ISSN 0321-4796 (Print)
ISSN 2782-3229 (Online)

БФУ БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

IKBFU IMMANUEL KANT BALTIC FEDERAL UNIVERSITY

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MANIFOLDS OF FIGURES

2026

Том 57
№ 2

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта

Immanuel Kant Baltic Federal University Press

2026

12+

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград : Издательство БФУ им. И. Канта, 2026. — Т. 57, № 2. — 100 с.

Редакционная коллегия

О.О. Белова, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия) — **главный редактор**; *К.В. Полякова*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия) — **ответственный секретарь**; *Ю.И. Шевченко*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия); *В. Балан*, д-р, проф., Политехнический университет (Бухарест, Румыния); *В.В. Балащенко*, канд. физ.-мат. наук, доц., Белорусский государственный университет (Минск, Беларусь); *Ш. Бачо*, д-р, проф., Университет Дебрецена, Институт математики и информатики (Дебрецен, Венгрия); *Р. Бешимов*, канд. физ.-мат. наук, доц., Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека (Ташкент, Узбекистан); *Т. Бокелавадзе*, канд. физ.-мат. наук, доц., Государственный университет им. Акакия Церетели (Кутаиси, Грузия); *Л. Велимирович*, д-р, проф., Нишский университет (Ниш, Сербия); И. Гинтерлейтнер, PhD, доц., Технический университет в Брно (Брно, Чехия); *Б. Кирик Рац*, PhD, доц., Университет Мармара (Стамбул, Турция); *М.В. Кретов*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия); *А.В. Кулешов*, канд. физ.-мат. наук, доц., БФУ им. И. Канта (Калининград, Россия); *Й. Микеш*, д-р физ.-мат. наук, проф., Оломоуцкий университет им. Франтишека Палацкого (Оломоуц, Чехия); *В.А. Мирзоян*, д-р физ.-мат. наук, проф., Государственный инженерный университет Армении (Ереван, Армения); *П.Т. Надь*, д-р физ.-мат. наук, проф., Обудский университет (Будапешт, Венгрия); *В.Ю. Ровенский*, д-р физ.-мат. наук, проф., Хайфский университет (Хайфа, Израиль); *Л.Л. Сабинина*, канд. физ.-мат. наук, проф., Автономный университет штата Морелос (Куэрнавака, Мексика); *С.Е. Степанов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Финансовый университет при Правительстве РФ (Москва, Россия); *Дж. Фальконе*, PhD, доц., Университет Палермо (Палермо, Италия); *А. Фигула*, PhD, доц., Университет Дебрецена (Дебрецен, Венгрия); *Г.С. Холл*, д-р, проф., Университет Абердина (Абердин, Шотландия); *А.М. Шелехов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Московский государственный педагогический университет (Москва, Россия)

Выходит с 1970 года.
Входит в международные базы данных MathSciNet, zbMATH.
Изданию присвоена **первая категория (К1) Перечня ВАК.**
Периодичность — 2 раза в год (начиная с 2023 г.).

Учредитель
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Адрес редакции и издателя
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14

Адрес типографии
236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Дата выхода в свет 20.11.2026 г.

© БФУ им. И. Канта, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Банару Г. А. О геометрической теории ОДУ Н. В. Степанова 5

Банару М. Б. О почти контактной метрической структуре на вполне омбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия 11

Белова О. О. Объект неабсолютных перенесений для конгруэнции $K_{(n-m)m}$ 19

Kırık Rácz B. Some remarks on 2-Killing vector fields 35

Кретов М. В., Кретова Е. М. Комплексы гиперболических параболоидов без фокальных многообразий 46

Кыров В. А., Шинжина Д. М. Кривизна псевдогельмгольцевой группы в связности с векторным кручением 52

Полякова К. В. Полусимметрия слоевых координат 3-го порядка и касательные векторы 3-го порядка для деформирующегося многообразия 63

Stepanov S. E. On stable minimal submanifolds in Riemannian manifolds 79

Султанов А. Я., Султанова Г. А., Глебова М. В., Монахова О. А. О некоторых типах почти йордановых алгебр 87

CONTENTS

Banaru G. A. On N. V. Stepanov's ODE geometric theory 5

Banaru M. B. On the almost contact metric structure on a totally umbilical hypersurface of an almost Hermitian manifold 11

Belova O. O. Non-absolute transfer object for cocongruence $K_{(n-m)m}$ 19

Kırık Rácz B. Some remarks on 2-Killing vector fields 35

Kretov M. V., Kretova E. M. Complexes of hyperbolic paraboloids without focal varieties 46

Kyrov V. A., Shinzhina D. M. Curvature of the pseudo-Helmholtz group in a connection with vector torsion 52

Polyakova K. V. Third-order tangent vectors and semi-symmetric third-order fiber coordinates for a deforming manifold 63

Stepanov S. E. On stable minimal submanifolds in Riemannian manifolds 79

Sultanov A. Ya., Sultanova G. A., Glebova M. V., Monakhova O. A. On some types of almost Jordan algebras 87

УДК 514.7

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com
SPIN-код: 9011-7084, Authors ID РИНЦ: 652570
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-1

О геометрической теории ОДУ Н. В. Степанова

Выделяются самые основные результаты выдающегося отечественного математика Николая Васильевича Степанова в геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Обсуждается вопрос о перспективах дальнейшего развития данной теории.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, инвариант, связность, инвариантная классификация обыкновенных дифференциальных уравнений



1. Поводом для написания этой статьи стало 100-летие со дня рождения известного отечественного геометра Николая Васильевича Степанова (1926—1991), доктора физико-математических наук, профессора. В Смоленске, с которым связаны последние 20 лет жизни Николая Васильевича, в 2006 и 2016 г. довольно скромно проходили мероприятия, посвященные 80- и 90-летию со дня

Поступила в редакцию 28.03.2026 г.
© Банару Г. А., 2026

рождения этого замечательного математика. В те годы вышло несколько публикаций о Н. В. Степанове и о его основных научных достижениях (см., например, [1]). Отметим, что научная деятельность Н. В. Степанова была связана в основном с механико-математическим факультетом Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, где он получил образование. Там же он защитил свою докторскую диссертацию [2].

2. Все научные достижения Н. В. Степанова фактически были связаны только с одним направлением — геометрической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее полно полученные им результаты представлены в его докторской диссертации [2], а также в обзорах [3; 4], которые чаще всего цитируются специалистами в данной области. Выдающийся отечественный геометр Леонид Евгеньевич Евтушик очень высоко оценивал достижения Николая Васильевича. Л. Е. Евтушик ставил его в один ряд с другими известнейшими отечественными специалистами в области дифференциальной геометрии, отмечая, что фундаментальные результаты в геометрической теории дифференциальных уравнений были получены Г. Ф. Лаптевым, А. М. Васильевым, В. И. Близникасом, А. К. Рыбниковым, Н. В. Степановым и их учениками [5].

