трех лет) обычным школьным учителем в школу Оренбургской железной дороги. Такое суровое и несправедливое было время.

И только благодаря хлопотам Сергея Сергеевича Бюшгенса удается получить место ассистента на кафедре высшей ма-

тематики в Московском институте инженеров водного хозяйства и добиться открепления в МПС. Параллельно с этим Леонид Евгеньевич зачислен в заочную аспирантуру по кафедре дифференциальной геометрии МГУ под руководством Германа Федоровича Лаптева.



Л. Е. Евтушик

В 1957 году стараниями Германа Федоровича Лаптева и Сергея Павловича Финикова Леонид Евгеньевич становится ассистентом кафедры дифференциальной геометрии механико-математического факультета МГУ. Вся его дальнейшая жизнь непрерывно связана с родным факультетом (кафедрой дифференциальной геометрии, затем кафедрой математического анализа (1990—2013)). Здесь он прошел весь путь от ассистента до Заслуженного профессора МГУ, здесь в полной мере формируется и раскрывается его талант как ученого-геометра и педагога.



Л. Е. Евтушик и В. А. Садовнический

Предложенное научным руководителем Германом Федоровичем Лаптевым направление — исследование дифференциально-геометрических структур высших порядков на гладких многообразиях — определило дальнейшие научные интересы Л. Е. Евтушика. В 1961 году им успешно была защищена кандидатская диссертация на тему «Геометрия интеграла в пространстве элементов второго порядка», в 1980 году — докторская диссертация «Теория нелинейных связностей и геометрия некоторых структур высших порядков».

Надо отметить, что к тому периоду, когда Леонид Евгеньевич поступил в университет, в геометрическом мире происходили важные события. Благодаря личному знакомству, научным контактам и прямому общению известного российского геометра Сергея Павловича Финикова, заведующего кафедрой дифференциальной геометрии механико-математического факультета МГУ, с выдающимся французским геометром Эли

Картаном, создавшим аппарат внешнего дифференциального исчисления, рождается идея создания нового инвариантного метода исследования геометрических объектов — метода подвижного репера.



Ю. И. Шинкунас, Б. Л. Лаптев, В. И. Близникас, В. С. Малаховский, Л. Е. Евтушик, А. П. Широков — участники 4-й Прибалтийской геометрической конференции (Друскининкай, 1978)

Решающую роль в развитии и становлении метода сыграла деятельность легендарного, старейшего в МГУ геометрического научно-исследовательского семинара по классической дифференциальной геометрии под руководством Сергея Павловича Финикова. В работе семинара активное участие принимали замечательные геометры Москвы — С. В. Бахвалов, С. Д. Россинский, С. С. Бюшгенс, а также более молодые — А. М. Васильев, М. А. Акивис, Т. А. Шульман и др. Семинар посещали ученые со всех концов страны и зарубежные гео-

метры. Это была настоящая кузница научных кадров в области дифференциальной геометрии. Здесь объединялись традиционные методы исследования, берущие свое начало еще с работ Эли Картана, и современные абстрактные подходы к изучению гладких многообразий и расслоенных пространств. Семинар стал главной во всем мире лабораторией по развитию, использованию, а также популяризации идей Эли Картана.

Наиболее заметный вклад в развитие метода внес Герман Федорович Лаптев. Именно им был создан общий универсальный инвариантный теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований, известный в математическом мире как метод Картана — Лаптева, основанный на идее подвижного репера и внешнего дифференциального исчисления Картана.

Идея метода подвижного репера заключается в изучении геометрических объектов (подмногообразий однородных пространств) с помощью локальной системы координат, жестко привязанной к точке подмногообразия и движущейся вместе с ней (подвижной репер). Это позволяет описывать геометрические свойства подмногообразия в данной точке через изменения элементов репера, не прибегая к анализу преобразования координат в общей системе координат. При использовании этого метода предварительно требуется процедура канонизации репера — инвариантного присоединения к каждой точке подмногообразия единственного репера, определенного самим подмногообразием. Формулы, описывающие изменения элементов подвижного репера, дают возможность получить набор дифференциальных инвариантов, характеризующих подмногообразие с точностью до преобразований вмещающего пространства.

Германом Федоровичем Лаптевым этот метод был дополнен и развит. Его аналитическую основу составляют возникающие в подмногообразиях структурные уравнения между структурными дифференциальными формами. С помощью

внешнего дифференцирования формы продолжают (возникают формы более высокого порядка), а с помощью охвата строятся новые геометрические объекты, то есть метод позволяет в инвариантной (бескоординатной) форме присоединять к данной структуре новые структуры, внутренне связанные с ней, в том числе находить их дифференциальные инварианты (отсюда название — метод продолжений и охватов).

В результате применения метода все построения оказываются записанными в координатах произвольного (подвижного) репера, что придает всем построениям инвариантный характер, обеспечивая возможность в случае необходимости специализировать репер инвариантным образом.

Следовательно, этот метод позволяет автоматически получать в инвариантном виде дифференциальные уравнения объектов, определяющих ту или иную дифференциально-геометрическую структуру, не прибегая к конечным преобразованиям компонент этих объектов, а используя только аппарат структурных уравнений.

Позже в своей диссертации Анатолий Михайлович Васильев показал, что метод Лаптева [2] применим и на многообразиях с действием бесконечных групп Ли — Картана, а этот класс включает в себя различные расслоенные многообразия, многообразия, несущие на себе структуры анализа, например системы дифференциальных уравнений с их симметриями и пр. Таким образом, было доказано, что область применения метода Картана — Лаптева значительно шире, чем считалось ранее, он применим к изучению самых разнообразных структур. То есть дифференциально-геометрические методы, разработанные Г. Ф. Лаптевым и А. М. Васильевым, перестают быть чисто геометрическими, их применение, по словам А. М. Васильева, стало равнозначно существенному использованию дифференциального исчисления. То есть, применяя эти методы, мы имеем дело с современным дифференциальным исчислением в его наиболее совершенной форме.

Леонид Евгеньевич Евтушик со студенческих лет был неизменным участником, (а позже и соруководителем) семинара по классической дифференциальной геометрии и активно включился в деятельность по развитию и различным приложениям единственного универсального инвариантного метода геометрических исследований — метода подвижного репера Картана — Лаптева. Область его научных интересов — развитие теории дифференциально-геометрических структур высшего порядка на гладких многообразиях, среди которых основными объектами изучения изначально были избраны лагранжианы и системы дифференциальных уравнений (в частности, гамильтоновы) высших порядков. Именно здесь универсальность и дифференциально-алгебраическая мощь метода Картана — Лаптева приобрела особую актуальность.

Еще будучи студентом, он начинает работать в этом почти неизученном направлении, привлекающем большими возможностями приложений к нелинейному анализу высших порядков. Именно здесь Л. Е. Евтушик достиг фундаментальных результатов, получивших признание на Международном конгрессе в честь 200-летия Н. И. Лобачевского.

Совершенствуя и развивая метод Картана — Лаптева, Леонид Евгеньевич решил ряд фундаментальных проблем.

1. Была разработана и далеко продвинута совершенно новая теория так называемых нелинейных стабильных связностей в произвольных главных и ассоциированных расслоениях реперов сколь угодно высокого порядка.

2. Этот класс связностей оказался идеально приспособленным к геометрическому описанию любых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно замены временного аргумента.

На этой основе дан наиболее естественный подход к построению геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков и его реализация для третьего, четвертого и пятого порядков.

3. С помощью теории нелинейных связностей удалось решить в инвариантной форме проблему гамильтонизации уравнений Эйлера — Лагранжа для любых регулярных лагранжианов, содержащих скорости сколь угодно высокого порядка.

4. Метод Картана — Лаптева был переработан на современной базе теории расслоенных пространств. Был выделен важнейший класс частичных связностей — связности Ли. Функтор связности Ли определен лишь на кривых некоторого локального векторного поля на базисном многообразии. Ковариантное дифференцирование геометрических объектов относительно связности Ли представляет собой дифференцирование Ли. Таким образом, была выявлена простая связь между аппаратом дифференцирования Ли и аппаратом структурных уравнений. Общая теория дифференцирований Ли в своей инвариантной форме оказалась автоматически встроенной в теорию связностей и ее структурных уравнений.

5. Почти не изучавшиеся ввиду их аналитической сложности лагранжианы и системы дифференциальных уравнений высших порядков оказались естественно включенными в геометрическую теорию нелинейных связностей в расслоениях реперов соответствующего порядка, получив там полное описание своих инвариантов в терминах внешних дифференциальных алгебр, образованных структурными дифференциальными формами и их внешними дифференциальными уравнениями.

6. Фундаментальную роль при этом сыграло широкое привлечение аппарата теории струй Эресмана, так как это необходимо для описания категории расслоений реперов высших порядков и ее геометрических объектов — таких прежде всего, как нелинейные стабильные связности высших порядков.

Помимо этого следует отметить ряд других достижений:

— построена геометрическая теория поверхностных интегралов, зависящих от частных производных высших порядков и соответствующих вариационных задач;

— для многомерных лагранжианов второго порядка построена инвариантная связность картанова типа в специально сконструированном главном расслоении с полной системой структурных уравнений и соответствующих инвариантов;

— дано законченное построение пространств Кавагути (наиболее общих метрических пространств, в которых длина кривой выражается интегралом, зависящем от производных высших порядков);

— дан более естественный, чем картановский, способ инвариантных форм и структурных уравнений псевдогрупп преобразований.

В монографии «Теория дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях» («Проблемы геометрии», т. 9) дано современное построение метода Картана — Лаптева как аппарата структурных дифференциальных форм и структурных уравнений для дифференциально-геометрических структур в наиболее их общем понимании на основе теории расслоенных пространств и инвариантного исчисления дифференциальных форм и струй отображений, а также теоретико-категорного подхода.

Со временем Леонид Евгеньевич Евтушик стал признанным лидером и непререкаемым авторитетом в теории дифференциально-геометрических структур высших порядков. После кончины Германа Федоровича Лаптева и Анатолия Михайловича Васильева Леонид Евгеньевич был наиболее выдающимся ученым в теории дифференциально-геометрических структур высших порядков и метода Картана — Лаптева: никто не мог сравниться с ним в эрудиции и глубине понимания этого метода. Чтобы почтить память Эли Картана, он дважды, в 2010 и 2011 годах, побывал на его могиле в маленьком французском городке Долomme.



Л. Е. Евтушик (Доломьё)

В последние годы научная деятельность Л. Е. Евтушика была направлена на решение очень важной и давно назревшей в геометрическом мире проблемы — структурирование и современное описание универсального метода Картана — Лаптева и его важнейших приложений к инвариантным структурам анализа и геометрии сколь угодно высокого порядка на гладких многообразиях. Им была задумана двухтомная монография, впервые дающая полное и современное описание метода Картана — Лаптева и его приложений к малоизученной области дифференциально-геометрических структур высшего порядка. К великому сожалению, этим планам не суждено было осуществиться в связи с безвременной кончиной Леонида Евгеньевича в феврале 2013 года. Ключевые моменты плани-

руемой монографии были изложены в 9-м томе «Проблем геометрии» и в книге [1], изданной уже после смерти Леонида Евгеньевича.

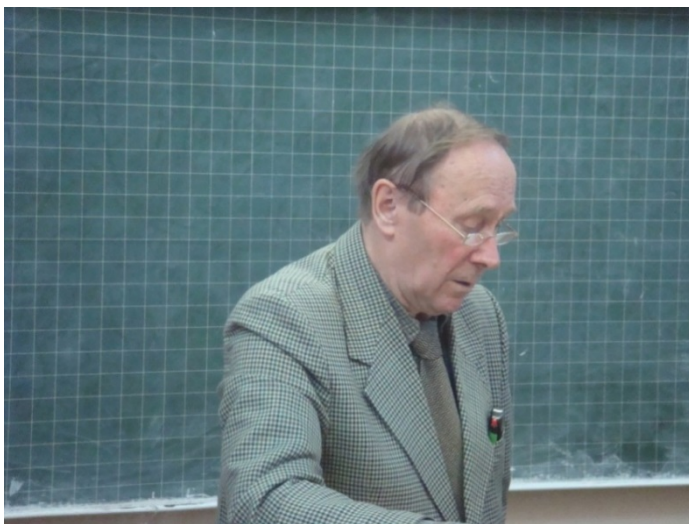
Многолетняя целенаправленная деятельность Л.Е. Евтушика в исследовании инвариантных структур высшего порядка на гладких многообразиях получила международное признание. Он был участником международных математических конгрессов в Цюрихе и Берлине, конференций в Италии, Греции, Австрии, Венгрии, Польше, Чехословакии, Югославии, всех всесоюзных геометрических конференций и математических съездов.

Успешная научная деятельность Л.Е. Евтушика была отмечена на международном конкурсе по случаю 200-летия со дня рождения Николая Ивановича Лобачевского (1992), по достоинству оценена званием Заслуженного профессора МГУ (2001), присуждением правительственной Премии Анассиласа (Италия, Реджо-ди-Калабрия, 2009) и ряда других наград.



Л.Е. Евтушик (Пензенский педагогический университет, Пенза)

Не менее многообразна научно-организационная и педагогическая деятельность Леонида Евгеньевича Евтушика: организация целой серии периодических Лаптевских чтений, многолетняя работа председателем Методической комиссии Всесоюзной заочной математической школы при МГУ, членство в диссертационных Советах при МГУ и МГПИ (ныне МПГУ), работа по совместительству заведующим кафедрой информатики в Тверском университете, профессором в Пензенском педагогическом университете и профессором кафедры геометрии МПГУ, работа помощником члена Комитета по образованию и науке Государственной думы России, разнообразная преподавательская деятельность по геометрии и математическому анализу, руководство аспирантами и стажерами и т. д.



Л. Е. Евтушик (Калининград, 19.02.2008)

При всей увлеченности Леонида Евгеньевича высшей суперсовременной геометрией, элементарную математику, особенно геометрию, он очень любил и служил ей всю свою «математическую» жизнь. Любовь к элементарной геометрии, за-

ложенная в юного Лёню Евтушика простым учителем математики школы №1 городка Прилуки, осталась с ним на всю жизнь.



Й. Микеш, Л. Е. Евтушик, В. С. Малаховский, А. Г. Попов
(Москва, МГУ, 2009)



Л. Е. Евтушик с участниками конференции (Пенза, сентябрь 2011)

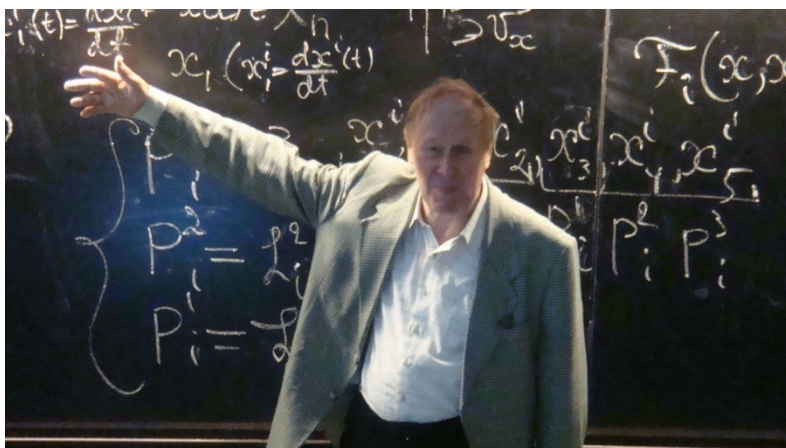


Ю. И. Шевченко, С. Е. Степанов, О. О. Белова, Л. Е. Евтушик
(Пенза, сентябрь 2011)

Практически с основания (в 1964 году) Всесоюзной заочной математической школы при МГУ («Малого мехмата») Л. Е. Евтушик активно принимал участие в ее работе, много лет был председателем методической комиссии этой школы, участвовал в подготовке и проведении математических олимпиад для школьников, был автором целого ряда методических разработок (например, «Заданий по стереометрии»). Леонид Евгеньевич активно сотрудничал с широко известным, уникальным в своем жанре журналом «Квант» — научно-популярным физико-математическим журналом для школьников и студентов, рассчитанным на массового читателя. Например, в №4 за 1972 год опубликована его статья «Прямые и плоскости», в которой он проводит подробный разбор ряда нестандартных задач по стереометрии. У него была прекрасная геометрическая интуиция. Он тонко чувствовал и ценил изящество и оригинальность решения той или иной задачи. Он мог

несколько дней думать над одной «элементарной» задачей или «переиначивать» известную задачу на свой лад.

Решению нестандартных задач по стереометрии была посвящена и его более чем тридцатилетняя деятельность (с 1963 года) в Центральной лектории при МГУ (подготовительные курсы на мехмат МГУ). Осталось много несистематизированных, но очень аккуратных, с прекрасными чертежами набросков решения таких нетривиальных задач по стереометрии.



Л. Е. Евтушик (Брно, сентябрь 2012)

Леонида Евгеньевича не стало 15 февраля 2013 года. Он похоронен на Хованском кладбище Москвы рядом с могилой его мамы.

Нам осталась память о нем как о замечательном, увлекающемся, обаятельном человеке, выдающемся ученом и мудром педагоге. А его исследования по дифференциально-геометрическим структурам высших порядков, несомненно, найдут дальнейшее развитие и разнообразные приложения как в самой математике, так и в теоретической физике.

Основные публикации Л. Е. Евтушика

1. *Евтушик Л. Е.* К геометрии двойного интеграла // Матем. сб. 1955. Т. 37 (79), вып. 1. С. 197—208.

2. *Евтушик Л. Е.* Производная Ли и дифференциальные уравнения поля геометрического объекта // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, вып. 5. С. 998—1001.

3. *Евтушик Л. Е.* О нелинейных связностях // Успехи математических наук. 1962. Т. 17, вып. 2 (104). С. 195—197.

4. *Евтушик Л. Е.* Об одном построении инвариантных форм и структурных уравнений бесконечных групп // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, вып. 1. С. 20—21.

5. *Евтушик Л. Е.* Нелинейные связности высших порядков // Изв. вузов. Математика. 1969. № 2. С. 32—44.

6. *Евтушик Л. Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Тр. Геом. семин. 1969. Т. 2. С. 119—150.

7. *Евтушик Л. Е.* Нелинейные связности в метрических пространствах высших порядков // Изв. вузов. Математика. 1970. № 1. С. 48—60.

8. *Евтушик Л. Е.* Нелинейные mp -связности в главных расслоениях // Матем. заметки. 1972. Т. 11, вып. 3. С. 341—351 = *Evtushik L. E.* Nonlinear mp -connectivities in principal fibrations // Math. Notes. 1972. Vol. 11, № 3. P. 211—216.

9. *Евтушик Л. Е.* Нелинейные $(n - 1)p$ -связности в метрических пространствах Картана высших порядков // Матем. заметки. 1972. Т. 11, вып. 4. С. 447—458 = *Evtushik L. E.* Nonlinear $(n - 1)p$ -connections in metric Cartan spaces of higher order // Math. Notes. 1972. Vol. 11, № 4. P. 272—278.

10. *Евтушик Л. Е.* О голономии нелинейных связностей и связностях в псевдогрупповых или однородных расслоениях // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14, вып. 3. С. 536—548 = *Evtushik L. E.* The holonomy of nonlinear connections and connections in pseudogroup or homogeneous bundles // Siberian Math. J. 1973. Vol. 14, 3. P. 370—379.

11. *Евтушик Л. Е.* Редуктивные связности Картана и обобщенные аффинно-нормализованные структуры Нордена // Изв. вузов. Математика. 1974. № 5. С. 87—96 = *Evtushik L. E.* Reductive Cartan connections, and the generalized affine-normalized Norden structures // Russian Math. (Izvestia Vuzov). 1974. Vol. 18, № 5. P. 72—79.

