ISSN 0321-4796 (Print)
ISSN 2782-3229 (Online)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2024

№ 55 (2)

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта

Immanuel Kant Baltic Federal University Press

2024

12+

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2024. — №55 (2). — 97 с.

Выходит с 1970 года.
Входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.
Изданию присвоена **первая категория (К1) Перечня ВАК.**
Периодичность — 2 раза в год (начиная с 2023 г.).

Учредитель
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Адрес редакции и издателя
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Адрес типографии
236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Дата выхода в свет 23.10.2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 514.76, 51(092)

О. О. Белова*, *К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
olgaobelova@mail.ru, Polykova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-1

Выдающийся геометр Юрий Иванович Шевченко (к 75-летию со дня рождения)

В статье, посвященной известному геометру и педагогу Юрию Ивановичу Шевченко в связи с его 75-летием, излагается краткая биография ученого. Описан научный вклад Ю. И. Шевченко в теорию связностей, составляющую его основной исследовательский интерес. Им подготовлено около 140 публикаций (среди них 3 учебных пособия), которые внесли огромный вклад в развитие дифференциальной геометрии. Их список представлен в данной статье. Охарактеризованы другие сферы научной деятельности юбиляра: участие в многочисленных международных и общероссийских геометрических конференциях, руководство исследованиями в рамках грантов, научная работа со студентами и аспирантами. Отмечен большой вклад Ю. И. Шевченко в развитие журнала «Дифференциальная геометрия многообразий фигур» в качестве ответственного секретаря редколлегии, а также плодотворная работа с одаренными школьниками.

Поступила в редакцию 01.06.2024 г.

Юрий Иванович Шевченко родился 29 сентября 1949 г. в г. Шостка Сумской области в семье служащих. В 1972 г. с отличием окончил Калининградский государственный университет (КГУ) по специальности «Математика», а в 1976 г. — аспирантуру КГУ по специальности «Геометрия и топология». Учеба в аспирантуре прерывалась службой в армии.

Еще в студенческие годы Юрий Иванович заинтересовался научной работой. Так, будучи студентом 3-го курса, он принял участие в научной студенческой конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. И. Ленина, в качестве председателя секции математики и докладчика по темам «Конгруэнции парабол в трехмерном эквиаффинном пространстве с двумя фокальными поверхностями, одна из которых вырождается в плоскость» и «Обобщение комплексных чисел».

В 1980 г. Ю. И. Шевченко успешно защитил кандидатскую диссертацию «Обобщенные нормализации» в Казанском государственном университете. В 1984 г. ему было присвоено ученое звание доцента по кафедре высшей математики. После окончания аспирантуры Юрий Иванович три месяца работал инженером, затем перешел на должность младшего научного сотрудника НИС КГУ. Преподавательскую деятельность начал в 1977 г.:

— 1977—1983 гг. — ассистент кафедры высшей математики Калининградского технического института рыбной промышленности и хозяйства (КТИРПиХ);

— 1983—1984 гг. — доцент той же кафедры КТИРПиХ;

— 1984—2006 гг. — доцент кафедры высшей алгебры и геометрии[1] КГУ;

— 2006—2007 гг. — профессор кафедры высшей алгебры и геометрии Российского государственного университета им. И. Канта (РГУ им. И. Канта);

[1] В 1985 г. кафедра высшей алгебры и геометрии заняла 1-е место среди кафедр математического факультета КГУ.

— с апреля 2007 г. и до преобразования факультета в институт возглавлял кафедру геометрии и фундаментальной математики.

Кафедра высшей алгебры и геометрии, 2002

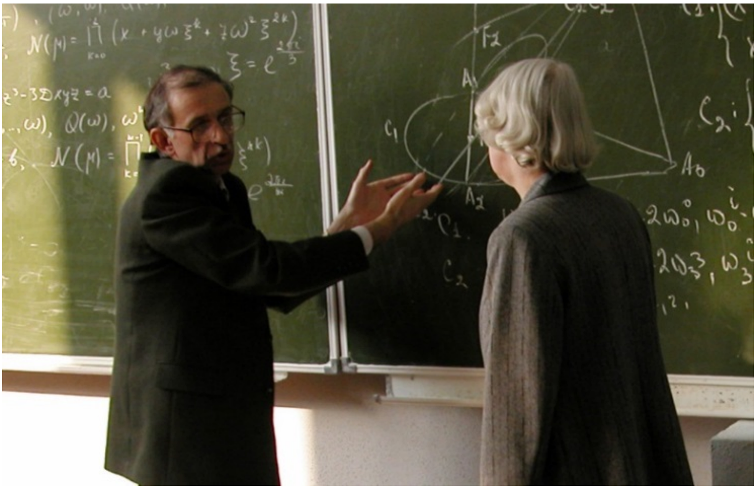
Юрий Иванович Шевченко активно и плодотворно занимается научно-исследовательской работой. Область его научных интересов составляет теория связностей — основа современной дифференциальной геометрии. Им опубликовано около 140 научных и методических работ и 3 учебных пособия. Полученные результаты Юрий Иванович регулярно представлял на различных международных конференциях внутри страны и за рубежом.

Среди зарубежных конференций особо отметим XXIII Международный конгресс математиков (1998, Берлин, Германия) и Международную конференцию «Algebra Geometry Mathematical Physics. AGMP — 2012» (2012, Брно, Чехия).

VII Всесоюзная геометрическая конференция
(1979, Минск, СССР)

П. Рокетт с супругой, Ю. И. Шевченко и К. К. Лавринович
после XXIII Международного конгресса математиков
(1998, Берлин, Германия)

Международная конференция «Геометрия природы — 2003»
(Казань, Россия)

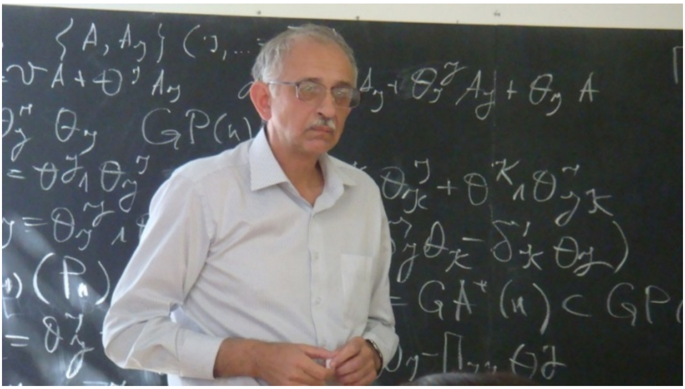


Международная математическая конференция,
200-летию со дня рождения великого немецкого математика
К. Г. Якоби и 750-летию Калининграда — Кёнигсберга, 2005
(БФУ им. И. Канта, Калининград, Россия)

Украинский математический конгресс — 2009
(Киевский государственный университет им. Т. Шевченко, Киев, Украина)

Международная конференция
«Petrov 2010 anniversary symposium on general relavity and gravitation»
(Казанский государственный университет, Казань, Россия)

Международный геометрический семинар
им. Г.Ф. Лаптева «Лаптевские чтения — 2011»
(Пензенский государственный университет, Пенза, Россия)



Международная конференция «Algebra Geometry Mathematical Physics. AGMP — 2012» (Брно, Чехия)

II Международная конференция «Высокопроизводительные вычисления — математические модели и алгоритмы», посвященная К. Г. Якоби, 2013
(БФУ им. И. Канта, Калининград, Россия)

Международная конференция
«Классическая и современная геометрия»,
посвященная 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева, 2019
(МПГУ, Москва, Россия)

За долгие годы работы в университете Ю. И. Шевченко заслуженно добился уважения всего коллектива как высококвалифицированный специалист, добросовестный и ответственный преподаватель. Юрий Иванович по праву пользовался большой симпатией студентов, сотрудников и преподавателей университета.

За свой педагогический труд Ю. И. Шевченко награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования РФ».

Юрием Ивановичем были разработаны новые курсы, среди которых «Внешние формы в классической дифференциальной геометрии», «Геометрия», «Математический анализ», «Геометрия многообразий», «Дифференциальная геометрия и топология», «Дифференциальная геометрия многообразий фигур», «Научные основы школьных курсов математики», «Оснащения поверхности проективного пространства», «Редукции центропроективной связности», «Связности в главных расслоениях», «Теория связностей», «Центропроективные многообразия», «Комплексный анализ», «Дифференциальные уравнения», научный семинар «Связности в многообразиях фигур».

Долгие годы Юрий Иванович проводил обширную научную работу со студентами, руководил дипломными работами, магистерскими и аспирантскими диссертациями.

Юрий Иванович — талантливый исследователь и организатор научных работ. Под его руководством защищены 4 кандидатские диссертации:

1. Полякова К. В. «Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства» (2003, Казань);
2. Белова О. О. «Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей» (2004, Москва);
3. Вялова А. В. «Пучки индуцированных связностей на плоскостной поверхности» (2005, Казань);
4. Кулешов А. В. «Связности на семействах центрированных плоскостей в проективном пространстве» (2016, Казань).

Ю. И. Шевченко, С. Е. Степанов, О. О. Белова, Л. Е. Евтушик

Ю. И. Шевченко, А. В. Кулешов

В 2008—2010 гг. Ю. И. Шевченко был ответственным исполнителем научно-исследовательской работы «Поля геометрических объектов на оснащенных многообразиях фигур», выполненной в рамках дополнительного финансирования Министерства образования и науки РФ. В 2011—2013 гг. руководил научной темой «Исследование и разработка модифицированного метода внешних форм в теории связностей, ассоциированных с многообразиями фигур», поддержанной грантом Минобразования РФ.

Долгие годы занимался издательской деятельностью, выполняя обязанности ответственного секретаря межвузовского тематического сборника научных трудов «Дифференциальная геометрия многообразных фигур» (с 2023 г. — журнал). Им подготовлены к печати 54 выпуска (1970—2023 гг.).

Направления научных исследований Ю. И. Шевченко в рамках в Калининградской геометрической школы включали изучение геометрических объектов в многомерном проективном пространстве. Наибольшее его внимание привлекали следующие вопросы:

1) групповая двойственность в проективном пространстве;

2) аффинная, коаффинная и линейная фактор-группы в подгруппах проективной группы;

3) обобщения аффинной, коаффинной и линейной групп;

4) расслоения и фактор-расслоения линейной и проективной групп;

5) сопоставление результатов, полученных однородным, спец-однородным и неоднородным аналитическими аппаратами, то есть исследования в неэффективном, спец-эффективном и фактор-эффективном проективных пространствах.

Особая роль отводилась теории связностей. Рассматривались

1) связности общие, фундаментально-групповые, аффинные (особые линейные), коаффинные (центропроективные), линейные, общие аффинные;

2) связности проективных типов;

3) обобщенные связности: связности Картана, Лаптева и Столярова;

4) связности на группе Ли и параллелизуемом многообразии;

5) ковариантное дифференцирование геометрических объектов относительно фундаментально-групповых связностей;

6) тензоры отображений пространств аффинной связности;

7) многомерное приклеивание в главных расслоениях и обобщенные связности;

8) связности на подмногообразиях гладкого и центропроективного многообразий.

Ряд статей Ю. И. Шевченко был посвящен связностям, которые ассоциированы, индуцированы и являются внутренними для семейств линейных фигур (совокупностей точек и плоскостей) в проективном пространстве. К таким разделам относятся:

1) связности, индуцированные оснащениями на поверхностях (в частности, тангенциально вырожденной и касательно оснащенной);

2) связности, индуцированные оснащениями полосы и гиперполосы;

3) связности, индуцированные оснащениями семейств плоскостей и центрированных плоскостей;

4) теория оснащений семейств линейных фигур;

5) обобщенные связности на распределениях;

6) редукции связностей объемлющего пространства к связностям погруженных семейств линейных фигур;

7) пространства плоскостей и центрированных плоскостей в проективном пространстве и соответствующие аффинные связности, в частности многообразие Грассмана и Беловой, связности Нейфельда и их аналоги.

Ю. И. Шевченко интересовала также геометрия высшего порядка:

1) связности 2-го порядка на гладких и центропроективных многообразиях;

2) обоснование касательных пространств высших порядков с помощью дифференциальных операторов высших порядков;

3) соприкасающиеся пространства главного и проективного расслоений.

Вершиной его научных разработок являются голономные, полуголономные и неголономные гладкие и центропроективные многообразия.

Для исследований в дифференциальной геометрии он особо отмечал важность следующих методов:

1) основные: методы внешних форм и подвижного репера Картана, структурных уравнений Лаптева и деривационных формул Слебодзинского — Акивиса;

2) классический тензорный анализ;

3) метод векторных полей;

4) метод координат высшего порядка, сверхвекторных полей и векторнозначных форм высших порядков;

5) метод струй и группоидов Эресмана.

Ю. И. Шевченко выступал с интересными докладами на ежегодно проводившихся с 1970 г. в Калининградском госуниверситете научных конференциях профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников, аспирантов и студентов, которые с 2000 г. получили статус постоянных научных семинаров.

Долгие годы Юрий Иванович являлся руководителем научного семинара, который проводился регулярно раз в неделю. На семинаре выступали известные ученые-геометры: В. С. Малаховский, В. Балан из Румынии (2013), Л. Е. Евтушик из Москвы (2008), Ю. Е. Гликлих из Воронежа (2011), Е. М. Горбатенко из Томска (2011), Й. Микеш из Чехии (2012), С. Е. Степанов из Москвы (2012), И. А. Тайманов из Новосибирска (2015), Г. Холл из Великобритании (2018), К. Штрамбах из Германии (2013), В. В. Шурыгин из Казани (2012) и др.

Участники семинара Ю. И. Шевченко, А. В. Кулешов,
В. С. Малаховский, К. В. Полякова, О. О. Белова, С. Е. Степанов,
Й. Микеш, Ю. И. Попов (Калининград, 2012)

Участники семинара К. В. Полякова, В. Балан, О. О. Белова,
А. В. Кулешов, Ю. И. Шевченко (Калининград, 2013)

Участники семинара Ю. И. Шевченко, К. В. Башашина,
А. В. Кулешов, К. В. Полякова, В. С. Малаховский, И. А. Тайманов,
А. П. Магель, А. В. Марков (Калининград, 2015)

Участники семинара В. С. Малаховский, Ю. И. Шевченко,
К.К. Хабазня, Н. А. Рязанов, О. О. Белова, А. В. Кулешов, М. В. Кретов
(Калининград, 2017)

Участники семинара К. В. Полякова, О. О. Белова, Ю. И. Шевченко,
К. В. Башашина, Н. А. Рязанов, А. В. Кулешов (Калининград, 2017)

Профессор Г. Холл (в центре) с участниками семинара (Калининград, 2018)

После выступления профессора В. С. Малаховского (Калининград, 2019)

Ни протяжении многих лет Юрий Иванович проводил факультативные занятия в математических классах школ и гимназий г. Калининграда с одаренными школьниками. Его ученики регулярно занимали призовые места на Всероссийских научных конференциях. Продуктивная работа Ю. И. Шевченко с подрастающим поколением была отмечена благодарственными письмами Ж. И. Алферова и других выдающихся российских ученых.

Гости семинара профессор С. Е. Степанов и доцент И. И. Цыганок (Калининград, 2019)

Ю. И. Шевченко на фоне благодарственного письма академика Ж. И. Алферова

Ниже представлен список публикаций Ю. И. Шевченко, включая подготовленные им три учебных пособия [1—3].

1. *Шевченко Ю. И.* Классы аффинных связностей // ДГМФ. 1973. Вып. 3. С. 163—170.

2. *Шевченко Ю. И.* Связанности в главных расслоениях, ассоциированных с тангенциально вырожденными поверхностями в проективном пространстве // ДГМФ. 1976. Вып. 7. С. 139—146.

3. *Шевченко Ю. И.* Обобщенная нормализация полосы в проективном пространстве // 150 лет геометрии Лобачевского : материалы Всесоюзн. науч. конф. по неевклидовой геометрии. Казань, 1976. С. 214.

4. *Шевченко Ю. И.* Об оснащении многомерной поверхности проективного пространства // ДГМФ. 1977. Вып. 8. С. 135—150.

5. *Шевченко Ю. И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. 1978. Вып. 9. С. 124—133.

6. *Шевченко Ю. И.* Параллельные перенесения на поверхности // ДГМФ. 1979. Вып. 10. С. 154—158.

7. *Шевченко Ю. И.* Об обобщенной нормализации касательно оснащенной поверхности // ДГМФ. 1980. Вып. 11. С. 107—114.

8. *Шевченко Ю. И.* Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности // ДГМФ. 1981. Вып. 12. С. 12—130.

9. *Шевченко Ю. И.* Нормализация полосы // ДГМФ. 1982. Вып. 13. С. 112—117.

10. *Шевченко Ю. И.* Алгебраические структуры, ассоциированные с операцией возведения отрицательного числа в рациональную степень // Совершенствование процесса обучения математике. Калининград, 1982. С. 25—28.

11. *Шевченко Ю. И.* Об оснащении Картана // ДГМФ. 1983. Вып. 14. С. 107—110.

12. *Шевченко Ю. И.* Связности в расслоениях, ассоциированных с пространством квадратичных элементов // ДГМФ. 1984. Вып. 15. С. 104—110.

13. *Шевченко Ю. И.* Структура оснащения многообразия линейных фигур // Тез. докл. VI Прибалт. геом. конф. Таллин, 1984. С. 137—138.

14. *Шевченко Ю. И.* О фундаментально-групповой связности // ДГМФ. 1985. Вып. 16. С. 104—109.

15. *Шевченко Ю.И.* Развитие логического мышления на примере одного расширения множества положительных чисел // Комплексное воспитание личности средствами предмета математики : сб. науч. тр. Калининград, 1985. С. 48—52.

16. *Шевченко Ю.И.* Связности в расслоениях, ассоциированных с пространством квадрик // ДГМФ. 1986. Вып. 17. С. 97—102.

17. *Шевченко Ю.И.* Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // ДГМФ. 1987. Вып. 18. С. 115—120.

18. *Шевченко Ю.И.* О проективной связности Картана, индуцированной на поверхности // ДГМФ. 1988. Вып. 19. С. 121—126.

19. *Шевченко Ю.И.* Об основной задаче проективно-дифференциальной геометрии поверхности // ДГМФ. 1989. Вып. 20. С. 122—128.

20. *Шевченко Ю.И.* Роль оснащения Картана и нормализации Нордена для задания фундаментально-групповых связностей // XXI науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. Калининград, 1989. С. 81.

21. *Шевченко Ю.И.* Общая фундаментально-групповая связность с точки зрения расслоений // ДГМФ. 1990. Вып. 21. С. 100—105.

22. *Шевченко Ю.И.* Интерпретация фундаментально-групповой связности с помощью обобщенного расслоения // XXII науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. Калининград, 1990. С. 96.

23. *Шевченко Ю.И.* Связность в продолжении главного расслоения // ДГМФ. 1991. Вып. 22. С. 117—127.

24. *Шевченко Ю.И.* Лифт связности в продолженном главном расслоении // XXIII науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. Калининград, 1991. С. 96—97.

25. *Шевченко Ю.И.* Связность в составном многообразии и ее продолжение // ДГМФ. 1992. Вып. 23. С. 110—118.

26. *Шевченко Ю.И.* Линейная дифференциально-геометрическая и фундаментально-групповая связности // XXIV науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. Калининград, 1992. С. 152.

27. *Шевченко Ю.И.* Оснащения плоскостной поверхности, рассматриваемой с трех точек зрения // ДГМФ. 1993. Вып. 24. С. 112—123.

28. *Шевченко Ю.И.* Относительность понятия оснащения на примере плоскостной поверхности // XXV науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. Калининград, 1993. С. 158.

29. *Шевченко Ю. И.* Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // ДГМФ. 1994. Вып. 25. С. 110—121.