Среди множества разнообразных результатов, полученных Н. В. Степановым за долгие годы, мы выделим именно те, которые считал главными и он сам [2; 4]:

1) нахождение фундаментально-групповой картановой связности, инвариантно относительно псевдогруппы всех достаточно гладких точечных преобразований плоскости присоединенной к произвольному обыкновенному дифференциальному уравнению, порядок которого не ниже трех;

2) выделение из систем продолжений основного уравнения специальных структур алгебраического характера с формальными операторами дифференцирования; присоединяемые к обыкновенному дифференциальному уравнению дифференци-

альные алгебры являются совершенно необходимой частью аппарата, применяемого для построения присоединенной связности;

3) подробное изучение инвариантов и инвариантных объектов обыкновенных дифференциальных уравнений, их структуры и взаимосвязи; доказательство теорем, позволяющих получать неограниченное количество новых инвариантов и инвариантных объектов, причем вычисление таких инвариантов и инвариантных объектов всегда может быть доведено до конца;

4) решение проблемы о соотношении внешней и внутренней геометрий обыкновенных дифференциальных уравнений (они оказались эквивалентными);

5) построение на базе имеющихся инвариантов так называемой инвариантной классификации обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая классификация, будучи единой, может отражать различные свойства уравнений и присоединенных к ним структур: дифференциально-алгебраических характеристик касательных расслоений, присоединенных связностей и др.

Краткое изложение основных научных достижений Н.В. Степанова содержится в статье [6], а их более полный обзор — в работе [7].

3. На всех упомянутых в начале статьи мероприятиях, посвященных предыдущим юбилеям Н.В. Степанова, наверное, чаще всего обсуждался следующий вопрос: каковы перспективы дальнейшего развития его геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений? К большому сожалению, объективные данные (здесь, конечно, прежде всего мы имеем в виду количество работ по данной и смежной тематикам, опубликованных в журналах с высоким рейтингом) говорят о том, что существенного развития эта теория за время, прошедшее после смерти Николая Васильевича, не получила. И опять же, к большому сожалению, очень трудно точно определить главные причины этого явления.

Остается лишь надеяться на то, что со временем ситуация изменится и четкие и красивые дифференциально-геометрические построения Николая Васильевича Степанова получат новое, возможно, самое неожиданное развитие. История математики (и науки в целом) показывает, что такое не только возможно, но и нередко случается. Все, кто помнит этого замечательного отечественного геометра, этого умного и достойного человека, искренне желают именно такого развития событий.

Список литературы

1. *Банару Г.А.* К 90-летию со дня рождения Н.В. Степанова // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 7—10.

2. *Степанов Н.В.* Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$: дис. … д-ра физ.-мат. наук. М., 1986.

3. *Степанов Н.В.* Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1977. Т. 8. С. 47—66.

4. *Степанов Н.В.* Геометрия дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1981. Т. 12. С. 127—164.

5. *Евтушик Л.Е.* Геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования в семинаре Лаптева — Васильева при Московском университете (1980—1992 гг.) // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2002. Т. 11. С. 24—81.

6. *Банару Г.А.* Об основных результатах Н.В. Степанова в теории ОДУ // ДГМФ. 2017. Вып. 48. С. 7—13.

7. *Banaru G.A.* N.V. Stepanov and his geometric theory of ordinary differential equations // J. Math. Sci. 2019. Vol. 241, № 3. P. 245—250.

Для цитирования: *Банару Г.А.* О геометрической теории ОДУ Н.В. Степанова // ДГМФ. 2026. №57 (2). С. 5—10. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-1.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010:53A55

G.A. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalskogo Str., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-1

On N.V. Stepanov's ODE geometric theory

Submitted on March 28, 2026

The main results obtained in the field of geometric theory of ordinary differential equations by the remarkable Soviet mathematician Nikolai Vasil'yevich Stepanov (1926—1991) are highlighted:

1) finding the fundamental-group Cartan connection that is invariant with respect to the pseudogroup of all sufficiently smooth point transformations of the plane adjoined to an arbitrary ordinary differential equation of order $n \geq 3$;

2) extracting special structures of an algebraic type with formal differentiation operators from systems of extensions of the fundamental equation; differential algebras adjoined to an ordinary differential equation are an absolutely necessary part of the apparatus used to construct the associated connection;

3) a detailed study of invariants and invariant objects of ordinary differential equations, their structure and interrelationships; proving theorems that allow one to obtain an unlimited number of new invariants and invariant objects, with the computation of such invariants and invariant objects always being complete;

4) resolving the problem of the relationship between the extrinsic and intrinsic geometries of ordinary differential equations (they turned out to be equivalent);

5) constructing, based on existing invariants, a so-called invariant classification of ordinary differential equations. Such a classification, being unified, can reflect various properties of the equations and the structures associated with them: differential-algebraic characteristics, tangent bundles, associated connections, etc.

Keywords: ordinary differential equation, invariant, connection, invariant classification of ordinary differential equations

References

1. *Banaru, G.A.:* On the occasion of N.V. Stepanov's 90th birthday. DGMF, 47, 7—10 (2016).

2. *Stepanov, N.V.:* The differential-geometric theory of the equation $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$. PhD Thesis. Moscow (1986).

3. *Stepanov, N.V.:* The differential-geometric theory of the equation $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$. J. Soviet Math., **13**:5, 575—587 (1980).

4. *Stepanov, N.V.:* Geometry of differential equations. J. Soviet Math., **21**:2, 200—231 (1983).

5. *Evtushik, L.E.:* Geometry of ordinary differential equations. Investigations of Laptev — Vasil'ev seminar at the Moscow University (1980—1992). J. Math. Sci. New York, **78**:3, 253—286 (1996).

6. *Banaru, G.A.:* On N.V. Stepanov's main results in the ODE theory. DGMF, 48, 7—13 (2017).

7. *Banaru, G.A.:* N.V. Stepanov and his geometric theory of ordinary differential equations. J. Math. Sci. (New York), **241**:3, 245—250 (2019).

For citation: Banaru, G.A.: On N.V. Stepanov's ODE geometric theory. DGMF, **57**:2, 5—10 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-1.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

М. Б. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com
SPIN-код: 1392-5918, Authors ID РИНЦ: 128852
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-2

О почти контактной метрической структуре на вполне омбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия

На всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. Получены структурные уравнения такой почти контактной метрической структуры для случая, когда гиперповерхность является вполне омбилическим подмногообразием почти эрмитова многообразия.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, почти эрмитово многообразие, вполне омбилическая гиперповерхность, структурные уравнения

1. С середины XX в. известно, что на ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. На начальном этапе работами по этой тематике выделялись в основном японские геометры С. Ишихара, С. Сасаки, Й. Таширо, Й. Хатакеяма и Х. Янамото. Позже в этой области стали работать десятки математиков из разных стран, среди которых следует особо отметить отечественного специалиста Лидию Васильевну Степанову. Под руководством замечательного геометра В. Ф. Ки-

Поступила в редакцию 28.03.2026 г.
© Банару М. Б., 2026

риченко она получила ряд очень интересных и важных результатов, связанных с почти контактными метрическими гиперповерхностями почти эрмитовых многообразий [1].

Несомненно, основным результатом Л. В. Степановой в области контактной геометрии гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий являются структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры, индуцированной на произвольной ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Эти структурные уравнения позволили Л. В. Степановой, а затем и другим геометрам получить множество фактов о различных видах почти контактных метрических структур (косимплектической, слабо косимплектической, кенмоцевой, сасакиевой, квазисасакиевой) на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий, принадлежащих различным классам Грея — Хервеллы. Отметим, что вывод этих общих структурных уравнений крайне сложен и очень громоздок (он был сделан «вручную», без использования компьютера). Насколько нам известно, существенно усовершенствовать эти выкладки пока никому не удалось. В обзоре [2] В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару содержится описание этого вывода с некоторыми упрощениями.