12. *Евтушик Л. Е., Третьяков В. Б.* О структурах, определяемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка // Тр. Геом. семина. 1974. Т. 6. С. 243—255.

13. *Третьяков В. Б., Евтушик Л. Е., Степанов Н. В.* Редуктивная связность Картана, ассоциированная с пространством m -протяжений над опорными элементами касания второго порядка // Тр. Геом. семина. 1975. Т. 8. С. 89—94.

14. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1979. Т. 9. С. 5—246 = *Evtushik L. E., Lumiste Ü.G., Ostianu N. M., Shirokov A. P.* Differential-geometric structures on manifolds // J. Soviet Math. 1980. Vol. 14, № 6. P. 1573—1719.

15. *Евтушик Л. Е., Третьяков В. Б.* Инвариантное описание обыкновенных систем в терминах нелинейных связностей // Изв. вузов. Математика. 1986. № 1. С. 21—32 = *Evtushik L. E., Tret'yakov V. B.* Invariant description of ordinary systems in terms of nonlinear connections // Soviet Math. (Izvestia Vuzov). 1986. Vol. 30, № 1. P. 26—40.

16. *Арутюнян С. Х., Грушко П. Я., Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г.* Дифференциально-алгебраические методы геометрических исследований в работах А. М. Васильева и его научной школы // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1988. Т. 20. С. 3—34 = *Arutyunyan S.Kh., Grushko P.Ya., Evtushik L. E., Lumiste Ü.G.* Differential-algebraic methods for geometric investigations in the work of A.M. Vasil'ev and his scientific school // J. Soviet Math. 1990. Vol. 51, № 6. P. 2595—2613.

17. *Евтушик Л.Е., Лупанов О.Б., Новиков С.П., Позняк Э.Г., Рыбников А.К.* Памяти Анатолия Михайловича Васильева (1923—1987) // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1988. № 5. С. 97—100.

18. *Евтушик Л.Е., Остиану Н.М., Рыбников А.К.* Герман Федорович Лаптев (к 80-летию со дня рождения) // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1989. № 6. С. 88—90.

19. *Евтушик Л.Е., Рыбников А.К.* Влияние идей Лобачевского на развитие дифференциальной геометрии // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1994. № 2. С. 3—14.

20. *Бурлаков М.П., Евтушик Л.Е.* Клиффордова структура и клиффордово дифференцирование на римановых пространствах // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1994. № 2. С. 67—74.

21. *Евтушик Л.Е.* Неевклидовы геометрии на основе обыкновенных дифференциальных систем высших порядков // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1994. № 2. С. 86—98.

22. *Евтушик Л.Е.* Геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования в семинаре Лаптева — Васильева при Московском университете (1980—1992 гг.) // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2002. Т. 11. С. 24—81 = *Evtushik L. E.* Geometry of ordinary differential equations. Investigations of Laptev — Vasil'ev seminar at the Moscow University (1980—1992) // J. Math. Sci. 1996. Vol. 78, № 3. P. 253—286.

23. *Евтушик Л.Е.* Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученная методом подвижного репера // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2002. Т. 30. С. 170—204 = *Evtushik L. E.* Cartan connections and Kawaguchi geometry of spaces obtained by the moving Frame method // J. Math. Sci. (New York). 1998. Vol. 89, № 3. P. 1279—1300.

24. *Evtushik L. E.* Pseudo-groups of transformations of geometrical-differential structures and their invariants // J. Math. Sci. 1999. Vol. 94. P. 1643.

25. *Евтушик Л. Е.* Геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования в семинаре Лаптева — Васильева при Московском университете (1980—1992 гг.). Геометрия — 2. Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. Темат. обзоры / ВИНТИ. М., 2002. Т. 11. С. 24—81 = *Evtushik L. E.* Geometry of ordinary differential equations. Investigations of Laptev — Vasil'ev seminar at the Moscow University (1980—1992) // J. Math. Sci. 1996. Vol. 78, № 3. P. 253—286.

26. *Евтушик Л. Е.* Уникальная школа Картана — Лаптева, ее сбережение // ДГМФ. 2008. Вып. 39. С. 44—62.

27. *Евтушик Л. Е., Малаховский В. С.* Герман Федорович Лаптев — выдающийся геометр XX века // ДГМФ. 2009. Вып. 40. С. 7—10.

28. *Евтушик Л. Е., Киосак В. А., Микеш Й.* О мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна // Изв. вузов. Математика. 2010. № 8. С. 36—41 = *Evtushik L. E., Kiosak V. A., Mikeš J.* The mobility of Riemannian spaces with respect to conformal mappings onto Einstein spaces // Russian Math. (Izvestia Vuzov). 2010. Vol. 54, № 8. P. 29—33.

29. *Evtushik L. E.* German Fedorovich Laptev, his unique method, achievements, and modern contribution. On the 100th anniversary of the birth of our teacher // J. Math. Sci. 2010. Vol. 169, № 3. P. 249—281.

30. *Евтушик Л. Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И., Микеш Й.* Конформные отображения на пространства Эйнштейна // Изв. вузов. Математика. 2016. № 10. С. 8—13 = *Evtushik L. E., Hinterleitner I., Guseva N. I., Mikeš J.* Conformal mappings onto Einstein spaces // Russian Math. (Izvestia Vuzov). 2016. Vol. 60, № 10. P. 5—9.

Список литературы

1. *Евтушик Л. Е.* Структуры высших порядков. М., 2014.
2. *Евтушик Л. Е., Малаховский В. С.* Герман Федорович Лаптев — выдающийся геометр XX века // ДГМФ. 2009. Вып. 40. С. 7—10.

Для цитирования: *Гусева Н. И., Микеш Й.* Профессор Л. Е. Евтушик — ученый и педагог // ДГМФ. 2026. № 57 (1). С. 5—27. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-1>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC 2020: 58A05, 53A20, 53A55

N. I. Guseva¹, J. Mikes² 

¹ *Moscow State Pedagogical University,
14, Krasnopрудnaya st., Moscow, 107140, Russia*

² *F. Palacky University,
12, 17 listopadu st., Olomouc, 771 46, Czech Republic*

¹ ngus12@mail.ru, ² josef.mikes@upol.cz
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-1

Professor L. E. Evtushik — a scientist and a teacher

Submitted on March 20, 2026

This paper is dedicated to the outstanding geometer Leonid Evgenievich Evtushik, who was a member of the editorial board of the journal DGMF from 1990 to 2013.

The paper presents L. E. Evtushik's biography and the main stages of his scientific work. His research interests included problems of modern geometry, connection theory, the theory of differential equations, and higher-order Lagrangians.

L. E. Evtushik taught the following courses at Moscow State University: “Mathematical Analysis”, “Linear Algebra and Analytic Geometry”, “Geometric Structures of Analysis on Manifolds”,

“Invariant Methods in Geometry and Analysis”, “Lagrangians and Higher-Order Hamiltonian Systems”, “Connection Theory”, and “Higher-Order Structures”.

L. E. Evtushik supervised 14 PhD students and authored 66 scientific papers.

Keywords: differential geometry, Cartan — Laptev method, differential-geometric structures, manifold

References

1. *Evtushik, L. E.*: Higher-order structures. Moscow (2014). 424 p.
2. *Evtushik, L. E., Malakhovsky, V. S.*: German Fedorovich Laptev: An Outstanding Geometer of the 20th Century. DGMF, 40, 7—10 (2009).

For citation: *Guseva, N. I., Mikes, J.*: Professor L. E. Evtushik — a scientist and a teacher. DGMF, 57 (1), 5—27 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-1>.



SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

М. Б. Банару¹, Г. А. Банару²

^{1, 2} Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

¹ SPIN-код: 1392-5918, AuthorID: 128852

² SPIN-код: 9011-7084, AuthorID: 652570

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-2

**О геодезических точках
уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий
алгебры октав**

В данной статье изучаются уплощающиеся 6-мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. Рассматриваются геодезические точки таких подмногообразий, то есть такие точки, в которых конфигурационный тензор подмногообразия обращается в нуль. Установлено, что в геодезических точках уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав обращаются в нуль и тензор Вейля конформной кривизны, и тензор конгармонической кривизны.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, эрмитова структура, геодезическая точка, 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли

1. Выдающегося американского математика Альфреда Грея по праву считают основателем эрмитовой геометрии 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. Эта теория, заложенная его работами в 60-е годы прошлого века (см., например, [1; 2]), активно развивается и сейчас. Отметим, что в настоящее время большая часть выходящих работ связана с 6-мерными приближенно келеровыми подмногообразиями алгебры октав. Особенно «популярна» у геометров 6-мерная сфера, оснащен-

Поступила в редакцию 28.03.2026 г.

© Банару М. Б., Банару Г. А., 2026

ная канонической приближенно келеровой структурой. Обращаем внимание на две очень глубокие статьи о гиперповерхностях сферы S^6 , опубликованные в прошлом году [3; 4].

Исследований о 6-мерных подмногообразиях алгебры октав с эрмитовой (то есть интегрируемой почти эрмитовой) структурой выходит гораздо меньше, несмотря на то что и в этой области работали многие известные геометры, среди которых мы особо выделим отечественного специалиста В. Ф. Кириченко, получившего в конце прошлого века ряд очень значительных результатов (см., например, [5; 6]).

В данной статье мы рассматриваем геодезические точки уплощающихся 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. Такие подмногообразия были введены в рассмотрение более 30 лет назад по инициативе В. Ф. Кириченко [7; 8]. Следует отметить, что именно ему принадлежала идея «переименовать» в геодезические те точки, которые до этого назывались точками уплощения (иначе термин «уплощающийся» употреблялся бы, например, в названии данной заметки в двух разных смыслах).

2. Напомним (см.: [1]), что почти эрмитовой структурой на многообразии M^{2n} четной размерности называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}),$$

где $\mathfrak{X}(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n} . Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым*. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Интегрируемая почти эрмитова структура называется *эрмитовой*; в таком случае ее тензор Нейенхайса

$$N(X, Y) = \frac{1}{4} (J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY])$$

обращается в нуль; келерову структуру определяет равенство

$$\nabla F = 0.$$

Давно известно, что так называемые 3-векторные произведения в алгебре октав $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ порождают на всяком 6-мерном ориентируемом подмногообразии $M^6 \subset \mathbf{O}$ почти эрмитову структуру. Соответствующая конструкция приводится в десятках статей; ее краткое и при этом аккуратное и строгое описание содержат статьи [2] и [5], а более подробное изложение можно найти в [7] или [9].

В работе [5] В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав (в репере, адаптированном почти эрмитовой структуре):

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ah[b} D_h^{c]} \omega_b \wedge \omega_c; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{ah[b} D_h^{c]} \omega^b \wedge \omega^c; \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{h[k} D_{j]}^g + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}[k}^{\varphi} T_{j]b}^{\varphi} \right) \omega^k \wedge \omega^j, \end{aligned} \quad (1)$$

где через $\{\omega^k\}$ обозначены компоненты форм смещения, через $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности.

Здесь и далее

$$\varphi = 7, 8; \quad a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3;$$

$$\hat{a} = a + 3; \quad k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Как в [6] и [7], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом

$$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}, \quad \varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$$

— компоненты тензора Кронекера порядка три;

$$\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$$

— кронекерова дельта второго порядка;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, \quad D_h^c = D_{h\hat{c}}, \quad D^h_c = D_{\hat{h}\hat{c}};$$

$$D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}\hat{j}} = \mp T_{\hat{c}\hat{j}}^8 - iT_{\hat{c}\hat{j}}^7,$$

где $\{T_{kj}^\varphi\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ (см.: [7]). 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся (planar, иногда flattening), если оно содержится в гиперплоскости алгебры Кэли. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав, которые полностью классифицированы В. Ф. Кириченко [5]. При этом нужно обязательно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с почти эрмитовой структурой, отличной от келеровой [9—11].

Точка $p \in M^6$ называется геодезической (см.: [7; 8]), если все компоненты конфигурационного тензора в этой точке равны нулю. Оказалось, что в геодезических точках и только в них обращаются в нуль голоморфная секционная и голоморфная бисекционная кривизны эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ [8; 9].

Уже давно структурные уравнения (1) почти эрмитовой структуры на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры Кэли детализированы именно для эрмитовой структуры на уплощающемся $M^6 \subset \mathbf{O}$ [8]:

$$\begin{aligned}
 d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b; \\
 d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \\
 d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}\hat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi} \right) \omega_c \wedge \omega^d.
 \end{aligned} \tag{2}$$

На основе уравнений (2) получены спектры важнейших тензоров уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли — тензора римановой кривизны, тензора Риччи, тензора Вейля конформной кривизны (см.: [12]), а также тензора конгармонической кривизны (см.: [13]). Напомним, что тензоры Вейля конформной кривизны W и тензор конгармонической кривизны Ch определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
 W_{ijkl} &= R_{ijkl} + \frac{1}{n-2} (ric_{ik} g_{jl} + ric_{jl} g_{ik} - \\
 &\quad - ric_{il} g_{jk} - ric_{jk} g_{il}) + \\
 &\quad + \frac{K}{(n-1)(n-2)} (g_{jk} g_{il} - g_{jl} g_{ik}), \\
 Ch_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{4} (ric_{jl} g_{ik} + ric_{ik} g_{jl} - \\
 &\quad - ric_{jk} g_{il} - ric_{il} g_{jk}).
 \end{aligned}$$

Здесь n — размерность многообразия, R — тензор римановой кривизны, ric — тензор Риччи, K — скалярная кривизна. Тензоры W и Ch обладают всеми классическими свойствами, которые присущи тензору римановой кривизны (см.: [14]).

3. Нами получены следующие результаты, связанные с геометрическими точками уплощающегося эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$.

Теорема 1. *Тензор Вейля конформной кривизны в геодезических точках уплощающегося 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли обращается в нуль.*

Теорема 2. *Тензор конгармонической кривизны в геодезических точках уплощающегося 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли обращается в нуль.*

Теорема 3. *Обращение в нуль скалярной кривизны в некоторой точке уплощающегося 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли влечет за собой обращение в этой точке в нуль тензора Вейля конформной кривизны и тензора конгармонической кривизны.*

Следовательно, уплощающееся эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$, состоящее только из геодезических точек, будет и конформно, и конгармонически плоским; эрмитова структура на таком многообразии неизбежно окажется келеровой. И конечно, обратим внимание на тот факт, что из теорем 1 и 2 вовсе не следует, что тензоры W и Ch обращаются в нуль только в геодезических точках (как голоморфная секционная и голоморфная бисекционная кривизны таких подмногообразий).

Интересными задачами, связанными с геодезическими точками уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры октав, представляются следующие:

1) как влияют такие точки на почти контактную метрическую структуру (например, на какую-либо из важных и хорошо изученных структур, таких как косимплектическая, слабо косимплектическая, сасакиева и т.п.), индуцируемую на гиперповерхности уплощающегося эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$;

2) насколько наличие геодезических точек в уплощающемся 6-мерном эрмитовом подмногообразии алгебры октав приближает свойства такого подмногообразия к свойствам келеровых $M^6 \subset \mathbf{O}$, которые полностью проклассифицированы и изучены детально?

Для продвижения в решении первой задачи, очевидно, можно использовать упомянутые в начале нашей заметки но-

вые работы [3] и [4], а также статьи [10; 11; 15—17]. Для решения второй задачи нами, казалось бы, накоплено немало материала — за 25 лет опубликовано более 20 работ об уплющающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли. Если совсем кратко подытожить уже полученные результаты об уплющающихся эрмитовых подмногообразиях $M^6 \subset \mathbf{O}$, то можно сказать, что все их свойства в той или иной степени близки свойствам келеровых подмногообразий алгебры октав. Однако все попытки получить результаты, связанные с классификацией таких подмногообразий, к данному моменту оказались не столь успешными, как достижения В. Ф. Кириченко для 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав в [5].

Список литературы

1. Gray A. Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. Vol. 10, № 2. P. 353—366.
2. Gray A. Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 21, № 4. P. 614—620.
3. Antić M., Kocić D. Hypersurfaces of the sphere $S^6(1)$ with four-dimensional nullity distribution // J. Geom. Phys. 2025. Vol. 213.
4. Al-Dayel I. Laplacian conditions and sphericity of hypersurfaces in the nearly Kähler 6-sphere // Mathematics. 2025. Vol. 13, № 16. P. 2673.
5. Кириченко В. Ф. Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. № 8. С. 32—38.
6. Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 1994. № 3. С. 6—13.
7. Банару М. Б. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1993.
8. Банару М. Б., Кириченко В. Ф. Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 205—206.

9. *Banaru M.B.* Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra // *Sbornik: Mathematics*. 2002. Vol. 193, № 5—6. P. 635—648.
10. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // *Известия Академии наук Республики Молдова. Математика*. 2014. № 1 (74). P. 23—32.
11. *Банару М.Б., Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // *ДГМФ*. 2017. Вып. 48. С. 21—25.
12. *Банару Г.А.* О некоторых тензорах 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // *ДГМФ*. 2024. Вып. 55, № 2. С. 47—56.
13. *Banaru M.B., Banaru G.A.* On conharmonic curvature tensor of 6-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2025. № 1 (107). P. 81—87.
14. *Кириченко В.Ф., Шихаб А.А.* О геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно кэлеровых многообразий // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2010. Т. 16, № 2. С. 43—54.
15. *Банару М.Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных кэлеровых подмногообразий алгебры Кэли // *Изв. вузов. Математика*. 2003. № 7. С. 59—63.
16. *Банару Г.А.* О несуществовании структуры Кенмоцу на *асп*-гиперповерхностях косимплектического типа кэлерова многообразия // *ДГМФ*. 2019. Вып. 50. С. 23—28.
17. *Банару М.Б., Банару Г.А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в кэлеровых многообразиях // *Сибирские электронные математические известия*. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

Для цитирования: *Банару М.Б., Банару Г.А.* О геодезических точках уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав // *ДГМФ*. 2026. № 57 (1). С. 28—38. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-2>.



MSC 2010: 53B35, 53B25

M. B. Banaru, G. A. Banaru
Smolensk State University
4, Przhevalskogo st., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-2

On geodesic points
of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra

Submitted on March 28, 2026

In this short note, we study six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra on which the so-called Brown — Gray three-fold vector cross products in the octave algebra induce a Hermitian structure. Such submanifolds of the octave algebra were introduced into consideration by the Russian geometer V. F. Kirichenko in the 90s of the last century. In such six-dimensional planar Hermitian submanifolds, we consider geodesic points, that is, points at which the configuration tensor of the submanifold vanishes. We establish that at geodesic points of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the octave algebra, both the Weyl tensor of conformal curvature and the conharmonic curvature tensor vanish. We also establish that the vanishing of the scalar curvature of a six-dimensional planar submanifold of Cayley algebra implies the vanishing of both the Weyl tensor of conformal curvature and the conharmonic curvature tensor.

Two problems related to geodesic points of six-dimensional planar submanifolds of the octave algebra are formulated. Solutions, or significant advances in solving of these problems, appear entirely possible.