30. *Shevchenko Yu. I.* Generalized connections of non-holonomic differentiable manifolds // Юбилейная междунар. науч. конф., посвящ. 450-летию основания Кёнигсбергского университета Альбертины : тез. докл. Калининград, 1994. С. 17—18.

31. *Шевченко Ю. И.* Оснащения подмногообразий голономного и неголономного дифференцируемых многообразий // ДГМФ. 1995. Вып. 26. С. 113—126.

32. *Шевченко Ю. И.* Прикасающиеся подпространства подмногообразия дифференцируемого многообразия // XXVI науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. Ч. 2. Калининград, 1995. С. 58—59.

33. *Шевченко Ю. И.* Связности голономных и неголономных центропроективных многообразий // ДГМФ. 1996. Вып. 27. С. 122—135.

34. *Шевченко Ю. И.* Классификация некоторых пространств со связностями и других понятий с помощью дифференцируемого многообразия // XXVII науч. конф. Калинингр. ун-та : тез. докл. Ч. 6. Калининград, 1996. С. 14—15.

35. *Шевченко Ю. И.* Линейные связности голономного и неголономного гладких многообразий // Тр. геом. семин. Казань, 1997. Вып. 23. С. 175—186.

36. *Шевченко Ю. И.* Оснащения подмногообразий голономного и неголономного центропроективных многообразий // ДГМФ. 1997. Вып. 28. С. 82—85.

37. *Шевченко Ю. И.* Центропроективная связность как связность в расслоении над центропроективным многообразием // XXVIII науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. : в 6 ч. Калининград, 1997. Ч. 6. С. 11—12.

38. *Шевченко Ю. И.* Линейная связность в расслоении над неголономным дифференцируемым многообразием // Современная геометрия и теория физических полей : тез. докл. междунар. геом. семин. им. Н. И. Лобачевского. Казань, 1997. С. 131.

39. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

40. *Шевченко Ю. И.* Примеры неголономных гладких многообразий // ДГМФ. 1998. Вып. 29. С. 91—101.

41. *Шевченко Ю. И.* О существовании неголономных гладких многообразий // XXIX науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. : в 6 ч. Калининград, 1998. Ч. 6. С. 10.

42. *Шевченко Ю.И.* Классы проективных связностей на неголономной поверхности. // XXX науч. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников, аспирантов и студентов : тез. докл. : в 6 ч. Калининград, 1999. Ч. 6. С. 8—9.

43. *Скрыдлова Е.В., Шевченко Ю.И.* Владислав Степанович Малаховский и его геометрия // ДГМФ. 1999. Вып. 30. С. 6—13.

44. *Шевченко Ю.И.* Две проективные связности на неголономной поверхности // ДГМФ. 1999. Вып. 30. С. 102—112.

45. *Шевченко Ю.И.* Связности в расслоениях над голономным и неголономным центропроективными многообразиями // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы школы-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д.Ф. Егорова. Казань, 1999. С. 250—251.

46. *Шевченко Ю.И.* Каноническая и центролинейная проективные связности неголономной поверхности // Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики : тез. докл. междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. Г.Ф. Лаптева. М., 1999. С. 56.

47. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий : учеб. пособие. Калининград, 2000.

48. *Шевченко Ю.И.* Специальный линейный и проективный аналитические аппараты проективного пространства // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. 2000. Т. 5. С. 303.

49. *Шевченко Ю.И.* О структурных уравнениях проективной группы // ДГМФ. 2000. Вып. 31. С. 93—100.

50. *Шевченко Ю.И.* Некоторые направления теории связностей // Проблемы математических и физических наук : материалы постоянных науч. семин. Калининград, 2000. С. 39—41.

51. *Шевченко Ю.И.* Групповая двойственность в проективном пространстве // Проблемы математических и физических наук : материалы постоянных науч. семин. Калининград, 2001. С. 29.

52. *Шевченко Ю.И.* Пучки аффинных связностей на группе Ли и параллелизуемом многообразии // ДГМФ. 2001. Вып. 32. С. 126—131.

53. *Шевченко Ю.И.* О проективных связностях на неголономной поверхности // Инвар. методы исслед. на многообр. структур геом., анализа и мат. физ. М., 2001. Ч. 2. С. 216—226.

54. *Шевченко Ю.И.* Относительность понятий общего и частного на примерах матриц и поверхностей // Тез. докл. II межпредметн. конф. Калининград, 2001. С. 16.

55. *Шевченко Ю.И.* Голономные и неголономные реперы 2-го порядка на гладких многообразиях // ДГМФ. 2002. Вып. 33. С. 110—115.

56. *Шевченко Ю.И.* Аффинная, коаффинная и линейная факторгруппы в подгруппе проективной группы // Пробл. матем. и физ. наук : материалы постоянных науч. семин. Калининград, 2002. С. 38—39.

57. *Shevchenko Yu.I.* Generalizations of affine, coaffine and linear groups // Докл. междунар. матем. семинара к 140-летию со дня рождения Давида Гильберта из Кёнигсберга и 25-летию математического факультета. Калининград, 2002. С. 159—165.

58. *Шевченко Ю.И.* Три расслоения проективной группы // ДГМФ. 2003. Вып. 34. С. 154—159.

59. *Шевченко Ю.И.* Оснащения Бортолотти, Картана, Нордена и теория индуцированных связностей // Междунар. конф. по геом. и анализу. Пенза, 2003. С. 123—130.

60. *Shevchenko Yu.* Non-symmetric structure of adjoining spaces of a principal bundle // New Geometry of Nature. Kazan, 2003. Vol. 1. P. 187—190.

61. *Шевченко Ю.И.* О проективной связности Картана в проективном пространстве // Геометрия в Одессе — 2004 : тез. докл. междунар. конф. Одесса, 2004. С. 86—87.

62. *Шевченко Ю.И.* Геометрическая связность семейства плоскостей, порожденная проективной связностью // ДГМФ. 2004. Вып. 35. С. 155—162.

63. *Шевченко Ю.И.* Проективная связность Картана в проективном пространстве // Междунар. геом. семин. им. Г.Ф. Лаптева : сб. тр. Пенза, 2004. С. 150—155.

64. *Шевченко Ю.И.* Аналоги тензоров Рахула — Муллари // Геометрия в Одессе — 2005 : тез. докл. междунар. конф. Одесса, 2005. С. 106—107.

65. *Шевченко Ю.И.* Центропроективная связность в пространстве проективной связности Картана // ДГМФ. 2005. Вып. 36. С. 154—160.

66. *Шевченко Ю.И.* Тензоры отображения пространств аффинной связности // Движения в обобщенных пространствах : межвуз. сб. науч. тр. ПГПУ им. В.Г. Белинского. Пенза, 2005. С. 157—162.

67. *Shevchenko Yu.I.* Tensor of affine torsion-curvature of projective Cartan's connection // Избранные вопросы современной математики : тр. междунар. науч. конф., приуроченной к 200-летию со дня рожд. великого немецкого математика Карла Густава Якоби и 750-летию со дня основания г. Калининграда (Кёнигсберга). Калининград, 2005. С. 49—52.

68. *Шевченко Ю.И.* Фундаментально-групповая линейная связность аффинного типа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2006. Вып. 5. С. 188—192.

69. *Шевченко Ю.И.* Два приема задания связности в главном расслоении // Геометрия в Одессе — 2006 : тез. докл. междунар. конф. Одесса, 2006. С. 163—164.

70. *Шевченко Ю.И.* Аффинная связность Столярова // Тезисы региональной научной конференции «Современные вопросы геометрии и механики деформируемого твердого тела». Чебоксары, 2006. С. 41—42.

71. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 185—193.

72. *Шевченко Ю.И.* Касательные и соприкасающиеся пространства проективного расслоения // ДГМФ. 2007. Вып. 38. С. 143—150.

73. *Шевченко Ю.И.* Аффинная связность Столярова на распределении плоскостей в проективном пространстве // Геометрия в Астрахани — 2007 : тез. докл. междунар. семин. Астрахань, 2007. С. 65—67.

74. *Шевченко Ю.И.* Редукция аффинного кручения центропроективной связности в проективной группе к кручению аффинно-групповой связности на распределении // Геометрия в Одессе — 2007 : тез. докл. междунар. конф. Одесса, 2007. С. 112—114.

75. *Шевченко Ю.И.* Редукция объекта центропроективной связности к объекту связности, ассоциированной с распределением // Междунар. геом. семин. им. Г.Ф. Лаптева. Пенза, 2007. С. 134—144.

76. *Шевченко Ю.И.* Нормальная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением плоскостей. ДГМФ. 2008. Вып. 39. С. 157—166.

77. *Омельян О.М., Шевченко Ю.И.* Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Математические заметки. 2008. Т. 84, №1. С. 99—107.

78. *Omel'yan O.M., Shevchenko Yu.I.* Reductions of the object and the affine torsion tensor of a centroprojective connection on a distribution of planes. Mathematical Notes. 2008. Vol. 84, №1-2. P. 100—107.

79. *Шевченко Ю.И.* Тензоры кручения и кривизны нормальной аффинной связности Столярова на распределении // Геометрия в Одессе — 2008 : тез. докл. междунар. конф. Одесса, 2008. С. 144—145.

80. *Шевченко Ю.И.* Проективная связность Лаптева — Остиану на распределении // Геометрия в Астрахани — 2008 : тез. докл. междунар. семин. Астрахань, 2008. С. 65—67.

81. *Шевченко Ю.И.* Кручение плоскостной аффинной связности Столярова и оснащение Вагнера // Совр. пробл. диф. геом. и общей алгебры. Саратов, 2008. С. 97—99.

82. *Шевченко Ю.И.* Каноническая нормальная аффинная связность Столярова без кручения на распределении плоскостей // Волга — 2008 : материалы междунар. летней школы-семинара по соврем. пробл. теор. и матем. физики (XX Петровские чтения). Казань, 2008. С. 56.

83. *Шевченко Ю.И.* Голономные и сверхголономные распределения как двухъярусные расслоения // Волга — 2008 : материалы междунар. летней школы-семинара по соврем. пробл. теор. и матем. физики (XX Петровские чтения). Казань, 2009. С. 46.

84. *Шевченко Ю.И.* Плоскостная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением // ДГМФ. 2009. Вып. 40. С. 153—161.

85. *Шевченко Ю.И.* Несимметричность линейных связностей, ассоциированных с распределением // Геометрия в Одессе — 2009 : тез. докл. междунар. конф. Одесса, 2009. С. 80.

86. *Шевченко Ю.И.* Вырожденная плоскостная аффинная связность Столярова // Лаптевские чтения – 2009 : тез. докл. междунар. конф. Тверь, 2009. С. 41.

87. *Шевченко Ю.И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве : учеб. пособие. Калининград, 2009.

88. *Шевченко Ю.И.* О плоскостной аффинной связности Столярова, ассоциированной с распределением // Укр. матем. конгресс. 2009. URL: https://www.imath.kiev.ua/~congress2009/partUMC2009.html (дата обращения: 27.05.2024).

89. *Shevchenko Y.I.* Laptev’s and Lumiste’s ways of the giving a connection in the principal fiber bundle // Тр. междунар. геом. центра. 2010. Т. 3, №1. С. 46.

90. *Шевченко Ю.И.* Проективная связность Лаптева — Остиану, ассоциированная с распределением плоскостей // ДГМФ. 2010. Вып. 41. С. 150—165.

91. *Шевченко Ю.И.* Полуканоническая нормальная аффинная связность, ассоциированная с распределением // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2010. №4. С. 166—173.

92. *Шевченко Ю.И.* Вырождение плоскостной аффинной связности Столярова // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, №2. С. 155—161.

93. *Шевченко Ю.И.* Тензор кривизны-кручения обобщенной проективной связности на распределении // Petrov 2010 anniversary symposium on general relavity and gravitation : тез. докл. междунар. конф. Казань, 2010. С. 123—124.

94. *Шевченко Ю.И.* Вырождение обобщенной проективной связности в проективную связность Картана // Геометрическая теория управления — 2010 : тез. докл. междунар. молодежной школы. М., 2010. С. 67.

95. *Шевченко Ю.И.* Обобщенная проективная связность в проективной группе // Геометрия многообразий и ее приложения : материалы науч. конф. с междунар. участием. Улан-Удэ, 2010. С. 69—74.

96. *Шевченко Ю.И.* Обобщенная фундаментально-групповая связность // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского. 2011. №26. С. 304—310.

97. *Шевченко Ю.И.* Обобщенная связность Картана // ДГМФ. 2011. Вып. 42. С. 159—172.

98. *Shevchenko Y.I.* Degeneration of plane affine Stolyarov connections // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 177, №5. P. 753—757.

99. *Шевченко Ю.И.* Соприкасающиеся пространства голономного главного расслоения и подвижной репер 2-го порядка // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 156—163.

100. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

101. *Скрыдлова Е.В., Шевченко Ю.И.* Продолжение горизонтального распределения на голономном главном распределении // Геометрия многообразий и ее приложения : материалы науч. конф. с междунар. участием. Улан-Удэ, 2012. С. 68—74.

102. *Шевченко Ю.И.* Редукция центропроективной связности проективной группы к фундаментально-групповой связности поверхности // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского. 2012. №30. С. 219—224.

103. *Шевченко Ю.И.* Полуголономные, голономные и тривиальные пространства аффинной связности // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 10. С. 43—48.

104. *Шевченко Ю.И.* Объекты сечения, геометрической и фундаментально-групповой связностей // ДГМФ. 2013. №44. С. 143—157.

105. *Shevchenko Yu.I.* Cartan projective connection space with objective torsion // Высокопроизводительные вычисления — математические модели и алгоритмы : тез. докл. II междунар. конф., посвященной Карлу Якоби. Калининград, 2013. С. 32—33.

106. *Shevchenko Yu., Skrydlova E.* Reduction of the cenroprojective connection of the projective group to the fundamental-group connection of a surface // Miskolc Mathematical Notes. 2013. Vol. 14, №2. P. 601—608.

107. *Shevchenko Yu.I.* Holonomic and trivial spaces of an affine connection // Проблемы современной топологиии ее приложения. Ташкент, 2013. С. 88—89.

108. *Шевченко Ю.И.* Об обобщениях проективной связности Картана на гладком многообразии // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2014. Вып. 10. С. 60—68.

109. *Шевченко Ю.И.* Классификация пространств проективной связности // ДГМФ. 2014. №45. С. 144—157.

110. *Малаховский В.С., Шевченко Ю.И., Егоров А.И. и др.* Выдающийся математик — Иван Петрович Егоров (К 100-летию со дня рождения) // ДГМФ. 2015. №46. С. 7—21.

111. *Шевченко Ю.И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // ДГМФ. 2015. Вып. 46. С. 168—177.

112. *Шевченко Ю.И.* Иерархии гладких многообразий с точностью до нулевого и первого порядков // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. №2. С. 5—11.

113. *Шевченко Ю.И.* Деривационные формулы Акивиса и структурные уравнения Лаптева на поверхности аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. №4. С. 24—31.

114. *Шевченко Ю.И.* Голономность, полуголономность и неголономность однородных и псевдооднородных пространств // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 168—175.

115. *Скрыдлова Е.В., Шевченко Ю.И.* Сверхаффинная связность в главном расслоении над касательным расслоением гладкого многообразия // Геометрия многообразий и ее приложения : материалы IV науч. конф. с междунар. участием. Улан-Удэ, 2016. С. 37—44.

116. *Shevchenko Yu.I.* About non-holonomicity of homogeneous and psevdohomogeneous spaces // Проблемы современной топологии и ее приложения. Ташкент, 2016. С. 100.

117. *Шевченко Ю.И.* О полуголономности группы Ли и параллелизуемого многообразия // Дни геометрии в Новосибирске : тез. междунар. конф. Новосибирск, 2016. С. 86.

118. *Shevchenko Yu.I., Skrydlova E.V.* About non-holonomicity of quotient manifold of holonomic distribution on semi-holonomic smooth manifold // Материалы междунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань, 2016. С. 67—68.

119. *Шевченко Ю.И.* Деривационные формулы и уравнения структуры аффинного пространства с точки зрения гладких многообразий // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. №2. С. 5—13.

120. *Шевченко Ю.И.* Иерархия подгрупп линейной группы при изолировании одного значения индексов // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. №4. С. 5—9.

121. *Шевченко Ю.И.* Фактор-многообразия, порожденные голономными распределениями на гладких многообразиях // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 125—139.

122. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* Неголономность фактор-многообразия голономного распределения на полуголономном гладком многообразии // Современная геометрия и ее приложения : сб. тр. междунар. молодежной школы-семинара и междунар. науч. конф. Казань, 2017. С. 157—160.

123. *Шевченко Ю.И.* Иерархия пространств проективной связности // ДГМФ. 2018. Вып. 49. С. 178—192.

124. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* Полуголономность фактор-многообразия голономного распределения в пространстве аффинной связности без кручения // Геометрия многообразий и ее приложения : материалы V науч. конф. с междунар. участием, посвященной 100-летию профессора Р.Н. Щербакова. Улан-Удэ, 2018. С. 59—67.

125. *Shevchenko Yu.I., Skrydlova E.V.* Interpretation of classical affine connection by means Laptev affine connection // Дни геометрии в Новосибирске — 2018 : тез. междунар. конф. Казань, 2018. С. 28.

126. *Кретов М.В., Фунтикова Т.П., Шевченко Ю.И.* Создатель калининградской научной геометрической школы Владислав Степанович Малаховский (К 90-летию со дня рождения) // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 7—17.

127. *Шевченко Ю.И.* Тензор кривизны-кручения связности Картана // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 155—168.

128. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* О плоскостном пространстве проективной связности, обобщающем пространства Картана и Акивиса // Классическая и современная геометрия : материалы междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рожд. В.Т. Базылева. М., 2019. С. 150—151.

129. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* Интерпретация связности Картана с помощью двухъярусной главной связности // Современная геометрия и ее приложения — 2019 : сб. тр. междунар. науч. конф. Казань, 2019. С. 166—169.

130. *Шевченко Ю.И.* Квазитензор кривизны-кручения фундаментально-групповой связности Лаптева // ДГМФ. 2020. Вып. 51. С. 156—169.

131. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* Плоскостное пространство проективной связности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Т. 180. С. 113—119.

132. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* Квазитензор кривизны-кручения пространства со связностью Картана // Геометрия многообразий и ее приложения : материалы VI науч. конф. с междунар. участием. Улан-Удэ, 2020. С. 57—63.

133. *Вялова А.В., Шевченко Ю.И.* Композиционное оснащение многообразия гиперцентрированных плоскостей, размерность которого совпадает с размерностью образующей плоскости // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 52—62.

134. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.* Структурные уравнения связности Картана с квазитензором кривизны-кручения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 203. С. 130—138.

135. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В., Вялова А.В.* Каноническая проективная связность Картана // Классическая и современная геометрия : материалы междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рожд. Л.С. Атанасяна. М., 2021. С. 152—153.

136. *Шевченко Ю.И., Вялова А.В.* Метрики пространства с линейной связностью, не являющейся полусимметрической // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 148—160.

137. *Shevchenko Yu.I., Skrydlova E.V.* Planar spaces with projective connections // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 276, №4. P. 580—586.

138. *Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В., Вялова А.В.* О канонической проективной связности Картана // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. Т. 222. С. 134—140.

139. *Шевченко Ю.И., Вялова А.В.* Линейные и проективные связности над гладким многообразием // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 78—91.

В заключение статьи сотрудники кафедры геометрии и общей математики, работавшие с Юрием Ивановичем и под его началом, а также друзья и коллеги по факультету (институту) рады поздравить Юрия Ивановича с юбилеем.

Талантливый геометр, математик, чуткий и внимательный руководитель-наставник, отзывчивый друг и коллега — это далеко не все его достоинства. Широкий научный кругозор, всесторонняя эрудиция, яркий, искрометный юмор, интеллигентность и умение слушать делают Юрия Ивановича всегда желанным и интересным собеседником, а богатство увлечений — разносторонним человеком.