В настоящей статье структурные уравнения, полученные Л. В. Степановой, детализируются для такого важного случая, когда гиперповерхность с почти контактной метрической структурой является вполне омбилическим подмногообразием почти эрмитова многообразия. Автору статьи не раз приходилось выводить подобные структурные уравнения (в том числе в работах, написанных совместно с Л. В. Степановой, А. Абу-Салимом и Г. А. Банару [3—6]), но эти структурные уравнения были получены лишь для частных случаев, например для почти контактных метрических структур на вполне омбилических гиперповерхностях многообразий, принадлежащих определенному классу почти эрмитовых многообразий.

2. Известно (см.: [7]), что почти контактной метрической структурой на нечетномерном многообразии N^{2n-1} называет-

ся система из четырех тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \aleph(N^{2n-1}).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N^{2n-1})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N^{2n-1}.

Также известно (см.: [7]), что почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, \ g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом почти комплексная структура и риманова метрика должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым* (almost Hermitian, AH-) многообразием.

Отметим, что структурные уравнения почти контактной метрической структуры рассматриваются записанными в репере, адаптированном к соответствующей структуре (А-репере). Конструкция А-репера и его применение к исследованию почти эрмитовых и почти контактных метрических структур разработаны В. Ф. Кириченко [7; 8].

3. Приведем наш основной результат.

Теорема. *Первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой вполне омбилической гиперповерхности произвольного почти эрмитова многообразия имеет следующий вид*:

$$d\,\omega^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\omega^{\gamma} \wedge \omega_{\beta} + B^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta} \wedge \omega_{\gamma} +$$

$$+ \left(\sqrt{2}B^{\alpha n}{}_{\beta} + i\lambda\delta_{\beta}^{\alpha}\right)\omega^{\beta} \wedge \omega +$$

$$+(-\sqrt{2}\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}} B^{\alpha\beta}{}_{n} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{\alpha\beta n})\omega_\beta \wedge \omega;$$

$$d\,\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\omega_\gamma \wedge \omega^\beta + B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma +$$

$$+ \left(\sqrt{2}B_{\alpha n}{}^{\beta} - i\lambda\,\delta_\alpha^\beta\right)\omega_\beta \wedge \omega + \qquad (1)$$

$$+(-\sqrt{2}\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n} - \frac{1}{\sqrt{2}} B_{\alpha\beta}{}^{n})\omega^\beta \wedge \omega;$$

$$d\,\omega = \sqrt{2}B_{n\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2}B^{n\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta +$$

$$+ \left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_{\beta} - \sqrt{2}B_{n\beta}{}^{\alpha} - 2i\,\lambda\,\delta_\beta^\alpha\right)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha +$$

$$+ \left(\tilde{B}_{n\beta n} + B_{n\beta}{}^{n}\right)\omega \wedge \omega^\beta + \left(\tilde{B}^{n\beta n} + B^{n\beta}{}_{n}\right)\omega \wedge \omega_\beta,$$

где

$$B^{ab}{}_{c} = -\frac{i}{2}J^{a}_{\hat{b},c}, \quad B_{ab}{}^{c} = \frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}};$$

$$B^{abc} = \frac{i}{2}J^{a}_{[\hat{b},\hat{c}]}, \quad B_{abc} = -\frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]};$$

$$\tilde{B}^{abc} = -\frac{i}{2}J^{a}_{\hat{b},\hat{c}}, \quad \tilde{B}_{abc} = \frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,c}.$$

Здесь через $\{J^{j}_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J; системы функций $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ и $\{B^{ab}{}_{c}\}$, $\{B_{ab}{}^{c}\}$ служат компонентами тензоров Кириченко [9; 10] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}; через $\{\tilde{B}^{abc}\}$ и $\{\tilde{B}_{abc}\}$ обозначены компоненты так называемых модифицированных тензоров Кириченко (их ввела в рассмотрение и использовала Л. В. Степанова [1]). Также отметим, что

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1; \quad a, b, c = 1, \ldots, n; \quad \hat{a} = a + n;$$

λ — некоторая константа, связанная со второй квадратичной формой погружения гиперповерхности N^{2n-1} в почти эрмитово многообразие M^{2n}; $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$); $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_\alpha = \omega^{\hat{a}}$; δ_a^b — кронекерова дельта.

Обратим внимание на то, что уравнения (1) легко детализировать для случаев, когда рассматривается вполне омбилическая гиперповерхность многообразия, принадлежащего какому-либо конкретному классу Грея — Хервеллы почти эрмитовых многообразий. Условия принадлежности произвольного AH-многообразия определенному классу, записанные в терминах тензоров Кириченко, давно известны [9; 10]; например, A-многообразие является эрмитовым в том и только том случае, когда все компоненты структурных тензоров Кириченко $\{B^{abc}\}$ и $\{B_{abc}\}$ обращаются в нуль.

Естественным продолжением вывода уравнений (1) может быть получение первой группы структурных уравнений почти контактной метрической структуры, индуцированной на гиперповерхности AH-многообразия каждого из 16 классов Грея — Хервеллы. Как упоминалось выше, для некоторых случаев (пока для гиперповерхностей AH-многообразий самых простых и хорошо изученных классов — классов келеровых, приближенно келеровых, локально конформно келеровых многообразий) такие уравнения были уже получены ранее.

С учетом того что известен вид структурных уравнений для наиболее важных почти контактных метрических структур [1; 2; 7; 11], из уравнений (1) можно относительно несложно получить результаты либо о существовании, либо о несуществовании (что, понятно, проще) определенной почти контактной метрической структуры на вполне омбилической гиперповерхности AH-многообразия.

Автор выражает благодарность Лидии Васильевне Степановой за полезные замечания, которые были учтены при написании данной статьи.

Список литературы

1. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1995.

2. *Banaru M. B., Kirichenko V. F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // J. Math. Sci (New York). 2015. Vol. 207, № 4. P. 513—537.

3. *Banaru M. B.* Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Journal of Harbin Institute of Technology (New Series). 2001. Vol. 8, № 1. P. 38—40.

4. *Abu-Saleem A., Banaru M. B., Banaru G. A.* A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Изв. Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. № 3 (85). С. 107—114.

5. *Степанова Л. В., Банару Г. А., Банару М. Б.* О геометрии *QS*-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 815—822.

6. *Банару М. Б., Банару Г. А.* О гиперповерхностях со структурой Кириченко — Ускорева в келеровых многообразиях // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 1715—1721.

7. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

8. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур // Итоги науки и техн. Пробл. геом. 1986. Т. 18. С. 25—71.

9. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 1993.

10. *Banaru M.* On the Gray — Hervella classes of *AH*-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski". Faculté de Mathématiques et Informatique. 2004. Vol. 95. P. 125—131.

11. *Банару Г. А.* О несуществовании структуры Кенмоцу на *acm*-гиперповерхностях косимплектического типа келерова многообразия // ДГМФ. 2019. Вып. 50. С. 23—28.

Для цитирования: *Банару М. Б.* О почти контактной метрической структуре на вполне омбилической гиперповерхности почти эрмитова многообразия // ДГМФ. 2026. № 57 (2). С. 11—18. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-2.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010:53B35, 53B25

M. B. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalskogo Str., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-2

On the almost contact metric structure on a totally umbilical hypersurface of an almost Hermitian manifold

Submitted on March 28, 2026

Since the middle of the last century, it has been known that an almost contact metric structure is induced on every orientable hypersurface of an almost Hermitian manifold. More than thirty years ago, L. V. Stepanova derived the Cartan structural equations for the almost contact metric structure induced on an arbitrary orientable hypersurface of an almost Hermitian manifold. These structure equations allowed L. V. Stepanova, and subsequently other geometers, to obtain numerous important results on various types of almost contact metric structures (cosymplectic, nearly cosymplectic, Kenmotsu, Sasakian, quasi-Sasakian, Kirichenko — Uskorev) on hypersurfaces of almost Hermitian manifolds belonging to certain Gray — Hervella classes.