Keywords: almost Hermitian structure, Hermitian structure, geodesic point, six-dimensional submanifold of Cayley algebra

Referenses

1. Gray, A.: Some examples of almost Hermitian manifolds. Illinois J. Math., **10**:2, 353–366 (1966).
2. Gray, A.: Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products. Tôhoku Math. J., **21**:4, 614—620 (1969).
3. Antić, M., Kocić, D.: Hypersurfaces of the sphere $\mathbf{S}^6(\mathbf{1})$ with four-dimensional nullity distribution. J. Geom. Phys., 213 (2025).
4. Al-Dayel, I.: Laplacian conditions and sphericity of hypersurfaces in the nearly Kähler 6-sphere. Mathematics, **13**:16, 2673 (2025).
5. Kirichenko, V.F.: Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).
6. Kirichenko, V.F.: Hermitian geometry of six-dimensional symmetric submanifolds of the Cayley algebra. Mosc. Univ. Math. Bull. Ser. 1. Math. Mekh., 3, 6—13 (1994).
7. Banaru, M.B.: Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Moscow State Pedagogical University (PhD thesis) (1993).
8. Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.: The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Russian Mathematical Surveys, **49**:1, 223—225 (1994).
9. Banaru, M.B.: Hermitian geometry of 6-dimensional submanifolds of the Cayley algebra. Sb. Math., 193:5—6, 635—648 (2002).
10. Banaru, M.B., Banaru, G.A.: A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica, 1(74), 23—32 (2014).
11. Banaru, M.B., Banaru, G.A.: On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 48, 21—25 (2017).
12. Banaru, G.A.: On some tensors of six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, **55**:2, 47—56 (2024).
13. Banaru, M.B., Banaru, G.A.: On conharmonic curvature tensor of 6-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica, 1(107), 81—87 (2025).

14. *Kirichenko, V. F., Shihab, A. A.*: On the geometry of conharmonic curvature tensor for nearly Kähler manifolds. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, **16**:2, 43—54 (2010).

15. *Banaru, M. B.*: On skew-symplectic hypersurfaces of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra. *Russian Math. (Izvestia Vuzov)*, **47**:7, 60—63 (2003).

16. *Banaru, G. A.*: On nonexistence of Kenmotsu structure on acm-hypersurfaces of cosymplectic type of a Kählerian manifold. *DGMF*, 50, 23—28 (2019).

17. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.*: On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 17, 1715—1721 (2020).

For citation: Banaru, M. B., Banaru, G. A.: On geodesic points of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. *DGMF*, 57 (1), 28—38 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-2>.



SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC 2020: 17B05, 17B20, 17B30, 20M30, 22F30

A. Di Bartolo¹, **G. La Rosa²**

^{1,2} *Department of Mathematics and Computer Science, University of Palermo,
34, Via Archirafi, 90123, Palermo, Italy*

¹ alfonso.dibartolo@unipa.it, ² gianmarco.larosa@unipa.it

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-3

Flag manifolds without one codimensional strata

In this paper, we propose a classification of finite-dimensional real Lie algebras that admit subalgebras of codimension two, but no subalgebra of codimension one, which leads to a description of homogeneous spaces without isotropy subgroups of codimension one. This study expands upon the existing body of research on codimension-one subalgebras, aiming to extend the analysis to a new setting. The result of this expansion is a comprehensive description of the relevant families. It is demonstrated that a such Lie algebra $\mathfrak{g}$ contains an ideal $\mathfrak{u}$, containing the radical of $\mathfrak{g}$, such that $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ belongs to a list $\mathcal{L}$, consisting of one compact and two non compact Lie algebras.

Keywords: homogeneous spaces, Lie algebras, codimension two subalgebras, simple Lie algebras, compact real forms

1. Introduction

Homogeneous geometries G/H with minimal isotropy H of codimension 2 are considered via the study of real Lie algebras containing a subalgebra of codimension two. Indeed, in the study of Lie groups and their actions on manifolds, understanding the structure of subalgebras of small codimension in their Lie algebras plays a central role. The case of Lie algebras admitting 1-codimensional subalgebras has been comprehensively investigated and is

Submitted on September 3, 2025

© Di Bartolo A., La Rosa G., 2026

well understood (see, e. g., Hofmann [5]). The latter's applications range from the classification of transitive group actions with 1-dimensional orbits to the analysis of boundaries of certain topological semigroups. Recently, there has been a renewed interest in the lattice structure of subalgebras of simple Lie algebras [1—3], motivated by applications in representation theory, geometry, and mathematical physics. This has led to a more detailed classification of subalgebras with specific codimensions, inspiring the present study focused on Lie algebras admitting subalgebras of codimension two but not of codimension one.

Building on previous work on the classification of Lie algebras by subalgebra codimension, we focus on the real finite-dimensional case where subalgebras of codimension 2 exist, while none of codimension 1 do. We provide a detailed analysis and classification of such Lie algebras, highlighting the algebraic constraints imposed by the absence of codimension one subalgebras, and describing the possible structures that arise in this intermediate setting. This study fills a gap in the literature between the classical codimension-one case and the broader theory of maximal subalgebras: whereas Hofmann's Theorem 1 [5, p. 638] establishes that if a real Lie algebra $\mathfrak{g}$ has a subalgebra $\mathfrak{h}$ of codimension 1, then either $\mathfrak{h}$ is an ideal of $\mathfrak{g}$, or $\mathfrak{h}$ contains an ideal $\mathfrak{i}$ of $\mathfrak{g}$ such that $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ is isomorphic to the 2-dimensional non-abelian Lie algebra, we show (Theorem 3.2) that if $\mathfrak{g}$ admits a subalgebra of codimension 2 but none of codimension 1, then it contains an ideal $\mathfrak{u}$, containing the radical of $\mathfrak{g}$ and lying inside the given subalgebra, such that $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ belongs to the list $\mathcal{L} = \{\mathfrak{su}(2), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}, \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})\}$. This work consists essentially of two sections, in addition to this introduction. In Section 2 we recall some definitions and results to provide autonomy and self-consistency to the present work, since the statements referenced in this section will be used throughout the proofs of our new results in Section 3. In the latter, we present intermediate results, as well as the complete family of Lie algebras under consideration, culminating in the main theorem of this work.

The results obtained in this study contribute to a deeper understanding of the lattice of subalgebras in low codimension, with potential applications in geometry and representation theory.

2. Preliminaries

Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra over $\mathbb{R}$. We denote by $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ the *complexification* of $\mathfrak{g}$, that is, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. The complexification is obtained by extending the scalar field from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{C}$, resulting in a complex vector space endowed with the naturally extended Lie bracket.

Now, let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra over $\mathbb{C}$. A *real form* of a complex Lie algebra $\mathfrak{g}$ is a real Lie subalgebra $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ such that

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i \mathfrak{g}_0$$

as a direct sum of real vector spaces. Here, the *realification* $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ is defined by considering the same underlying vector space of $\mathfrak{g}$ but viewed as a vector space over $\mathbb{R}$, with the Lie bracket extended by $\mathbb{R}$ -bilinearity. In other words, $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ is the Lie algebra over $\mathbb{R}$ obtained by forgetting the complex scalar multiplication on $\mathfrak{g}$.

Notice that the real dimension of $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ is twice the complex dimension of $\mathfrak{g}$, that is,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}).$$

Moreover, it is useful for this work to recall this result (as a reference, see, for example, [8]).

Theorem 2.1 [8, Theorem 1, p. 9]. *Let $\mathfrak{g}$ be a real Lie algebra. $\mathfrak{g}$ is abelian (resp. nilpotent, solvable, semisimple) if and only if $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ is.*

Furthermore, we also have the following.

Theorem 2.2. *$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ is simple if and only if either $\mathfrak{g}$ is simple, or $\mathfrak{g}$ is isomorphic to $\mathfrak{s} \oplus \bar{\mathfrak{s}}$, where $\mathfrak{s}$ and $\bar{\mathfrak{s}}$ are simple complex Lie algebras that are conjugate to each other.*

Proof. See [8, discursive remark following Theorem 9, p. 9].

In this work, as well as in all the references we will cite and/or refer to, a finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g}$ over $\mathbb{R}$ is said to be *compact* if there exists a positive definite scalar product on $\mathfrak{g}$ which is invariant under the adjoint representation. Any subalgebra of a compact Lie algebra is itself compact.

Proposition 2.1 [7, Proposition 1.3, p. 131]. *The Killing form of a compact Lie algebra is nonpositive definite. Moreover, a real Lie algebra is semisimple and compact if and only if its Killing form is negative definite.*

The following result states a sufficient condition for a complex Lie algebra to admit a compact real form.

Theorem 2.3 [6, Theorem 6.11, p. 353]. *If $\mathfrak{g}$ is a complex semisimple Lie algebra, then $\mathfrak{g}$ has a real compact form $\mathfrak{g}_0$.*

After briefly summarising the necessary definitions and recalling some results on real forms and compact Lie algebras, what remains is to state a lemma from the 1965 work of K. H. Hofmann. This result will be invoked to prove certain statements in the next section.

Lemma 2.2 [5, Lemma 1]. *If $\mathfrak{g}$ is a n -dimensional real compact simple Lie algebra, containing a d -codimensional subalgebra $\mathfrak{h} \neq 0$, then $n \leq \frac{d(d+1)}{2}$.*

3. Main Results

In this section we present the new results of this work, providing a complete list of Lie algebras that admit a subalgebra of codimension 2 but no subalgebra of codimension 1. Furthermore, the final theorem describes the precise structure of such Lie algebras. Throughout the paper, when writing $\dim$ without a subscript, the underlying field will be clear from the context. When the field needs to be specified, we shall write $\dim_{\mathbb{F}}$, where $\mathbb{F}$ denotes the field over which the dimension is taken.

Lemma 3.1. *If $\mathfrak{g}$ is a n -dimensional real simple Lie algebra, containing a 2-codimensional subalgebra $\mathfrak{h} \neq 0$, then $n \leq 10$.*

Proof. If $\mathfrak{g}$ is compact, there is nothing more to prove, as Lemma 2.2 ensures that $n \leq 3$. If $\mathfrak{g}$ is not compact, then two cases arise.

- Case 1: $\mathfrak{g}$ is not a realification of a complex Lie algebra. Then by Theorem 2.2, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ is simple, and then semisimple. Hence, by Theorem 2.3 there exists a real compact form, namely $\mathfrak{g}_c$. This real compact form is also simple (see point b) of Theorem 3.1) and $\dim \mathfrak{g}_c = n$. Let us now consider $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ and the subalgebra $\mathfrak{k} := \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_c$. We first note that $\mathfrak{k}$ is a proper subalgebra of $\mathfrak{g}_c$. Indeed, if this were not the case, i.e., if $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_c$, then it would follow that $\mathfrak{g}_c \subseteq \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. This would imply that $\mathfrak{g}_c$ is the complex vector space generated by its compact real form, which is the whole $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. However, this leads to a contradiction due to dimension considerations. The dimension of $\mathfrak{k}$ is given by

$$\dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + \dim \mathfrak{g}_c - \dim(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{g}_c) = (2n - 4) + n - t,$$

where

$$n := \dim \mathfrak{g}_c = \dim \mathfrak{g},$$

and

$$t := \dim(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{g}_c) \geq \max\{2n - 4, n\}.$$

Thus, if $n > 4$, then $\dim \mathfrak{k} \leq n - 4$, and again by Lemma 2.2, we obtain

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_c \leq \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

- Case 2: $\mathfrak{g}$ is the realification of a complex Lie algebra $\mathfrak{G}$, that is $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}^{\mathbb{R}}$, with $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{G} = n$. Clearly, since $\mathfrak{g}$ is simple, it follows that $\mathfrak{G}$ is also simple. Hence, $\mathfrak{G}$ is semisimple and, by Theorem 2.3, it contains a compact real form, which we denote by $\mathfrak{G}_c$ (so that $\mathfrak{G}_c^{\mathbb{C}} = \mathfrak{G}$). Hence we have $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{G}_c = n$, whereas $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} = 2n - 2$, and $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{G} = 2n$. Let now $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{G}_c$. Similarly to what was done in Case 1, one can show that $\mathfrak{k}$ is a proper subalgebra of $\mathfrak{G}_c$. Indeed, if by contradiction we assume that $\mathfrak{k} = \mathfrak{G}_c$, then it would follow that $\mathfrak{G}_c \subseteq \mathfrak{h}$. Considering these vector

spaces over $\mathbb{C}$, this would imply $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, which is impossible since $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} = 2n - 2$, so $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = n - 1$, whereas $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{G} = n$. Proceeding with similar arguments as above and applying again Lemma 2.2, we conclude that $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \leq 6$.

The following result gives, up to isomorphism, the complete list of real simple Lie algebras.

Theorem 3.1 [6, Theorem 6.105, p. 421]. *Up to isomorphism, every simple real Lie algebra is contained in the following list, and every Lie algebra in the list is simple:*

(a) The Lie algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, where $\mathfrak{g}$ is a complex simple Lie algebra of type A_n for $n \geq 1$, B_n for $n \geq 2$, C_n for $n \geq 3$, D_n for $n \geq 4$, E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , or G_2 .

(b) The compact real form of any $\mathfrak{g}$ as in (a).

(c) The following classical matrix Lie algebras:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{su}(p, q) \text{ with } p \geq q > 0 \text{ and } p + q \geq 2, \\ \mathfrak{so}(p, q) & \begin{cases} \text{with } p > q > 0, & p + q \text{ odd, and } p + q \geq 5, \\ \text{or with } p \geq q > 0, & p + q \text{ even, and } p + q \geq 8, \end{cases} \\ & \mathfrak{sp}(p, q) \text{ with } p \geq q > 0 \text{ and } p + q \geq 3, \\ & \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \text{ with } n \geq 3, \\ & \mathfrak{so}^*(2n) \text{ with } n \geq 4, \\ & \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \text{ with } n \geq 3, \\ & \mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) \text{ with } n \geq 2. \end{aligned}$$

(d) The 12 exceptional, non-complex, non-compact, simple Lie algebras listed in Figures 6.2 and 6.3 of [6].

The only isomorphism among Lie algebras in the list above is $\mathfrak{so}^*(8) \cong \mathfrak{so}(6, 2)$.

Recalling that

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{su}(p, q) &= (p + q)^2 - 1, \quad \text{with } p \geq q > 0, \\ \dim \mathfrak{so}(p, q) &= \frac{(p + q)(p + q - 1)}{2}, \quad \text{with } p \geq q > 0, \\ \dim \mathfrak{sp}(p, q) &= (p + q)(2p + 2q + 1), \quad \text{with } p \geq q > 0, \end{aligned}$$

$$\dim \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = n(2n + 1), \text{ with } n \geq 3,$$

$$\dim \mathfrak{so}^*(2n) = n(2n - 1), \text{ with } n \geq 4,$$

$$\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1, \text{ with } n \geq 3,$$

$$\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) = 4n^2 - 1, \text{ with } n \geq 2,$$

we deduce that, given Lemma 3.1, the Lie algebras that may arise in our investigation are precisely those appearing in Table.

List of simple real Lie algebras of dimension less than or equal to 10, relevant for our analysis. Isomorphisms are indicated when applicable

Lie Algebra	Dimension	Isomorphisms
$\mathfrak{su}(2)$	3	$\mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{so}(3)$
$\mathfrak{su}(3)$	8	—
$\mathfrak{so}(5)$	10	$\mathfrak{sp}(2)$
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$	6	$\mathfrak{so}(3, 1)$
$\mathfrak{su}(2, 1)$	8	—
$\mathfrak{so}(3, 2)$	10	—
$\mathfrak{so}(4, 1)$	10	—
$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	3	—
$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$	8	—

Lemma 3.2. *If the real simple Lie algebra $\mathfrak{g}$ contains a 2-codimensional subalgebra $\mathfrak{h} \neq 0$, but does not contain any 1-codimensional subalgebra, then it is isomorphic to one of the list*

$$\mathcal{L} = \{\mathfrak{su}(2), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}, \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})\}.$$

Proof. If $\mathfrak{g}$ is compact, then by Lemma 2.2 it has dimension 3, hence it must be isomorphic to $\mathfrak{su}(2)$. It is well known that $\mathfrak{su}(2)$ is isomorphic to the 3-dimensional Lie algebra on $\mathbb{R}^3$ with Lie bracket given by the vector cross product. Since the cross product of two nonzero vectors in $\mathbb{R}^3$ is always orthogonal to the plane spanned by those vectors, it follows that $\mathfrak{su}(2)$ cannot have a subalgebra of codimension 1. Indeed, the product of any two independent vectors yields a third vector independent of the first two,

preventing the existence of a 2-dimensional subalgebra. Moreover, for dimensional reasons, we must also exclude in the compact case both $\mathfrak{su}(3)$ and $\mathfrak{so}(5)$ from Table.

From now on, let us assume that $\mathfrak{g}$ is not compact. The Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$, which is isomorphic to $\mathfrak{so}(3, 1)$, appears in our list $\mathcal{L}$ by [4] (see Sections 6 and 7). In particular, the authors construct in Section 6 a 4-dimensional Borel subalgebra of $\mathfrak{so}(3, 1)$, and prove in Section 7 that no 5-dimensional subalgebras exist.

The Lie algebra $\mathfrak{su}(2, 1)$ does not belong to $\mathcal{L}$, as it admits neither subalgebras of codimension 1 nor subalgebras of codimension 2 (see [3]).

Regarding the Lie algebra $\mathfrak{so}(3, 2)$, the authors in [1] proved that its maximal subalgebras fall into three categories: maximal parabolic subalgebras, the reducible subalgebra $\mathfrak{so}(4)$, and a simple irreducible subalgebra $\mathfrak{sl}_2^5(\mathbb{C})$ defined by the natural action on $S^4(\mathbb{C}^2)$. However, none of the subalgebras listed in their work has dimension 8 or 9. Therefore, $\mathfrak{so}(3, 2)$ does not belong to the family $\mathcal{L}$.

We now prove that $\mathfrak{so}(4, 1) \notin \mathcal{L}$ by showing that it does not possess any subalgebras of codimension 1 or codimension 2.

Suppose $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{so}(4, 1)$ is a subalgebra with $\dim \mathfrak{h} = t$, where $t \in \{8, 9\}$. Consider the subalgebra

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(4) \right\}.$$

Recall here that the matrices in $\mathfrak{so}(4, 1)$ are of the form

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y^t & 0 \end{pmatrix},$$

with $X \in \mathfrak{so}(4)$. Obviously, $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{so}(4)$, so $\mathfrak{m}$ is compact and $\dim \mathfrak{m} = 6$. Then, by Lemma 2.2, $\mathfrak{m}$ contains neither subalgebras of codimension 1 nor codimension 2. If $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{h}$, then for every $A \in \mathfrak{so}(4)$ and every

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y^t & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

with $Y \neq 0$, we have

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^t & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [A, X] & AY \\ -Y^t A & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h},$$

which would imply that $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(4, 1)$, a contradiction.

The Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ is not included in the family $\mathcal{L}$ because it contains a subalgebra of codimension 1, for example

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Finally, the Lie algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ belongs to the family $\mathcal{L}$ since, according to [2, Theorem 20, p. 18]: it has subalgebras of dimension 6 but no subalgebras of dimension 7.

We are now in a position to prove the main theorem of this work.

Theorem 3.2. *If $\mathfrak{h} \neq 0$ has codimension two in $\mathfrak{g}$ and there is no subalgebra $\mathfrak{k}$ of codimension one in $\mathfrak{g}$, then $\mathfrak{g}$ has an ideal $\mathfrak{u}$, contained in $\mathfrak{h}$, such that $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ is isomorphic to one of the list $\mathcal{L}$. Moreover, $\mathfrak{u}$ contains the radical $\mathfrak{r}$ of $\mathfrak{g}$.*

Proof. By contradiction, let $\mathfrak{g}$ be a counterexample of minimal dimension. First, observe that $\mathfrak{h}$ cannot contain any non-zero ideal $\mathfrak{v}$ of $\mathfrak{g}$, for otherwise the quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{v}$ would yield a counterexample of smaller dimension. In particular, $\mathfrak{g}$ cannot have a one-dimensional ideal $\mathfrak{u}$, since in that case $\mathfrak{h} + \mathfrak{u}$ would be a subalgebra of $\mathfrak{g}$ of codimension one.