Страсть к охоте, рыбалке и туристическим походам не просто заполняет его досуг, но и вполне соответствует характеру ученого. Юрий Иванович и в науке, как опытный охотник, определив цель, настойчиво движется к ее достижению, преодолевая трудности и препятствия. А в преподавательской деятельности, подобно удачливому рыболову, умело извлекает из студенческого водоема способных учеников, готовых быть его преданными последователями.

Этот год стал для Ю.И. Шевченко вдвойне юбилейным: почти 55 лет он готовит к выпуску сборник «Дифференциальная геометрия многообразий фигур», широко известный в научных кругах. Стойкий интерес научных кругов к сборнику, получившему в прошлом году статус журнала, и его долголетие — во многом заслуга Юрия Ивановича.

Такие ученые, полные упорства и преданности науке, и есть те живые камни, из которых строится российская наука, в том числе свободная от противоречий неголономная геометрия.

В 2023 г. профессор Юрий Иванович Шевченко вышел на пенсию, но мы надеемся, что он продолжит вносить свой вклад в развитие дифференциальной геометрии!

Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.
2. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий : учеб. пособие. Калининград, 2000.
3. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве : учеб. пособие. Калининград, 2009.

Для цитирования: *Белова О. О., Полякова К. В.* Выдающийся геометр Юрий Иванович Шевченко (к 75-летию со дня рождения) // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 5—36. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-1.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10, 01A70

O. O. Belova, *K. V. Polyakova*
Immanuel Kant Baltic Federal Univetsity, Russia
olgaobelova@mail.ru, Polykova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-1

Outstanding geometer Yuri Ivanovich Shevchenko (on the occasion of the 75th birthday)

Submitted on June 1, 2024

This paper is dedicated to the famous geometer and talented scientific supervisor Yuri Ivanovich Shevchenko in honor of his 75th birthday.

Connection theories are the main area of his work. He has written 140 scientific papers and three textbooks on the topics of his research. These works made a huge contribution to the development of differential geometry.

Yu. I. Shevchenko made presentations at many international and all-Russian geometric conferences.

Four candidate dissertations were prepared and successfully defended under the leadership of Yu. I. Shevchenko.

Yuri Ivanovich made a great contribution to the development of the journal “Differential Geometry of Manifolds of Figures”, serving as the executive secretary of the journal’s editorial board.

In addition to teaching at the university, he was fruitfully engaged in scientific work with schoolchildren in Kaliningrad.

The directions of scientific researches of Yu. I. Shevchenko and Kaliningrad geometrical school are the following:

1. Projective spaces (a group duality in projective space; affine, coaffine and linear factor groups in subgroups of projective group; the generalizations of affine, coaffine and linear groups; fiberings and factor fiberings of linear and projective groups; comparison of the results received by homogeneous, special homogeneous and non-homogeneous analytic methods; researches in uneffective, special effective and the factor effective projective spaces).

2. The theory of connections (connections: general, fundamental-group, affine (special linear), coaffine (centreprojective), linear, the general affine; connections of projective types; generalized connections: Cartan connections, Laptev connections and Stoljarov connections; connections on Lie group and parallelizable manifold; covariant differentiation of geometrical objects in fundamental group connections; tensors of mappings of affine connection spaces; multidimensional glueing in the principal bundle and generalized connections; connections on submanifolds of smooth and centreprojective manifolds).

3. Connections (associated, induced and internal) of the families of linear figures (i. e. sets of points and planes) in projective space (the connections induced by the clothings on surfaces, in particular, tangential degenerate and tangential framed; the connections induced by the clothings of strips and hyperstrips; the connections induced by the clothings of the families of planes and centred planes; the clothings theory of the families of linear figures; generalized connections on distributions; reductions of connections of comprehensive space to the connections of the embeded families of linear figures; spaces of planes and centered planes in projective space and corresponding affine connections; Grassmann manifold and Belova manifold, Neifeld's connections and their analogues).

4. Geometry of the higher order (the connections of the 2nd order on smooth and centreprojective manifolds; a substantiation of tangent spaces of the higher orders with the help of differential operators of the superior orders; osculating spaces of the principal bundle and projective fibering).

5. Holonomic, semi-holonomic and non-holonomic smooth and centroprojective manifolds.

References

1. *Shevchenko Yu. I.:* Clothing of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

2. *Shevchenko Yu. I.:* Clothing of centroprojective manifolds. Kaliningrad (2000).

3. *Shevchenko Yu. I.:* Connections associated with the distribution of planes in projective space. Kaliningrad (2009).

For citation: Belova, O. O., Polyakova, K. V.: Outstanding geometer Yuri Ivanovich Shevchenko (on the occasion of the 75th birthday). DGMF, 55 (2), 5—36 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-1.

MSC 2010: 53A45, 53C20

***N. A. Arkhipova*[1], *S. E. Stepanov*[2]**
[1] *Dept. of Mathematics, Russian Institute for Scientific and Technical Information of the Russian Academy of Sciences, Russia*
[2] *Department of Mathematics, Financial University, Russia*
[1] rzhmat@viniti.ru, [2] s.e.stepanov@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-2

Two kernel vanishing theorems and an estimation theorem for the smallest eigenvalue of the Hodge — de Rham Laplacian

In this paper, we formulate two theorems on the disappearance of the kernel of the Hodge — de Rham Laplacian and refine the estimate for its smallest eigenvalue on closed Riemannian manifolds.

***Keywords*:** Riemannian manifold, exterior differential form, Hodge — de Rham Laplacian, kernel vanishing theorem, smallest eigenvalue

1. Definitions and notations

In this paper, we will consider the *Hodge — de Rham Laplacian* $\Delta_H: C^\infty(\Lambda^q M) \to C^\infty(\Lambda^q M)$, where $\Lambda^q M$ is the vector bundle of exterior differential q-forms $(1 \le q \le n-1)$ over an n-dimensional Riemannian manifold (M, g).

Next, let (M, g) be covered by a system of coordinate neighborhoods $\{U, x^1, \dots x^n\}$, where U denotes a neighborhood and $x^1, \dots x^n$ denote local coordinates in U. Then we can define the natural frame $\{X_1 = \partial/\partial x^1, \dots, X_n = \partial/\partial x^n\}$ in an arbitrary coordinate neighborhood $\{U, x^1, \dots x^n\}$. In this case, $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ are local components of the metric tensor g with the indices $i, j, k, l, \dots \in \{1,2, \dots, n\}$. Next, we denote by R_{ik} and R_{ikjl} the lo-

---

Submitted on February 16, 2024

cal components the Ricci tensor Ric and the curvature tensor R, respectively. Then the Hodge — de Rham Laplacian $\Delta_H: C^\infty(\Lambda^q M) \to C^\infty(\Lambda^q M)$ with respect to local coordinates $x^1, \dots x^n$ has the form

$$\Delta_H \omega_{i_1 \dots i_q} = \bar{\Delta}\omega_{i_1 \dots i_q} + \mathfrak{R}_p(\omega)_{i_1 \dots i_q},$$

where $\bar{\Delta} = -\operatorname{trace}_g \nabla^2$ and (see, e. g., [1])

$$\mathfrak{R}_q(\omega)_{i_1 \dots i_p} = \sum_{a=1}^{q} g^{jk} R_{i_a j} \omega_{i_1 \dots i_{a-1} k i_{a+1} \dots i_p} -$$

$$- \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^{q} g^{jk} g^{lm} R_{i_a i_b j l}\, \omega_{i_1 \dots i_{a-1} k i_{a+1} \dots i_{b-1} m i_{b-1} \dots i_p}$$

for $\omega \in \Lambda^q M$. In particular, $\mathfrak{R}_1 = Ric$. In this case, direct calculations yield the following formula:

$$\frac{1}{2} \Delta \|\omega\|^2 = -g(\Delta_H \omega, \omega) + g\big(\mathfrak{R}_q(\omega), \omega\big) + \|\nabla \omega\|^2,$$

where $\Delta = \operatorname{trace}_g \nabla^2$ and (see, e. g., [2])

$$g\big(\mathfrak{R}_q(\omega), \omega\big) = q\left(R_{ij}\omega^{i i_2 \dots i_q}\omega^{j}_{i_2 \dots i_q} - \tfrac{q-1}{2} R_{ikjl}\omega^{i k i_3 \dots i_q}\omega^{jl}_{i_3 \dots i_q}\right).$$

In particular, we have

$$\Delta \|\omega\|^2 \geq 2\, g\big(\mathfrak{R}_q(\omega), \omega\big) \qquad (1)$$

for an arbitrary $\omega \in \Lambda^q M \cap \ker \Delta_H$. We recall that on a closed Riemannian manifold, by the Hodge's theorem the dimension of the kernel of $\Delta_H: C^\infty(\Lambda^q M) \to C^\infty(\Lambda^q M)$ equals the q^{th} Betti number $\mathrm{b}_q(M)$, and so the Laplacians determine the Euler characteristic $\chi(M)$.

We recall that the curvature tensor induces a self-adjoint operator $\hat{R}: \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$, defined by the equations, see [3], $\hat{R}(\omega)_{ij} = R_{ijkl}\omega^{kl}$ for an arbitrary $\omega \in \Lambda^2 M$. The map $\hat{R}: \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$, called the *curvature operator of the first kind*, see [3; 4], induces a bilinear form $\hat{R}: \Lambda^2 M \times \Lambda^2 M \to \mathbb{R}$ by restriction to $\Lambda^2 M$. We say that $\hat{R} > 0$ if the eigenvalues of $\hat{R}$ as a bilinear form on $\Lambda^2 M$ are positive (the bilinear form is positive definite). Moreover, if $\hat{R}$ is positive definite at each point $x \in M$, then $\mathfrak{R}$ is also positive definite at each point $x \in M$. In addition, if $\hat{R}$ is positive semi-definite at each point $x \in M$, then so is $\mathfrak{R}$.

2. Two kernel vanishing theorems for the Hodge — de Rham Laplacian

Based on (1) and the above statements, we can formulate the classical vanishing theorem on the disappearance of the kernel Δ_H (see [5, p. 351; 6, p. 334; 7, p. 336–337]).

Theorem 1. *Let Δ_H be the Hodge — de Rham Laplacian defined on C^∞-sections of the fibre bundle of exterior differential q-forms $(1 \le q \le n-1)$ over a closed n-dimensional Riemannian manifold (M, g). If the curvature operator of the first kind $\hat{R}: \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$ of (M, g) is positive semi-definite, then $\nabla\varphi = 0$ for an arbitrary $\varphi \in \ker \Delta_H$ and $\dim_{\mathbb{R}} ker\, \Delta_H = \mathfrak{b}_q(M) \le \binom{n}{q}$. In particular, if $\hat{R}$ is positive definite at each point $x \in M$, then*

$$dim_{\mathbb{R}} \ker \Delta_H = \mathfrak{b}_q(M) = 0.$$

Remark. We recall that Böhm and Wilking showed by Ricci-flow techniques that positive curvature operator $\hat{R}$implies that a closed manifold (M, g) is diffeomorphic (not isometric) to a spherical space form (see [8]).

For the case of a complete and non-compact Riemannian manifold, we deduce the following statement from our inequality (1), Theorem 3 and Theorem 7 from [9].

Theorem 2. *Let Δ_H be the Hodge — de Rham Laplacian defined on C^∞-sections of the fibre bundle of exterior differential q-forms over a complete and non-compact n-dimensional Riemannian manifold (M, g) for $(1 \le q \le n-1)$. If the curvature operator of the first kind $\hat{R}: \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$ of (M, g) is positive semi-definite, then $L^k(Ker\Delta_H)$ is trivial for any number $k > 1$.*

Remark. Our statement above generalizes the following now-classic result from [10] and [11]: If $\mathfrak{R}_q$ is positive semi-define at every point of a complete Riemannian manifold (M, g), then L^2-harmonic q-form is parallel. In particular, if either exists a point $x \in M$ such that $\mathfrak{R}_q$ is strictly positive at x or the volume of (M, g) is infinite, then every L^2-harmonic q-form is identically zero.

3. An estimation theorem for the smallest eigenvalueof the Hodge — de Rham Laplacian

Having discussed the kernel of the Hodge Laplacian Δ_H, we now turn our attention to its first positive eigenvalue on closed Riemannian manifold, which we will denote by $\lambda_1^{[q]}$. Note here that the superscript $[q]$ refers to the degree of the involved eigenform. We also recall that the spectrum $Spec^{(q)}\Delta_H$ of the Hodge Laplacian consists only of non-negative eigenvalues with finite multiplicity. We also denote its positive eigenvalues counted with multiplicity by

$$0 = \lambda_0^{[q]} < \lambda_1^{[q]} \leq \lambda_2^{[q]} \leq \cdots \leq \lambda_k^{[q]} \leq \lambda_{k+1}^{[q]} \leq \cdots,$$

where the multiplicity of the eigenvalue 0 is equal to the q-th Betti number $\mathfrak{b}_q(M)$ of (M, g), by the Hodge — de Rham theory (see, for example, [5; 7, p. 339]). The case $q = 0$ corresponds to the *Laplace — Beltrami* $\Delta = \delta\nabla$ operator acting on C^∞-functions. At the same time, we known from [12, p. 78] that if all eigenvalues of $\hat{R}$ lie in $[\hat{r}_{min}, \hat{r}_{max}]$, then the sectional curvature sec satisfies $1/2\hat{r}_{min} \leq sec \leq 1/2\hat{r}_{max}$. Therefore, if the inequality $\hat{R} \geq C > 0$ holds and then, from the above, we have $sec \geq 1/2\ C$. In this case, $Ric \geq 1/2\,(n-1)C$, and, as Lichnerowicz has already proved, $\lambda_q^{[0]} \geq 1/2\, n\, C$ (see, for example, [7, p. 82]). A similar result can be formulated about the eigenvalues $\bar{\lambda}_a^{[q]}$ and $\lambda_q^{[q]}$ of the Laplacians $\bar{\Delta}$ and Δ_H, respectively. But let us first recall the following.

The variational characterization of the eigenvalues $\bar{\lambda}_a^{[q]}$ and $\lambda_q^{[q]}$ of the Laplacians $\bar{\Delta}$ and Δ_H will be as follows (see [13, p. 393]):

$$\lambda_q^{[q]} \geq \bar{\lambda}_a^{[q]} + \Re_{min} \tag{2}$$

for all $a \geq 1$. Here, since (M, g) is closed, we have defined the number (see [13, p. 379])

$$\Re_{min} = \inf \{\Re_{min}(x) : x \in M\}$$

for $\Re_{min}(x) = \inf \{g(\Re\varphi, \varphi)_x : \varphi_x \in E_x,\ g(\varphi, \varphi)_x = 1\}$. In addition, we recall that the rough Laplacian $\bar{\Delta}$ acting on $C^\infty(E)$ is an order 2 elliptic operator and that its spectrum on a closed (M, g) is an unbounded sequence of real numbers $Spec^{(0)}\bar{\Delta} = \{\bar{\lambda}_a\}_{a\in\mathbb{N}}$ which can be increasingly ordered (see [14])

$$0 = \bar{\lambda}_0^{[q]} \leq \bar{\lambda}_1^{[q]} \leq \cdots \leq \bar{\lambda}_k^{[q]} \leq \bar{\lambda}_{k+1}^{[q]} \leq \cdots$$

with the following convention: $\bar{\lambda}_0^{[q]}$ is the zero eigenvalue with multiplicity $\dim(Ker\nabla)$. In case where there is no parallel section, i.e., $\dim(Ker\nabla) = 0$, the spectrum starts with the positive eigenvalue $\bar{\lambda}_1$.

Theorem 3. *Let (M, g) be an n-dimensional closed Riemannian manifold. Let $\bar{\Delta}$ and Δ_H be the rough and Hodge — de Rham Laplacians actingdefined on C^∞-sections of the fibre bundle $\Lambda^q M$ of differential q-forms, $1 \leq q \leq n-1$. If the curvature operator of the second kind $\hat{R}: \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$ satisfies the inequality $\hat{R} \geq C > 0$ and (M, g) is not isometric to the Euclidean n-sphere $\mathbb{S}^n$ with its standard metric, then $\bar{\lambda}_a^{[q]} > 1/2\ n\, C$ and $\lambda_q^{[q]} > 1/2\ n\, C +$ $+\, q(n-q)\, C$ for any eigenvalues $\bar{\lambda}_a^{[q]}$ and $\lambda_q^{[q]}$ of $Spec^{(q)}\bar{\Delta}$ and $Spec^{(q)}\Delta_H$, respectively.*

Proof. Let (M, g) be an n-dimensional closed Riemannian manifold. We recall that if there exists a positive constant C on (M, g) such that the inequality $g(\hat{R}\omega, \omega) \geq C\|\omega\|^2$ holds for any 2-form $\omega \in \Lambda^2 M$, then the inequality $g(\Re_q(\omega), \omega) \geq$

$\geq q(n-q)\, C\, \|\omega\|^2$ holds for any $\omega \in \Lambda^q M$ and $1 \leq q \leq n-1$ (see [15]). In addition, equality holds for a Riemannian manifold isometric to the Euclidean n-sphere $\mathbb{S}^n$ with its standard metric. In other words, C serves here as a lower bound for the eigenvalues of the curvature operator of the first kind $\hat{R}$ of (M,g) and, in turn, $\mathfrak{R}_{min} = q(n-q)\, C$ serves here as a lower bound for the eigenvalues of the Weitzenböck curvature operator $\mathfrak{R}_q$ of (M,g), respectively. In this case the variational characterization of the eigenvalues (2) is as follows

$$\lambda_a^{[q]} \geq \bar{\lambda}_a^{[q]} + q(n-q)C \tag{3}$$

for any $\lambda_a^{[q]} \in Spec^{(q)}\Delta_H$ and $\bar{\lambda}_a^{[q]} \in Spec^{(q)}\bar{\Delta}$. In contrast to the Hodge Laplacian Δ_H, the kernel of the rough Laplacian $\bar{\Delta}$ acting on q-forms consists of parallel q-forms, whose dimension is not a topological invariant. Therefore, if $\bar{\lambda}_a^{[q]} = 0$, then the associated eigenspace consists of parallel q-forms. At the same time, it is well-known that there are no parallel q-forms $(1 \leq q \leq n-1)$ on a closed Riemannian manifold with a positive curvature operator of the first kind $\hat{R}$ (see [5, p. 351]). Therefore, in our case, $\bar{\lambda}_a^{[q]} \neq 0$, i. e., for the metric g with $\hat{R} \geq C > 0$, all eigenvalues of the rough and Hodge Laplacians acting on q-forms, $1 \leq q \leq n-1$, are nonzero.

At the same time, for the metric g with $\hat{R} \geq C > 0$ and every q, $1 \leq q \leq 1/2\, n$, inequality (3) can be rewritten as the first Gallot — Meyer inequality (see [16] and inequality (3.4) from [17])

$$\lambda_a^{[q]} \geq qC + q(n-q)C.$$

In turn, for the metric g with $\hat{R} \geq C > 0$ and every q, $1/2\, n \leq$ $\leq q \leq n-1$, inequality (3) can be rewritten as the second Gallot — Meyer inequality (see, for example, inequality (3.3) from [16])

$$\lambda_a^{[q]} \geq (n-q)C + q(n-q)C,$$

because $1 \leq (n-q) \leq 1/2\, n$. Moreover, two lower bounds of $\lambda_a^{[q]}$ are optimal because they can be achieved for a Riemannian manifold (M, g) isometric to the Euclidean n-sphere $\mathbb{S}^n$ with its standard metric; in other words, for this variety the equalities are valid in both cases (see also [7, p. 342]). Therefore, if a Riemannian manifold (M, g) isometric to the Euclidean n-sphere $\mathbb{S}^n$, then the first Gallot — Meyer inequality can be rewritten as the equality $\lambda_a^{[q]} = q\, C + q(n-q)\, C$ for every q, $1 \leq q \leq 1/2\, n$. In this case, from (3) we deduce $\bar{\lambda}_a^{[q]} \leq 1/2\ n\, C$ for all $a \geq 1$. A similar conclusion can be drawn for the case when $1/2\, n \leq q \leq n-1$. Therefore, $\bar{\lambda}_a^{[q]} > 1/2\ n\, C$ for an n-dimensional closed Riemannian manifold with $\hat{R} \geq C > 0$ and not isometric to the Euclidean n-sphere $\mathbb{S}^n$. Then from (3) we deduce that $\lambda_q^{[q]} > 1/2\ n\, C + q(n-q)\, C$. Then our theorem holds.