In the present note, the structure equations obtained by L. V. Stepanova are detailed for the important case when a hypersurface with an almost contact metric structure is a totally umbilical submanifold of an almost Hermitian manifold.

Some problems in the geometry of almost contact metric hypersurfaces of almost Hermitian manifolds are formulated. These problems can be solved using the structural equations obtained in this paper.

Keywords: almost contact metric structure, almost Hermitian manifold, totally umbilical hypersurface, structure equations

Referenses

1. *Stepanova, L. V.*: Contact geometry of hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds. PhD Thesis. Moscow (1995).

2. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.*: Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci. (New York), **207**:4, 513—537 (2015).

3. *Banaru, M. B.*: Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Journal of Harbin Institute of Technology (New Series), **8**:1, 38—40 (2001).

4. *Abu-Saleem, A., Banaru, M. B., Banaru, G. A.*: A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, **3**:85, 107—114 (2017).

5. *Stepanova, L. V., Banaru, G. A., Banaru, M. B.*: On geometry of QS-hypersurfaces of Kählerian manifolds. Sib. Elektron. Mat. Izv., 15, 815—822 (2018).

6. *Banaru, M. B., Banaru, G. A.*: On hypersurfaces with Kirichenko — Uskorev structure in Kählerian manifolds. Sib. Elektron. Mat. Izv., 17, 1715—1721 (2020).

7. *Kirichenko, V. F.*: Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

8. *Kirichenko, V. F.*: Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost contact manifolds. J. Soviet Math., **42**:5, 1885—1919 (1988).

9. *Banaru, M. B.*: Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. PhD Thesis. Moscow (1993).

10. *Banaru, M.*: On the Gray — Hervella classes of *AH*-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski". Faculté de Mathématiques et Informatique, 95, 125—131 (2004).

11. *Banaru, G. A.*: On nonexistence of Kenmotsu structure on *acm*-hypersurfaces of cosymplectic type of a Kählerian manifold. DGMF, 50, 23—28 (2019).

For citation: Banaru, M. B.: On the almost contact metric structure on a totally umbilical hypersurface of an almost Hermitian manifold. DGMF, **57**:2, 11—18 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-2.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

О. О. Белова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
olgaobelova@mail.ru
SPIN-код: 8664-1683, AuthorID: 112532
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-3

Объект неабсолютных перенесений для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$

В n-мерном проективном пространстве рассмотрена коконгруэнция $K_{(n-m)m}$. В главном расслоении, ассоциированном с данной коконгруэнцией, строится фундаментально-групповая связность, находится объект кривизны. Произведено композиционное оснащение коконгруэнции $K_{(n-m)m}$. Данное оснащение индуцирует связность в главном расслоении, ассоциированном с $K_{(n-m)m}$. Вводится и исследуется объект неабсолютных перенесений. Доказано, что данный объект является псевдотензором.

Ключевые слова: коконгруэнция, связность, ковариантный дифференциал, объект кривизны, объект неабсолютных перенесений

Теория многомерных плоскостей проективного пространства [1; 27; 28; 34], являющаяся одной из наиболее красивых и интересных областей дифференциальной геометрии, находит применение в интегральной геометрии и теоретической физике.

Дифференциальная геометрия комплексов многомерных плоскостей полностью не изучена, чем обусловлена актуальность представленной работы [9; 10; 12; 16]. При исследовании будем применять метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [14], основанный на инвариантном дифференциально-алгебраическом аппарате структурных дифференциальных

Поступила в редакцию 19.08.2025 г.
© Белова О. О., 2026

форм рассматриваемых расслоений [17; 22; 30; 32; 33]. Фундаментально-групповая связность, которая широко используется для параллельных перенесений [2; 3; 25; 29; 31], задается в главном расслоении на коконгруэнции $K_{(n-m)m}$. Показано, что объект кривизны данной связности является псевдотензором. При осуществлении композиционного оснащения коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ индуцируется связность в ассоциированном расслоении. Введен ковариантный дифференциал оснащающего квазитензора и получен объект неабсолютных перенесений, который оказался псевдотензором, то есть его обращение в нуль инвариантно.

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную плоскость L_m $(1 \leq m < n)$. При специализации подвижного репера $\{A, A_i\}$, $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n$, с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i,\ dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A$$

путем помещения вершин A, A_a на плоскость L_m уравнения стационарности данной плоскости имеют вид $\omega^\alpha = 0$ и $\omega_a^\alpha = 0$. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения

$$a, b, c, \ldots = 1, \ldots, m;\quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n.$$

Рассмотрим коконгруэнцию $K_{(n-m)m}$ m-мерных плоскостей L_m (см.: [5—7]). Принимаем формы ω_a^α за базисные, тогда уравнения $K_{(n-m)m}$ (ср.: [11; 13]) имеют вид

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta. \qquad (1)$$

Замечание. Комплекс K_r m-мерных плоскостей — это r-мерное подмногообразие грассманова многообразия $Gr(m, n)$ m-мерных плоскостей проективного пространства P_n, где $\dim r < (m+1)(n-m)$. В данной статье будем использовать терминологию В. И. Близникаса, который дал классификацию подмногообразий многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ (см.: [8]) и назвал комплекс $K_{(n-m)m}$ коконгруэнцией m-мерных плоскостей.

Используя структурные уравнения

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

$$D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j,$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i$$

проективной группы $GP(n)$, действующей в пространстве P_n, находим дифференциалы базисных форм ω_a^α:

$$D\omega_a^\alpha = (\delta_\beta^\alpha \omega_a^b - \delta_a^b \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\beta^{\alpha b}\omega_a) \wedge \omega_b^\beta. \qquad (2)$$

При продолжении системы (1) получим дифференциальные уравнения на компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\beta^{\alpha a}\}$

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\gamma^{\alpha b}\Lambda_\beta^{\gamma a}\omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a = \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a b}\omega_b^\gamma,$$

причем $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a b} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha b a}$, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом (см., напр., [24]):

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} = d\Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\beta^{\gamma a}\omega_\gamma^\alpha + \Lambda_\beta^{\alpha b}\omega_b^a - \Lambda_\gamma^{\alpha a}\omega_\beta^\gamma.$$

С коконгруэнцией $K_{(n-m)m}$ ассоциируется главное расслоение $G_s(K)$ со структурными уравнениями (2) и уравнениями

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + (\delta_b^a \omega_c + \delta_c^a \omega_b) \wedge \omega^c + (\delta_b^a \Lambda_\alpha^{\beta c}\omega_\beta -$$

$$- \delta_\alpha^\beta \delta_b^c \omega_\beta^a) \wedge \omega_c^\alpha,$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a - \Lambda_\beta^{\alpha b}\omega_\alpha^a \wedge \omega_b^\beta,$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega_\alpha \wedge \omega_a^\alpha;$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \omega_a \wedge \omega^a + (\Lambda_\gamma^{\alpha a}\omega_\beta + \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{\mu a}\omega_\mu +$$

$$+ \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a) \wedge \omega_a^\gamma;$$

$$D\omega_\alpha^a = (\delta_b^a \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \omega_b^a) \wedge \omega_\beta^b + \omega_\alpha \wedge \omega^a;$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta.$$