Note that $\mathfrak{g}$ must be perfect; otherwise, any codimension-1 subalgebra of the abelian quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ would correspond to a codimension-1 subalgebra of $\mathfrak{g}$. However, by Lemma 3.2, $\mathfrak{g}$ is not simple. Moreover, $\mathfrak{g}$ is not semisimple. Indeed, if

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{s}_s$$

is semisimple (with $\mathfrak{s}_j$ simple and $s > 1$), then each $\mathfrak{s}_j$ is not contained in $\mathfrak{h}$, admits no subalgebra of codimension 1, and $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}_j$ has codimension 2 in $\mathfrak{s}_j$, since $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{s}_j$. Hence, $\mathfrak{s}_j \in \mathcal{L}$. Now we

show that one of the ideals $\mathfrak{s}_j$ is contained in $\mathfrak{h}$, leading to a contradiction. Indeed, let

$$B_{\mathfrak{h}} = \{x_{11}, \dots, x_{t_1 1}; x_{12}, \dots, x_{t_2 2}; \dots; x_{1s}, \dots, x_{t_s s}; y_1, \dots, y_{2s}\}$$

be a basis of $\mathfrak{h}$ such that, for each j , the set $\{x_{1j}, \dots, x_{t_j j}\}$ is a basis of $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}_j$. Write $y_1 = y_{11} + \dots + y_{1s}$ with $y_{1j} \in \mathfrak{s}_j$. Then, for any $x_{ij} \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}_j$, we have

$$[y_1, x_{ij}] = [y_{1j}, x_{ij}] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}_j.$$

There exists at least one index j such that $y_{1j} \notin \mathfrak{h}$; otherwise y_1 would be a linear combination of the vectors in $\{x_{11}, \dots, x_{t_1 1}; x_{12}, \dots, x_{t_2 2}; \dots; x_{1s}, \dots, x_{t_s s}\}$, which is impossible. But then $\langle y_{1j} \rangle + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}_j)$ would be a subalgebra of $\mathfrak{s}_j$ of codimension one, contradicting $\mathfrak{s}_j \in \mathcal{L}$. In particular, the nilradical $\mathfrak{n}$ of $\mathfrak{g}$ is nonzero. Setting $\mathfrak{v} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, we have $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$, and hence $\mathfrak{v}$ has codimension 2 in $\mathfrak{n}$.

Let $\mathfrak{v} \neq 0$. If $\mathfrak{v}$ is maximal in $\mathfrak{n}$, then it is an ideal of the nilpotent algebra $\mathfrak{n}$, and hence also an ideal of $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$, which is impossible since $\mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{h}$. Therefore there exists $\mathfrak{v} \subsetneq \mathfrak{u} \subsetneq \mathfrak{n}$, and again $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{u}$. Since $\mathfrak{v}$ is maximal in $\mathfrak{u}$, it is an ideal of $\mathfrak{u}$, and thus also of $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{u}$, which is again a contradiction. Thus $\mathfrak{v} = 0$, and $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{n}$ with $\dim \mathfrak{n} = 2$. Hence $\mathfrak{n}$ is abelian and $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ is reductive. Moreover, since $\mathfrak{g}$ is perfect and $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{n}$, the subalgebra $\mathfrak{h}$ is perfect as well, and thus semisimple. At least one simple component $\mathfrak{s}_i$ of $\mathfrak{h}$ must act non-trivially on the 2-dimensional abelian ideal $\mathfrak{n}$, which forces $\mathfrak{s}_i \cong \mathfrak{sl}_2$. But $\mathfrak{sl}_2$ contains the 1-codimensional subalgebra of traceless triangular matrices; hence $\mathfrak{h}$ contains a 1-codimensional subalgebra $\mathfrak{w}$, and $\mathfrak{g}$ contains the 1-codimensional subalgebra $\mathfrak{w} \ltimes \mathfrak{n}$ — a final contradiction.

Finally, to prove that the ideal $\mathfrak{u}$ contains the radical $\mathfrak{r}$ of $\mathfrak{g}$, it suffices to observe that $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ is simple; therefore the solvable ideal $(\mathfrak{r} + \mathfrak{u})/\mathfrak{u}$ must vanish.

Acknowledgments. *Alfonso Di Bartolo was supported by the University of Palermo (FFR2024, UNIPA BsD). Gianmarco La Rosa was supported by “Sustainability Decision Framework (SDF)” Research Project — CUP B79J23000540005 — Grant Assignment Decree No. 5486 adopted on 2023-08-04. The authors were also supported by “National Group for Algebraic and Geometric Structures, and Their Applications” (GNSAGA — INdAM).*

References

1. *Alekseevsky, D. V., Santi, A.*: Homogeneous symplectic 4-manifolds and finite dimensional Lie algebras of symplectic vector fields on the symplectic 4-space. *Moscow Math. J.*, **20**:2, 217—256 (2020). doi: 10.17323/1609-4514-2020-20-2-217-256.
2. *Chapovskyi, Y., Koval, S., Zhur, O.*: Subalgebras of Lie algebras. Example of $sl(3, R)$ revisited. 2024. arXiv: 2403.02554 [math-ph].
3. *Douglas, A., de Graaf, W. A.*: The subalgebras of the generalized special unitary algebra $su(2, 1)$. 2025. arXiv: 2504.17942 [math.GR].
4. *Ghanam, R., Thompson, G., Bandara, N.*: Lie subalgebras of $so(3, 1)$ up to conjugacy. *Arab J. Math. Sci.*, **28**:2, 253—261 (2022). doi: 10.1108/AJMS-01-2022-0007.
5. *Hofmann, K. H.*: Lie algebras with subalgebras of co-dimension one. *Illinois J. of Math.*, **9**, 636—643 (1965). doi: 10.1215/ijm/1256059306.
6. *Knapp, A. W.*: Lie groups beyond an introduction. 2nd ed. Boston, Basel, Berlin (2002). Vol. 140. Prog. Math.
7. *Onishchik, A. L., Vinberg, E. B., Gorbatshevich, V. V.*: Lie groups and Lie algebras III. Structure of Lie groups and Lie algebras. *Encycl. Math. Sci.* Vol. 41. Berlin (1994).
8. *Serre, J.-P.*: Complex semisimple Lie algebras. New York (1987).

For citation: Di Bartolo, A., La Rosa, G.: Flag manifolds without one codimensional strata. *DGMF*, **57** (1), 39—51 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-57-1-3>.



SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE ([HTTP://creativecommons.org/licenses/by/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

УДК 514

А. Ди Бартоло¹, Дж. Ла Роса²

^{1,2} Университет Палермо, Италия

¹ alfonso.dibartolo@unipa.it, ² gianmarco.larosa@unipa.it

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-3

Флаговые многообразия без одномерных слоев

Поступила в редакцию 03.09.2025 г.

В данной работе предлагается классификация конечномерных вещественных алгебр Ли, допускающих подалгебры коразмерности два, но не допускающих подалгебр коразмерности один, что приводит к описанию однородных пространств без изотропных подгрупп коразмерности один. Данное исследование расширяет существующую основу исследований подалгебр коразмерности один, стремясь распространить анализ на новую область. Результатом этого расширения является исчерпывающее описание соответствующих семейств. Показано, что такая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит идеал $\mathfrak{u}$, содержащий радикал алгебры $\mathfrak{g}$ такой, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ принадлежит списку $\mathcal{L}$, состоящему из одной компактной и двух некомпактных алгебр Ли.

Ключевые слова: однородные пространства, алгебры Ли, подалгебры коразмерности два, простые алгебры Ли, компактные вещественные формы

Список литературы

1. Alekseevsky D. V., Santi A. Homogeneous symplectic 4-manifolds and finite dimensional Lie algebras of symplectic vector fields on the symplectic 4-space // Moscow Mathematical Journal. 2020. Vol. 20, № 2. P. 217—256. doi: 10.17323/1609-4514-2020-20-2-217-256.
2. Chapovskyi Y., Koval S., Zhur O. Subalgebras of Lie algebras. Example of $sl(3, R)$ revisited. 2024. arXiv: 2403.02554 [math-ph].
3. Douglas A., de Graaf W. A. The subalgebras of the generalized special unitary algebra $su(2, 1)$. 2025. arXiv: 2504.17942 [math.GR].

4. *Ghanam R., Thompson G., Bandara N.* Lie subalgebras of $\mathfrak{so}(3, 1)$ up to conjugacy // Arab Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 28, №2. P. 253—261. doi: 10.1108/AJMS-01-2022-0007.

5. *Hofmann K.H.* Lie algebras with subalgebras of co-dimension one // Illinois Journal of Mathematics. 1965. Vol. 9. P. 636—643. doi: 10.1215/ijm/1256059306.

6. *Knapp A.W.* Lie groups beyond an introduction. 2nd ed. Boston ; Basel ; Berlin, 2002. (Prog. Math.; Vol. 140).

7. *Onishchik A.L., Vinberg E.B., Gorbatshevich V.V.* Lie groups and Lie algebras III. Structure of Lie groups and Lie algebras // Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin, 1994. Vol. 41.

8. *Serre J.-P.* Complex semisimple Lie algebras. N. Y., 1987.

Для цитирования: *Ди Бартоло А., Ла Роза Дж.* Флаговые многообразия без одномерных слоев // ДГМФ. 2026. № 57 (1). С. 39—51. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-3>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

Д. С. Климентов 

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

dklimentov75@gmail.com

SPIN-код: 7449-8567, AuthorID: 9418

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-4

О построении второй основной формы поверхности почти ограниченного искривления положительной кривизны

В статье предлагается способ построения второй основной формы поверхности класса C^1 положительной кривизны. Используется вероятностный подход к этой задаче, дается понятие второй производной Ито вдоль направления броуновского движения.

Ключевые слова: главная поверхность почти ограниченного искривления, гауссова кривизна, вторая производная Ито по направлению броуновского движения, вторая форма поверхности

1. Предварительные сведения

Пусть S — поверхность положительной кривизны класса C^1 в пространстве E^3 .

Определение 0.1. Поверхность класса C^1 мы будем называть *поверхностью почти ограниченного искривления*.

Введем следующие обозначения: параметризация поверхности $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$; $\vec{n}$ — нормаль к поверхности S ; D — область изменения параметров (x^1, x^2) ; $B_t(B_t^1, B_t^2)$ — каноническое броуновское движение на D . Не ограничивая общности,

Поступила в редакцию 26.12.2025 г.

© Климентов Д. С., 2026

будем считать, что вторая основная форма поверхности S приведена к изотермическому виду:

$$II = \mu((dx^1)^2 + (dx^2)^2).$$

Приведем некоторые понятия из теории меры и теории случайных процессов.

Определение 1.1. σ -полем (σ -алгеброй) над множеством Ω будем называть семейство множеств, замкнутое относительно операций $\cap$ и $\cup$, содержащее множества $\emptyset$ и Ω (см.: [2, с. 145]). Минимальное σ -поле над T , содержащее все открытые в T множества, называется *борелевским σ -полем* и обозначается $\mathfrak{B}(T)$.

Замечание 1.1. При определении борелевского σ -поля мы использовали пространство T , а не Ω , потому что на T уже задана топология (топология, порожденная метрикой), а на Ω такой структуры мы не задали. Однако если считать Ω топологическим пространством, то определение борелевского σ -поля можно формулировать и для него. В дальнейшем мы будем использовать понятия как множества, так и пространства Ω . Такая терминология обусловлена традицией в теории случайных процессов.

Определение 1.2. Множество Ω вместе с σ -полем $\mathcal{F}$ над ним назовем *измеримым пространством* [2, с. 145].

Рассмотрим теперь измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с σ -полем $\mathcal{F}$, мерой P и некоторым пространством Ω .

Определение 1.3. Мере P будем называть σ -аддитивной [2, с. 145], если для не более чем счетного набора множеств, попарно не пересекающихся полем A_n , $n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство $P(\cup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.

Определение 1.4. Любую σ -аддитивную меру P на пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ мы будем называть *вероятностной мерой* на Ω , если $P(\Omega) = 1$, а тройку $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — *вероятностным пространством*. Множества из $\mathcal{F}$ будем называть *событиями* [2, с. 145].

Дадим теперь определение случайного процесса.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ — возрастающее семейство под- σ -полей из $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ при $0 \leq t \leq s$. Семейство $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ будем называть *поток* на Ω и предполагать, что поток непрерывен справа: [1, с. 29]: $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.

Определение 1.5. Набор $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ мы будем называть *стохастическим базисом* на Ω .

Определение 1.6. Функцию $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в некотором топологическом измеримом пространстве $\mathcal{U}$, определенную на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, назовем *случайной величиной* [2, с. 184], если для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$

$$\{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Определение 1.7. Для интегрируемой (действительной или комплексной) случайной величины ξ число

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega),$$

где интеграл мы понимаем в смысле Лебега, назовем *математическим ожиданием* этой случайной величины [1, с. 20].

Пусть $W^d = C([0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ — множество всех непрерывных функций $w: [0, \infty] \ni t \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^d$. Определим на W^d метрику ρw следующим образом (см.: [1, с. 25]):

$$\rho w(w_1, w_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\max_{\{0 \leq t \leq n\}} |w_1(t) - w_2(t)| \right) \wedge 1 \right],$$

где $a \wedge b = \min(a, b)$ и $w_1, w_2 \in W^d$.

Можно показать, что пространство W^d полно и сепарабельно в этой метрике [1, с. 25]. Через $\mathfrak{B}(W^d)$ мы будем обозначать борелевское σ -поле, натянутое на пространство W^d с топологией, порожденной метрикой ρw .

Определение 1.8. *Непрерывным -мерным случайным процессом*, заданным на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фазовым пространством $\mathbb{R}^d$, мы будем называть случайную величину со значениями во множестве $W^d = C([0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ всех непрерывных функций $w: [0, \infty] \ni t \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^d$, то есть $\frac{\mathcal{F}}{\mathfrak{B}(W^d)}$ измеримое отображение $X: \Omega \rightarrow W^d$ (см.: [1, с. 25]). При всяком фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $X(t, \omega)$ называется *траекторией* случайного процесса. Процесс назовем *непрерывным справа*, если его траектории непрерывны справа.

Замечание 1.2. В определении -мерного случайного процесса фазовое пространство $\mathbb{R}^d$ можно заменить каким-либо другим топологическим пространством $\mathcal{U}$ и говорить о случайном процессе с фазовым пространством $\mathcal{U}$.

Определение 1.9. Действительный случайный процесс $X = (X_t)_{t \in T}$ называется *мартингалом относительно потока* σ -полей из $(\mathcal{F}_t)$ (см.: [1, с. 34]), если выполняются следующие условия:

- 1) случайная величина X_t интегрируема для каждого $t \in T$;
- 2) процесс $X = (X_t)_{t \in T}$ согласован с $(\mathcal{F}_t)$;
- 3) $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ п. н. для любых $t, s \in T$, $s < t$.

Здесь и далее сокращение «п. н.» означает «почти наверное», то есть равенство выполняется с вероятностью 1.

Введем следующие обозначения:

- $\mathcal{M}$ — пространство всех непрерывных локально квадратично интегрируемых мартингалов $M = M_t$ относительно $(\mathcal{F})_t$ с $M_0 = 0$ п. н.;

- $\mathcal{A}_+$ — семейство всех непрерывных $(\mathcal{F}_t)$ -согласованных процессов $A = A_t$ таких, что $A_0 = 0$ и $t \rightarrow A_t$ п. н. не убывает;

- $\mathcal{A}$ — семейство всех непрерывных $(\mathcal{F}_t)$ -согласованных процессов $A = A_t$ таких, что $A_0 = 0$ и $t \rightarrow A_t$ является функцией с конечной вариацией на каждом конечном интервале п. н.;

• $\mathcal{B}$ — семейство всех непрерывных $(\mathcal{F}_t)$ -предсказуемых процессов $\Phi = \Phi_t$ таких, что с вероятностью единица $t \rightarrow \Phi_t$ является ограниченной функцией на каждом конечном интервале.

Определение 1.10. Пусть $X = X_t$ — случайный процесс, представимый в виде (см.: [1, с. 105])

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

где $X_0 - \mathcal{F}_0$ — измеримая случайная величина, $M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{A}$.

Будем называть такой процесс *квазимартингалом*. Совокупность всех квазимартингалов обозначим $\mathcal{Q}$.

Определение 1.11. Будем говорить, что квазимартингалы $X, Y \in \mathcal{Q}$ эквивалентны, если с вероятностью единица

$$-X_s = Y_t + Y_s$$

для всех $0 \leq s \leq t$ (см.: [1, с. 106]).

Класс эквивалентности, содержащий X , будем обозначать dX и называть *стохастическим дифференциалом* X .

Подробнее о свойствах стохастического дифференциала можно посмотреть, например, в [1].

Приведем теперь одну из возможных формулировок формулы Ито:

Теорема 1.1 (Формула Ито) [2, с. 26]. Пусть n -мерный процесс X_t имеет стохастический дифференциал, $u(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда случайный процесс $u(X_t)$ имеет стохастический дифференциал и

$$du(X_t) = \partial_i u(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \partial_{ij} u(X_t) dX_t^i dX_t^j.$$

Здесь мы используем обычное в дифференциальной геометрии соглашение о суммировании, где по повторяющимся индексам идет сложение от единицы до размерности пространства.

Подробнее о теории случайных процессов см., например, в [3].

2. Основной результат

2.1. Вторая производная Ито вдоль траектории броуновского движения

На поверхности S имеет место формула Ито [1, с. 73]

$$df(Z_t) = \partial_i f(Z_t) dZ_t^i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j f(Z_t) dZ_t^i dZ_t^j,$$

где d — стохастический дифференциал, f — дважды дифференцируемая функция, Z_t — диффузионный процесс на S . Необходимо отметить, что мы рассматриваем диффузионный процесс с нулевыми сносом и вероятностью обрыва.

Возьмем вместо случайного процесса Z_t каноническое броуновское движение, которое совпадает с процессом X_t [2]:

$$df(B_t) = \partial_i f(B_t) dB_t^i + \frac{1}{2} [\partial_{11} f(B_t) dt + \partial_{22} f(B_t) dt]. \quad (1)$$

Здесь мы воспользовались свойством броуновского движения $dB^i dB^j = \delta^{ij} dt$ [2, с. 21].

Рассмотрим последнюю формулу для двух частных случаев:

$$1) Z_1 = (B_t^1, v);$$

$$2) Z_2 = (u, B_t^2).$$

Здесь $u, v \in R$ — числа из области параметризации поверхности. Подставим процессы Z_1 и Z_2 в формулу (1):

$$df(Z_1) = \partial_1 f(Z_1) dB_t^1 + \frac{1}{2} \partial_{11} f(Z_1) dt,$$

$$df(Z_2) = \partial_1 f(Z_2) dB_t^2 + \frac{1}{2} \partial_{22} f(Z_2) dt.$$

Выразим отсюда вторые производные:

$$\partial_{11} f(Z_1) dt = 2(df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1) dB_t^1),$$

$$\partial_{22} f(Z_2) dt = 2(df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2) dB_t^2).$$

Определение 2.1. *Второй производной Ито вдоль траектории броуновского движения B^1 (B^2) назовем*

$$\partial_{11I}f(Z_1)dt = 2(df(Z_1) - \partial_1f(Z_1)dB_t^1), \quad (2)$$

$$\partial_{22I}f(Z_2)dt = 2(df(Z_2) - \partial_1f(Z_2)dB_t^2).$$

В дальнейшем вторую производную Ито вдоль соответствующей траектории будем обозначать $f_{11;I_1}$ вдоль траектории B_1 и $f_{22;I_2}$ вдоль траектории B_2 .