Remark. If $\bar{\lambda}_a^{[q]} > 1/2\ n\, C$, then both strictly Gallot — Meyer inequalities will automatically follow from (3) for an n-dimensional closed Riemannian manifold with $\hat{R} \geq C > 0$ and not isometric to the Euclidean n-sphere $\mathbb{S}^n$.

References

1. *Kora, M.:* On conformal Killing forms and the proper space of Δ for *p*-forms. Math. J. Okayama Univ., 22, 195—204 (1980).

2. *Nienhaus, J., Petersen, P., Wink, M.:* Betti numbers and the curvature operator of the second kind. J. London Math. Soc., **108**:4, 1642—1668 (2023).

3. *Hitchin, N.:* A note on vanishing theorems. Geometry and Analysis on Manifolds, Progr. Math., 308, 373—382 (2015).

4. *Cao, X., Gursky, M.J., Tran, H.:* Curvature of the second kind and a conjecture of Nishikawa. Commentarii Mathematici Helvetici, **98**:1, 195—216 (2023).

5. *Petersen, P.:* Riemannian Geometry. 3d ed., Springer, New York (2016).

6. *Wu, H.:* The Bochner technique in differential geometry. Harwood, Harwood Academic Publishers (1987).

7. *Chavel, I.:* Eigenvalue in Riemannian Geometry, Academic Press, Inc., USA (1984).

8. *Böhm, C., Wilking, B.:* Manifolds with positive curvature operators are space forms. Annals of Mathematics, 167, 1079—1097 (2008).

9. *Yau, S. T.:* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. Indiana Univ. Math. J., 25, 659—670 (1976).

10. *Dodziuk, J.:* Vanishing theorems for square-integrable harmonic forms. Prec. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 1981, **90:**1, 21—27.

11. *Shin, Y. J., Choi, H. I.:* L^2-harmonic p-forms on a complete, noncompact Riemannian manifold without boundary. Comm. Korean Math. Soc., **10**:2, 357—363 (1995).

12. *Bourguignon, J.-P., Karcher, H.:* Curvature operators: pinching estimates and geometric examples. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, 11, 71—92 (1978).

13. *Berard, P. H.:* From vanishing theorems to estimating theorems: the Bochner technique revisited. Bull. of the AMS, **19**:2, 371—406 (1998).

14. *Mantuano, T.:* Discretization of vector bundles and rough Laplacian. Asian J. Math., **11**:4, 671—698 (2007).

15. *Gallot, S., Meyer, D.:* Opérateur de coubure et Laplacien des forms differentielles d'une variété Riemannienne. J. Math. Pures Appl., 54, 259—284 (1975).

16. *Gallot, S., Meyer, D.:* Sur la première valeur propre du p-spectre pour les variétés à opérateur de courbure positif. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A—B **276**, A1619—A1621 (1973).

17. *Tachibana, S.-I., Yamaguchi, S.:* The first proper space of Δ for p-forms in compact Riemannian manifolds of positive curvature operator. J. Diff. Geom., **15**:1, 51—60 (1980).

For citation: Arkhipova, N. A., Stepanov, S. E. Two kernel vanishing theorems and an estimation theorem for the smallest eigenvalue of the Hodge — de Rham Laplacian. DGMF, 55 (2), 37—46 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-2.

УДК 53A45; 53C20

Н. А. Архипова[1], *С. Е. Степанов*[2]
[1] *Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук, Россия*
[2] *Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия*
[1] rzhmat@viniti.ru, [2] s.e.stepanov@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-2

Две теоремы исчезновения и теорема оценки наименьшего собственного значения лапласиана Ходжа — де Рама

Поступила в редакцию 16.02.2024 г.

В данной работе рассматривается лапласиан Ходжа — де Рама. Формулируются две теоремы об исчезновении ядра лапласиана Ходжа — де Рама. Уточняется оценка наименьшего собственного значения лапласиана на замкнутых римановых многообразиях.

Ключевые слова: риманово многообразие, внешняя дифференциальная форма, лапласиан Ходжа — де Рама, теорема исчезновения ядра, наименьшее собственное значение

Список литературы

1. *Kora M*. On conformal Killing forms and the proper space of Δ for *p*-forms // Math. J. Okayama Univ. 1980. №22. P. 195—204.
2. *Nienhaus J., Petersen P., Wink M.* Betti numbers and the curvature operator of the second kind // J. London Math. Soc. 2023. №108 (4). P. 1642—1668.
3. *Hitchin N.* A note on vanishing theorems, Geometry and Analysis on Manifolds // Progr. Math. 2015. №308. P. 373—382.
4. *Cao X., Gursky M.J., Tran H.* Curvature of the second kind and a conjecture of Nishikawa // Commentarii Mathematici Helvetici. 2023. №98 (1). P. 195—216.
5. *Petersen P.* Riemannian Geometry. 3rd ed. N.Y., 2016.
6. *Wu H*. The Bochner technique in differential geometry. Harwood, 1987.

7. *Chavel I.* Eigenvalue in Riemannian Geometry. Academic Press, 1984.

8. *Böhm C., Wilking B.* Manifolds with positive curvature operators are space forms // Annals of Mathematics. 2008. №167. P. 1079—1097.

9. *Yau S. T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry // Indiana Univ. Math. J. 1976. №25. P. 659—670.

10. *Dodziuk J.* Vanishing theorems for square-integrable harmonic forms // Prec. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). 1981. №90 (1). P. 21—27.

11. *Shin Y.J., Choi H. I.* L^2-harmonic p-forms on a complete, noncompact Riemannian manifold without boundary // Comm. Korean Math. Soc. 1995. №10 (2). P. 357—363.

12. *Bourguignon J.-P., Karcher H.* Curvature operators: pinching estimates and geometric examples // Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^{e} série. 1978. №11. P. 71—92.

13. *Berard P.H.* From vanishing theorems to estimating theorems: the Bochner technique revisited // Bull. of the AMS. 1998. №19 (2). P. 371—406.

14. *Mantuano T.* Discretization of vector bundles and rough Laplacian // Asian J. Math. 2007. №11 (4). P. 671—698.

15. *Gallot S., Meyer D*. Opérateur de coubure et Laplacien des forms differentielles d'une variété Riemannienne // J. Math. Pures Appl. 1975. №54. P. 259—284.

16. *Gallot S., Meyer D*. Sur la première valeur propre du *p*-spectre pour les variétés à opérateur de courbure positif // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A—B. 1973. №276. P. A1619—A1621.

17. *Tachibana S.-I., Yamaguchi S.* The first proper space of Δ for *p*-forms in compact Riemannian manifolds of positive curvature operator // J. Diff. Geom. 1980. №15 (1). P. 51—60.

Для цитирования: *Архипова Н.А., Степанов С.Е.* Две теоремы исчезновения и теорема оценки наименьшего собственного значения лапласиана Ходжа — де Рама // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 37—46. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-2.

УДК 514.76

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-3

О некоторых тензорах 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли

В данной заметке рассмотрены 6-мерные уплощающиеся эрмитовы подмногообразия алгебры октав. Вычислены компоненты тензора римановой кривизны, тензора Риччи и тензора Вейля конформной кривизны.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, тензор римановой кривизны, тензор Риччи, тензор Вейля конформной кривизны, 6-мерное уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли

1. Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли развивается с 60-х годов прошлого века. Среди многих известных математиков, которые получили результаты в этой области, особо выделяются американский специалист Альфред Грей и отечественный геометр Вадим Фёдорович Кириченко. Именно В. Ф. Кириченко получил полную классификацию 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав [1]. Отметим, что в обзоре [2] содержится значительная часть достижений в области геометрии 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли (естественно, кроме результатов, полученных в последнее десятилетие).

2. Напомним [3], что *почти эрмитовой структурой на многообразии* M^{2n} четной размерности называется пара

Поступила в редакцию 26.03.2024 г.

$\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, а $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на рассматриваемом многообразии M^{2n}. Многообразие с заданной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым*. С каждой почти эрмитовой структурой $\{J,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связана так называемая фундаментальная форма, которая определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитова структура называется *эрмитовой*, если ее тензор Нейенхейса

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}(J^2\,[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY])$$

обращается в нуль, и келеровой, если $\nabla F = 0$.

Известно [3], что в алгебре Кэли $\mathbf{O} \equiv \mathrm{R}^8$ определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,\ Y, Z\,) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X,\ Y\rangle Z + \langle Y,\ Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y;$$

$$P_2(X,\ Y, Z\,) = -(X\bar{Y})Z + \langle X,\ Y\rangle Z + \langle Y,\ Z\rangle X - \langle Z, X\rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \bar{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры октав, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \qquad \alpha = 1, 2,$$

где $\{e_1,\ e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$. Точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры октав (см.: [1]). Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются *подмногообразиями общего типа*. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$

будем считать подмногообразиями общего типа. 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется *уплощающимся* (чаще planar, реже flattening), если оно содержится в гиперплоскости алгебры Кэли. Отметим, что понятие уплощающегося подмногообразия алгебры октав ввели в рассмотрение В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару [4]. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав (которые, как мы упоминали выше, полностью классифицированы В. Ф. Кириченко). При этом нужно непременно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с почти эрмитовой структурой, отличной от келеровой [5—7].

3. Более 40 лет назад В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав (в репере, адаптированном почти эрмитовой структуре) [1]:

$$
\begin{aligned}
d\omega^a &= \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh} D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b} D_h{}^{c]}\omega_b \wedge \omega_c; \\
d\omega_a &= -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh} D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b + \qquad (1)\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b} D^h{}_{c]}\omega^b \wedge \omega^c; \\
d\omega^a_b &= \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg} D_{h[k} D^g{}_{j]} + \sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}[k} T^{\varphi}_{j]b}\right)\omega^k \wedge \omega^j,
\end{aligned}
$$

где через $\{\omega^k\}$ обозначены компоненты форм смещения, через $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности. Здесь и далее

$$\varphi = 7,\ 8;\ \ a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3;$$
$$\hat{a} = a + 3;\ \ k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Как в [1] и [2], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом

$\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три;

$\delta_{bg}^{ah} = \delta_b^a \delta_g^h - \delta_g^a \delta_b^h$ — кронекеровская дельта второго порядка;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, \quad D_h{}^c = D_{h\hat{c}}, \quad D^h{}_c = D_{\hat{h}c};$$

$$D_{cj} = \mp T_{cj}^8 + iT_{cj}^7, \quad D_{\hat{c}j} = \mp T_{\hat{c}j}^8 - iT_{\hat{c}j}^7,$$

где $\left\{T_{kj}^{\varphi}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея), или второй основной формы погружения подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ (см.: [1]).

Если почти эрмитова структура является эрмитовой, то уравнения (1) принимают следующий вид (см.: [5; 6]):

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abh} D_{hc} \omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abh} D^{hc} \omega_c \wedge \omega^b; \qquad (2) \\ d\omega_b^a &= \omega_c^a \wedge \omega_b^c - \left(\frac{1}{2} \delta_{bg}^{ah} D_{hd} D^{gc} + \sum_{\varphi} T_{\hat{a}\hat{c}}^{\varphi} T_{bd}^{\varphi} \right) \omega_c \wedge \omega^d. \end{aligned}$$

Эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ является уплощающимся в том и только том случае, если

$$T_{ab}^8 = \mu T_{ab}^7; \quad T_{\hat{a}\hat{b}}^8 = \bar{\mu} T_{\hat{a}\hat{b}}^7; \quad \mu \in C; \quad \mu = const. \qquad (3)$$

Это легко можно объяснить следующим образом. Пусть 6-мерное подмногообразие алгебры Кэли является подмногообразием гиперплоскости в $\mathbf{O}$. Тогда, если использовать язык линейной алгебры, T_{kj}^8 и T_{kj}^7 являются линейно зависимыми в каждой точке подмногообразия M^6. Обратная цепочка рассуждений также достаточно очевидна. Заметим лишь, что случай, когда хотя бы одно из значений T_{kj}^{φ} обращается в нуль, мы из рассмотрения исключаем. Как было уже отмечено выше, к числу уплощающихся относятся и 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры Кэли (это соответствует случаю $\mu = i = \sqrt{-1}$ [5]).

Важнейшую роль в геометрии почти эрмитовых многообразий играет тензор римановой кривизны (тензор Римана — Кристоффеля). Во многих статьях цитируется утверждение Альфреда Грея, высказанное им почти полвека назад, о том, что «ключом к геометрии почти эрмитовых многообразий служат тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны» [8].

Сопоставляя структурные уравнения Картана общего вида

$$d\,\omega^k = \omega^k_j \wedge \omega^j;$$

$$d\,\omega^k_j = \omega^k_m \wedge \omega^m_j + \frac{1}{2} R^k{}_{jml}\,\omega^m \wedge \omega^l$$

со структурными уравнениями (2) и принимая во внимание соотношения (3), мы получаем такие значения для четырех компонент, определяющих тензор римановой кривизны (остальные 12 компонент могут быть выведены из них с использованием свойств симметрии этого тензора):

$$R_{abcd} = 0\,; R_{\hat{a}bcd} = 0\,; R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0\,;$$

$$R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -2\mu^2 T^7_{\hat{a}\hat{c}} T^7_{bd}.$$

Напомним [9], что *тензором Риччи риманова многообразия* называется тензор с компонентами

$$ric_{kj} = R^m{}_{kjm}.$$

Ввиду вещественности этого тензора достаточно найти только компоненты ric_{ab} и $ric_{\hat{a}b}$.

Получаем такой результат:

$$ric_{ab} = 0; \quad ric_{\hat{a}b} = -2\,\mu^2\, T^7_{\hat{a}\hat{c}}\, T^7_{cb}.$$

Наконец, приведем значения спектра тензора Вейля конформной кривизны. Этот тензор, как известно [9], определяется следующим образом:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(ric_{ik}\,g_{jl} + ric_{jl}\,g_{ik} - ric_{il}\,g_{jk} -$$

$$-ric_{jk}\,g_{il}) + \frac{K}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}\,g_{il} - g_{jl}\,g_{ik}).$$

Здесь через n обозначена размерность многообразия, через K — его скалярная кривизна.

Как и в случае с тензором римановой кривизны, исходя из свойств этого тензора достаточно найти только компоненты W_{abcd}, $W_{\hat{a}bcd}$, $W_{\hat{a}\hat{b}cd}$, $W_{\hat{a}b\hat{c}d}$, которые полностью его определяют.

Получены такие значения:

$$W_{abcd} = 0;$$

$$W_{\hat{a}bcd} = 0;$$

$$W_{\hat{a}\hat{b}cd} = -\frac{\mu^2}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}\,T^7_{hc}\,\delta^b_d + T^7_{\hat{b}\hat{h}}\,T^7_{hd}\,\delta^a_c - T^7_{\hat{a}\hat{h}}\,T^7_{hd}\,\delta^b_c -\right.$$

$$\left.-T^7_{\hat{b}\hat{h}}\,T^7_{hc}\,\delta^a_d\right) + \frac{K}{20}\,\delta^{ba}_{cd};$$

$$W_{\hat{a}b\hat{c}d} = -2\mu^2\,T^7_{\hat{a}\hat{c}}\,T^7_{bd} + \frac{\mu^2}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}\,\delta^c_b + T^7_{\hat{c}\hat{h}}\,\delta^a_d\right)T^7_{hd} +$$

$$+\frac{K}{20}\,\delta^c_b\,\delta^a_d.$$

Соберем результаты воедино в таблицу классических тензоров 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли.

Тензор	Спектр тензора (компоненты, определяющие тензор)
Тензор римановой кривизны	$R_{abcd} = 0,\ R_{\hat{a}bcd} = 0,\ R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0,$ $R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -2\mu^2\,T^7_{\hat{a}\hat{c}}\,T^7_{bd}$
Тензор Риччи	$ric_{ab} = 0,\ ric_{\hat{a}b} = -2\mu^2\,T^7_{\hat{a}\hat{c}}\,T^7_{cb}$

Тензор Вейля (тензор конформной кривизны)	$W_{abcd} = 0, \; W_{\hat{a}bcd} = 0,$ $W_{\hat{a}\hat{b}cd} = -\frac{\mu^2}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}} T^7_{hc}\,\delta^b_d + T^7_{\hat{b}\hat{h}} T^7_{hd}\,\delta^a_c - T^7_{\hat{a}\hat{h}} T^7_{hd}\,\delta^b_c - T^7_{\hat{b}\hat{h}} T^7_{hc}\,\delta^a_d\right) + \frac{K}{20}\,\delta^{ba}_{cd},$ $W_{\hat{a}b\hat{c}d} = -2\mu^2 T^7_{\hat{a}\hat{c}} T^7_{bd} + \frac{\mu^2}{2}\left(T^7_{\hat{a}\hat{h}}\,\delta^c_b + T^7_{\hat{c}\hat{h}}\,\delta^a_d\right)T^7_{hd} + \frac{K}{20}\,\delta^c_b\,\delta^a_d$

Обратим внимание на то, что вычисленные компоненты тензора Вэйля позволят исследовать так называемые конформные аналоги тождеств Грея из [8]. Вычисленный спектр тензора Риччи, естественно, может послужить основой для изучения условий, при которых различные виды 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры октав являются многообразиями Эйнштейна.

Список литературы

1. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

2. *Banaru M.B.* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, №3. P. 354—388.

3. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. Vol. 21, №4. P. 614—620.

4. *Банару М.Б., Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // УМН. 1994. Т. 49, вып. 1 (295). С. 205—206.

5. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

6. *Banaru M.B., Banaru G.A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

7. *Банару М.Б., Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 21—25.

8. *Gray A.* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. 1976. Vol. 28, №4. P. 601—612.

9. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

Для цитирования: *Банару Г.А.* О некоторых тензорах 6-мерных уплощающихся эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 47—56. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-3.

MSC 2010: 53B35, 53B25

G. A. Banaru

Smolensk State University

4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia

mihail.banaru@yahoo.com

doi: 10.5922/0321-4796-2023-55-2-3

On some tensors of six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra

Submitted on March 26, 2024

In the present note, we consider six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. The almost Hermitian structure on such a six-dimensional submanifold is induced by means of so-called Brown — Gray three-fold vector cross products in Cayley algebra. The six-dimensional Hermitian planar submanifolds of the octave algebra contain all

six-dimensional Kählerian submanifolds of Cayley algebra. However, there exist non-Kählerian six-dimensional Hermitian planar submanifolds in the octave algebra.

The components of the tensor of the Riemannian curvature for a six-dimensional almost Hermitian planar submanifold of Cayley algebra are computed. Remark that the tensor of Riemannian curvature plays a fundamental role in geometry of almost Hermitian manifolds. Knowing all components of the tensor of the Riemannian curvature for a six-dimensional almost Hermitian planar submanifold of the octave algebra, it is possible to study so-called Gray's identities for this submanifold.

The components of the Ricci tensor and of the tensor of conformal curvature (known also as Weyl tensor) for a six-dimensional almost Hermitian planar submanifold of Cayley algebra are also computed.

Keywords: almost Hermitian structure, tensor of Riemannian curvature, Ricci tensor, tensor of conformal curvature, six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra

References

1. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).

2. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci. (New York), **207**:3, 354—388 (2015).

3. *Gray, A.:* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products. Tôhoku Math. J., **21**:4, 614—620 (1969).

4. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Russian Math. Surveys, **49**:1, 223—225 (1994).

5. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, 1 (74), 23—32 (2014).

6. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. SUT J. Math., **51**:1, 1—9 (2015).

7. *Banaru M.B., Banaru G.A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 48, 21—25 (2017).

8. *Gray, A.:* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds. Tôhoku Math. J., **28**:4, 601—612 (1976).

9. *Kirichenko, V. F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

For citation: Banaru, G. A. On some tensors of six-dimensional Hermitian planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 55 (2), 47—56 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-3.

УДК 514.76

О. О. Белова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-4

Параллельные перенесения в связностях трех типов для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$

Комплекс $K_{(n-m)m}$ m-плоскостей в случае, когда его размерность превышает $n-m$, является подмногообразием многообразия Грассмана и по классификации Близникаса называется коконгруэнцией m-мерных плоскостей.

В n-мерном проективном пространстве продолжается исследование коконгруэнции m-мерных плоскостей.

Ранее было показано, что расширенное композиционное оснащение данной коконгруэнции полями $(n-m-1)$-мерных плоскостей и точками C на m-мерных плоскостях позволяет задать связности трех типов в ассоциированном расслоении.

В данной работе изучены параллельные перенесения аналога плоскости Картана в связностях трех типов. Доказаны теоремы о видах пераллельных перенесений аналога плоскости Картана в связностях первого, второго и третьего типов.

Все исследования осуществляются с использованием метода Картана — Лаптева.

Ключевые слова: проективное пространство, коконгруэнция m-мерных плоскостей, связность, параллельное перенесение

Поступила в редакцию 05.10.2023 г.

Развитие понятия параллельного переноса началось с изучения Миндингом в 1837 г. обычного параллелизма на евклидовой плоскости. Это исследование послужило отправным пунктом для Леви-Чивиты при его исследовании параллельного переноса вектора на поверхности.

Дальнейшие обобщения понятия параллельного перенесения связаны с развитием общей теории связностей, которая занимает важное место в современной дифференциальной геометрии. А параллельные перенесения, являющиеся наиболее наглядной геометрической интерпретацией понятия связности [11; 15], широко применяются современными геометрами [9; 12; 13].

В работе изучаются параллельные перенесения оснащающей плоскости в связностях трех типов для коконгруэнции m-мерных плоскостей [2]. При этом исследования осуществляются с применением метода Картана — Лаптева [1; 8; 10; 14; 16; 17].

Рассмотрим проективное пространство P_n при использовании подвижного репера $\{A, A_i\}$ $(i, \dots = 1, \dots, n)$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dA = \theta A + \omega^i A_i, \quad dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A,$$

где формы Пфаффа $\omega^i, \omega_i, \omega_j^i$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j,$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i.$$

Будем исследовать комплекс $K_{(n-m)m}$ плоскостей размерности m $(1 \leq m < n)$, то есть коконгруэнцию m-мерных плоскостей [4; 5]. Комплекс $K_{(n-m)m}$ задается уравнениями (см.: [2; 3])

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta,$$

где $a, \dots = 1, \dots, m;$ $\alpha, \dots = m + 1, \dots, n.$

Компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_{\beta}^{\alpha a}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω_a^α

$$\Delta\Lambda_{\beta}^{\alpha a} + \Lambda_{\gamma}^{\alpha b}\Lambda_{\beta}^{\gamma a}\omega_b - \delta_{\beta}^{\alpha}\omega^a \equiv 0,$$

причем дифференциальный тензорный оператор Δ действует по закону

$$\Delta\Lambda_{\beta}^{\alpha a} = d\Lambda_{\beta}^{\alpha a} + \Lambda_{\beta}^{\gamma a}\omega_{\gamma}^{\alpha} + \Lambda_{\beta}^{\alpha b}\omega_b^a - \Lambda_{\gamma}^{\alpha a}\omega_{\beta}^{\gamma}.$$

В главном расслоении $G_s(K)$, где

$$s = n(n+1) - m(n-m-1),$$

задается связность способом Лаптева — Лумисте [2; 6; 7]:

$$\widetilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^{ac}\omega_c^\alpha, \quad \widetilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_{\alpha}^{ab}\omega_b^\alpha,$$

$$\widetilde{\omega}_{\alpha}^a = \omega_{\alpha}^a - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b^\beta, \quad \widetilde{\omega}_{\beta}^\alpha = \omega_{\beta}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a^\gamma,$$

$$\widetilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha}^{b}\omega_b^\alpha, \quad \widetilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^{a}\omega_a^\beta.$$

Компоненты объекта связности

$$\Gamma = \left\{\Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}, \Gamma_{a\alpha}^{b}, \Gamma_{\alpha}^{ab}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{\alpha\beta}^{a}\right\}$$

удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм

$$\Delta\Gamma_{b\alpha}^{ac} + (\delta_b^a\Gamma_{e\alpha}^{c} + \delta_e^a\Gamma_{b\alpha}^{c})\omega^e + \left(\Gamma_{b\beta}^{ae}\Lambda_{\alpha}^{\beta c} - \delta_b^a\Gamma_{\alpha}^{ec} - \delta_b^e\Gamma_{\alpha}^{ac}\right)\omega_e +$$

$$+\delta_b^c\omega_\alpha^a - \delta_b^a\Lambda_{\alpha}^{\beta c}\omega_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha}^{ab} - \Gamma_{e\alpha}^{ab}\omega^e + \Gamma_{\beta}^{ac}\Lambda_{\alpha}^{\beta b}\omega_c + \Lambda_{\alpha}^{\beta b}\omega_{\beta}^{a} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{ac}\Lambda_{\beta}^{\gamma b}\omega_c + \left(\delta_c^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma\Gamma_{c\beta}^{ab}\right)\omega_\gamma^c - \Gamma_{\beta}^{ab}\omega_\alpha +$$

$$+\Gamma_{\alpha\beta}^{b}\omega^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + \left(\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha b}\Lambda_{\gamma}^{\mu a} - \delta_\beta^\alpha\Gamma_{\gamma}^{ba}\right)\omega_b + \delta_\beta^\alpha\Gamma_{b\gamma}^{a}\omega^b -$$

$$-\left(\delta_\beta^\mu\Lambda_{\gamma}^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha\Lambda_{\gamma}^{\mu a}\right)\omega_\mu - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^b_{a\alpha} + \left(\Gamma^{cb}_{a\alpha} + \Gamma^c_{a\beta}\Lambda^{\beta b}_\alpha\right)\omega_c + \delta^b_a\omega_\alpha \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^a_{\alpha\beta} + \left(\Gamma^b_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma a}_\beta + \Gamma^{ba}_{\alpha\beta}\right)\omega_b - \Gamma^a_{b\beta}\omega^b_\alpha + \Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta}\omega_\gamma \equiv 0.$$

Осуществим расширенное композиционное оснащение коконгруэнции $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой m-мерной плоскости L_m аналог плоскости Картана — плоскость C_{n-m-1}, не имеющую общих точек с плоскостью L_m, и точку C на плоскости L_m (рис. 1).

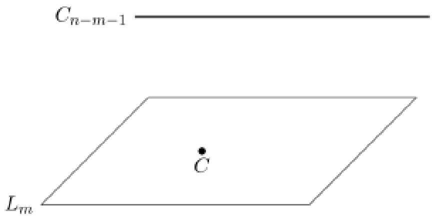


Рис. 1. Расширенное композиционное оснащение коконгруэнции

Аналитически точку и аналог плоскости Картана можно задать следующим образом:

$$C = A + \lambda^a A_a, C_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A.$$

Данное оснащение позволяет охватить компоненты объекта связности тремя способами:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^b_{a\alpha} = \delta^b_a\lambda_\alpha,$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha} = \delta^c_b\lambda^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_\alpha\lambda_\beta,$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma} = M^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_\gamma\lambda_\mu,$$

$$\overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = \Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda^a_\beta,$$

$$\overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^a_\gamma M^{\gamma b}_{\alpha\beta},$$

$$\overset{01}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma M^{\gamma a}_{\alpha\beta};$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = \lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\lambda_{\beta}\lambda^{a} - \lambda^{b}\mu^{a}_{\alpha},$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha}\lambda^{ab}_{\beta} - 2\lambda^{a}_{\beta}\lambda^{b}_{\alpha} - \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda_{\alpha}(\lambda^{a}_{\gamma} + \lambda_{\gamma}\lambda^{\alpha}) + \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu^{a}_{\beta},$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = \lambda^{a}_{\alpha\beta} + 2M^{\gamma a}_{\alpha\beta}\lambda_{\gamma};$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = -\lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\left(\lambda^{a}_{\beta} + \mu^{a}_{\beta}\right) + \lambda^{b}\mu^{a}_{\alpha},$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha}\lambda^{ab}_{\beta} - \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda_{\alpha}\mu^{a}_{\gamma} - \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu^{a}_{\beta},$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = -\lambda^{a}_{\alpha\beta},$$

где

$$\mu^{a}_{\alpha} = \lambda^{a}_{\alpha} - \lambda^{a}\lambda_{\alpha},\ M^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\left(\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda^{a}_{\beta} + \Lambda^{\alpha a}_{\gamma}\lambda_{\beta}\right).$$

Надо отметить, что дифференциальные уравнения компонент оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda^{a},\ \lambda^{a}_{\alpha}, \lambda_{\alpha}\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\Delta\lambda^{a} - \lambda^{a}\lambda^{b}\omega_{b} + \omega^{a} = \lambda^{ab}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{b}, \\ &\Delta\lambda^{a}_{\alpha} + \lambda_{\alpha}\omega^{a} + \omega^{a}_{\alpha} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b}, \\ &\Delta\lambda_{\alpha} + \lambda^{a}_{\alpha}\omega_{a} + \omega_{\alpha} = \lambda^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{a}, \end{aligned} \tag{1}$$

а пфаффовы производные, стоящие в правых частях уравнений (1), удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta\lambda^{ab}_{\alpha} + F^{\beta b}_{\alpha}\omega^{a}_{\beta} - \lambda^{a}F^{\beta b}_{\alpha}\omega_{\beta} +$$

$$+\left(\Lambda^{\beta b}_{\alpha}\lambda^{ac}_{\beta} - \lambda^{ab}_{\alpha}\lambda^{c} - \lambda^{cb}_{\alpha}\lambda^{a}\right)\omega_{c} \equiv 0,$$

$$\Delta\lambda^{a}_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta}\omega^{a}_{\alpha} + \left(\Lambda^{\gamma a}_{\beta}\lambda^{b}_{\alpha\gamma} + \lambda^{ba}_{\alpha\beta}\right)\omega_{b} +$$

$$+\left(-M^{\gamma a}_{\alpha\beta} + \delta^{\gamma}_{\alpha}\Lambda^{\mu a}_{\beta}\lambda_{\mu}\right)\omega_{\gamma} \equiv 0,$$

$$\Delta\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \left(-\delta^{a}_{c}M^{\gamma b}_{\alpha\beta} + \delta^{b}_{c}\delta^{\gamma}_{\alpha}\lambda^{a}_{\beta}\right)\omega^{c}_{\gamma} + \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda^{a}_{\gamma}\omega_{\alpha} +$$

$$+\Lambda_{\beta}^{\gamma b}\lambda_{\alpha\gamma}^{ac}\omega_c+\lambda_{\alpha\beta}^{b}\omega^a\equiv 0,$$

где $F_\alpha^{\beta b}=\Lambda_\alpha^{\beta b}+\delta_\alpha^\beta\lambda^b$.

Находим дифференциалы точек C и C_α:

$$dC=\left[\theta+\lambda^a\omega_a-\lambda_\beta F_\alpha^{\beta a}\omega_a^\alpha\right]C+\left[\mathrm{F}_\beta^{\alpha a}\omega_a^\beta\right]C_\alpha+$$

$$+[\Delta\lambda^a+\omega^a-\lambda^a\lambda^b\omega_b-\mu_\beta^a\mathrm{F}_\alpha^{\beta b}\omega_b^\alpha]A_a, \qquad (2)$$

$$dC_\alpha=\left[\delta_\alpha^\beta\theta+\omega_\alpha^\beta-M_{\alpha\gamma}^{\beta a}\omega_a^\gamma\right]C_\beta+[\Delta\lambda_\alpha^a+\lambda_\alpha\omega^a+\omega_\alpha^a-$$

$$-\lambda^a\Delta\lambda_\alpha-\lambda^a\lambda_\alpha^b\omega_b-\lambda^a\omega_\alpha+(\lambda_\gamma^a\mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma b}-\lambda^a\lambda_\gamma\mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma b})\omega_b^\beta]A_a+$$

$$+\left[\,\Delta\lambda_\alpha+\lambda_\alpha^a\omega_a+\omega_\alpha+\lambda_\gamma\mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_a^\beta\right]C. \qquad (3)$$

Вводя формы связности в равенствах (2) и (3) и учитывая выражения ковариантных дифференциалов

$$\nabla\lambda^a=d\lambda^a+\lambda^b\widetilde{\omega}_b^a-\lambda^a\lambda^b\widetilde{\omega}_b+\widetilde{\omega}^a,$$

$$\nabla\lambda_\alpha^a=d\lambda_\alpha^a+\lambda_\alpha^b\widetilde{\omega}_b^a-\lambda_\beta^a\widetilde{\omega}_\alpha^\beta+\lambda_\alpha\widetilde{\omega}^a+\widetilde{\omega}_\alpha^a,$$

$$\nabla\lambda_\alpha=d\lambda_\alpha-\lambda_\beta\widetilde{\omega}_\alpha^\beta+\lambda_\alpha^a\widetilde{\omega}_a+\widetilde{\omega}_\alpha,$$

получим

$$dC=\left[\theta+\lambda^a\widetilde{\omega}_a+\left(\Gamma_{b\alpha}^a\lambda^b-\lambda_\beta\mathrm{F}_\alpha^{\beta a}\right)\omega_a^\alpha\right]C+\left[\mathrm{F}_\beta^{\alpha a}\omega_a^\beta\right]C_\alpha+$$

$$+\left[\nabla\lambda^a+(\Gamma_\alpha^{ab}+\lambda^c\Gamma_{c\alpha}^{ab}-\lambda^a\lambda^c\Gamma_{c\alpha}^b-\mathrm{F}_\alpha^{\beta b}\mu_\beta^a)\omega_b^\alpha\right]A_a, \qquad (4)$$

$$dC_\alpha=\left[\delta_\alpha^\beta\theta+\widetilde{\omega}_\alpha^\beta+\left(\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta a}-\mathrm{M}_{\alpha\gamma}^{\beta a}\right)\omega_a^\gamma\right]C_\beta+$$

$$+[\nabla\lambda_\alpha^a-\lambda^a\nabla\lambda_\alpha+(\Gamma_{\alpha\beta}^{ab}+\lambda_\alpha^c\Gamma_{c\beta}^{ab}-\lambda_\gamma^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b}+\lambda_\alpha\Gamma_\beta^{ab}+\lambda^a\lambda_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b}-$$

$$-\lambda^a\lambda_\alpha^c\Gamma_{c\beta}^b-\lambda^a\Gamma_{\alpha\beta}^b-\lambda^a\lambda_\gamma\mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma b}+\lambda_\gamma^a\mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma b})\omega_b^\beta]\,A_a+$$

$$+\left[\,\nabla\lambda_\alpha+\left(\Gamma_{\alpha\beta}^a-\lambda_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a}+\lambda_\alpha^b\Gamma_{b\beta}^a+\lambda_\gamma\mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma a}\right)\omega_a^\beta\right]C. \qquad (5)$$

Далее в равенствах (4, 5) учтем охваты трех типов:

$$dC = \left[\theta + \lambda^a \overset{0}{\widetilde{\omega}}_a + \left(-\lambda_\beta \Lambda_\alpha^{\beta a}\right) \omega_a^\alpha\right] C +$$

$$+ \left[\left(\Lambda_\beta^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha \lambda^a\right)\omega_a^\beta\right] C_\alpha + \overset{01}{\nabla} \lambda^a A_a, \tag{6}$$

$$dC = \left[\theta + \lambda^a \overset{0}{\widetilde{\omega}}_a + \left(-\lambda_\beta \Lambda_\alpha^{\beta a}\right) \omega_a^\alpha\right] C +$$

$$+ \left[\left(\Lambda_\beta^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha \lambda^a\right)\omega_a^\beta\right] C_\alpha + \left[\overset{02}{\nabla} \lambda^a + \sigma_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha\right] A_a, \tag{7}$$

$$dC = \left[\theta + \lambda^a \overset{0}{\widetilde{\omega}}_a + \left(-\lambda_\beta \Lambda_\alpha^{\beta a}\right) \omega_a^\alpha\right] C +$$

$$+ \left[\left(\Lambda_\beta^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha \lambda^a\right)\omega_a^\beta\right] C_\alpha + \left[\overset{03}{\nabla} \lambda^a - \sigma_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha\right] A_a; \tag{8}$$

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta \theta + \overset{0}{\widetilde{\omega}}{}_\alpha^\beta + \left(-\delta_\alpha^\beta \lambda_\mu \Lambda_\gamma^{\mu a}\right) \omega_a^\gamma\right] C_\beta + \overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha C +$$

$$+ \left[\overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha^a - \lambda^a \overset{01}{\nabla} \lambda_\alpha\right] A_a, \tag{9}$$

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta \theta + \overset{0}{\widetilde{\omega}}{}_\alpha^\beta + \left(-\delta_\alpha^\beta \lambda_\mu \Lambda_\gamma^{\mu a}\right) \omega_a^\gamma\right] C_\beta + \left[\overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta\right] C +$$

$$+ \left[\overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha^a - \lambda^a \overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{ab} + \lambda_\alpha \sigma_\beta^{ab} - \lambda^a \sigma_{\alpha\beta}^b\right)\omega_b^\beta\right] A_a, \tag{10}$$

$$dC_\alpha = \left[\delta_\alpha^\beta \theta + \overset{0}{\widetilde{\omega}}{}_\alpha^\beta + \left(-\delta_\alpha^\beta \lambda_\mu \Lambda_\gamma^{\mu a}\right) \omega_a^\gamma\right] C_\beta + \left[\overset{03}{\nabla} \lambda_\alpha - \sigma_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta\right] C +$$

$$+ \left[\overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha^a - \lambda^a \overset{02}{\nabla} \lambda_\alpha + \left(-\sigma_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_\alpha \sigma_\beta^{ab} + \lambda^a \sigma_{\alpha\beta}^b\right)\omega_b^\beta\right] A_a. \tag{11}$$

В выражения (7, 8, 10, 11) входят компоненты объекта деформации $\sigma = \{\sigma_{\alpha}^{ab}, \sigma_{\alpha\beta}^{ab}, \sigma_{\alpha\beta}^{a}\}$ (см.: [3; 15]):

$$\sigma_{\alpha}^{ab} = \lambda_{\alpha}^{ab} - \Lambda_{\alpha}^{\beta b}\mu_{\beta}^{a} - \lambda^{b}\mu_{\alpha}^{a},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{ab} = \lambda_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_{\beta}^{ab}\lambda_{\alpha} - \lambda_{\alpha}^{b}\lambda_{\beta}^{a} - \Lambda_{\beta}^{\gamma b}\lambda_{\alpha}\lambda_{\gamma}\lambda^{a} + \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu_{\beta}^{a},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{a} = \lambda_{\alpha\beta}^{a} + \mathrm{M}_{\alpha\beta}^{\gamma a}\lambda_{\gamma}.$$

Теорема 1. *Параллельное перенесение аналога плоскости Картана C_{n-m-1} в произвольной связности является свободно вырожденным, то есть специальных смещений данной оснащающей плоскости, вообще говоря, не выделяется.*

Доказательство следует из равенств (5).