Базой главного расслоения $G_s(K)$ является коконгруэнция $K_{(n-m)m}$, а типовым слоем — s-членная подгруппа G_s стационарности плоскости L_m, причем

$$s = n(n+1) - m(n-m-1).$$

На коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ способом Лаптева — Лумисте (см., напр., [18; 23]) задается связность при помощи следующих преобразований слоевых форм:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^{ac}\omega_c^\alpha, \quad \widetilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_\alpha^{ab}\omega_b^\alpha, \\ \widetilde{\omega}_\alpha^a &= \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b^\beta, \quad \widetilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a^\gamma, \\ \widetilde{\omega}_a &= \omega_a - \Gamma_{a\alpha}^b\omega_b^\alpha, \quad \widetilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^a\omega_a^\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Связность в главном расслоении задается с помощью поля объекта групповой связности $\Gamma = \{\Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_\alpha^{ab}, \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{a\alpha}^b, \Gamma_{\alpha\beta}^a\}$ на базе $K_{(n-m)m}$. Компоненты объекта Γ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} \Delta\Gamma_{b\alpha}^{ac} + \left(\Gamma_{b\beta}^{ae}\Lambda_\alpha^{\beta c} - \delta_b^a\Gamma_\alpha^{ec} - \delta_b^e\Gamma_\alpha^{ac}\right)\omega_e - \delta_b^a\Lambda_\alpha^{\beta c}\omega_\beta + \delta_b^c\omega_\alpha^a + \\ + (\delta_b^a\Gamma_{e\alpha}^c + \delta_e^a\Gamma_{b\alpha}^c)\omega^e = \Gamma_{b\alpha\beta}^{ace}\omega_e^\beta, \\ \Delta\Gamma_\alpha^{ab} + \Gamma_\beta^{ac}\Lambda_\alpha^{\beta b}\omega_c + \Lambda_\alpha^{\beta b}\omega_\beta^a - \Gamma_{e\alpha}^{ab}\omega^e = \Gamma_{\alpha\beta}^{abc}\omega_c^\beta, \\ \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{ac}\Lambda_\beta^{\gamma b}\omega_c - \Gamma_\beta^{ab}\omega_\alpha + \left(\delta_c^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma\Gamma_{c\beta}^{ab}\right)\omega_\gamma^c + \\ + \Gamma_{\alpha\beta}^b\omega^a = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{abc}\omega_c^\gamma, \\ \Delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + \left(\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha b}\Lambda_\gamma^{\mu a} - \delta_\beta^\alpha\Gamma_\gamma^{ba}\right)\omega_b - \left(\delta_\beta^\mu\Lambda_\gamma^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha\Lambda_\gamma^{\mu a}\right)\omega_\mu - \\ - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^a + \delta_\beta^\alpha\Gamma_{b\gamma}^a\omega^b = \Gamma_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab}\omega_b^\mu, \\ \Delta\Gamma_{a\alpha}^b + \left(\Gamma_{a\alpha}^{cb} + \Gamma_{a\beta}^c\Lambda_\alpha^{\beta b}\right)\omega_c + \delta_a^b\omega_\alpha = \Gamma_{a\alpha\beta}^{bc}\omega_c^\beta, \\ \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a + \left(\Gamma_{\alpha\gamma}^b\Lambda_\beta^{\gamma a} + \Gamma_{\alpha\beta}^{ba}\right)\omega_b + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma - \Gamma_{b\beta}^a\omega_\alpha^b = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\omega_b^\gamma. \end{gathered} \tag{4}$$

Учитывая во внешних дифференциалах форм связности (3) дифференциальные уравнения (4) компонент объекта фунда-

ментально-групповой связности Γ, перепишем структурные уравнения в виде

$$D\widetilde{\omega}_b^a = \widetilde{\omega}_b^c \wedge \widetilde{\omega}_c^a + (\delta_b^a \widetilde{\omega}_c + \delta_c^a \widetilde{\omega}_b) \wedge \widetilde{\omega}^c + R_{b\alpha\beta}^{ace} \omega_c^\alpha \wedge \omega_e^\beta,$$

$$D\widetilde{\omega}^a = \widetilde{\omega}^b \wedge \widetilde{\omega}_b^a + R_{\alpha\beta}^{abc} \omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta,$$

$$D\widetilde{\omega}_\alpha^a = \widetilde{\omega}_\alpha^b \wedge \widetilde{\omega}_b^a + \widetilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \widetilde{\omega}_\beta^a + \widetilde{\omega}_\alpha \wedge \widetilde{\omega}^a + R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma,$$

$$D\widetilde{\omega}_\beta^\alpha = \widetilde{\omega}_\beta^\gamma \wedge \widetilde{\omega}_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \widetilde{\omega}_a \wedge \widetilde{\omega}^a + R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} \omega_a^\gamma \wedge \omega_b^\mu,$$

$$D\widetilde{\omega}_a = \widetilde{\omega}_a^b \wedge \widetilde{\omega}_b + R_{a\alpha\beta}^{bc} \omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta,$$

$$D\widetilde{\omega}_\alpha = \widetilde{\omega}_\alpha^a \wedge \widetilde{\omega}_a + \widetilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \widetilde{\omega}_\beta + R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} \omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma.$$

Компоненты $R_{b\alpha\beta}^{ace}, R_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, R_{\alpha\beta}^{abc}, R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab}, R_{a\alpha\beta}^{bc}, R_{\alpha\beta\gamma}^{ab}$ объекта кривизны R выражаются по формулам

$$R_{b\alpha\beta}^{ace} = \Gamma_b^a[{}_{\alpha\beta}^{ce}] - \Gamma_b^d[{}_\alpha^c \Gamma_{d\beta}^{ae}] - \delta_b^a \Gamma_{d\lfloor\alpha}^{\lceil c} \Gamma_\beta^{de}] - \Gamma_{b\lfloor\alpha}^{\lceil c} \Gamma_\beta^{ae}],$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = \Gamma_\alpha^a[{}_{\beta\gamma}^{bc}] - \Gamma_\alpha^e[{}_\beta^b \Gamma_{e\gamma}^{ac}] - \Gamma_\alpha^\mu[{}_\beta^b \Gamma_{\mu\gamma}^{ac}] - \Gamma_{\alpha\lfloor\beta}^{\lceil b} \Gamma_\gamma^{ac}],$$

$$R_{\alpha\beta}^{abc} = \Gamma_{\lfloor\alpha\beta}^{a\lceil bc}] - \Gamma_{\lfloor\alpha}^{e\lceil b} \Gamma_{e\beta}^{ac}],$$

$$R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} = \Gamma_\beta^\alpha[{}_{\gamma\mu}^{ab}] - \Gamma_\beta^\eta[{}_\gamma^a \Gamma_{\eta\mu}^{\alpha b}] - \delta_\beta^\alpha \Gamma_{c\lfloor\gamma}^{\lceil a} \Gamma_\mu^{cb}],$$

$$R_{a\alpha\beta}^{bc} = \Gamma_{a\lfloor\alpha\beta}^{\lceil bc}] - \Gamma_{a\lfloor\alpha}^{e\lceil b} \Gamma_{e\beta}^{c}],$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = \Gamma_{\alpha\lfloor\beta\gamma}^{\lceil ab} - \Gamma_\alpha^c[{}_\beta^a \Gamma_{c\gamma}^b] - \Gamma_\alpha^\mu[{}_\beta^a \Gamma_{\mu\gamma}^b].$$

Квадратные скобки означают альтернирование по парам индексов, например $\Gamma_{\alpha\lfloor\beta\gamma}^{\lceil ab} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta}^{ba})$.