2.2. Построение второй формы поверхности почти ограниченного искривления положительной кривизны

Будем придерживаться следующих обозначений. Пусть S — гладкая поверхность гауссовой кривизны (можно считать, что ее вторая форма положительно определена) класса C^3 с основными формами $I = g_{ij}dx^i dx^j$, $II = b_{ij}dx^i dx^j$. По-прежнему диффузии, ими порожденные, будем обозначать X_t , Y_t . Переходная плотность и переходная функция соответствующего случайного процесса обозначается $p_t^i(\vec{x}, \vec{y})$, $P^i(t, \vec{x}, \Gamma)$, где $i = 1$ соответствует первой форме, $i = 2$ — второй, Γ — борелевское множество на нашей поверхности. Нормаль к поверхности S будем обозначать $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.

Не ограничивая общности, будем считать, что вторая форма поверхности S приведена к изотермическому виду:

$$II = \mu ((dx^1)^2 + (dx^2)^2).$$

Имеет место

Теорема 2.1. *Пусть S — поверхность класса C^3 положительной кривизны. Тогда на траекториях процессов Z_1 и Z_2 вторая форма поверхности может быть записана в виде*

$$II dt = \frac{(\vec{r}_{11I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} ((dx^1)^2 + (dx^2)^2),$$

где $|I|$ — дискриминант первой формы поверхности, равенство верно на траекториях процесса Z_1 ;

$$I|dt = \frac{(\vec{r}_{22I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} ((dx^1)^2 + (dx^2)^2),$$

где $|I|$ — дискриминант первой формы поверхности, равноство верно на траекториях процесса Z_2 .

Доказательство. В силу наших предположений вторая форма поверхности приведена к изотермическому виду:

$$\Pi = \mu((dx^1)^2 + (dx^2)^2). \quad (3)$$

Хорошо известна формула для коэффициентов второй формы поверхности (см.: [4, с. 237]):

$$b_{ij} = \frac{(\vec{r}_{ijI}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = \frac{(\vec{r}_{ijI}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}. \quad (4)$$

Поскольку в выражении (3) отсутствует смешанная производная, то нас интересуют только выражения для b_{11} и b_{22} .

Сузим равенство (4) на множество $Z_t^1 = (B_t^1, c)$, где c — постоянная из области определения поверхности. На этом множестве мы можем заменить производную $\vec{r}_{11}$ по формуле (2), предварительно умножив (4) на dt :

$$b_{11}dt = \frac{(\vec{r}_{11I}dt, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} = \frac{(2(d\vec{r}(Z_1) - \partial_1\vec{r}(Z_1)dB_t^1)dt, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}.$$

Подставим последнее выражение в равенство (3) и получим первое утверждение теоремы.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. $\square$

Рассмотрим поверхность S класса C^1 (поверхность почти ограниченного искривления) положительной кривизны (здесь под положительной кривизной будем понимать кривизну, определенную в работе [7], для простоты можно считать, что аппроксимирующие поверхности имеют положительную гауссову кривизну). Для нее определим вторую основную форму на траекториях процессов Z_1 и Z_2 .

Далее будем считать, что S — поверхность положительной кривизны класса C^1 с первой основной формой $I = g_{ij}dx^i dx^j$ и параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$. По-прежнему диффузию,

порожденную первой формой, будем обозначать X_t . Переходную плотность и переходную функцию случайного процесса X_t обозначим $p_t^1(\vec{x}, \vec{y})$, $P^1(t, \vec{x}, \Gamma)$, нормаль к поверхности S — $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, броуновское движение на E^2 — $B_t = (B_t^1, B_t^2)$.

Будем рассматривать последовательность вектор-функций $\{\vec{r}^n(x^1, x^2)\}$, сходящуюся к вектор-функции $\vec{r}(x^1, x^2)$ в метрике C^1 . Кроме того, будем считать, что все вектор-функции определены на одной области $D \subset E^2$.

Определим вторую форму поверхности S на траекториях процессов Z_1 и Z_2 формально, по формулам, выведенным в теореме 2.1.

Не ограничивая общности, будем считать, что на аппроксимирующих поверхностях $\vec{r}^n = \vec{r}^n(x^1, x^2)$ вторая основная форма приведена к изотермическому виду

$$II^n = \mu^n((dx^1)^2 + (dx^2)^2).$$

Теорема 2.2. *На траекториях (B_t^1, v) и (u, B_t^2) имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n = \mu.$$

Доказательство. Докажем нашу теорему для траекторий (B_t^1, v) . Случай для траекторий (u, B_t^2) доказывается аналогично.

На траекториях (B_t^1, v) коэффициент второй формы имеет вид

$$\mu(B_t^1, v)dt = \frac{(\vec{r}_{11I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}$$

и $\vec{r}_{11I} = (2(d\vec{r}(Z_1) - \partial_1 \vec{r}(Z_1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)$. По предположению, $\vec{r}_i^{(k)} \rightarrow \vec{r}_i$, $d\vec{r}^{(k)} \rightarrow d\vec{r}$ в силу определения стохастического дифференциала.

В самом деле, обозначим $\Delta^k = \vec{r}^{(k)}(Z_1(t)) - \vec{r}^{(k)}(Z_1(s))$, $k = 0, \dots, \infty$. Рассмотрим разность $\Delta^k - \Delta$. Очевидно, что $\Delta^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то есть $d\vec{r}^{(k)} \rightarrow d\vec{r}$.

Таким образом, мы получили, что $\mu^k(B_t^1, v) \rightarrow \mu(B_t^1, v)$.

Теорема доказана. $\square$

Итак, мы получили, что формальное определение второй формы поверхности S законно, и коэффициенты вторых форм аппроксимирующих поверхностей сходятся к формально определенному коэффициенту второй формы поверхности S .

Список литературы

1. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
2. Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Стохастическое исчисление // Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. Т. 45. С. 5—253.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., 1963.
4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., Л., 1939.
5. Бакельман И. Я. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей // Успехи математических наук. 1956. Т. 11, № 2 (68). С. 67—124.
6. Климентов Д. С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ограниченного искривления положительной кривизны // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11, № 4. С. 41—49.
7. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны (Основы внутренней геометрии поверхностей) // Тр. МИАН СССР. Т. 63. М.; Л., 1962. С. 3—262.

Для цитирования: Климентов Д. С. О построении второй основной формы поверхности почти ограниченного искривления положительной кривизны // ДГМФ. 2026. № 57 (1). С. 52—63. doi: 10.5922/0321-4796-2025-57-1-4.



MSC 2010: 53A99, 60D05

D. S. Klimentov 

Southern Federal University,
8a, Milchakow, st., 344090, Rostov-on-Don, Russia
dklimentov75@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2097-452X>

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-4

On construction of the second basic shape of the surface of almost limited curvature of positive curvature

Submitted on December 26, 2025

This article proposes a method for constructing the second fundamental form of a C^1 surface of positive curvature. It is well known that constructing the second fundamental form of a surface requires at least a twice continuously differentiable parametrization. This paper uses a probabilistic approach to this problem, introducing the concept of the second Itô derivative along the direction of Brownian motion. In more detail, we define the second derivative “without the second derivative”. For this, we use the Itô formula, restricted to special random processes. Using the proposed construction, we can write Weingarten's equations for surfaces of almost bounded curvature (the paper has been accepted for publication in the Ufa Mathematical Journal) and determine the mean curvature almost surely over the entire surface pointwise. To some extent, this paper can be viewed as a generalization of I. Ya. Bakelman's work “Differential Geometry of Smooth Irregular Surfaces” (see [5]). In the author's opinion, further reduction of surface smoothness is difficult to achieve using analytical methods (the technique developed in [5]), and new research methods are needed. This paper proposes one such method: a stochastic framework for studying low-smoothness surfaces. Previously, a slightly different approach was used, based on transition functions and transition densities of random processes; see, for example, [6] (which also contains references to earlier works).

Keywords: main surface of almost limited curvature, Gaussian curvature, second derivative of Ito in the direction of Brownian motion, second form of a surface

References

1. *Watanabe, S., Ikeda, N.*: Stochastic differential equations and diffusion processes. Moscow (1986).
2. *Anulova, S. V., Veretennikov, A. Yu., Krylov, N. V., Liptser, R. Sh., Shiryayev, A. N.*: Stochastic calculus. Itogi Nauki i Tekhn. Series Sovrem. probl. mat. Fundam. directions, 45, 5—253 (1989).
3. *Dynkin, E. B.*: Markov processes. Moscow (1963).
4. *Rashevsky, P. K.*: Course of differential geometry. Moscow, Leningrad (1939).
5. *Bakelman, I. Y.*: Differential geometry of smooth irregular surfaces. Russian Mathematical Surveys, **11**:2(68), 67—124 (1956).
6. *Klimentov, D. S.*: Stochastic analogue of fundamental theorem of surface theory for surfaces of bounded distortion and positive curvature. Ufa Math. J., **11**:4, 40—48 (2019).
7. *Aleksandrov, A. D., Zalgaller, V. A.*: Two-dimensional manifolds of bounded curvature (Fundamentals of intrinsic geometry of surfaces). Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR, 63, Moscow, Leningrad, 3—262 (1962).

For citation: Klimentov, D.S.: On geodesic points of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 57 (1), 52—63 (2026). doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-4.



М. В. Кретов¹, Е. М. Кретьова²

^{1, 2} Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

¹ Kretov1@mail.ru, ² e.kretova1@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-5

Об одном подклассе комплексов эллипсоидов, допускающем безынтегральное представление

С использованием теоретико-группового метода дифференциально-геометрических исследований Г.Ф. Лаптева, а также методики научных исследований по дифференциальной геометрии В.С. Малаховского продолжается изучение комплексов (трехпараметрических семейств) эллипсоидов со специальными свойствами ассоциированных с ними дифференцируемых отображений в трехмерном аффинном пространстве. Комплекс эллипсоидов рассматривается как образ соответствующего отображения. Исследуется подкласс ранее изученных комплексов эллипсоидов, когда индикатриса разности второго и третьего координатных векторов является прямой, параллельной первому координатному вектору. Найдены интересные геометрические свойства исследуемого многообразия, которые позволяют сконструировать его, то есть найти его безынтегральное представление.

Ключевые слова: многообразие, комплекс, репер, эллипсоид, аффинное пространство, индикатриса, фокальное многообразие, безынтегральное представление

Рассмотрим трехмерное аффинное пространство. Отнесем его к подвижному реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, состоящему из точки A и линейно независимых векторов $\bar{e}_\alpha$ ($\alpha, \beta, \dots = 1, 3$).

Поступила в редакцию 16.02.2026 г.

© Кретов М. В., Кретьова Е. М., 2026

Инфинитезимальные перемещения репера $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$ определяются уравнениями

$$d\bar{A} = \omega^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta, \quad (1)$$

причем формы Пфаффа ω^α , ω_β^α удовлетворяют структурным уравнениям Картана:

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha, \quad (2)$$

выражающим условия полной интегрируемости системы дифференциальных уравнений (1).

Пусть G — фундаментальная группа трехмерного аффинного пространства над полем действительных чисел, q — центральная невырожденная гиперквадрика трехмерного аффинного пространства и C — ее центр. Гиперквадрика q является индуцирующей фигурой ранга 9 индекса 3 (см.: [1]). Ее уравнение запишем в виде

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2a_\alpha x^\alpha - 1 = 0, \quad (3)$$

причем

$$\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{\alpha\beta} & a_\alpha^T \\ a_\alpha & -1 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

Множество $R(q)$ для всех гиперквадрик, аффинно эквивалентных гиперквадрике (3), является однородным пространством [2]. Это легко доказывается в частично канонизированном репере R_0 , который строится из репера R , когда $a_\alpha = 0$. В этом случае его вершина помещается в центр гиперквадрики q .

Структурные формы трехмерного аффинного пространства A_3 и множества $R(q)$ в репере R_0 соответственно имеют вид

$$\Delta x^\alpha \equiv dx^\alpha + x^\beta \omega_\beta^\alpha + \omega^\alpha, \quad (5)$$

$$\omega^\alpha, \quad \nabla a_{\alpha\beta}, \quad (6)$$

где $\nabla a_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma} \omega_\beta^\gamma - a_{\gamma\beta} \omega_\alpha^\gamma$.

Тогда дифференциальные уравнения дифференцируемого отображения $\mathcal{F}: A_3 \rightarrow R(q)$ записываются в виде (см.: [3])

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma} \Delta x^\gamma, \quad (7)$$

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha \Delta x^\beta, \quad (8)$$

где $a_{\alpha\beta}$ и $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ являются компонентами фундаментального объекта первого порядка для отображения.

Пусть f — такое дифференцируемое отображение $\mathcal{F}$, которое каждой точке $A \in A_3$ ставит в соответствие гиперквадрик q с центром в точке A . Тогда $\Delta x^\alpha = \omega^\alpha$, а уравнения (8) обращаются в тождества и дифференциальные уравнения отображения f примут вид

$$\Delta a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma} \omega^\gamma. \quad (9)$$

Обозначим через $\mathcal{I}_m f$ образ отображения f в $R(q)$. Ограничиваясь случаем максимального ранга отображения f в каждой точке области определения, получим, что $K_3 = \mathcal{I}_m f$ является дифференцируемым многообразием размерности 3, которое в дальнейшем будет называться *комплексом центральных невырожденных гиперквадрик*.

В дальнейшем исследовании проводились в соответствии с методикой, изложенной в работах [4—7].

Уравнение гиперквадрики q и система дифференциальных уравнений комплекса K_3 в репере R_0 принимают соответственно вид

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta - 1 = 0, \quad (10)$$

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma} \omega^\gamma. \quad (11)$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса K_3 запишется в виде

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma} \omega^\gamma, \quad \nabla \Lambda_{\alpha\beta\gamma} \wedge \omega^\gamma = 0, \quad (12)$$

где $\nabla \Lambda_{\alpha\beta\gamma} = d\Lambda_{\alpha\beta\gamma} - \Lambda_{\alpha\beta\delta} \omega_\gamma^\delta - \Lambda_{\alpha\delta\gamma} \omega_\beta^\delta - \Lambda_{\delta\beta\gamma} \omega_\alpha^\delta$.

Система (12) определяет комплекс K_3 с произволом шести функций трех аргументов (см.: [6]).

Г. Ф. Лаптев установил в [8], что погруженное многообразие обладает в общем случае основным объектом (фундаментальным объектом наинизшего порядка, система дифференциальных уравнений которого алгебраически разрешима относительно всех вторичных форм). Надлежащее задание компонент один раз продолженного основного объекта определяет погруженное многообразие с точностью до констант. Основным объектом комплекса K_3 является фундаментальный объект

$$\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\}. \quad (13)$$

Продолжая систему (12) дважды, получим

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{\alpha\beta\gamma} &= \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \omega^\delta, \\ \nabla \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \wedge \omega^\delta &= 0, \\ \nabla \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} \omega^\varepsilon, \end{aligned} \quad (14)$$

где коэффициенты $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$, согласно лемме Картана (см.: [9]), симметричны по соответствующим индексам.

В работах [10—13] исследованы шесть подклассов отображения f :

1) отображение f_1 , когда для компонент $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$ фундаментального объекта второго порядка комплекса K_3 выполняется условие

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\Lambda_{\alpha\beta(\gamma T_{\delta)},} \quad (15)$$

где T_α — некоторый тензор;

2) отображение f_2 , когда для компонент $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ фундаментального объекта первого порядка комплекса K_3 имеет место

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\beta} S_\gamma, \quad (16)$$

где S_α — некоторый тензор;

3) отображение f_3 , когда для компонент $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ фундаментального объекта первого порядка комплекса K_3 выполняется условие

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha(\beta\gamma)}; \quad (17)$$

4) отображение f_4 , когда основные гиперплоскости Π_φ и Π_ψ [10] параллельны;

5) отображение f_5 , если ψ — основная гиперплоскость, параллельная диаметральной гиперплоскости;

6) отображение f_6 , если φ — основная гиперплоскость, параллельная диаметральной гиперплоскости.

В работах [10—13] проведена дальнейшая канонизация репера R_0 . Новый репер R_1 строится следующим образом: вершина репера совмещена с центром эллипсоида q , векторы $\bar{e}_\alpha$ направлены по тройке сопряженных диаметров эллипсоида q , причем концы их лежат на эллипсоиде и совпадают с фокальными точками [14].

Рассмотрены многообразия эллипсоидов, когда индикатриса вектора $\bar{e}_1$ является прямой, параллельной $\bar{e}_1$, асимптотические линии на поверхности $(A + \bar{e}_1)$ являются координатными и при движении точки A по инвариантной поверхности, проходящей через фокальные точки, касательная на индикатрисе вектора $\bar{e}_2$ параллельна плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

В данной работе исследуется подкласс K^* комплексов эллипсоидов K_3^{01} , рассмотренных в работе [15], в случае, когда индикатриса вектора $\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ является прямой, параллельной вектору $\bar{e}_1$.

Уравнение эллипсоида q и система дифференциальных уравнений Пфаффа комплекса эллипсоидов K^* будут соответственно иметь вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^\alpha &= -\omega^\alpha, \quad \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^1 = \tilde{\beta}\omega^3, \quad \omega_3^1 = \tilde{\beta}\omega^2, \\ \omega_2^3 &= -\omega^3, \quad \omega_3^2 = -\omega^2, \quad d\ln\tilde{\beta} = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Анализируя систему уравнений (19), убеждаемся в том, что комплексы K^* существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений с произволом десяти постоянных (см.: [6]).

Обозначим как A_α концы векторов $\bar{e}_\alpha$, l — прямую $(A_3, \bar{e}_1)$, m — прямую $(A_1, \bar{e}_3)$, γ_1 и γ_2 — асимптотические линии на поверхности (A_1) , M_1 — текущую точку прямой l , $M_2 = A_1 + x^3 \bar{e}_3$ и $M_3 = A + x^1 \bar{e}_1 + x^3 \bar{e}_3$ — текущие точки прямой m и координатной плоскости $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ соответственно.

Теорема. *Комплексы эллипсоидов K^* обладают следующими геометрическими свойствами:*

- 1) *прямая l неподвижна;*
- 2) *при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_1 прямая m и координатная плоскость $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ неподвижны;*
- 3) *поверхность (A_3) вырождается в прямую, параллельную вектору $\bar{e}_1$;*
- 4) *точка $P = A + \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ неподвижна при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2 ;*
- 5) *класс отображений, порожденный рассматриваемым комплексом, не пересекается с классами отображений $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_\beta}$.*

Доказательство.

1. Используя систему (19), находим

$$d\bar{M}_1 = (dx^1 + (1 - x^1)\omega^1 + \tilde{\beta}\omega^2)\bar{e}_1, \quad (20)$$

откуда непосредственно следует первое утверждение теоремы.

2. Находим

$$d\bar{M}_2 = \tilde{\beta}x^3\omega^2\bar{e}_1 + (1 - x^3)\omega^2\bar{e}_2 + (dx^3 + (1 - x^3)\omega^3)\bar{e}_3, \quad (21)$$

$$d\bar{M}_3 = (dx^1 + (1 - x^1)\omega^1 + \tilde{\beta}x^3\omega^2)\bar{e}_1 + (1 - x^3)\omega^2\bar{e}_2 + (dx^3 + (1 - x^3)\omega^3)\bar{e}_3. \quad (22)$$

Из формул (21) и (22) следует, что при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_1 прямая m и координатная плоскость $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ неподвижны.