Теорема 2. *В групповой связности первого типа параллельное перенесение аналога плоскости Картана является связанно вырожденным, то есть плоскость C_{n-m-1} будет неподвижной при параллельном перенесении в указанной связности.*

Доказательство следует из равенств (9).

Теорема 3. *В групповых связностях второго и третьего типов параллельное перенесение аналога плоскости Картана является свободно вырожденным.*

Доказательство. При условии обращения ковариантных дифференциалов оснащающего квазитензора в нуль в равенствах (10) и (11) видно, что специальных смещений аналога плоскости Картана не выделяется.

Замечание. Аналогичные утверждения справедливы и по поводу смещений точки $C = A + \lambda^{a}A_{a}$, поскольку имеют место равенства (6—8).

Теорема 4. *Аналог плоскости Картана переносится параллельно в линейной комбинации связности первого типа тогда и только тогда, когда он смещается в плоскости $P_{n-m} = [C_{n-m-1}, C]$* (рис. 2).

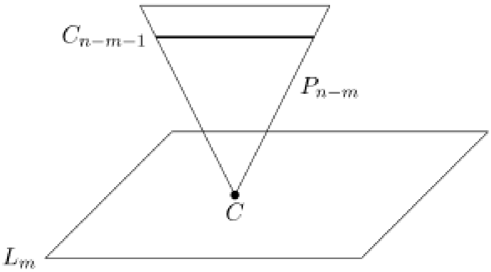


Рис. 2. Иллюстрация плоскостей

Доказательство.

При $\overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha - \lambda^a \overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha = 0$ в формуле (9) имеем

$$dC_\alpha = \left[\delta^\beta_\alpha \theta + \overset{0}{\widetilde{\omega}}{}^\beta_\alpha + \left(-\delta^\beta_\alpha \lambda_\mu \Lambda^{\mu a}_\gamma\right)\omega^\gamma_a\right] C_\beta + \overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha C,$$

следовательно, теорема верна.

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Белова О.О.*Дифференциальная геометрия $(n-m)m$-мерных комплексов в n-мерном проективном пространстве // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 17—27. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-220-17-27.

3. *Белова О.О.* Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 39—48.

4. *Близникас В.И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1974. Т. 6. С. 43—111.

5. *Кругляков Л.З.* О некоторых комплексах многомерных плоскостей в проективном пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16, вып. 3. С. 66—67.

6. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

7. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

8. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. 185—193.

9. *Absil P.-A., Mahony R., Sepulchre R.* Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation // Acta Applicandae Mathematicae. 2004. № 80 (2). P. 199—220.

10. *Akivis M. A., Shelekhov A. M.* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs // J. Math. Sci. 2011. № 177. P. 522—540.

11. *Belova O. O.* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, № 5. P. 605—632.

12. *Kumar A., Caneses-Marin J. F., Lau C., Goulding R.* Parallel transport modeling of linear divertor simulators with fundamental ion cyclotron heating // Nucl. Fusion. 2023. № 63. Art. № 036004. doi: 10.1088/1741-4326/acb160.

13. *Louis M., Charlier B., Jusselin P. et al.* A Fanning Scheme for the Parallel Transport along Geodesics on Riemannian Manifolds // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2018. Vol. 56, № 4. doi: 10.1137/17M11 30617.

14. *Mansouri A.-R.* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions // Diff. Geom. and its Appl. 2009. № 27. P. 635—646.

15. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, № 5. P. 675—709.

16. *Rahula M.* The G. F. Laptev method: fundamental objects of mappings // J. Math. Sci. 2011. Vol. 174. P. 675—697.

17. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

Для цитирования: *Белова О. О.* Параллельные перенесения в связностях трех типов для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2024. № 55 (2). С. 57—69. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-4.

MSC 2010: 58A05, 53A20, 53A35

O. O. Belova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-4

Parallel transports in the connections of three types for cocongruence $K_{(n-m)m}$

Submitted on October 5, 2023

We continue to study the cocongruence of m-dimensional planes using the Cartan — Laptev method. In an n-dimensional projective space P_n, the cocongruence of m-dimensional planes can be given by the following equations $\omega^\alpha = \Lambda^{\alpha a}_\beta \omega^\beta_a$.

Compositional clothing of a given cocongruence by fields of

$$(n-m-1)\text{-planes } C_{n-m-1}\text{: } L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$$
$$\text{and points } C = A + \lambda^a A_a$$

allows one to define connections of three types in the associated bundle.

In the present paper, parallel transports of an analogue of Cartan plane are studied in the connections of three types. It is proved 4 theorems:

1. Parallel transport of the analogue of the Cartan plane C_{n-m-1} in an arbitrary connection is freely degenerate, i. e., in general, there are no special transports of this clothing plane.
2. In the group connection of the first type, the parallel transport of an analog of the Cartan plane is connected degenerate, i. e., the plane C_{n-m-1} will be fixed under parallel transport in this connection.
3. In the group connections of the second and third types, the parallel transport of the analogue of the Cartan plane is freely degenerate.
4. The analogue of the Cartan plane is transferred in parallel in a linear combination of the first type connection if and only if it is displaced in the plane $P_{n-m} = [C_{n-m-1}, C]$.

Keywords: projective space, cocongruence of m-dimensional planes, connection, parallel transport

References

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.:* Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Belova, O.O.:* Differential geometry of (n-m)m-dimensional complexes in n-dimensional projective space. Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Math. and ist App. Theme Reviews. 220, 17—27 (2023).

3. *Belova, O.O.:* The deformation pseudotensor of connections in cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54 (1), 39—48 (2023).

4. *Bliznikas, V.I.:* Some problems in the geometry of hypercomplexes of lines. Tr. Geom. Sem., 6, 43—111 (1974).

5. *Kruglyakov, L.Z.:* On some complexes of multidimensional planes in projective space. Functional analysis and its applications. **16**:3, 66—67 (1982).

6. *Polyakova, K.V., Shevchenko, Yu.I.:* Laptev — Lumiste's methods of giving connection and geometrical vectors. DGMF, 43, 114—121 (2012).

7. *Norden, A.P.:* Spaces with affine connection. Moscow (1976).

8. *Shevchenko, Yu.I.:* Laptev's and Lumiste's tricks for specifying a connection in a principal bundle. DGMF, 37, 185—193 (2006).

9. *Absil, P.-A., Mahony, R., Sepulchre, R.:* Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation. Acta Applicandae Mathematicae, **80**:2, 199—220 (2004).

10. *Akivis, M.A., Shelekhov, A.M.:* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. J. Math. Sci., 177, 522—540 (2011).

11. *Belova, O.O.:* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

12. *Kumar, A., Caneses-Marin, J.F., Lau, C., Goulding, R.:* Parallel transport modeling of linear divertor simulators with fundamental ion cyclotron heating. Nucl. Fusion, 63, 036004 (2023), doi: 10.1088/1741-4326/acb160.

13. *Louis, M., Charlier, B., Jusselin, P. et al: A* Fanning Scheme for the Parallel Transport along Geodesics on Riemannian Manifolds. SIAM Journal on Numerical Analysis, **56**:4, 2563—2584 (2018), doi: 10.1137/17M1130617.

14. *Mansouri, A.-R.:* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions. Differential Geometry and its Applications, 27, 635—646 (2009).

15. *Polyakova, K. V.:* Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci., **162**:5, 675—709 (2009).

16. *Rahula, M.:* The G. F. Laptev method: fundamental objects of mappings. J. Math. Sci., 174, 675—697 (2011).

17. *Scholz, E.:* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).

For citation: Belova, O. O. Parallel transports in the connections of three types for cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 55 (2), 57—69 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-4.

УДК 514.76

***М. В. Глебова*[1], *А. Я. Султанов*[2]**
[1, 2] Пензенский государственный университет, Россия
[1] mvmorgun@mail.ru, [2] sultanovaya@rambler.ru
[1] ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1051-4358
[2] ORCID: http://orcid.org/0009-0005-1244-4279
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-5

О размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа

Теория движений в обобщенных пространствах является одним из направлений в современной дифференциальной геометрии. Вопросами движений в различных пространствах аффинных связностей занимались такие ученые, как Э. Картан, П. К. Рашевский, П. А. Широков, И. П. Егоров, А. Я. Султанов. Движения в прямых произведениях двух пространств аффинной связности рассматривались в работе М. В. Моргун.

В случае прямого произведения более двух пространств аффинной связности вопрос о размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований данного пространства оставался открытым.

В данной статье получена оценка верхней границы размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств аффинной связности, представляющих собой прямое произведение не менее трех непроективно-евклидовых пространств определенного вида.

Для решения этой задачи получена система линейных однородных уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного инфинитезимального аффинного преобразования. Эта система найдена с ис-

Поступила в редакцию 28.04.2024 г.

пользованием свойств производной Ли, примененной к тензорному полю кривизны рассматриваемых пространств. Оценка ранга данной системы позволяет получить оценку снизу ранга матрицы рассматриваемой системы.

Ключевые слова: прямое произведение пространств аффинной связности, инфинитезимальные аффинные преобразования, алгебра Ли, размерность алгебры Ли

1. Основные понятия и сведения

Пусть (M_n, ∇) — пространство аффинной связности без кручения.

Векторное поле X на многообразии M_n, снабженном аффинной связностью ∇, называется инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства (M_n, ∇), если

$$L_X \nabla = 0,$$

где L_X — символ производной Ли [2].

Известно, что множество всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M_n, ∇) образует алгебру Ли над полем R относительно операции коммутирования векторных полей [5]. Обозначим эту алгебру через $g(M_n)$, причем $\dim g(M_n) = n^2 + n$ (см.: [1]).

В локальных координатах уравнение $L_X \nabla = 0$ равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Первую серию условий интегрируемости этой системы составляют уравнения

$$L_X R = 0,$$

где R — тензорное поле кривизны связности ∇.

В локальных координатах это уравнение представляет собой систему линейных однородных уравнений от координат поля X и частных производных от этих координат

$$X^M \partial_M R^D_{ABC} + R({}^{D}_{ABC}|^{F}_{M}) X^M_F = 0, \qquad (1)$$

где

$$R\left({}_{ABC}^{\;D}\middle|{}_{M}^{F}\right) = \delta_A^F R_{MBC}^D + \delta_B^F R_{AMC}^D + \delta_C^F R_{ABM}^D - \delta_M^D R_{ABC}^F.$$

Если ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных X_F^M системы (1), не менее r, то справедливо неравенство (см.: [1])

$$\dim g(M_n) \leq n^2 + n - r.$$

2. Прямое произведение пространств аффинной связности специального типа

Пусть $\left({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla \right)$ $(a = 1,2, \dots, s)$ — непроективно-евклидовы пространства аффинной связности без кручения.

Как известно [1], пространство аффинной связности $\left({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla \right)$ является непроективно-евклидовым тогда и только тогда, когда тензорное поле Вейля отлично от нулевого. Это условие локально эквивалентно выполнению одного из следующих условий:

(1) существует такая карта гладкого атласа $({}^aU, x^{i^a})$, что имеется хотя бы одна составляющая тензорного поля кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$ $(i_{1,}^a i_2^a, i_3^a = \overline{1, n_a})$, отличная от нуля для попарно различных между собою индексов;

(2) в каждой карте $({}^aV, y^{i^a})$ все составляющие тензора кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$ равны нулю, но существует карта гладкого атласа $({}^aU, x^{i^a})$ такая, что существует хотя бы одна составляющая тензорного поля кривизны вида ${}^aR^{i_1^a}_{i_2^a i_3^a i_4^a}$ $(i_{1,}^a i_2^a, i_3^a, i_4^a = \overline{1, n_a})$, отличная от нуля для попарно различных индексов [1].

В данной статье ограничимся рассмотрением пространств аффинной связности, удовлетворяющих условию (1). Такие пространства будем называть *пространствами первого типа*.

Стандартным образом строим прямое произведение этих пространств аффинной связности (см.: [3]):

$$(M_n, \nabla)=\left({}^{1}M_{n_1},\ {}^{1}\nabla\right)\times\ldots\times\left({}^{s}M_{n_s},\ {}^{s}\nabla\right).$$

3. Оценка сверху размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа

Для построенного пространства имеет место следующая теорема.

Теорема. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения s* $(s\geq 3)$ *пространств аффинной связности, составляющие* ${}^{1}R^{i_1^1}_{i_2^1 i_2^1 i_3^1}$, ${}^{2}R^{i_1^2}_{i_2^2 i_2^2 i_3^2}$, ..., ${}^{s}R^{i_1^s}_{i_2^s i_2^s i_3^s}$ *тензоров кривизны которых отличны от нуля, не превосходит*

$$(n_1+\cdots+n_s)^2-(3s-1)(n_1+\cdots+n_s)+2s^2+3s.$$

Доказательство. При $s=1$ размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности $\left({}^{1}M_{n_1},\ {}^{1}\nabla\right)$, удовлетворяющего условию (1), не превосходит $n_1^2-2n_1+5$. Это утверждение доказано И. П. Егоровым [1].

При $s=2$ размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности $\left({}^{1}M_{n_1},\ {}^{1}\nabla\right)\times\left({}^{2}M_{n_2},\ {}^{2}\nabla\right)$, удовлетворяющего условию (1), не превосходит числа

$$(n_1+n_2)^2-5(n_1+n_2)+14.$$

Это утверждение доказано М. В. Моргун (см.: [4]).

Рассмотрим случай, когда пространство аффинной связности представляет собой прямое произведение не менее трех непроективно-евклидовых пространств, каждое из которых удовлетворяет условию (1).

Пусть ($s \geq 3$).

Не нарушая общности рассуждений, полагаем $i_1^a = 1$, $i_2^a = 2, i_3^a = 3$.

Тогда в карте $({}^1U \times \ldots \times {}^sU, x^A)$ $(A = \overline{1, n_1 + \cdots + n_s})$ пространства (M_n, ∇)=$\left({}^1M_{n_1}, {}^1\nabla\right) \times \ldots \times \left({}^sM_{n_s}, {}^s\nabla\right)$ имеем отличные от нуля составляющие вида

R_{223}^1,

$R_{n_1+2\ n_1+2\ n_1+3}^{n_1+1}, \ldots,$

$R_{n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ n_1+\cdots+n_{s-1}+2\ n_1+\cdots+n_{s-1}+3}^{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}.$

Рассмотрим укороченную матрицу системы (1), элементами которой являются коэффициенты при неизвестных

$$X_1^B\ (B > 1),\ X_D^2\ (D \geq 3),\ X_C^3\ (C \geq 4),\ X_1^1,$$

$$X_{n_1+1}^E\ (E \neq 2, 3, n_1 + 1), X_F^{n_1+2}\ (F \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2),$$

$$X_K^{n_1+3}\ (K \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3), X_{n_1+1}^{n_1+1}, \ldots,$$

$$X_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}^A (A \neq 2, 3, n_1 + 2, n_1 + 3, \ldots, n_1 + \cdots + n_{s-2} + 2,$$

$$n_1 + \cdots + n_{s-2+}3, n_1 + \cdots + n_{s-2} + 1),$$

$$X_G^{n_1+\cdots+n_{s-1}+2}\ (G \neq 1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1, n_1 + \cdots +$$

$$+n_{s-1} + 2),$$

$$X_H^{n_1+\cdots+n_{s-1}+3}\ (H \neq 1, n_1 + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1, n_1 + \cdots +$$

$$+n_{s-1} + 2,\ n_1 + \cdots + n_{s-1} + 3),$$

$$X_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}^{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}$$

в уравнениях, где индексы R имеют следующий вид:

$$\binom{M}{223}\ (M > 1), \binom{1}{P23}\ (P \geq 3), \binom{1}{22N}\ (N \geq 4),\ \binom{1}{223},$$

$$\binom{S}{n_1+2\ n_1+2\ n_1+3}\ \ (S \neq 2{,}3, n_1 + 1),$$

$$\binom{n_1+1}{Z\ n_1+2\ n_1+3}\ \ (Z \neq 1, n_1 + 1, n_1 + 2),$$

$$\binom{n_1+1}{n_1+2\ \ n_1+2\ T}\ \ (T \neq 1, n_1+1, n_1+2, n_1+3),$$

$$\binom{n_1+1}{n_1+2\ \ n_1+2\ \ n_1+3}$$

$$, \dots,$$

$$\binom{V}{n_1+\dots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+3}$$

$$(V \neq 2, 3, n_1+2, n_1+3, \dots, n_1+\dots+n_{s-2}+2, n_1+\dots+$$

$$+n_{s-2}+3,\ n_1+\dots+n_{s-2}+1),$$

$$\binom{n_1+\dots+n_{s-1}+1}{Z\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+3}$$

$$(Z \neq 1, n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+\dots+n_{s-1}+1, n_1+\dots+n_{s-1}+2),$$

$$\binom{n_1+\dots+n_{s-1}+1}{n_1+\dots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+2\ T}$$

$$(T \neq 1, n_1+1, n_1+2, n_1+3, \dots, n_1+\dots+n_{s-1}+2, n_1+\dots+$$
$$+n_{s-1}+3),$$

$$\binom{n_1+\dots+n_{s-1}+1}{n_1+\dots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+3}.$$

Найдем ранг полученной матрицы:

$$r = 3(n_1+\dots+n_s)s - (1+3+\dots+2(s-1)+1) -$$
$$-\big(2+3+\dots+(s+1)\big) - (3+4+\dots+s+2) + s =$$
$$= 3s(n_1+\dots+n_s) - 2s^2 - 3s.$$

Отсюда следует, что

$$\dim g(M_n) \leq (n_1+\dots+n_s)^2 - (3s-1)(n_1+\dots+n_s) + 2s^2 + 3s.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та. Казань, 1965.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.
3. *Моргун М.В.* Инфинитезимальные аффинные преобразования прямого произведения пространств аффинной связности : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 2009.

4. *Моргун М. В.* Аффинные преобразования прямого произведения непроективно-евклидовых пространств аффинной связности // Изв. вузов. Математика. 2009. №4. С. 72—77.

5. *Султанов А. Я.* Алгебры Ли дифференцирований линейных алгебр над полем // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 123—136.

Для цитирования: *Глебова М. В., Султанов А. Я.* О размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 70—77. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-5.

MSC 2010: 17B66

M. V. Glebova[1], *A. Ya. Sultanov*[2]
Penza State University,
37 Lermontova St., Penza, 440026, Russia
[1] mvmorgun@mail.ru, [2] sultanovaya@rambler.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-5

On the dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces of affine connection of the first type

Submitted on April 28, 2024

The theory of motions in generalized spaces is one of the directions in modern differential geometry. Such scientists as E. Cartan, P. K. Rashevsky, P. A. Shirokov, I. P. Egorov, A. Ya. Sultanov and other scientists were engaged in the study of movements in various spaces of affine connections. The question of movements in direct products of two spaces of affine connection was considered in M. V. Morgun's work.

In the case of a direct product of more than two spaces of affine connection, the question of the dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of a given space remained open.

In this article, an estimate of the upper bound of the dimension of the Lie algebra of infinitesimal affine transformations of affine connection spaces, representing a direct reproduction of at least three non-projective Euclidean spaces of a certain type, is obtained.

To solve this problem, a system of linear homogeneous equations is obtained, which is satisfied by the components of an arbitrary infinitesimal affine transformation. This system is found using the properties of the Lie derivative applied to the tensor field of curvature of the spaces under consideration. The evaluation of the rank of this system allows us to obtain an estimate from below of the rank of the matrix of the system under consideration.

Keywords: direct product of affine connectivity spaces, infinitesimal affine transformations, Lie algebra, dimension of Lie algebra

References

1. *Egorov, I.P.:* Motions in spaces with affine connections. Penza State Ped. Institute Scientific Notes. Kazan (1965).

2. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Fundamentals of differential geometry. Moscow (1981).