Продолжая дифференциальные уравнения (4), учитывая сравнения, соответствующие уравнениям для пфаффовых производных фундаментального объекта 1-го порядка, и условие симметрии $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha ab} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha ba}$, находим следующие дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны R по модулю базисных форм ω_a^α:

$$\Delta R^{ace}_{b\alpha\beta} + \left(R^{acd}_{b\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma e}_{\beta} + R^{ade}_{b\gamma\beta}\Lambda^{\gamma c}_{\alpha} - \delta^{a}_{b}R^{dce}_{\alpha\beta} - \delta^{d}_{b}R^{ace}_{\alpha\beta}\right)\omega_d +$$
$$+ (\delta^{a}_{b}R^{ce}_{d\alpha\beta} + \delta^{a}_{d}R^{ce}_{b\alpha\beta})\omega^d \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta} + (R^{abe}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_{\beta} + R^{aec}_{\gamma\beta}\Lambda^{\gamma b}_{\alpha})\omega_e - R^{abc}_{e\alpha\beta}\omega^e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{bc}_{a\alpha\beta} + (R^{ebc}_{a\alpha\beta} + R^{be}_{a\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_{\beta} - R^{ce}_{a\beta\gamma}\Lambda^{\gamma b}_{\alpha})\omega_e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + (R^{abe}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu c}_{\gamma} + R^{aec}_{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu b}_{\beta})\omega_e + R^{bc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^a +$$
$$+ (\delta^{a}_{e}R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma} - \delta^{\mu}_{\alpha}R^{abc}_{e\beta\gamma})\omega^{e}_{\mu} - R^{abc}_{\beta\gamma}\omega_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} + \left(R^{\alpha ac}_{\beta\gamma\eta}\Lambda^{\eta b}_{\mu} + R^{\alpha cb}_{\beta\eta\mu}\Lambda^{\eta a}_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta}R^{cab}_{\gamma\mu}\right)\omega_c +$$
$$+ \delta^{\alpha}_{\beta}R^{ab}_{c\gamma\mu}\omega^c \equiv 0,$$
$$\Delta R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + \left(R^{cab}_{\alpha\beta\gamma} + R^{ac}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu b}_{\gamma} - R^{bc}_{\alpha\gamma\mu}\Lambda^{\mu a}_{\beta}\right)\omega_c - R^{ab}_{c\beta\gamma}\omega^c_\alpha +$$
$$+R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu \equiv 0.$$

Вводя обозначения

$$M^{acde}_{b\alpha\beta} = R^{acd}_{b\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma e}_{\beta} + R^{ade}_{b\gamma\beta}\Lambda^{\gamma c}_{\alpha} - \delta^{a}_{b}R^{dce}_{\alpha\beta},$$
$$M^{ebc}_{a\alpha\beta} = R^{ebc}_{a\alpha\beta} + R^{be}_{a\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_{\beta} - R^{ce}_{a\beta\gamma}\Lambda^{\gamma b}_{\alpha},$$

указанные выше сравнения можно переписать более компактно:

$$\Delta R^{ace}_{b\alpha\beta} + \left(M^{acde}_{b\alpha\beta} - \delta^{d}_{b}R^{ace}_{\alpha\beta}\right)\omega_d + (\delta^{a}_{b}R^{ce}_{d\alpha\beta} + \delta^{a}_{d}R^{ce}_{b\alpha\beta})\omega^d \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta} + (R^{abe}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_{\beta} + R^{aec}_{\gamma\beta}\Lambda^{\gamma b}_{\alpha})\omega_e - R^{abc}_{e\alpha\beta}\omega^e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{bc}_{a\alpha\beta} + M^{ebc}_{a\alpha\beta}\omega_e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + (R^{abe}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu c}_{\gamma} + R^{aec}_{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu b}_{\beta})\omega_e + R^{bc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^a +$$
$$+ (\delta^{a}_{e}R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma} - \delta^{\mu}_{\alpha}R^{abc}_{e\beta\gamma})\omega^{e}_{\mu} - R^{abc}_{\beta\gamma}\omega_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} + M^{\alpha acb}_{\beta\gamma\mu}\omega_c + \delta^{\alpha}_{\beta}R^{ab}_{c\gamma\mu}\omega^c \equiv 0,$$
$$\Delta R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + M^{cab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_c - R^{ab}_{c\beta\gamma}\omega^c_\alpha + R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu \equiv 0.$$

Замечание. Объект кривизны R связности Г на коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ является псевдотензором [20], который содержит два подпсевдотензора: $R_1 = \{R^{abc}_{e\alpha\beta}, R^{abc}_{\alpha\beta}, R^{ab}_{c\alpha\beta}\}$ и $R_2 = \{R_1,\ R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$ (см.: [5]).

Оснащением многообразия называется процесс присоединения к точкам базы некоторых дополнительных геометрических образов в пространстве P_n, которые позволяют естественным образом определить связность в проективном расслоении [15], при этом связность индуцируется данным оснащением. Классические оснащения были рассмотрены в статьях [15; 21]. К таким оснащениям относятся оснащение Картана и нормализация Нордена. Оснащения многообразий плоскостей были описаны в работе [19].

Осуществим композиционное оснащение [22] комплекса $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой плоскости L_m $(n-m-1)$-мерную плоскость C_{n-m-1}, не имеющую общих точек с плоскостью L_m, и точку $C = A + \lambda^a A_a$.

Плоскость C_{n-m-1} зададим совокупностью точек $C_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$. Плоскость C_{n-m-1} — аналог плоскости Э. Картана. Прямая сумма данной плоскости и плоскости L_m дает все проективное пространство P_n, то есть

$$L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n.$$

Точка $C = A + \lambda^a A_a$ принадлежит плоскости L_m и не принадлежит плоскости N_{m-1} — аналогу нормали 2-го рода А. П. Нордена. Прямая сумма данной точки и плоскости N_{m-1} дает плоскость L_m, то есть

$$C \in L_m,\ C \notin N_{m-1},\ C \oplus N_{m-1} = L_m.$$

Находя дифференциалы точек C_α, учитывая в них деривационные формулы и выражения базисных точек плоскости C_{n-m-1} и точки C, сворачивая часть слагаемых при помощи дифференциального оператора Δ и требуя относительной ин-

вариантности оснащающей плоскости C_{n-m-1} и точки C, получим дифференциальные сравнения для компонент оснащающего геометрического объекта $\lambda = \{\lambda^a, \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$ по модулю базисных форм ω^α_a

$$\begin{aligned} &\Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a \equiv 0,\\ &\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha \equiv 0,\\ &\Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Замечание. Оснащающий геометрический объект λ с компонентами $\lambda^a, \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha$ является квазитензором.