3. Утверждение теоремы следует из формулы

$$d\bar{A}_3 = (\omega^1 + \tilde{\beta}\omega^2)\bar{e}_1. \quad (23)$$

4. Имеем

$$d\bar{P} = \tilde{\beta}\omega^3\bar{e}_1, \quad (24)$$

откуда следует соответствующее утверждение теоремы.

5. Уравнения основных гиперплоскостей φ и ψ , ассоциированных с исследуемым комплексом, соответственно имеют вид

$$4x^1 + 5x^2 + 5x^3 - 4 = 0, \quad (25)$$

$$3(3\tilde{\beta}^4 + 10\tilde{\beta}^2 + 8)x^1 + (5\tilde{\beta}^4 + 24\tilde{\beta}^2 + 32)x^2 + \\ + (5\tilde{\beta}^4 + 24\tilde{\beta}^2 + 32)x^3 = 4(\tilde{\beta}^2 + 2)(\tilde{\beta}^2 + 4). \quad (26)$$

Из определения отображения $f_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\beta}$ и анализа уравнений (25) и (26) следует последнее утверждение теоремы.

Найденные геометрические свойства комплекса эллипсоидов K^* по аналогии с работой [16] позволяют построить его безынтегральное представление, то есть его геометрическую модель.

Для этого проведем следующие построения:

1) задаем произвольную прямую l , и фиксируем на ней точку P ;

2) проводим прямую l^* , параллельную прямой l , и выбираем на ней точку A_3 ;

3) задаем плоскость π_1 , проходящую через прямую l и не содержащую l^* ;

4) проводим на плоскости π_1 через точку P прямую m ;

5) в плоскости π_1 выбираем точку A , не инцидентную прямой l и m ; через эту точку проводим прямые, параллельные l и m ; в пересечении с прямыми m и l получим соответственно точки A_1 и A_2 .

С текущей точкой плоскости π_1 совмещаем репер $\tilde{R} = \{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ такой, что $0 \equiv A$, $\bar{e}_\alpha = \overline{AA_\alpha}$. Образующий элемент комплекса — эллипсоид q , соответствующий центру A , однозначно определяется точками A_α , центром A и сопряжен-

ными направлениями $\overline{AA}_\alpha$. При движении точки A в плоскости π_1 получаем двупараметрическое семейство эллипсоидов q , а при перемещении точки A_3 по прямой l — комплекс эллипсоидов q , который мы назовем *комплексом* K_0^* .

Докажем, что построенный таким образом комплекс эллипсоидов q совпадает с комплексом K^* , то есть определяется в репере $\tilde{R}$ системой уравнений (19).

Поскольку прямая l задается уравнениями

$$x^3 = 0, \quad x^2 = 1,$$

то из условия неподвижности этой прямой получаем

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = -\omega^3, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = -\omega^2.$$

Прямая l^* параллельна плоскости π_1 , поэтому

$$\omega_3^3 = -\omega^3. \quad (27)$$

Из условий неподвижности прямой m , определяемой уравнениями

$$x^3 = 0, \quad x^1 = 1,$$

при движении точки A_1 вдоль линии γ_2 следует, что

$$\omega_1^1 = -\omega^1, \quad \omega_2^1 = k\omega^3. \quad (28)$$

Прямая m определяется уравнениями

$$x^1 = 1, \quad x^2 = 0.$$

Так как эта прямая неподвижна при движении точки A_1 вдоль линии γ_1 , то

$$\omega_3^1 = \delta\omega^2, \quad \omega_3^2 = \gamma\omega^2.$$

Дифференцируя уравнение (27), находим $\gamma = -1$. Следовательно,

$$\omega_3^2 = -\omega^2.$$

Замыкая уравнения (28), получим

$$\omega_3^1 = k\omega^2, \quad dk = k\omega^1 + k\omega^2 + \tilde{\beta}\omega^3.$$

Дифференцируя уравнение $\omega_3^1 = k\omega^2$, находим

$$k = \tilde{\beta}.$$

Значит, система дифференциальных уравнений комплекса K_0^* имеет вид

$$\begin{aligned}\omega_\alpha^\alpha &= -\omega^\alpha, \quad \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^1 = \tilde{\beta}\omega^2, \quad \omega_3^1 = \tilde{\beta}\omega^2, \\ \omega_2^3 &= -\omega^3, \quad \omega_3^2 = -\omega^2, \quad d\ln\tilde{\beta} = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Малаховский В. С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. Геом. семина. / ВИНТИ. 1969. Т. 2. С. 179—206.
2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., 1966.
3. Лаптев Г. Ф. К инвариантной аналитической теории дифференцируемых отображений // Тр. Геом. семина. / ВИНТИ. 1974. Т. 6. С. 37—42.
4. Малаховский В. С. Дифференциальная геометрия многообразий квадратичных элементов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 1964.
5. Малаховский В. С. Некоторые проблемы дифференциальной геометрии многообразий фигур // ДГМФ. 1974. Вып. 5. С. 64—84.
6. Малаховский В. С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1980.
7. Малаховский В. С. Краткий курс дифференциальной геометрии. Калининград, 2010.
8. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
9. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера. М., 1963.
10. Кретов М. В. Комплексы эллипсоидов со специальными свойствами ассоциированных с ними дифференцируемых отображений // ДГМФ. 1986. Вып. 17. С. 51—57.
11. Кретов М. В. О специальных подклассах дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик // ДГМФ. 1984. Вып. 15. С. 49—54.

12. *Кретов М.В.* Об одном комплексе центральных квадратик с вырождающимся многообразием центров // Материалы VII Всесоюзной конф. по современным проблемам геометрии. Минск, 1979. С. 99.

13. *Кретов М.В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированные с многообразиями гиперквадрик // Материалы Междунар. конф. по геометрии и приложениям. Смоленск, 1986. С. 23.

14. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n -мерном проективном пространстве // Тр. Геом. семина. / ВИНТИ. 1974. Т. 6. С. 113—134.

15. *Кретов М.В.* О некоторых подклассах комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве // Калинингр. гос. ун-т. Калининград, 1981. Деп. в ВИНТИ 17.11.1981, №5272-81.

16. *Кретов М.В.* Геометрическая модель трехпараметрического семейства эллипсоидов // Вестник БФУ им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. Вып. 4. С. 163—167.

Для цитирования: *Кретов М.В., Кретова Е.М.* Об одном подклассе комплексов эллипсоидов, допускающем безынтегральное представление // ДГМФ. 2026. №57 (1). С. 64—75. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-5>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

MSC 2010: 53A15, 58A10

M. V. Kretov¹, E. M. Kretova²
Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia
14, A. Nevskogo st., Kaliningrad, 236016, Russia
¹Kretov1@mail.ru, ²e.kretova1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-5

On a subclass of ellipsoid complexes
that admits a non-integral representation

Submitted on February 16, 2026

Using the group-theoretic method of differential geometric research by G.F. Laptev, as well as the methodology of scientific research on differential geometry by V.S. Malakhovsky, the study of

complexes (three-parameter families) of ellipsoids with special properties of differentiable maps associated with them in a three-dimensional affine space. The complex of ellipsoids is considered as an image of the corresponding mapping. A subclass of previously studied ellipsoid complexes is investigated when the difference indicatrix of the second and third coordinate vectors is a straight line parallel to the first coordinate vector. Interesting geometric properties of the studied manifold are found, which make it possible to construct it, that is, to find its integral representation.

Keywords: manifold, complex, reference point, ellipsoid, affine space, indicatrix, focal manifold, non-integral representation

References

1. *Malakhovsky, V.S.*: Differential geometry of manifolds of figures and pairs of figures in a homogeneous space. Tr. Geom. Sem., 2, 179—206 (1969).
2. *Rosenfeld, B.A.*: Multidimensional spaces. Moscow (1966).
3. *Laptev, G.F.*: Towards an invariant analytical theory of differentiable mappings. Tr. Geom. Sem., 6, 37—42 (1974).
4. *Malakhovsky, V.S.*: Differential geometry of manifolds of quadratic elements. Tomsk (PhD thesis) (1964).
5. *Malakhovsky, V.S.*: Some problems of differential geometry of manifolds of shapes. DGMF, 5, 64—84 (1974).
6. *Malakhovsky, V.S.*: Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978).
7. *Malakhovsky, V.S.*: A Short Course in Differential Geometry. Kaliningrad (2010).
8. *Laptev, G.F.*: Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).
9. *Cartan, E.*: Theory of finite continuous groups and differential geometry developed by the method of the Moving Frame. Moscow (1963).
10. *Kretov, M.V.*: Complexes of ellipsoids with special properties of differentiable maps associated with them. DGMF, 17, 51—57 (1986).
11. *Kretov, M.V.*: On special subclasses of differentiable maps associated with complexes of central non-degenerate hyperquadrics. DGMF, 15, 49—54 (1984).

12. *Kretov, M. V.*: On a complex of central quadrics with a degenerating center variety. Materials of the VII All-Union Conference on Modern Problems of Geometry. Minsk, 99 (1979).

13. *Kretov, M. V.*: Differentiable mappings associated with hyperquadratic manifolds. Materials of the International Conference on Geometry and Applications. Smolyan, 23 (1986).

14. *Malakhovski, V. S., Makhorkin, V. V.*: Differential geometry of varieties of hyperquadrics in n -dimensional projective space. Tr. Geom. Sem., 6, 113—134 (1974).

15. *Kretov, M. V.*: On some subclasses of ellipsoid complexes in affine space. Kaliningrad State University. Kaliningrad. Dep. VINITI 17.11.1981, No. 5272-81 (1981).

16. *Kretov, M. V.*: Geometric model of a three-parameter family of ellipsoids. IKBFU's Vestnik. Physics, Math., 4, 163—167 (2014).

For citation: Kretov, M. V., Kretova, E. M.: On a subclass of ellipsoid complexes that admits a non-integral representation. DGMF, 57 (1), 64—75 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-57-1-5>.



MSC (2020) Primary: 53C43, 58E20; Secondary: 53C20

S. E. Stepanov¹ , **I. I. Tsyganok²** 

^{1, 2} *Financial University under the Government of the Russian Federation,
49, Leningradsky prosp., Moscow, 125993, Russia*

¹ s.e.stepanov@mail.ru, ² i.i.tsyganok@mail.ru

¹ SPIN-код: 8403-0453, AuthorID: 6991

² SPIN-код: 4034-2150, AuthorID: 8745

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-6

On harmonic sections of tangent bundle equipped with the Sasaki metric

Let (TM, g_S) be the tangent bundle of a complete Riemannian manifold (M, g) equipped with the Sasaki metric g_S and $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ be a horizontal-harmonic map from (M, g) to (TM, g_S) . If $\|X\| \in L^p(M)$ for at least one positive number $p \neq 1$, then $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ is a harmonic map from (M, g) to (TM, g_S) .

Keywords: complete Riemannian manifold, tangent bundle, Sasaki metric, horizontal-harmonic map

1. Introduction and Main Theorem

Let (TM, g_S) be the tangent bundle of a Riemannian manifold (M, g) equipped with the Sasaki metric g_S defined by $g_S(X^h, Y^h) = g_S(X^v, Y^v) = g(X, Y) \circ \pi$ and $g_S(X^h, Y^v) = 0$ for all $X, Y \in C^\infty(TM)$, where π is the natural projection from TM onto M , and X^h (resp. X^v) is the horizontal (resp. vertical) lift of a vector field X on M to TM (see [1] and [2]).

Submitted on November 22, 2025

© Stepanov S. E., Tsyganok I. I., 2026

The tension field of the map $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ is given by (see [3, p. 146])

$$\tau(X) = \tau^h(X) + \tau^v(X) = (\text{trace}_g R(X, \nabla X) \cdot)^h + (\text{trace}_g \nabla^2 X)^v.$$

Consequently, X is defined as a horizontal-harmonic (respectively, vertical-harmonic) map from (M, g) to (TM, g_S) if and only if $\Delta X := \text{trace}_g \nabla^2 X = 0$ (resp, $\text{trace}_g R(X, \nabla X) \cdot = 0$) (see also [3, p. 146]). Furthermore, X is a harmonic map from (M, g) to (TM, g_S) if and only if it is a horizontal-harmonic and vertical-harmonic map at the same time (see [4]). If (M, g) is compact and $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ is a horizontal-harmonic map from (M, g) to (TM, g_S) , then X is a harmonic map since from $\Delta X = 0$ implies $\nabla X = 0$ and hence $\text{trace}_g R(X, \nabla X) \cdot = 0$. Formulate the main theorem.

Theorem. *Let (TM, g_S) be the tangent bundle of a complete Riemannian manifold (M, g) equipped with the Sasaki metric g_S and $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ be a horizontal-harmonic map from (M, g) to (TM, g_S) . If $\|X\| \in L^p(M)$ for at least one positive number $p \neq 1$, then $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ is a harmonic map from (M, g) to (TM, g_S) .*

2. Proof of the theorem

Let $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ is a horizontal-harmonic map, then we deduce

$$\frac{1}{2} \Delta \|X\|^2 = g(\Delta X, X) + \|\nabla X\|^2 = \|\nabla X\|^2$$

since $\Delta X = 0$. On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \|X\|^2 &= \|X\| \Delta \|X\| + \|\nabla \|X\|\|^2 \leq \\ &\leq \|X\| \Delta \|X\| + \|\nabla X\|^2 \end{aligned}$$

by the Kato inequality $\|\nabla\|X\|\|^2 \leq \|\nabla X\|^2$ that is a classical tool in Riemannian geometry. As a result, we have the following inequality:

$$\|X\| \Delta\|X\| \geq 0.$$

In turn, Yau proved the following theorem (see [5]): Let u be a smooth function defined on a complete Riemannian manifold so that $u \geq 0$ and $(p-1)u \Delta u \geq 0$ where p is a positive number. Then for $p \neq 1$, either $\int_M u^p dv_g = \infty$ or $u = \text{const}$. Therefore, if $\int_M \|X\|^p dv_g < \infty$ for at least one positive number $p \neq 1$, then $\|X\| = \text{const}$. In this case, the equation $\nabla X = 0$ holds. As a consequence of the above, we obtain that $\text{trace}_g R(X, \nabla X) \cdot = 0$ and hence $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ is also a vertical-harmonic map. Consequently, X is a harmonic map from (M, g) to (TM, g_S) .

References

1. Sasaki, S.: On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.*, 10 (3), 338—354 (1958).
2. Gudmundsson, S.; Kappos, E.: On the Geometry of Tangent Bundles. *Expo. Math.*, 20, 1—41 (2002).
3. Gil-Medrano, O.: Relationship between volume and energy of vector fields. *Differ. Geom. Appl.*, 15, 137—152 (2001).
4. Ishihara, T.: Harmonic sections of tangent bundle. *J. Math. Tokushima Univ.*, 13, 23—27 (1979).
5. Yau, S.T.: Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry. *Indiana Univ. J.*, 25, 659—670 (1976).

For citation: Stepanov, S.E., Tsyganok, I.I.: On harmonic sections of tangent bundle equipped with the Sasaki metric. *DGMF*, 57 (1), 76—80 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-6>.



SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE ([HTTP://creativecommons.org/licenses/by/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

УДК 514.764

С. Е. Степанов¹, И. И. Цыганок²^{1,2} Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия¹s.e.stepanov@mail.ru, ²i.i.tsyganok@mail.ru,

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-6

О гармонических сечениях касательного расслоения,
снабженных метрикой Сасаки

Поступила в редакцию 08.04.2026 г.

Пусть (TM, g_S) будет касательным расслоением полного риманова многообразия (M, g) с метрикой Сасаки g_S и $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ будет горизонтально-гармоническим отображением. Если $\|X\| \in L^p(M)$ по крайней мере в одной точке для положительного $p \neq 1$, тогда $X: (M, g) \rightarrow (TM, g_S)$ будет гармоническим отображением.

Ключевые слова: полное риманово многообразие, касательное расслоение, метрика Сасаки, горизонтально-гармоническое отображение

Список литературы

1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. Vol. 10, № 3. P. 338—354.
2. Gudmundsson S., Kappos E. On the Geometry of Tangent Bundles // Expositiones Mathematicae. 2002. Vol. 20. P. 1—41.
3. Gil-Medrano O. Relationship between volume and energy of vector fields // Differ. Geom. Appl. 2001. Vol. 15. P. 137—152.
4. Ishihara T. Harmonic sections of tangent bundle // J. Math. Tohoku Univ. 1979. Vol. 13. P. 23—27.
5. Yau S. T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry // Indiana Univ. J. 1976. Vol. 25. P. 659—670.

Для цитирования: Степанов С. Е., Цыганок И. И. О гармонических сечениях касательного расслоения, снабженных метрикой Са-саки // ДГМФ. 2026. № 57 (1). С. 76—80. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-6>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ
ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

В. И. Субботин 

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)

им. М. И. Платова, Новочеркасск, Россия

geometry@mail.ru

SPIN-код: 2953-1580, AuthorID: 220832

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-7

О несоставных RR -многогранниках с условными ребрами

RR -многогранник — замкнутый выпуклый многогранник в E^3 , множество граней которого можно разбить на два непустых непересекающихся множества — множество граней, образующих изолированные гранные звезды симметричных ромбических вершин и множество правильных граней. Если правильные грани такого многогранника одного типа, то он относится к первому типу RR -многогранников; если различного — ко второму типу. В настоящей работе доказано, что существуют только шесть несоставных RR -многогранников первого типа с условными ребрами. Два из найденных RR -многогранников могут быть разбиты плоскостями, проходящими через условные ребра ромбических граней, на правильные части, а один из RR -многогранников — на две ромбические пирамиды.

Ключевые слова: RR -многогранник, составной многогранник с условными ребрами, симметричная ромбическая вершина, ромбическая пирамида

1. Введение

Изучение классов многогранников, связанных с правильными (платоновыми) многогранниками занимает важное место в современной геометрии (см., например, [1—3]). В сере-

Поступила в редакцию 28.03.2026 г.

© Субботин В. И., 2026

дине XX века для обобщения правильных и архимедовых (полуправильных) многогранников возникла необходимость полного перечисления выпуклых многогранников в E^3 с условием правильности их граней. Н. Джонсоном в [4] были найдены 92 таких *правильногранных* многогранника (не считая платоновых многогранников, архимедовых многогранников, призм и антипризм). Впервые доказательство полноты списка найденных Н. Джонсоном многогранников было проведено В. Залгаллером в монографии [5]. Информацию о правильногранных многогранниках см., например, в [6—8]. В частности, в [8] описаны многогранники, двойственные правильногранным, и приведены координаты их вершин.

Дальнейшим развитием результатов Н. Джонсона и В. Залгаллера явилось полное перечисление выпуклых правильногранных многогранников с условными ребрами (см.: [9; 10]), список которых представлен в [13].

Выпуклый правильногранный многогранник, который плоскостями, проходящими через ребра, может быть разбит на правильногранные части, в работе [5, с. 14] называется *составным*.

Для RR -многогранников понятие составного многогранника нуждается в изменении, так как в RR -многограннике имеются грани, отличные от правильных. Поэтому далее приводится другое определение составного RR -многогранника.

В настоящей работе доказано существование и полнота списка из шести RR -многогранников первого типа с условными ребрами.

2. Определения

Звездой $Star(V)$ вершины V многогранника называется совокупность всех граней, которые имеют одну общую вершину, совпадающую с V .

Если звезда $Star(V)$ состоит из n равных и одинаково расположенных (то есть сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами) ромбов, то вершина V называется *n -ромбической*.

Если V расположена на оси вращения порядка n множества $Star(V)$, то V называется *симметричной n -ромбической вершиной*.