3. *Morgun, M.:* Infinitesimal affine transformations of the direct product of affine connectivity spaces: PhD Thesis. Kazan (2009).

4. *Morgun, M.V.:* Affine transformations of the direct product of non-projective Euclidean spaces of affine connectivity. Izvestia Vuzov. Math., 4, 72—77 (2009).

5. *Sultanov, A.Ya., Glevova, M.V., Bolotnikova, O.V.:* Lie algebras of differentiations of linear algebras over a field. DGMF. 52, 123—136 (2021).

For citation: Glebova, M.V., Sultanov, A.Ya. On the dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces of affine connection of the first type. DGMF, 55 (2), 70—77 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-5.

УДК 514.76

К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-6

Аналоги симметрической и плоской связностей с нетензорами кручения и кривизны

Изучается аффинная связность в расслоении, ассоциированном с многообразием, структурные уравнения и деривационные формулы которого построены с помощью деформаций внешнего и обычного дифференциалов. Кривизна и кручение аффинной связности на этом многообразии не являются тензорами. Доказано, что если тензор деформации связности симметричен или равен нулю, то связность является полусимметрической. Построен аналог симметрической плоской связности, названный простой связностью. Кручение и кривизна этой связности выражаются через симметричный тензор деформации связности. Каноническая связность является частным случаем простой связности, она плоская и несимметричная.

Ключевые слова: касательное пространство 2-го порядка, возмущение дифференциала, несимметричные реперы и кореперы 2-го порядка, объекты кручения и кривизны, плоская связность, полусимметрическая связность

1. Введение

В работах [6; 7] изучается многообразие $\breve{X}_m$ с несимметричными векторами касательного пространства 2-го и несимметричными формами дифференциальной группы 2-го порядка. Изучение $\breve{X}_m$ проводится с использованием отображений

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\wedge^2 T^*},$$
$$\breve{d}v = dv + d(v(f^\xi))\partial_\xi\big|_{T^*},$$

где

$$f = f(x^i, x^\xi),\ f^\xi = f^\xi(x^i),$$
$$v = v^i\partial_i,\ d\big(v(f^\xi)\big) = v^i d(\partial_i f^\xi).$$

Эти отображения представляют собой деформации дифференциалов D и d в кокасательном T^*X_m и касательном TX_m пространствах многообразия X_m. Здесь $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial x^\xi}$, причем x^j — локальные координаты точки на многообразии, то есть x^j — базисные координаты, x^ξ — слоевые координаты. Индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k\ =\ 1, \dots, m;\ \ \xi =\ m+1, \dots, m+m^2.$$

Поскольку дифференциалы деформируются, то можно считать, что и само многообразие $\breve{X}_m$ представляет собой деформацию обычного гладкого многообразия X_m, вследствие чего оно названо *деформирующимся* (см. также: [5; 13]). В данной статье продолжаем рассматривать случай $\big(x^\xi\big) = (x^i_j)$ и $f^\xi = f|_{x^\xi=1,\text{остальные}=0}$. Слоевые координаты 1-го порядка x^i_j образуют невырожденную матрицу с обратной матрицей $(\overset{*}{x}{}^i_j)$.

В основу всех построений положены соотношения

$$\breve{D}(dx^i) = \bar{N}^i_{jk} dx^j \wedge dx^k,\ \ \breve{d}(\partial_i) = \Big(\partial_{ij} + \bar{N}^\xi_{ij}\partial_\xi\Big) \otimes dx^j,$$

где кососимметрический $\bar{N}^i_{jk} = \delta^i_{[k}\partial_{j]} f$ и симметрический $\bar{N}^\xi_{ij} = \partial_{ij} f^\xi$ объекты задают возмущения дифференциалов $\breve{D}$ и $\breve{d}$ на элементах dx^i и ∂_i. Причем, например, $\breve{D}g(x^i, x^\xi) = dg$, $\breve{D}(df) = 0$, $\breve{D}\big(dx^\xi\big) = 0$; кроме того, вдоль любой линии ρ на многообразии $\breve{X}_m$ справедливо $\breve{D}^2\big|_\rho = 0$.

Над m-мерным деформирующимся многообразием $\breve{X}_m$ было построено главное расслоение реперов 2-го порядка $D_m^2(\breve{X}_m)$ со структурными уравнениями (см.: [6—9]):

$$\breve{D}\omega^i = \omega^j \wedge \breve{\omega}_j^i, \tag{1}$$

$$\breve{D}\breve{\omega}_j^i = \breve{\omega}_j^k \wedge \breve{\omega}_k^i + \omega^k \wedge \breve{\omega}_{jk}^i, \tag{2}$$

$$\breve{D}\breve{\omega}_{jk}^i = \breve{\omega}_{jk}^l \wedge \breve{\omega}_l^i - \breve{\omega}_{lk}^i \wedge \breve{\omega}_j^l - \breve{\omega}_{jl}^i \wedge \breve{\omega}_k^l + \omega^l \wedge \breve{\omega}_{jkl}^i,$$

где (см.: [6; 7])

$$\omega^i = x_j^i dx^j,$$

$$\breve{\omega}_j^i = -\overset{*}{x}{}_j^k dx_k^i - \breve{x}_{jk}^i \omega^k, \tag{3}$$

$$\breve{\omega}_{jk}^i = \breve{\Delta}\breve{x}_{jk}^i + (\breve{x}_{j[k}^s \breve{x}_{sl]}^i - \breve{x}_{jkl}^i)\omega^l.$$

Для слоевых координат 2-го порядка $\breve{x}_{jk}^i$ справедливо равенство

$$\breve{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i,$$

где $N_{jk}^i = \overset{*}{x}{}_{[j}^l \delta_{k]}^i \partial_l f = \bar{N}_{pq}^l \overset{*}{x}{}_j^p \overset{*}{x}{}_k^q$. Слоевые координаты 3-го порядка $\breve{x}_{jkl}^i$ симметричны только по последним двум индексам. Оператор $\breve{\Delta}$ действует по закону

$$\breve{\Delta}S_j^i = dS_j^i + S_j^l \breve{\omega}_k^i - S_k^i \breve{\omega}_j^k.$$

Замечание. Галочка показывает, что объекты получены в результате применения операторов $\breve{D}$ и $\breve{d}$.

Альтернирование форм $\breve{\omega}_{jk}^i$ имеет вид

$$\breve{\omega}_{[jk]}^i \equiv -\breve{\Delta}N_{jk}^i \ \left(mod\ \omega^k\right),$$

то есть при фиксации точки многообразия

$$\breve{\omega}_{[jk]}^i\Big|_{\omega^l=0} = \overset{*}{x}{}_{[j}^s \delta_{k]}^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^\xi \partial x^s} dx^\xi.$$

Кроме того, $\breve{\omega}_{j[kl]}^i \equiv \breve{x}_{js}^i \breve{\Delta}\mathrm{N}_{\mathrm{kl}}^{\mathrm{s}}$ $(mod\ \omega^k)$.

2. Пфаффовы производные и скобки касательных векторов

Пусть $T\breve{X}_m = span(\varepsilon_i)$ и $T^*\breve{X}_m = span(\omega^i)$ — касательное и кокасательное пространства к многообразию $\breve{X}_m$ в его текущей точке, причем $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Для построенных дифференциалов справедливо

$$\breve{D}\omega^i = D\omega^i + N^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$\breve{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N^\xi_{ij}\omega^j \otimes \partial_\xi.$$

Касательное пространство 2-го порядка $T^2\breve{X}_m$ деформирующегося многообразия $\breve{X}_m$ натянуто на векторы

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j, \quad \breve{\varepsilon}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi,$$

причем $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$,

$$\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j, \quad \breve{\Delta}\breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\omega}^k_{ij} \otimes \varepsilon_k = \omega^k \otimes \breve{\varepsilon}_{ijk}; \tag{4}$$

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]} = -N^k_{ij}\varepsilon_k, \quad \breve{\varepsilon}_{(ij)} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{(ij)}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi.$$

Рассмотрим касательный вектор $v = v^i\varepsilon_i$. С учетом (4) при отображении $\breve{d}$ получим

$$\breve{d}v = \varepsilon_i \otimes \breve{\Delta}\, v^i + v^i \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j.$$

Координаты v^i удовлетворяют уравнениям

$$\breve{\Delta}\, v^i = \breve{v}^i_j \omega^j, \tag{5}$$

где

$$\breve{\Delta}\, v^i = dv^i + v^j \breve{\omega}^i_j.$$

Уравнения и выражения для пфаффовых производных $\breve{v}^i_j$ можно найти двумя способами. Один способ состоит в том, чтобы в уравнениях (5) перейти к натуральному кореперу dx^i, dx^k_l, найти выражение для $\breve{v}^i_j$, продифференцировав которые получить уравнения для $\breve{v}^i_j$. Второй способ заключается во внешнем дифференцировании уравнений (5) с применением структурных уравнений (1, 2) и деривационных формул (4). Эти способы можно условно считать внутренним и внешним.

С учетом (3) из (5) получим выражение

$$\overset{*}{x}{}^k_j \partial_k v^i \omega^j + \partial^l_k v^i dx^k_l + v^j \left(-\overset{*}{x}{}^l_j dx^k_l \delta^i_k - x^i_{jk}\omega^k\right) = \breve{v}^i_j \omega^j,$$

откуда следуют равенства коэффициентов при базисных формах ω^j и дифференциалах dx^k_l

$$\breve{v}^i_j = \overset{*}{x}{}^k_j \partial_k v^i - v^k \breve{x}^i_{kj}, \tag{6}$$

$$\partial^l_k v^i = \delta^i_k v^j \overset{*}{x}{}^l_j.$$

Рассмотрим также производные, которые понадобятся далее:

$$\partial_s\left(\partial^l_k v^i\right) = \partial^l_{ks} v^i = \partial_{sk}^{\ l} v^i = \delta^i_k \overset{*}{x}{}^l_j \partial_s v^j. \tag{7}$$

Замечание. Поскольку $\breve{\omega}^i_j\big|_{\omega^k=0} = \omega^i_j\big|_{\omega^k=0} = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k$, то при фиксации точки базы из (5) получим точно такие же уравнения для объекта v^i на многообразии $\breve{X}_m$, как и на обычном гладком многообразии X_m:

$$dv^i\big|_{\omega^k=0} = v^j \overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k.$$

Эта система дифференциальных уравнений линейна и однородна относительно компонент объекта v^i и их дифференциалов. Значит, объект v^i на многообразии $\breve{X}_m$ не только по форме, но и по сути является тензором Г. Ф. Лаптева, то есть линейным однородным геометрическим объектом [1, с. 298].

Дифференцирование функций (6) дает

$$d\breve{v}^i_j = d\overset{*}{x}{}^k_j \partial_k v^i + \overset{*}{x}{}^k_j d\left(\partial_k v^i\right) - dv^k \breve{x}^i_{kj} - v^k d\breve{x}^i_{kj} =$$

$$= \left(\overset{*}{x}{}^k_l \breve{\omega}^l_j + \overset{*}{x}{}^k_s \breve{x}^s_{jl}\omega^l\right)\partial_k v^i +$$

$$+ \overset{*}{x}{}^k_j \left(\partial_{ks} v^i \overset{*}{x}{}^k_l \omega^l + \underline{\partial^{\ l}_{ks} v^i dx^s_l}\right) - \left(\breve{v}^k_l \omega^l - v^l \breve{\omega}^k_l\right)\breve{x}^i_{kj} +$$

$$+ v^k\left(\breve{\omega}^i_{kj} + \breve{x}^l_{kj}\breve{\omega}^k_l - \breve{x}^i_{lj}\breve{\omega}^l_k - \breve{x}^i_{kl}\breve{\omega}^l_j + \left(\breve{x}^s_{k[j}\breve{x}^i_{sl]} - \breve{x}^i_{kjl}\right)\omega^l\right).$$

Учитывая (7) в подчеркнутом слагаемом последнего равенства, получим

$$d\breve{v}^i_j = -\breve{v}^k_j\breve{\omega}^i_k + \breve{v}^i_k\breve{\omega}^k_j + \breve{v}^k\breve{\omega}^i_{kj} + \qquad (8)$$

$$+\left(\breve{v}^i_l\breve{x}^l_{jk} + v^s\breve{x}^i_{sl}\breve{x}^l_{jk} + \overset{*}{x}{}^l_j\overset{*}{x}{}^s_k\partial_{ls}v^i + \breve{v}^l_j\breve{x}^i_{lk} + \breve{v}^l_k\breve{x}^i_{lj} + v^s\breve{x}^l_{s(j}\breve{x}^i_{lk)}\right)\omega^k.$$

Тогда уравнения на пфаффовы производные $\breve{v}^i_j$ принимают следующий вид:

$$\breve{\Delta}\,\breve{v}^i_j - v^k\breve{\omega}^i_{kj} = \breve{v}^i_{jk}\omega^k,$$

откуда видно, что они образуют тензор вместе с координатами v^i. Компоненты $\breve{v}^i_{jk}$ пфаффовых производных имеют вид

$$\breve{v}^i_{jk} = \breve{v}^i_l\breve{x}^l_{jk} + v^s\breve{x}^i_{sl}\breve{x}^l_{jk} + \overset{*}{x}{}^l_j\overset{*}{x}{}^s_k\partial_{ls}v^i +$$

$$+\breve{v}^l_j\breve{x}^i_{lk} + \breve{v}^l_k\breve{x}^i_{lj} + v^s\breve{x}^l_{s(j}\breve{x}^i_{lk)},$$

причем их симметричные и кососимметричные части можно записать следующим образом:

$$\breve{v}^i_{[jk]} = \left(\breve{v}^i_l + v^s\breve{x}^i_{sl}\right)\breve{x}^l_{[jk]} = -(\breve{v}^i_l + v^s\breve{x}^i_{sl})N^l_{jk},$$

$$\breve{v}^i_{(jk)} = \breve{v}^i_l\breve{x}^l_{(jk)} + v^s\breve{x}^i_{sl}\breve{x}^l_{(jk)} + \overset{*}{x}{}^l_j\overset{*}{x}{}^s_k\partial_{ls}v^i +$$

$$+\breve{v}^l_j\breve{x}^i_{lk} + \breve{v}^l_k\breve{x}^i_{lj} + v^s\breve{x}^l_{s(j}\breve{x}^i_{lk)}.$$

Теперь продифференцируем уравнения (5) внешним образом с помощью $\breve{D}$:

$$\left(\breve{\Delta}\,\breve{v}^i_j - v^k\breve{\omega}^i_{kj}\right)\wedge\omega^j + \breve{D}\left(dv^i\right) = 0.$$

Для использования леммы Лаптева необходимо условие $\breve{D}\left(dv^i\right) = \theta^i_j\wedge\omega^j$, тогда из соотношений

$$\left(\breve{\Delta}\,\breve{v}^i_j - v^k\breve{\omega}^i_{kj} + \theta^i_j\right)\wedge\omega^j = 0$$

получим

$$\breve{\Delta}\,\breve{v}^i_j - v^k\breve{\omega}^i_{kj} + \theta^i_j = \breve{v}^i_{(jk)}\omega^k\,.$$

Для совпадения этих уравнений с найденными другим способом уравнениями (8) необходимо условие $\theta_j^i = \breve{v}_{[jk]}^i \omega^k$, тогда

$$\breve{\Delta}\, \breve{v}_j^i - v^k \breve{v}_{kj}^i = \left(\breve{v}_{(jk)}^i + \breve{v}_{[jk]}^i\right)\omega^k.$$

Последнее равенство совпадает с (8), если

$$\breve{v}_{jk}^i = \breve{v}_{(jk)}^i + \breve{v}_{[jk]}^i.$$

Таким образом, внешний способ приводит к тому же результату, что и внутренний, если

$$\breve{D}\left(dv^i\right) = -\breve{v}_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k,$$

что на самом деле выполняется при прямом вычислении $\breve{D}\left(dv^i\right)$. Кстати, для полного дифференциала функции $g = g(x^i, x^\xi)$ справедливо аналогичное равенство

$$\breve{D}(dg) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \partial_k f \partial_l g \overset{*}{x}{}_{[i}^k \overset{*}{x}{}_{j]}^l \omega^i \wedge \omega^j \text{ [6]}.$$

Замечание. На обычном гладком многообразии $D\left(dv^i\right) = 0$, $\breve{x}_{(jk)}^l = x_{jk}^l$ и оба способа (как внутренний, так и внешний) дают одинаковый результат с симметричными пфаффовыми производными $v_{jk}^i = \breve{v}_{(jk)}^i$.

Скобка Ли касательных векторов $u = u^i \varepsilon_i$, $v = v^i \varepsilon_i$ на деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$ имеет вид

$$[u, v] = [u^i \varepsilon_i, v^j \varepsilon_j] = \left[u^j\left(\breve{v}_j^i + v^k \breve{x}_{kj}^i\right) - v^j\left(\breve{u}_j^i + u^k \breve{x}_{kj}^i\right)\right]\varepsilon_i.$$

Фактически с учетом обозначений (6) и $\breve{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i$ для скобки векторов на многообразии $\breve{X}_m$, так же как и на многообразии X_m, имеем

$$[u, v] = \left[u^j \overset{*}{x}{}_j^k \partial_k v^i - v^j \overset{*}{x}{}_j^k \partial_k u^i\right] \varepsilon_i.$$

3. Кручение аффинной связности и симметрия тензора деформации на многообразии $\breve{X}_m$

Аффинная связность в главном расслоении реперов $D_m^1(\breve{X}_m)$ со структурными уравнениями (1, 2) задается по Лаптеву с помощью форм [7; 10]:

$$\widetilde{\breve{\omega}}_j^i = \breve{\omega}_j^i - \breve{\Gamma}_{jk}^i \omega^k \quad (\breve{\Delta}\, \breve{\Gamma}_{jk}^i + \breve{\omega}_{jk}^i = \breve{\Gamma}_{jk,l}^i \omega^l).$$

Объект кручения $\breve{T}_{jk}^i = \breve{\Gamma}_{[jk]}^i$ аффинной связности удовлетворяет сравнениям

$$\breve{\Delta}\, \breve{T}_{jk}^i \equiv \breve{\Delta}\, N_{jk}^i, \tag{9}$$

влекущим нетензорность объекта кручения, следствием чего является то, что аффинная связность на многообразии $\breve{X}_m$ всегда имеет кручение.

Рассмотрим разложение

$$\breve{\Gamma}_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - \breve{x}_{jk}^i \tag{10}$$

с использованием тензора деформации $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i\left(x^l, x_q^p\right)$ от канонической аффинной связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}_{jk}^i = -\breve{x}_{jk}^i$ к произвольной.

Можно полагать (см.: [8]), что любой связности $\breve{\Gamma}_{jk}^i$ с тензором γ_{jk}^i, определенной на деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$, соответствует связность Γ_{jk}^i с тем же тензором γ_{jk}^i, определенная на обычном гладком многообразии X_m (и наоборот). Отметим, что в работе [8] говорилось о связности на многообразии при отнесении его к неголономным и голономным реперам.

Известно, что связность является полусимметрической (см.: [3; 4; 11; 12; 14]), если ее тензор кручения S_{ij}^k имеет вид (см.: [3, гл. IV, § 40])

$$S_{ij}^k = \tfrac{1}{m-1}(\delta_i^k \eta_j - \delta_j^k \eta_i),$$

где δ_i^k — символ Кронекера, а $\eta_j = S_{ij}^i$.