Внесем в дифференциальные уравнения

$$\Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a = \lambda^{ab}_\alpha\omega^\alpha_b,$$

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha = \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b,$$

$$\Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a,$$

соответствующие сравнениям (5), формы связности (3), получим выражения ковариантных дифференциалов компонент объекта λ через ковариантные производные

$$\nabla\lambda^a = \nabla^b_\alpha\lambda^a\cdot\omega^\alpha_b, \quad \nabla\lambda^a_\alpha = \nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha\cdot\omega^\beta_b, \quad \nabla\lambda_\alpha = \nabla^a_\beta\lambda_\alpha\cdot\omega^\beta_a,$$

где ковариантные дифференциалы компонент объекта λ относительно связности имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla\lambda^a &= d\lambda^a + \lambda^b\widetilde{\omega}^a_b - \lambda^a\lambda^b\widetilde{\omega}_b + \widetilde{\omega}^a,\\ \nabla\lambda^a_\alpha &= d\lambda^a_\alpha + \lambda^b_\alpha\widetilde{\omega}^a_b - \lambda^a_\beta\widetilde{\omega}^\beta_\alpha + \lambda_\alpha\widetilde{\omega}^a + \widetilde{\omega}^a_\alpha,\\ \nabla\lambda_\alpha &= d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\widetilde{\omega}^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha\widetilde{\omega}_a + \widetilde{\omega}_\alpha, \end{aligned}$$

а ковариантные производные выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \nabla^b_\alpha\lambda^a &= \lambda^{ab}_\alpha - \lambda^c\Gamma^{ab}_{c\alpha} + \lambda^a\lambda^c\Gamma^b_{c\alpha} - \Gamma^{ab}_\alpha,\\ \nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha &= \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^c_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta} + \lambda^a_\gamma\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha\Gamma^{ab}_\beta - \Gamma^{ab}_{\alpha\beta},\\ \nabla^a_\beta\lambda_\alpha &= \lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_\gamma\Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha\Gamma^a_{b\beta} - \Gamma^a_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Находим внешние дифференциалы от ковариантных дифференциалов

$$D\nabla\lambda^a = \nabla\lambda^b \wedge \widetilde{\omega}_b^a - \nabla(\lambda^a\lambda^b) \wedge \widetilde{\omega}_b + T_{\alpha\beta}^{abc}\omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta,$$

$$D\nabla\lambda_\alpha^a = \nabla\lambda_\alpha^b \wedge \widetilde{\omega}_b^a - \nabla\lambda_\beta^a \wedge \widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \nabla\lambda_\alpha \wedge \widetilde{\omega}^a + T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}\omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma,$$

$$D\nabla\lambda_\alpha = -\nabla\lambda_\beta \wedge \widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \nabla\lambda_\alpha^a \wedge \widetilde{\omega}_a + T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma.$$

При внешнем дифференцировании ковариантного дифференциала появляется объект $T = \{T_{\alpha\beta}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$ неабсолютных перенесений (ср.: [26]) с компонентами, зависящими от компонент объекта кривизны групповой связности и композиционно оснащающего квазитензора:

$$T_{\alpha\beta}^{abc} = R_{\alpha\beta}^{abc} + \lambda^e R_{e\alpha\beta}^{abc} - \lambda^a\lambda^e R_{e\alpha\beta}^{bc},$$

$$T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} - \lambda_\mu^a R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu bc} + \lambda_\alpha R_{\beta\gamma}^{abc} + \lambda_\alpha^e R_{e\beta\gamma}^{abc},$$

$$T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} - \lambda_\mu R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu ab} + \lambda_\alpha^c R_{c\beta\gamma}^{ab}.$$

Теорема. Объект $T = \{T_{\alpha\beta}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$ неабсолютных перенесений является псевдотензором, который содержит два подпсевдотензора $T_1 = \{T_{\alpha\beta}^{abc}\}$ и $T_2 = \{T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$.

Доказательство. Находим дифференциальные сравнения компонент объекта T по модулю базисных форм ω_a^α:

$$\Delta T_{\alpha\beta}^{abc} + (T_{\alpha\gamma}^{abe}\Lambda_\beta^{\gamma c} + T_{\gamma\beta}^{aec}\Lambda_\alpha^{\gamma b} - \lambda^e T_{\alpha\beta}^{abc} - \lambda^a T_{\alpha\beta}^{ebc})\omega_e \equiv 0,$$

$$\Delta T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} + (T_{\alpha\beta\mu}^{abe}\Lambda_\gamma^{\mu c} + T_{\alpha\mu\gamma}^{aec}\Lambda_\beta^{\mu b})\omega_e + T_{\alpha\beta\gamma}^{bc}\omega^a \equiv 0, \qquad (6)$$

$$\Delta T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} + (T_{\alpha\beta\gamma}^{cab} + T_{\alpha\beta\mu}^{ac}\Lambda_\gamma^{\mu b} + T_{\alpha\mu\gamma}^{cb}\Lambda_\beta^{\mu a})\omega_c \equiv 0.$$

Мы видим, что в дифференциальные сравнения (6) помимо самих компонент объекта T входят компоненты фундаментального объекта 1-го порядка Λ и оснащающего квазитензора λ. Таким образом, T является псевдотензором, его обращение в нуль инвариантно. Другими словами, равенства $T_{\alpha\beta}^{abc} = 0$, $T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = 0$, $T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = 0$ инвариантны в совокупности. В этом слу-

чае дифференциальные уравнения $\nabla\lambda_\alpha^a = 0$, $\nabla\lambda_\alpha = 0$ вполне интегрируемы и задают абсолютные параллельные перенесения аналога плоскости Картана (ср.: [31]), а уравнения $\nabla\lambda^a = 0$ вполне интегрируемы и задают абсолютные перенесения точки C.

Замечание. При исследовании грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей [27] были получены выражения компонент объекта кривизны, которые зависели от компонент фундаментального объекта 1-го порядка Λ. В дифференциальных сравнениях компонент объекта R объект Λ не входил, а для обобщенного случая в дифференциальных сравнениях присутствовали компоненты виртуального тензора (см.: [4]).

Список литературы

1. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // ДГМФ. 2000. Вып. 31. С. 8—11.

2. *Белова О. О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей центрированного многообразия Грассмана // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 10—13.

3. *Белова О. О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей // ДГМФ. 2008. Вып. 39. С. 13—18.

4. *Белова О. О.* Тензор кривизны связности в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // ДГМФ. 2009. Вып. 40. С. 18—28.

5. *Белова О. О.* Дифференциальная геометрия *(n-m)m*-комплексов в *n*-мерном проективном пространстве // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 17—27.

6. *Белова О. О.* Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 39—48.

7. *Белова О. О.* Параллельные перенесения в связностях трех типов для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2024. №54 (2). С. 57—69.

8. *Близникас В. И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 43—111.

9. *Бубякин И. В.* О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 с единственным торсом // Матем. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, №2. С. 3—12.

10. *Бубякин И.В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащих конечное число торсов // Матем. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, №4. С. 3—16.

11. *Жовтенко О.М.* Роль оснащения Бортолотти конгруэнции плоскостей // ДГМФ. 2000. Вып. 31. С. 31—36.

12. *Коннов В.В.* Об одном условии редуцируемости главных расслоений и его применении в проективной геометрии подмногообразий // Фундамент. и прикл. матем. 2001. Т. 7, №4. С. 1003—1035.

13. *Кулешов А.В.* Обобщенные связности на комплексе центрированных плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. 2010. Вып. 41. С. 75—85.

14. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. М., 1953. Вып. 2. С. 275—382.

15. *Лумисте Ю.Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Тр. по математике и механике. Учен. зап. Тартуского гос. ун-та. 1965. Вып. 177. С. 6—41.

16. *Никитина Е.С.*, *Бубякин И.В.* К геометрии многообразия Сегре *S(m, n)* // Матем. заметки СВФУ. 2004. С. 57—62.

17. *Полякова К.В.* Обобщение деривационных формул проективного пространства // ДГМФ. 2009. Вып. 40. С. 109—117.

18. *Полякова К.В.*, *Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

19. *Шевченко Ю.И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. 1978. Вып. 9. С. 124—133.

20. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

21. *Шевченко Ю.И.* Оснащения подмногообразий голономного и неголономного центропроективных многообразий // ДГМФ. 1997. Вып. 28. С. 86—98.

22. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

23. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 185—193.

24. *Akivis M.A.*, *Goldberg V.V.* Projective differential geometry of submanifolds // North-Holland Mathematical Library. 1992. Vol. 49.