Ромбическая звезда называется *изолированной*, если она не имеет общих ребер с другими ромбическими звездами.

Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется *RR-многогранником*, если множество его граней является объединением двух непересекающихся непустых множеств: множества граней (ромбов, не квадратов), образующих изолированные звезды симметричных ромбических вершин, и множества правильных граней. Если указанные правильные грани — одинакового вида, то многогранник называется *RR-многогранником первого типа*; если правильные грани различного вида, то многогранник называется *RR-многогранником второго типа*.

Свободными углами ромбической звезды будем называть углы с вершинами, совпадающими с общей вершиной двух тупых углов двух соседних ромбов звезды.

Если поместить в свободные углы n -ромбической звезды равные правильные многоугольные грани M_i , $i = 1, \dots, n$, то получим многогранную поверхность с краем — *ромбическую шапочку*.

Если грани M_i являются правильными треугольниками и к границе шапочки будет подклеен правильный n -угольник, получим выпуклый многогранник, который далее называется *n -ромбической пирамидой*.

Диагональ неправильной грани F многогранника, разбивающая F на два правильных многоугольника, называется *условным ребром* многогранника.

Ранее в [11] автором было дано определение составных *RR-многогранников* как таких многогранников, которые можно разбить плоскостями на ромбические пирамиды и много-

гранники с правильными гранями. В случае RR -многогранников с условными ребрами естественно дать определение в следующем виде:

Составным RR -многогранником с условными ребрами назовем такой RR -многогранник с условными ребрами, который можно разбить плоскостями, проходящими через ребра или условные ребра, на следующие части: 1) ромбические пирамиды, 2) многогранники с правильными гранями и, возможно, с условными ребрами.

Поясом граней называется связное множество граней $F_1, F_2, \dots, F_n$ такое, что любые две грани F_i, F_{i+1} , а также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани множества не имеют общих ребер.

Данное понятие будет использовано далее для случая ромбических граней $F_1, F_2, \dots, F_n$ в доказательстве существования некоторых RR -многогранников.

3. Основная теорема

Для того чтобы найти все составные RR -многогранники второго типа без условных ребер, в работе [11] автором рассматривались все возможные присоединения ромбических пирамид к многогранникам из следующих классов: 5 правильных (платоновых) многогранников, 13 полуправильных (архимедовых), 92 многогранника Джонсона (правильногранных) и бесконечные серии правильногранных призм и антипризм. Возможными считались при этом такие присоединения ромбических пирамид, в результате которых получается выпуклый RR -многогранник без условных ребер. Учитывая определение составного RR -многогранника без условных ребер, в [11] найдены (не считая ромбических пирамид, что естественно) все 46 таких присоединений.

Так как все RR -многогранники *первого типа* без условных ребер перечислены автором ранее, как составные, так и несоставные [12], следовательно, перечислены все составные RR -многогранники (и первого, и второго типа) без условных ребер.

Чтобы найти все несоставные RR -многогранники первого типа с условными ребрами, нужно рассмотреть доказательство полноты списка RR -многогранников первого типа без условных ребер и отдельно проверить в доказательствах существования каждого из 24 таких многогранников случаи возможного возникновения условных ребер. При этом нужно выделить из всех возможных с условными ребрами несоставные RR -многогранники.

Теорема. *Существуют только шесть несоставных RR -многогранников первого типа с условными ребрами.*

Доказательство. Шесть RR -многогранников, о которых говорится в теореме, следующие:

(1) с двумя тупоугольными 3-ромбическими вершинами и боковыми гранями в виде пояса граней из шести «правильных» (то есть составленных из двух правильных треугольников) ромбов (рис. 1, *а*; развертка на рис. 1, *б*);

(2) 4-ромбическая бипирамида (рис. 1, *в*);

(3) с двумя 5-ромбическими вершинами, отделенными друг от друга поясом граней из десяти правильных ромбов (рис. 1, *г*; развертку (без ромбических звезд) см. на рис. 1, *е*; вид «сверху», со стороны одной из звезд, см. на рис. 1, *д*);

(4—5) два многогранника с правильными ромбами: наращенный октаэдр (рис. 1, *ж*) и дважды наращенный кубооктаэдр (рис. 1, *з*);

(6) многогранник с тупоугольной и остроугольной 5-ромбической вершиной (рис. 1, *и*).

На рисунке 1 ромбические вершины, то есть вершины ромбических звезд, обозначены V и W .

Многогранник (1) появляется в результате анализа построения одного из RR -многогранников первого типа — 19-гранника с тупоугольной вершиной, связанного с икосаэдром (см.: [12]). Действительно, в [12, с. 197] указанный 19-гранник получен путем удаления одной треугольной грани, которую обозначим F , а также трех граней, соседних с F по ребру. Далее путем изгибания оставшейся многогранной поверхности в [12] доказано существование 19-гранника.

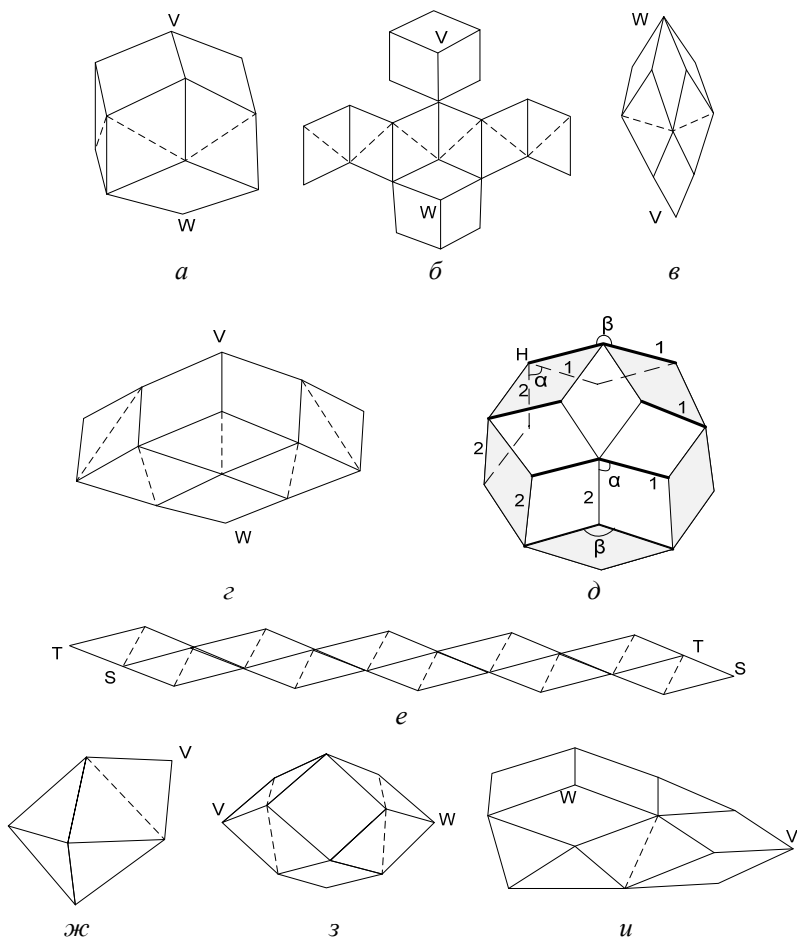


Рис. 1. Несоставные *RR*-многогранники первого типа с условными ребрами

Если в предыдущем построении 19-гранника удалить грань, противоположную *F* в икосаэдре, а также три грани, соседние с ней по ребрам, то получим 12-гранную поверх-

ность Φ с двумя краями и с зеркальной осью симметрии шестого порядка. Покажем, что существует 6-гранная поверхность Φ' с такой же, как и Φ , симметрией, но у которой грани составлены из шести пар треугольников так, что поверхность Φ' будет иметь шесть условных ребер. На рисунке 1, а, б эти ребра показаны пунктиром.

Для доказательства существования Φ' с единичными ребрами рассмотрим боковую поверхность правильной 6-угольной призмы с высотой $\frac{3}{2}$. Стороны оснований призмы будем считать единичными.

Отсечем плоскостями трехгранные углы через один верхнего и нижнего основания призмы так, чтобы поверхность после отсечения имела зеркальную ось симметрии шестого порядка. Отсечение будем проводить так, чтобы отсекающие плоскости пересекали ребра на расстоянии $\frac{1}{2}$ от соответствующего основания призмы и чтобы три отсекающие плоскости каждого из оснований пересекались по правильному треугольнику с вершинами на боковых ребрах призмы. Очевидно, к каждому краю поверхности Φ' можно подклеить тупоугольные ромбические звезды (рис. 1, б). Получим RR -многогранник (рис. 1, а).

Найдем тупые углы α ромбов ромбических звезд RR -многогранника (1).

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{2\pi}{3} + \sin^2 \frac{2\pi}{3} \cos \omega = -0,125; \quad \alpha \approx 97,181^\circ,$$

где $\cos \omega = -\frac{1}{2}$, так как многогранник в этом случае получен отсечением правильной 6-угольной призмы.

Существование многогранника (2) очевидно, так как треугольные грани 4-ромбической пирамиды перпендикулярны основанию пирамиды.

Докажем существование многогранника (3). Он получается при анализе доказательства существования RR -многогранника с двумя 5-ромбическими вершинами без условных ребер (см.

ссылку на [18, с. 300] в работе [12]). Было доказано, что такой многогранник не существует. Существенным в том доказательстве было то, что пары равносторонних треугольников в свободных углах β не образуют условные ребра.

Следовательно, теперь необходимо проверить существование RR -многогранника в случае, когда двугранный угол между правильными треугольниками в каждом свободном углу равен π . Рассмотрим 5-ромбическую звезду со свободными углами $\beta = \frac{2}{3}\pi$.

Вычисление углов α ромбов 5-ромбических звезд RR -многогранника (3) дает $\alpha \approx 64.719^\circ$.

Подклеивая в углы β ромбы с тупыми углами $\frac{2}{3}\pi$, получим ромбическую шапочку, которую обозначим K . Покажем, что в свободные углы между двумя ромбами шапочки K можно подклеить такие же ромбы с тупыми углами $\frac{2}{3}\pi$ и получить таким образом пояс граней из десяти правильных ромбов.

Рассмотрим рисунок 1, д, на котором многогранник (3) изображен со стороны одной из ромбических звезд. От одного угла β на этом рисунке к другому углу β можно перейти по параллельным ребрам, изображенными толстыми линиями. Таким образом, в свободные углы между двумя ромбами шапочки K можно подклеить такие же ромбы с тупыми углами $\frac{2}{3}\pi$. На рисунке 1, г видно также, что произвольный плоский острый угол α с вершиной в центре ромбической звезды и сторонами, обозначенными цифрами 1 и 2, равен острому углу с вершиной H и сторонами, обозначенными пунктиром на рисунке 1, г. Это легко видеть, если переходить по ребрам, параллельным сторонам 1 и 2 угла α .

Таким образом, шапочке K соответствует зеркально-поворотная ей шапочка K' . Угол поворота равен $\frac{\pi}{5}$. Существование многогранника (3) доказано.

Число ромбов в ромбических вершинах нельзя увеличить, так как при $n = 6$ получим $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Многогранники (4) и (5) — это известные многогранники $P_{3,33}$ и $P_{4,13}$ из списка [13].

Многогранник (6) получается при доказательстве существования одного, обозначаемого далее M , из двух RR -многогранников первого типа, связанных с икосаэдром и имеющих тупоугольные ромбические вершины. M получается следующим образом: удалим из икосаэдра десять треугольных граней, симметрично расположенных относительно некоторой фиксированной грани, и к границе полученной 10-гранной поверхности подклеим ромбическую тупоугольную звезду с вершиной W и тупым углом ромба, равным $\frac{3}{5}\pi$. Подклеенную звезду обозначим S .

Рассмотрим три вершины RR -многогранника M , в которых сходятся по пять треугольных граней. Выберем одну из этих вершин, U , и отсечем плоскостью правильную 5-угольную пирамиду с вершиной U . Подклеим вместо нее 5-ромбическую пирамиду, которую обозначим P . Получим многогранник (6) с двумя ромбическими вершинами — тупоугольной и остроугольной. Для острых углов α ромбов 5-ромбической звезды пирамиды P , где свободные углы $\beta = \frac{\pi}{3}$, получим $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

Основание пирамиды P будет иметь три общих ребра s_1, s_2 и s_3 с тремя треугольными гранями и два общих ребра r_1 и r_2 со сторонами двух ромбов ромбической звезды S . Обозначим эти два ромба R_1 и R_2 . Как показано в [11, с. 105], ребра s_1, s_2 и s_3 будут условными после присоединения пирамиды P . Пусть φ_i — двугранные углы с ребрами r_1 и r_2 , которые треугольные грани пирамиды P образуют с ромбами R_1 и R_2 .

Покажем, что наше построение даст выпуклый многогранник, то есть что $\varphi_i < \pi$. Действительно, на месте каждого из ромбов R_1 и R_2 ранее в икосаэдре находилось по паре (соседних по ребру) треугольных граней. Две из этих треугольных граней, которые имеют общие ребра r_1 и r_2 с основанием пирамиды P , обозначим T_1 и T_2 . Обозначим ψ двугранные углы, которые составляют T_1 и T_2 с (соседними по ребрам r_1 и r_2) треугольными гранями пирамиды P . Так как $\psi = \pi$, $\varphi_i < \psi$, то $\varphi_i < \pi$.

Исчерпаны все возможные случаи возникновения условных ребер при перечислении RR -многогранников первого типа. Поэтому других несоставных RR -многогранников первого типа не существует.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Grunbaum B.* Regular polyhedral — old and new // *A equations mathematicae*. 1977. Vol. 16, № 1—2. P. 1—20.
2. *Coxeter H.S.M.* Regular Polytopes. N. Y., 1973.
3. *Cromwell P.R.* Polyhedra. Cambridge University Press, 1999.
4. *Jonson N.W.* Convex polyhedra with regular faces // *Canadian J. Math.* 1966. Vol. 18, № 1. P. 169—200. <https://doi.org/10.4153/CJM-1966-021-8>.
5. *Залгаллер В.А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 1—220.
6. *Деза М., Гришухин В.П., Штогрин М.И.* Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М., 2008.
7. *Rajwade A.R.* Convex Polyhedra with Regularity Conditions and Hilbert's Third Problem. Hindustan Book Agency, 2001. <https://doi.org/10.1007/978-93-86279-06-4>.
8. *Gilson B.R.* The Johnson Solids and Their Duals: A Comprehensive Survey. Create Space Independent Publishing Platform, 2014.
9. *Гурин А.М., Залгаллер В.А.* К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных // Тр. Санкт-Петерб. матем. об-ва. 2008. Т. 14. С. 215—292.
10. *Тимофеев А.В.* К перечню выпуклых правильных многогранников // Современные проблемы математики и механики. 2011. Т. VI, вып. 3. С. 155—170.
11. *Subbotin V.I.* On the Composite RR -Polyhedra of the Second Type // *Siberian Mathematical Journal*. 2023. Vol. 64, № 2. P. 500—506. <https://doi.org/10.1134/S0037446623020209>.
12. *Subbotin V.I.* О перечислении выпуклых RR -многогранников // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, № 5. С. 194—207. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-5-194-207>.

13. *Tupelo-Schneck R.* Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. URL: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra> (дата обращения: 29.10.2025).

Для цитирования: Субботин В.И. О несоставных *RR*-многогранниках с условными ребрами // ДГМФ. 2026. №57 (1). С. 81—92. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-7>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://creativecommons.org/licenses/by/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC(2020): 52B15

V. I. Subbotin 

Platov South Russian State polytechnic university (NPI)
132, Prosvescheniya st., Novocherkassk, 346400, Russia
geometry@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-7

On non-composite *RR*-polytopes with conditional edges

Submitted on March 28, 2026

An *RR*-polyhedron is a closed convex polyhedron in E^3 whose face set can be partitioned into two non-empty disjoint sets: the set of faces forming isolated faceted stars of symmetric rhombic vertices and the set of regular faces. If the regular faces of such a polyhedron are of the same type, then it belongs to the first type; if they are different, then it belongs to the second type of *RR*-polyhedron. In the present paper, it is proved that there exist only six non-composite *RR*-polyhedrons of the first type with conditional edges. Two of the found *RR*-polyhedrons can be partitioned by planes passing through the conditional edges of the rhombic faces into regular parts, and one of the *RR*-polyhedrons can be partitioned into two rhombic pyramids.

Keywords: *RR* polyhedron, composite polyhedron with conditional edges, symmetric rhombic vertex, rhombic pyramid

References

1. *Grunbaum, B.*: Regular polyhedral — old and new. *Aequationes mathematicae*, **16**:1—2, 1—20 (1977).
2. *Coxeter, H.S.M.*: Regular Polytopes. Dover Publications (1973).
3. *Cromwell, P.R.*: Polyhedra. Cambridge University Press (1999).
4. *Jonson, N.W.*: Convex polyhedra with regular faces. *Can. J. Math.*, **18**:1, 169—200 (1966), <https://doi.org/10.4153/CJM-1966-021-8>.
5. *Zalgaller, V.A.*: Convex polyhedra with regular faces. *Zapiski nauch. sem. LOMI*, 2, 1—220 (1967).
6. *Deza, M., Grishukhin, V.P., Shtogrin, M.I.*: Scale-isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices: Polytopes in Hypercubes and Z_n . Imperial College Press, (2004).
7. *Rajwade, A.R.*: Convex Polyhedra with Regularity Conditions and Hilbert's Third Problem. Hindustan Book Agency (2001), <https://doi.org/10.1007/978-93-86279-06-4>.
8. *Gilson, B.R.*: The Johnson Solids and Their Duals: A Comprehensive Survey. Create Space Independent Publishing Platform (2014).
9. *Gurin, A.M., Zalgaller, V. A.*: On the history of the study of convex polyhedra with regular faces and faces composed of regular ones. *American Math. Soc.*, **228**:2, 169—229 (2009).
10. *Timofeenko, A.V.*: On the list of convex regularhedra. *Modern Problems of Mathematics and Mechanics*, **4**:3, 155—170 (2011).
11. *Subbotin, V.I.*: On the Composite *RR*-Polyhedra of the Second Type. *Siberian Math. J.*, **64**:2, 500—506 (2023), <https://doi.org/10.1134/S0037446623020209>.
12. *Subbotin, V.I.*: On the enumeration of convex *RR*-polyhedra. *Chebyshevskii sbornik*, **24**:5, 194—207 (2023), <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-5-194-207>.
13. *Tupelo-Schneck, R.*: Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. Available at: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra>.

For citation: Subbotin, V.I.: On non-composite *RR*-polytopes with conditional edges. *DGMF*, 57 (1), 81—92 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-7>.



Ю. И. Шевченко¹ , А. В. Вялова² 

¹ Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия

² Калининградский государственный технический университет,
Калининград, Россия

¹ ESkrydlova@kantiana.ru, ² vyalova.alexa@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-8

Индукцированные связности двух типов на распределении 2-го рода

В проективном пространстве P_n проведено исследование распределения 2-го рода, не опирающееся на геометрию распределений 1-го рода. Под распределением 2-го рода понимают n -мерное многообразие многомерных плоскостей, полученное сопоставлением каждой точке пространства, не проходящей через нее плоскости. В главном расслоении, ассоциированном с распределением, задана связность. Построено оснащение распределения 2-го рода, которое представляет собой поле плоскостей, образующих в совокупности с образующими точкой и плоскостью трехчленную композицию в смысле Нордена. Доказано, что распределение и его оснащение индуцируют связности двух типов в ассоциированном расслоении. Найдены условия их совпадения.