Утверждение. *Слоевые координаты $\breve{x}^i_{jk}$ на многообразии $\breve{X}_m$ являются полусимметрическими.*

Для слоевых координат 2-го порядка (это компоненты канонической связности) $\breve{x}^i_{jk}$ справедливо

$$\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk},$$

где $N^i_{jk} = \overset{*}{x}{}^l_{[j}\delta^i_{k]}\partial_l f = \overline{N}^l_{pq}\overset{*}{x}{}^p_j\overset{*}{x}{}^q_k$ — это кручение канонической связности. Для свертки $N_k = N^i_{ik}$ имеем

$$N_k = \frac{1-m}{2}\overset{*}{x}{}^l_k\partial_l f,$$

поэтому

$$N^i_{jk} = \frac{1}{m-1}(\delta^i_j N_k - \delta^i_k N_j).$$

Следовательно, координаты $\breve{x}^i_{jk}$ являются полусимметрическими (см.: [3; 4; 11; 12; 14]).

Формы $\breve{\omega}^i_{jk}$, так же как и координаты $\breve{x}^i_{jk}$, являются полусимметрическими.

Альтернируя разложение (10) для связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$, получим разложение для компонент объекта кручения

$$\breve{\mathrm{T}}^k_{ij} = \gamma^k_{[ij]} + N^k_{ij}. \tag{11}$$

В случае симметричного тензора деформации γ^i_{jk} ($\gamma^k_{[ij]} = 0$) кручение выражается по формуле $\breve{\mathrm{T}}^k_{ij} = N^k_{ij}$.

Следует отметить, что на многообразии X_m симметричность тензора γ^i_{jk} влечет за собой симметричность связности Γ^i_{jk}, тогда как на многообразии $\breve{X}_m$ симметричность тензора γ^i_{jk} не влечет за собой симметричность связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$. Несимметрия связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ обусловлена в первую очередь несимметрией координат $\breve{x}^i_{jk}$. Даже если тензор γ^i_{jk} является симметричным, то связность $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ не является симметричной. Поскольку в этом случае $\breve{T}^i_{jk} = \breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk}$, то $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ будет полусимметричной.

Теорема 1. *Если тензор деформации* γ^i_{jk} *симметричен или равен нулю, то связность* $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ *является полусимметрической.*

Рассмотрим оснащающие векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$:

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \breve{\varepsilon}_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k, \quad \breve{\Delta}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} \equiv 0 \ \ (\mathrm{mod}\ \omega^k).$$

Несимметричные векторы

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j (\partial_{lk} + N^{\xi}_{lk}\partial_{\xi}) + \gamma^k_{ij}\varepsilon_k$$

заданы в касательном пространстве 2-го порядка $T^2\breve{X}_m$, $\tilde{E} = span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}) \subset T^2\breve{X}_m$, однако задают они аффинную связность 1-го порядка.

В [7] говорилось, что равенство $v^{ij}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = v^k\varepsilon_k$ равносильно системе

$$v^{ij}\overset{*}{x}{}^{(l}_i \overset{*}{x}{}^{k)}_j = 0, \ \ v^k = v^{ij}\gamma^k_{ij},$$

имеющей ненулевое решение

$$v^{ii} = 0, \ \ v^{ij} = -v^{ji}, \ i \neq j, \quad v^k = v^{ij}\gamma^k_{ij}.$$

Таким образом, подпространство $\tilde{E}$ пересекает касательную плоскость $T\breve{X}_m$, что не позволяет называть ее нормалью, даже обобщенной (см.: [8]). Следовательно, хотя выражение для альтернированных повторных ковариантных производных базисных касательных векторов имеет традиционный вид

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{j]}\varepsilon_i = \breve{\nabla}_{[k}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{|i|j]} = \breve{T}^l_{jk}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{il} + \breve{R}^l_{ijk}\varepsilon_l \quad (\tilde{\breve{\varepsilon}}_{il} \neq \tilde{\breve{\varepsilon}}_{li}), \qquad (12)$$

тем не менее объекты кручения $\breve{T}^l_{jk}$ и кривизны $\breve{R}^l_{ijk}$ произвольной связности нельзя трактовать как горизонтальную и вертикальную составляющие альтернированных повторных ковариантных производных касательных векторов.

Заметим, что равенства $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]} = \gamma^k_{[ij]}\varepsilon_k$ выполняются как на многообразии $\breve{X}_m$, так и на многообразии X_m. Таким образом, симметрия тензора деформации γ^k_{ij} отвечает за симметрию оснащающих векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$. В этом случае $\tilde{E} \cap T\breve{X}_m = \emptyset$.

Если тензор деформации γ_{ij}^{k} симметричен, то касательное пространство 2-го порядка $T^2\breve{X}_m$ распадается в прямую сумму $T^2\breve{X}_m = T\breve{X}_m \oplus HT^2\breve{X}_m$ касательного пространства $T\breve{X}_m$ и оснащающего подпространства $span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij})$. В этом случае векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \breve{\varepsilon}_{ij} + \breve{\Gamma}_{ij}^{k}\varepsilon_k$ являются (*обобщенными*) *горизонтальными векторами 2-го порядка для аффинной связности 1-го порядка*, подпространство $HT^2\breve{X}_m = span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij})$ пространства $T^2\breve{X}_m$ — *(обобщенным) горизонтальным пространством*, касательное пространство $T\breve{X}_m = VT^2\breve{X}_m$ — *вертикальным пространством в касательном пространстве 2-го порядка* $T^2\breve{X}_m$.

4. Кривизна, порожденная кручением и деформацией аффинной связности

Структурные уравнения для форм $\tilde{\breve{\omega}}_j^i$ имеют вид

$$\breve{D}\tilde{\breve{\omega}}_j^i = \tilde{\breve{\omega}}_j^k \wedge \tilde{\breve{\omega}}_k^i + \frac{1}{2}\breve{R}_{jkl}^{i}\omega^k \wedge \omega^l.$$

Компоненты объекта кривизны можно выразить с помощью компонент объекта связности и его пфаффовых производных $\breve{R}_{jkl}^{i} = \breve{\Gamma}_{j[k,l]}^{i} - \breve{\Gamma}_{j[k}^{s}\breve{\Gamma}_{|s|l]}^{i}$, а также с помощью тензора деформации [7]

$$\breve{R}_{jkl}^{i} = \partial_s\gamma_{j[k}^{i}\overset{*}{x}{}_{l]}^{s} - \gamma_{js}^{i}N_{kl}^{s} - \gamma_{j[k}^{s}\gamma_{|s|l]}^{i}, \qquad (13)$$

причем

$$\breve{\Delta}\,\breve{R}_{jkl}^{i} \equiv -\gamma_{js}^{i}\breve{\Delta}N_{kl}^{s}. \qquad (14)$$

Из сравнений (14) видно, что компоненты объекта кривизны образуют тензор только при $\breve{\gamma}_{jk}^{i} = 0$, то есть для канонической связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}_{jk}^{i}$, причем в этом случае $\overset{c}{\breve{R}}{}_{jkl}^{i} = 0$.

Учитывая сравнения (9, 14) и тензорность объекта деформации γ_{jk}^{i}, получим следующее выражение для объекта кривизны: $\breve{R}_{jkl}^{i} = -\gamma_{js}^{i}\breve{T}_{kl}^{s}$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Деформация* γ^i_{js} *и кручение* $\breve{T}^s_{kl}$ *аффинной связности индуцируют кривизну этой связности по формуле*

$$ {}^T\breve{R}^i_{jkl} = -\gamma^i_{js}\breve{T}^s_{kl}. \qquad (15)$$

Дадим геометрическую характеристику этой связности с помощью альтернированных повторных ковариантных производных базисных касательных векторов (12).

Из (4_1) с учетом форм $\tilde{\breve{\omega}}^i_j$ следует, что ковариантные производные тензора v^i имеют вид

$$\breve{\nabla}_j v^i = \breve{v}^i_j - v^k\breve{\Gamma}^i_{kj}.$$

Или, с использованием обозначения (6) и разложения (10),

$$\breve{\nabla}_j v^i = \overset{*}{x}{}^k_j \partial_k v^i - v^k\gamma^i_{kj}.$$

Для связности с кривизной (15) получим из (12)

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{\mathrm{j}]}\varepsilon_i = \breve{\nabla}_{[k}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{|i|j]} = \breve{T}^l_{jk}(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{il} - \gamma^s_{jl}\varepsilon_s)$$

или

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{\mathrm{j}]}\varepsilon_i = \breve{\nabla}_{[k}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{|i|j]} = \breve{T}^l_{jk}\overset{*}{x}{}^p_i\overset{*}{x}{}^q_l(\partial_{pq} + N^\xi_{pq}\partial_\xi).$$

Симметричные векторы

$$\overset{\mathrm{c}}{\tilde{\breve{e}}}_{il} = \overset{*}{x}{}^p_i\overset{*}{x}{}^q_l(\partial_{pq} + N^\xi_{pq}\partial_\xi)$$

инвариантны и определяют горизонтальное подпространство $span\left(\overset{\mathrm{c}}{\tilde{\breve{e}}}_{ij}\right)$ канонической связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$. То есть подпространство $span\left(\overset{\mathrm{c}}{\tilde{\breve{e}}}_{ij}\right)$ симметричных векторов $\overset{\mathrm{c}}{\tilde{\breve{e}}}_{ij}$ не пересекает касательное пространство $T\breve{X}_m$ и дополняет его до всего $T^2\breve{X}_m$. При этом

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{\mathrm{j}]}\varepsilon_i = N^l_{jk}\overset{\mathrm{c}}{\tilde{\breve{e}}}_{il}.$$

Теорема 3. *Относительно связности, кривизна* ${}^{T}\breve{R}^{i}_{jkl} = -\breve{\gamma}^{i}_{js}\breve{T}^{s}_{kl}$ *которой порождена кручением и деформацией, альтернации повторных ковариантных производных векторов* ε_i *натянуты на симметричные векторы* $\overset{c}{\tilde{\tilde{e}}}_{il} = \overset{*}{x}{}^{l}_{i}\overset{*}{x}{}^{k}_{j}(\partial_{lk} + N^{\xi}_{lk}\partial_{\xi})$, *определяющие нормаль* $\overset{c}{\tilde{E}}$, $\overset{c}{\tilde{E}}\oplus T\breve{X}_m = T^2\breve{X}_m$, *дополняющую касательное пространство* $T\breve{X}_m$ *до касательного пространства 2-го порядка* $T^2\breve{X}_m$.

5. Простая связность и ее свойства

Для векторов $u = u^i\varepsilon_i$, $v = v^i\varepsilon_i$, $w = w^i\varepsilon_i$ на деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$ имеем

$$\nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] = u^i v^i \gamma^{i}_{[jk]}\varepsilon_i = u^i v^i\big(\breve{T}^{i}_{jk} - N^{i}_{jk}\big)\varepsilon_i,$$

$$\breve{\nabla}_u\breve{\nabla}_v w - \breve{\nabla}_u\breve{\nabla}_v w - \breve{\nabla}_{[u,v]}w = w^j\big(\breve{R}^{i}_{jkl} + \breve{\gamma}^{i}_{js}N^{s}_{kl}\big)u^k v^l\varepsilon_i,$$

причем

$$\nabla_u v = u^j\breve{\nabla}_j v^i\varepsilon_i.$$

Рассмотрим связность на многообразии $\breve{X}_m$, соответствующую симметрической плоской связности на многообразии X_m.

Симметрическая плоская связность на многообразии X_m определяется соотношениями

$$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v],$$

$$\nabla_u\nabla_v w - \nabla_u\nabla_v w = \nabla_{[u,v]}w.$$

На многообразии $\breve{X}_m$ этой связности будет соответствовать связность, кручение и кривизна которой выражаются по формулам

$$ {}^{N}\breve{\mathrm{T}}^{k}_{ij} = N^{k}_{ij}, \qquad (16)$$

$$ {}^{N}\breve{R}^{i}_{jkl} = -\gamma^{i}_{js}N^{s}_{kl}. \qquad (17)$$

Определение. Связность, кручения и кривизна которой выражаются через симметричный тензор деформации по формулам (16, 17), назовем *простой* и обозначим ${}^{N}\breve{\Gamma}^{i}_{jk}$. Эта связность является *полусимметрической*.

Кручение (16) отвечает связности с симметричным тензором деформации γ^{i}_{jk}. В этом случае связность является полусимметрической, а горизонтальные векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$ симметричны:

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{(ij)} = \left(\overset{*}{x}{}^{l}_{i}\overset{*}{x}{}^{k}_{j}\right)\partial_{lk} + \left(\gamma^{k}_{(ij)}\right)\varepsilon_{k} + (\overset{*}{x}{}^{l}_{i}\overset{*}{x}{}^{k}_{j}N^{\xi}_{lk})\partial_{\xi}.$$

Для симметрического тензора деформации из (12) следует

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{j]}\varepsilon_{i} = {}^{N}\breve{\mathrm{T}}^{l}_{jk}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{il} + {}^{N}\breve{R}^{l}_{ijk}\varepsilon_{l} = N^{l}_{jk}\left(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{il} - \breve{\gamma}^{s}_{il}\varepsilon_{s}\right) =$$

$$= N^{l}_{jk}\overset{*}{x}{}^{p}_{i}\overset{*}{x}{}^{q}_{l}\left(\partial_{pq} + N^{\xi}_{pq}\partial_{\xi}\right) = N^{l}_{jk}\overset{\mathrm{c}}{\tilde{\breve{\varepsilon}}}_{il}.$$

Теорема 4. *На многообразии $\breve{X}_m$ для полусимметрической связности с кручением ${}^{N}\breve{\mathrm{T}}^{k}_{ij} = N^{k}_{ij}$ (16) и кривизной ${}^{N}\breve{R}^{i}_{jkl} = -\gamma^{i}_{js}N^{s}_{kl}$ (17) имеем*

$$\breve{\nabla}_{u}v - \breve{\nabla}_{v}u = [u,v],\ \ \nabla_{u}\nabla_{v}w - \nabla_{u}\nabla_{v}w = \nabla_{[u,v]}w.$$

Это аналог связности без кручения и кривизны, заданной на многообразии X_m.

Утверждение. *Если на многообразии $\breve{X}_m$ тензор деформации симметричен, то есть $\gamma^{i}_{[jk]} = 0$, то $\breve{\nabla}_{u}v - \breve{\nabla}_{v}u = [u,v]$.*

Проанализируем дополнительно условие (17) с учетом (13). Из (13) следует, что тензор γ^{i}_{jk} удовлетворяет условию

$$\partial_{s}\gamma^{i}_{j[k}\overset{*}{x}{}^{s}_{l]} = \gamma^{s}_{j[k}\gamma^{i}_{|s|l]}.$$

В случае кручения и кривизны (16, 17) для альтернированных ковариантных производных тензора γ^{i}_{jk} справедливо

$$\breve{\nabla}_{[l}\gamma^{i}_{|j|k]} = -\overset{*}{x}{}^{s}_{[l}\partial_{s}\gamma^{i}_{|j|k]},$$

или, с помощью касательных векторов ε_{l},

$$\breve{\nabla}_{[l}\gamma^{i}_{|j|k]} = -\partial_{\varepsilon_{[l}}\gamma^{i}_{|j|k]}.$$

Теорема 5. *Относительно простой связности* ${}^N\breve{\Gamma}^i_{jk}$ *альтернации ковариантных производных тензора деформации противоположны альтернациям производных тензора деформации по направлению векторов* ε_l, *то есть*

$$\breve{\nabla}_{[l}\gamma^i_{|j|k]} = -\varepsilon_{[l}\left(\gamma^i_{|j|k]}\right).$$

Условие $\gamma^i_{jk} = 0$ выделяет из простой связности ${}^N\breve{\Gamma}^i_{jk}$ каноническую связность $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$, которая является плоской и полусимметрической и для которой также выполняется

$$\overset{c}{\breve{\nabla}}_u v - \overset{c}{\breve{\nabla}}_v u = [u, v], \quad \overset{c}{\breve{\nabla}}_u \overset{c}{\breve{\nabla}}_v w - \overset{c}{\breve{\nabla}}_u \overset{c}{\breve{\nabla}}_v w = \overset{c}{\breve{\nabla}}_{[u,v]} w.$$

Замечание. На многообразии $\breve{X}_m$ симметрическая деформация связности (генератор [8]) выделяет класс *полусимметрических* связностей ${}^N\breve{\Gamma}^i_{jk}$, близкий по свойствам симметрической связности Γ^i_{jk} многообразия X_m. В работе [8] отмечено, что при использовании неголономных реперов симметричные связности не выделяются; в этом случае любые связности (в том числе и связности без кручения) имеют несимметричные компоненты.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Паньженский В. И.* Движения в пространствах с кручением // Соврем. матем. и ее прилож. 2015. Т. 96. С. 18—33.

5. *Петрова Л. И.* Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. М., 2006.

6. *Полякова К. В.* О расширении касательного пространства 2-го порядка гладкого многообразия // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 111—117.

7. *Полякова К. В.* О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГМФ. 2023. Вып. 54 (2). С. 29—44.

8. *Рыбников А.К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. № 1. С. 73—80.
9. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.
10. *Belova O.O.* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.
11. *Friedman A., Schoaten J.A.* Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung // Math. Zeitschrift. 1924. Vol. 21. P. 211—223.
12. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection // Tensor N.S. 1975. Vol. 29. P. 249—254.
13. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations. Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory. Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10, №46. doi: https://doi.org/10.3390/axioms10020046.
14. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.

Для цитирования: *Полякова К.В.* Аналоги симметрической и плоской связностей с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 78—95. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-6.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-6

Analogues of torsion-free and curvature-free connections with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor

Submitted on May 21, 2024

The paper is devoted to affine connection in the frame bundle associated with a manifold which structure equations and derivation formulas are constructed using deformations of the exterior and ordinary differentials. Curvature and torsion objects of this connection are not tensors. A characteristic of a curvature which is a convolution of a deformation tensor and a torsion, is considered. Torsion-free connections are not distinguished on the introduced manifold, even in the case of symmetric deformation, a class of semi-symmetric connections is distinguished, which is an analogue of symmetric connection on an ordinary smooth manifold. It is proved that if the connection deformation tensor is symmetric or zero, then the connection is semi-symmetric. Analogues of torsion-free and curvature-free connections are constructed. The torsion and curvature of this connection are expressed in terms of the symmetric deformation tensor for the connection. Canonical connection is a special case of this connection, it is semi-symmetric and curvature-free.

Keywords: second order tangent space, differential perturbation, non-symmetrical second order frames and coframes, torsion and curvature objects, flat connection, semi-symmetrical connection

References

1. *Laptev, G. F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

2. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

3. *Norden, A. P.:* Spaces of affine connection. Moscow (1976).

4. *Panzhenskij, V. I.:* Isometries of spaces with torsion. Journal of Mathematical Sciences, **217**:5, 540—556 (2016). https://doi.org/10.1007/s10958-016-2990-z.

5. *Petrova, L. I.:* Skew-symmetric differential forms: Conservation laws. Fundamentals of field theory. Moscow (2006).

6. *Polyakova, K. V.:* On some extension of the second order tangent space for a smooth manifold. DGMF, 53, 111—117 (2022).

7. *Polyakova, K. V.:* On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 54 (2), 29—44 (2023).

8. *Rybnikov, A. K.:* Second-order generalized affine connections. Izvestia Vuzov. Math., **27**:1, 84—93 (1983).

9. *Shevchenko, Yu. I.:* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

10. *Belova, O. O.:* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planesю J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

11. *Friedman, A., Schoaten, J. A.:* Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung. Math. Zeitschrift, 21, 211—223 (1924).

12. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection. Tensor N. S., 29, 249—254 (1975).

13. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations. Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory. Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, **10**:46 (2021). https://doi.org/10.3390/axioms10020046.

14. *Yano, K.:* On semi-symmetric metric connection. Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées, 15, 1579—1586 (1970).

For citation: Polyakova, K. V. Analogues of torsion-free and curvature-free connections with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 55 (2), 78—95 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-6.

Published since 1970.
Indexing: MathSciNet (American Mathematical Society), ZBMATH — The database Zentralblatt MATH.
Frequency — twice a year (from 2023)

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2024

№ 55 (2)

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 07.10.2024 г.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 6,1
Тираж 50 экз. Заказ 109

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14