Ключевые слова: проективное пространство, распределение 2-го типа, связность, оснащение

1. Распределение 2-го рода

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, $(I, \dots = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

Поступила в редакцию 25.05.2026 г.

© Шевченко Ю. И., Вялова А. В., 2026

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

причем формы Пфаффа ω^I , ω_I^J , ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$ (см., например, [1]):

$$\begin{aligned} D\omega^I &= \omega^J \wedge \omega_J^I, & D\omega_I &= \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_I^J &= \omega_I^K \wedge \omega_K^J + \omega_I \wedge \omega^J + \delta_I^J \omega_K \wedge \omega^K. \end{aligned} \quad (1)$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим n -мерное многообразие M_n пар (X, P_m) , состоящее из точки X пространства и сопоставленной ей m -мерной плоскости P_m ($m \leq n - 2$), не проходящей через точку. Многообразие M_n называют распределением m -мерных плоскостей второго рода, а точку X — центром. Впервые понятие распределения 2-го рода было введено Н. М. Остиану [2].

Замечание. Распределение 2-го рода M_n порождает распределение 1-го рода S_n $(m+1)$ -мерных плоскостей $P_{m+1} = [X, P_m]$. Изучению распределения 1-го рода m -мерных плоскостей в n -мерном проективном пространстве посвящены статьи [3; 4], а в работе [10] исследовалась коконгруэнция m -мерных плоскостей, то есть комплекс, который является подмногообразием многообразия Грассмана [9].

Произведем разбиение значений индексов

$$I = (a, \alpha): a, \dots = \overline{1, m+1}; \alpha, \dots = \overline{m+2, n}.$$

Осуществим специализацию подвижного репера, совмещая точку A — вершину репера с центром X и помещая точки A_α в соответствующую данному центру m -мерную плоскость P_m .

Уравнения распределения M_n в репере нулевого порядка имеют вид

$$\omega_a^\alpha = \Lambda_{aI}^\alpha \omega^I, \quad \omega_\alpha = \Lambda_{\alpha I} \omega^I,$$

где компоненты фундаментального объекта 1-го порядка удовлетворяют следующим сравнениям по модулю базисных форм ω^I :

$$\Delta \Lambda_{aI}^\alpha \equiv 0, \quad \Delta \Lambda_{\alpha I} + \Lambda_{\alpha I}^\alpha \omega_\alpha \equiv 0,$$

причем дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta \Lambda_{aI}^\alpha = d\Lambda_{aI}^\alpha - \Lambda_{bI}^\alpha \omega_a^b - \Lambda_{aJ}^\alpha \omega_I^J + \Lambda_{aI}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Утверждение 1. Фундаментальный объект 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_{aI}^\alpha, \Lambda_{aI}\}$ распределения 2-го рода M_n является тензором, содержащим подтензор Λ_{aI}^α .

При обращении в нуль тензора Λ_{aI}^α получается вырожденное распределение 2-го рода M_m^0 , в котором плоскость P_m пары (A, P_m) смещается в индуцированной центрированной плоскости $P_{m+1}^0 = [A, P_m]$.

В этом случае объект Λ_{aI} становится тензором $\bar{\Lambda}_{aI} = \Lambda_{aI}|_{\Lambda_{aI}^\alpha=0}$, обращение которого в нуль $\bar{\Lambda}_{aI} = 0$ влечет неподвижность плоскости P_m , поэтому вырожденное многообразие M_m^0 превращается в фиксированную пару (X, P_m) .

2. Ассоциированное расслоение

Над распределением M_n возникает главное расслоение $G_r(M_n)$, базой которого является само распределение, а типовым слоем — подгруппа стационарности G_r пары (A, P_m) , где $r = m(m+1) + n(n-m)$.

Структурные уравнения главного расслоения $G_r(M_n)$, ассоциированного с распределением 2-го рода, состоят из уравнений (2_1) и следующих:

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha &= \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega^I \wedge \omega_{\alpha I}, \\ d\omega_\alpha^a &= \omega_\alpha^b \wedge \omega_b^a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^a + \omega^I \wedge \omega_{\alpha I}^a, \\ d\omega_b^a &= \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^I \wedge \omega_{bI}^a + (\Lambda_{bI} \delta_j^a + \\ &\quad + \delta_b^a \delta_j^c \Lambda_{cI}) \omega^I \wedge \omega^J, \\ d\omega_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^I \wedge \omega_{\beta I}^\alpha + \delta_\beta^\alpha \delta_j^a \Lambda_{aI} \omega^I \wedge \omega^J, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha I} &= -\Lambda_{\alpha I} \omega_{\alpha}^a, & \omega_{\alpha I}^a &= -\delta_I^a \omega_{\alpha}, \\ \omega_{b I}^a &= \Lambda_{b I}^a \omega_{\alpha}^a - \delta_b^a \delta_I^{\alpha} \omega_{\alpha}, \\ \omega_{\beta I}^{\alpha} &= -\Lambda_{\alpha I}^{\alpha} \omega_{\beta}^a - \delta_I^{\alpha} \omega_{\beta} - \delta_b^{\alpha} \delta_I^{\gamma} \omega_{\gamma},\end{aligned}$$

причем δ_I^{α} , δ_I^a — обобщенные символы Кронекера (см., например, [5]).

Утверждение 2. *Главное расслоение $G_r(M_n)$ содержит 4 фактор-расслоения: $\{\omega_b^a, \omega^I\}$, $\{\omega_{\beta}^{\alpha}, \omega^I\}$, $\{\omega_{\alpha}, \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega^I\}$, $\{\omega_{\alpha}^a, \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega_b^a, \omega^I\}$ над общей базой — распределением M_n .*

3. Фундаментально-групповая связность

В главном расслоении $G_r(M_n)$ задается связность способом Лаптева — Лумисте (см., например, [6; 7]). Для этого рассмотрим преобразования слоевых форм:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{\alpha} &= \omega_{\alpha} - \Gamma_{\alpha I} \omega^I, & \tilde{\omega}_{\alpha}^a &= \omega_{\alpha}^a - \Gamma_{\alpha I}^a \omega^I, \\ \tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{b I}^a \omega^I, & \tilde{\omega}_{\beta}^{\alpha} &= \omega_{\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\beta I}^{\alpha} \omega^I.\end{aligned}\quad (3)$$

Вычисляя внешние дифференциалы форм (3) с использованием структурных уравнений (1₁, 2) и теоремы Картана — Лаптева [8], получим

$$\begin{aligned}\Delta \Gamma_{b I}^a + \omega_{b I}^a &\equiv 0, & \Delta \Gamma_{\beta I}^{\alpha} + \omega_{\beta I}^{\alpha} &\equiv 0, \\ \Delta \Gamma_{\alpha I} + \Gamma_{\alpha I}^{\beta} \omega_{\beta} + \omega_{\alpha I} &\equiv 0, \\ \Delta \Gamma_{\alpha I}^a - \Gamma_{b I}^a \omega_{\alpha}^b + \Gamma_{\alpha I}^{\beta} \omega_{\beta}^a + \omega_{\alpha I}^a &\equiv 0.\end{aligned}$$

Утверждение 3. *Объект связности $\Gamma = \{\Gamma_{b I}^a, \Gamma_{\beta I}^{\alpha}, \Gamma_{\alpha I}, \Gamma_{\alpha I}^a\}$ содержит 2 простейших подобъекта: $\{\Gamma_{b I}^a\}$ — плоскостной линейной связности, $\{\Gamma_{\beta I}^{\alpha}\}$ — нормальной линейной связности и 2 простых подобъекта: центропроективной связности $\{\Gamma_{\alpha I}, \Gamma_{\beta I}^{\alpha}\}$ и аффинно-групповой связности $\{\Gamma_{\alpha I}^a, \Gamma_{b I}^a, \Gamma_{\beta I}^{\alpha}\}$.*

4. Композиционное оснащение

Осуществим оснащение распределения 2-го рода, присоединив к каждой паре (A, P_m) рассматриваемого семейства M_n плоскость P_{n-m-2} , не пересекающую индуцированную плоскость P_{m+1} .

Плоскость P_{n-m-2} зададим совокупностью точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A.$$

Инвариантность плоскости обеспечивается дифференциальными уравнениями

$$\Delta \lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha I}^a \omega^I, \quad \Delta \lambda_\alpha + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha I} \omega^I. \quad (4)$$

Утверждение 4. *Оснащающая плоскость P_{n-m-2} задается квазитензором $\lambda = \{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$, состоящим из двух простейших подквазитензоров $\{\lambda_\alpha^a\}, \{\lambda_\alpha\}$, причем $\{\lambda_\alpha^a\}$ определяет плоскость $P_{n-m-1} = P_{n-m-2} \oplus A$, а $\{\lambda_\alpha\}$ — гиперплоскость $P_{n-1} = [B_\alpha, A_\alpha]$.*

Действительно, в этом несложно убедиться, задав плоскости P_{n-m-1} и P_{n-1} совокупностями точек

$$A, C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a; \quad A_\alpha, D_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha A$$

и найдя условия их инвариантности.

5. Ковариантный дифференциал и ковариантные производные

Подставляя в дифференциальные уравнения для компонент оснащающего квазитензора λ вместо слоевых форм их выражения через соответствующие формы связности и переноса слагаемые с базисными формами вправо, получим

$$\nabla \lambda_\alpha^a = \nabla_I \lambda_\alpha^a \omega^I, \quad \nabla \lambda_\alpha = \nabla_I \lambda_\alpha \omega^I.$$

Выражения в левых частях уравнений — ковариантные дифференциалы компонент оснащающего квазитензора относительно фундаментально-групповой связности с объектом Γ :

$$\nabla \lambda_\alpha^a = d\lambda_\alpha^a - \lambda_\beta^a \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^b \tilde{\omega}_b^a + \tilde{\omega}_\alpha^a, \quad \nabla \lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \tilde{\omega}_\alpha,$$

а справа коэффициенты при базисных формах — ковариантные производные:

$$\nabla_I \lambda_\alpha^a = \lambda_{\alpha I}^a + \lambda_\beta^a \Gamma_{\alpha I}^\beta - \lambda_\alpha^b \Gamma_{b I}^a - \Gamma_{\alpha I}^a, \quad \nabla_I \lambda_\alpha = \lambda_{\alpha I} + \lambda_\beta \Gamma_{\alpha I}^\beta - \Gamma_{\alpha I}$$

Продолжая уравнения (4), получим дифференциальные сравнения на пфаффовы производные компонент оснащающего квазитензора λ

$$\Delta \lambda_{\alpha I}^a + \lambda_\alpha^b \omega_{b I}^a - \lambda_\beta^a \omega_{\alpha I}^\beta + \omega_{\alpha I}^a \equiv 0, \quad \Delta \lambda_{\alpha I} - \lambda_\beta \omega_{\alpha I}^\beta + \omega_{\alpha I} \equiv 0.$$

Доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Распределение M_n и его оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G_r(M_n)$ фундаментально-групповую связность 1-го типа с объектом*

$$\Gamma = \{\Gamma_{bI}^a, \Gamma_{\beta I}^\alpha, \Gamma_{\alpha I}^{01}, \Gamma_{\alpha I}^{01}\},$$

компоненты которого охвачены по формулам

$$\begin{aligned} \Gamma_{bI}^a &= \Lambda_{bI}^\alpha \lambda_\alpha^a - \delta_b^a \delta_I^\alpha \lambda_\alpha, \\ \Gamma_{\beta I}^\alpha &= -\Lambda_{\alpha I}^\alpha \lambda_\beta^a - \delta_I^\alpha \lambda_\beta - \delta_\beta^\alpha \delta_I^\gamma \lambda_\gamma; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha I}^{01} &= -\Lambda_{\alpha I}^\alpha \lambda_\alpha^a - \delta_I^\beta \lambda_\beta \lambda_\alpha, \\ \Gamma_{\alpha I}^{01} &= -\Lambda_{bI}^\beta \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^b - \delta_I^a \lambda_\alpha \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 2. *Распределение M_n и его оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G_r(M_n)$ фундаментально-групповую связность 2-го типа с объектом*

$$\Gamma = \{\Gamma_{bI}^a, \Gamma_{\beta I}^\alpha, \Gamma_{\alpha I}^{02}, \Gamma_{\alpha I}^{02}\},$$

компоненты которого охвачены по формулам (5) и следующим:

$$\begin{aligned}\overset{02}{\Gamma}_{\alpha I} &= \lambda_{\alpha I} - \lambda_{\beta} \Lambda_{\alpha I}^{\beta} \lambda_{\alpha}^a - \delta_I^{\beta} \lambda_{\beta} \lambda_{\alpha} - \lambda_{\alpha} \delta_I^{\beta} \lambda_{\beta}, \\ \overset{02}{\Gamma}_{\alpha I}^a &= \lambda_{\alpha I}^a - \lambda_{\beta}^a \Lambda_{b I}^{\beta} \lambda_{\alpha}^b - \lambda_{\beta}^a \delta_I^{\beta} \lambda_{\alpha} - \lambda_{\alpha}^b \Lambda_{b I}^{\beta} \lambda_{\beta}^a.\end{aligned}\quad (7)$$

Сопоставляя равенства (6) и (7), получим соотношения

$$\begin{aligned}\lambda_{\alpha I} &= \Lambda_{\alpha I}^{\beta} \lambda_{\alpha}^a \lambda_{\beta} + \delta_I^{\beta} \lambda_{\beta} \lambda_{\alpha} - \Lambda_{\alpha I}^a \lambda_{\alpha}^a, \\ \lambda_{\alpha I}^a &= \Lambda_{b I}^{\beta} \lambda_{\alpha}^b \lambda_{\beta}^a + \delta_I^{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}^a - \delta_I^a \lambda_{\alpha}^a,\end{aligned}$$

которые являются условиями совпадения связностей 1-го и 2-го типов.

Список литературы

1. Шевченко Ю. И. Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.
2. Остиану Н. М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. Геом. семин. / ВИНТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.
3. Омелян О. М. О совпадении групповых связностей, индуцированных внутренним композиционным оснащением распределения // Матем. заметки. 2017. Т. 102, №6. С. 896—907.
4. Омелян О. М. Геометризация пучка связностей первого типа, порожденного композиционным оснащением на распределении плоскостей // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2020. Т. 180. С. 69—73.
5. Шевченко Ю. И. Вырождение плоскостной аффинной связности Столярова // Фундам. прикл. матем. 2010. Т. 16, №2. С. 155—161.
6. Полякова К. В., Шевченко Ю. И. Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.
7. Шевченко Ю. И. Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 185—193.
8. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНТИ. М., 1979. Т. 9.
9. Белова О. О. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14, №2. С. 29—67.

10. Белова О. О. Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2023. Вып. 54 (1). С. 39—48.

Для цитирования: Шевченко Ю. И., Вялова А. В. Индуцированные связности двух типов на распределении 2-го рода // ДГМФ. 2026. № 57 (1). С. 93—101. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-8>.



ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) ([HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/))

MSC 2010: 53A20, 53B15

Yu. I. Shevchenko¹ , A. V. Vyalova²

¹ Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia
14, A. Nevskogo st., Kaliningrad, 236016, Russia

² Kaliningrad State Technical University
1, Sovietsky prosp., Kaliningrad, 236022, Russia

¹ ESkrydlova@kantiana.ru, ² vyalova.alex@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-8

Induced connections of two types on a distribution of the second kind

Submitted on May 25, 2026

In a projective space a distribution of the second kind independently of the geometry of distributions of the first kind is studied. A distribution of the second kind is understood as an n -dimensional manifold of multidimensional planes obtained by assigning to each point of the space a plane not passing through that point. In the principal bundle associated with the distribution, a connection is given. An equipment of the distribution of the second kind is constructed; it is a field of planes that, together with the generating point and the generating plane, forms a three-term composition in the sense of Norden. It is proved that the distribution and its equipment induce connections of two types in the associated bundle. Conditions for the coincidence of these connections are found.

Keywords: projective space, distribution of the second kind, connection, equipment

References

1. *Shevchenko, Yu. I.*: Clothing of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).
2. *Ostianu, N. M.* Distribution of hyperplane elements in projective space. Tr. Geom. sem., 4, 71—120 (1973).
3. *Omelyan, O. M.* About a coincidence of group connections induced by an internal composition equipment of a distribution. *Math. Notes*, **102**:6, 896—907 (2017).
4. *Omelyan, O. M.* Geometrization of a sheaf of first-type connections generated by a compositional frame on a distribution of planes. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 180, 69—73 (2020).
5. *Shevchenko, Yu. I.*: Degeneration of plane affine Stolyarov connections. Fund. i Prikl. Mat., **16**:2, 155—161 (2010).
6. *Polyakova, K., Shevchenko, Yu.*: Laptev — Lumiste’s methods of giving connection and geometrical vectors. DGMF, 49, 19—28 (2018).
7. *Shevchenko, Yu.*: Laptev’s and Lumiste’s ways of connection representation in the principal fibre bundle. DGMF, 37, 185—193 (2006).
8. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.*: Differential-geometric structures on manifolds. Itogi Nauki i Tekhn. Probl. Geom., 9, Moscow (1979).
9. *Belova, O. O.*: Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).
10. *Belova, O. O.*: The deformation pseudotensor of connections in congruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54(1), 39—48 (2023).

For citation: Shevchenko, Yu. I., Vyalova, A. V.: Induced connections of two types on a distribution of the second kind. DGMF, 57 (1), 93—101 (2026). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-1-8>.



Editorial Board

Dr Olga O. Belova, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia) — *Editor-in-chief*; Dr Katerina V. Polyakova, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia) — *Executive secretary*; Dr Yuri I. Shevchenko, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia); Prof. Sándor Bácsó, University of Debrecen (Debrecen, Hungary); Prof. Vladimir Balan, Politehnica University of Bucharest (Bucharest, Romania); Dr Vitaly V. Balashchenko, Belarusian State University (Minsk, Republic of Belarus); Dr Ruzinazar Beshimov, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan); Dr Tengiz Bokelavadze, Akaki Tsereteli State University (Kutaisi, Georgia); Dr Giovanni Falcone, University of Palermo (Palermo, Italy); Prof. Graham Hall, University of Aberdeen (Aberdeen, United Kingdom); Dr Ágota Figula, University of Debrecen (Debrecen, Hungary); Dr Irena Hinterleitner, Brno University of Technology (Brno, Czech Republic); Dr Bahar Kirik Rácz, Marmara University (Istanbul, Turkey); Dr Mikhail V. Kretov, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia); Dr Artur V. Kuleshov, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia); Prof. Josef Mikeš, Palacký University Olomouc (Olomouc, Czech Republic); Prof. Vanya A. Mirzoyan, State Engineering University of Armenia (Yerevan, Armenia); Prof. Péter Nagy, Obuda University (Budapest, Hungary); Prof. Vladimir Yu. Rovenski, University of Haifa (Haifa, Israel); Dr Liudmila L. Sabinina, Autonomous University of the State of Morelos (Cuernavaca, Mexico); Prof. Sergey Ye. Stepanov, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow, Russia); Prof. Alexander M. Shelekhov, Moscow Pedagogical State University (Moscow, Russia); Prof. Ljubica Velimirovic, University of Niš (Niš, Serbia)

Published since 1970.

Indexing: MathSciNet (American Mathematical Society),

ZBMATH — The database Zentralblatt MATH.

Frequency — twice a year (from 2023)

Publisher:

Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

Put to the Press:

July 03, 2026

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY
OF MANIFOLDS OF FIGURES

2026

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 57 (1)

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 03.07.2026 г.
Формат $60 \times 90^{1/16}$. Усл. печ. л. 6,4
Тираж 33 экз. Заказ 59

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14