25. *Belova O. O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. (New York). 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632 (пер. см.: Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 29—67).

26. *Belova O. O.* Tensor of nonabsolute displacements on Grassman-like manifold of centered planes // J. Math. Sci. (New York). 2011. Vol. 177, №5. P. 647—648 (пер. см.: Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, вып. 2. С. 3—5).

27. *Belova O. O.* The Grassmann-like manifold of centered planes // Math. Notes. 2018. Vol. 104, №6, P. 789—798 (пер. см.: Матем. заметки. 2018. Т. 104, вып. 6. С. 812—822).

28. *Belova O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Mathematics MDPI. 2021. Vol. 9, №7. Art. №782. https://doi.org/10.3390/math9070782.

29. *Mikeš J.*, *Stepanova E.*, *Vanžurova A. et al.* Differential geometry of special mappings. Olomouc, 2015.

30. *Polyakova K. V.* Connections in the bundles associated with the manifold of pairs of tangent and contact planes of a surface // Tr. Geom. Sem. Kazan Math. Soc. 1997. Vol. 23. P. 99—112.

31. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. (New York). 2009. Vol. 162, №5. P. 675—709 (пер. см.: Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 129—177).

32. *Polyakova K. V.* Second-order tangent-valued forms // Math. Notes. 2019. Vol. 105, №1. P. 71—79 (пер. см.: Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 1. С. 84—94).

33. *Polyakova K. V.* Prolongations generated by horizontal vectors // J. Geom. 2019. Vol. 110. Art. №53. https://doi.org/10.1007/s00022-019-0510-2.

34. *Shevchenko Y. I.* Degeneration of plane affine Stolyarov connections // J. Math. Sci. (New York). 2011. Vol. 177, №5. P. 753—757 (пер. см.: Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, вып. 2. С. 155—161).

Для цитирования: *Белова О. О.* Объект неабсолютных перенесений для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2026. №57 (2). С. 19—34. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-3.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53A20, 53B15

O. O. Belova
Immanuel Kant Baltic Federal Univetsity, Russia
14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-3

Non-absolute transfer object for cocongruence $K_{(n-m)m}$

Submitted on August 19, 2025

In the present paper, we use the method of prolongations and coverages of G. F. Laptev with assignment of connections in the principal bundle.

In the n-dimensional projective space, the cocongruence $K_{(n-m)m}$ is considered. It has the following equations

$$\omega^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha a}\omega_{a}^{\beta}.$$

In the principal bundle associated with this cocongruence, a fundamental-group connection is constructed.

The compositional clothing of the cocongruence $K_{(n-m)m}$ is produced. It is given by $(n-m-1)$-planes C_{n-m-1}:

$$L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$$

and the point $C = A + \lambda^a A_a$.

This clothing induces a connection in the principal bundle associated with $K_{(n-m)m}$.

Expressions for the components of a curvature object, which is a pseudo-tensor, are found.

The object of non-absolute translations is introduced and investigated. It is proved that this object is a pseudo-tensor. In other words, the equalities

$$T_{\alpha\beta}^{abc} = 0, T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = 0, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = 0$$

are invariant in total. In this case, the differential equations

$$\nabla\lambda_{\alpha}^{a} = 0, \nabla\lambda_{\alpha} = 0$$

are completely integrable and define absolute parallel displacements of the Cartan plane analog, and the equations

$$\nabla\lambda^a = 0$$

are completely integrable and define absolute parallel displacements of the point C.

In the author's previous studies of the Grassmann-like manifold of centered planes, expressions were obtained for the components of the curvature object which depended on the components of the fundamental object of the 1st order. In the differential comparisons for the components of the object *R*, the object Λ was not included, and for the generalized case, the components of the virtual tensor were present in the differential comparisons.

Keywords: cocongruence, connection, covariant differential, curvature object, object of non-absolute translations

References

1. *Belova, O. O.:* A connection in fibering associated with the Grassmann manifold. DGMF, 31, 8—11 (2000).

2. *Belova, O. O.:* The geometrical characteristic of induced connections of centered Grassmann manifold. DGMF, 37, 10—13 (2006).

3. *Belova, O. O.:* The geometrical characteristic for induced connections of Grassmann-like manifold of centered planes. DGMF, 39, 13—18 (2008).

4. *Belova, O. O.:* The curvature tensor of connection in the fibering over Grassmann-like manifold of centered planes. DGMF, 40, 18—28 (2009).

5. *Belova, O. O.:* Differential geometry of *(n-m)m*-dimensional complexes in *n*-dimensional projective space. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 220, 17—27 (2023).

6. *Belova, O. O.:* The deformation pseudotensor of connections in cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54(1), 39—48 (2023).

7. *Belova, O. O.:* Parallel transports in the connections of three types for cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54(2), 57—69 (2024).

8. *Bliznikas, V. I.:* Certain questions on the geometry of hypercomplexes of lines. Trudy Geometricheskogo Seminara, 6, 43—111 (1974).

9. *Bubyakin, I.V.:* About the structure of five-dimensional complexes of two-dimensional planes in projective space P^5 with a single developable surface. Math. Notes of NEFU, **24**:2, 3—12 (2017).

10. *Bubyakin, I.V.:* Anout the structure of complees of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surface. Math. Notes of NEFU, **24**:4, 3—16 (2017).

11. *Zhovtenko, O.M.*: The role of Bortollotti's equipment of the congruence of planes. DGMF, 31, 31—36 (2000).

12. *Konnov, V.V.:* On one condition of reducibility of principal bundles and its applicaton in projective geometry of submanifolds. Fund. i Prikl. Math., **7**:4, 1003—1035 (2001).

13. *Kuleshov, A.V.:* Generalized connections on the complex of centered planes in projective space. DGMF, 41, 75—85 (2010).

14. *Laptev, G.F.:* Differential geometry of immersed manifolds. Group-theoretical method of differential-geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., Moscow, 2, 275—382 (1953).

15. *Lumiste, Yu.G.:* Induced connections in immersed projactive and affine bundles. Transactions on Math. and Mech. Scientific Notes of Tartu University, 177, 6—41 (1965).

16. *Nikitina, E.S., Bubyakin, I.V.:* On the geometry of the Segre manifols *S(m, n)*. Math. Notes of NEFU. P. 57—62 (2004).

17. *Polyakova, K.V.:* Generalization for derivation formulas of projective space. DGMF, 40, 109—117 (2009).

18. *Polyakova, K.V.*, *Shevchenko, Yu.I.:* Laptev — Lumiste's method of giving connection and geometrical vectors. DGMF, 43, 114—121 (2012).

19. *Shevchenko, Yu.I.:* On the equipment of manifolds of planes in projective space. DGMF, 9, 124—133 (1978).

20. *Shevchenko, Yu.I.:* Equipment of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad, 1998.

21. *Shevchenko, Yu.I.:* Equipment of submanifolds of holonomic and non-holonomic center-projective manifolds. DGMF, 28, 86—98 (1997).

22. *Shevchenko, Yu.I.:* Equipment of centroprojective manifolds. Kaliningrad, 2000.

23. *Shevchenko, Yu.I.:* Laptev's and Lumiste's ways of connection representation in the principal fibre bundle. DGMF, 37, 185—193 (2006).

24. *Akivis, M.A.*, *Goldberg, V.V.:* Projective differential geometry of submanifolds. North-Holland Mathematical Library, 49 (1992).

25. *Belova, O. O.:* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci. (New York), **162**:5, 605—632 (2009).

26. *Belova, O. O.:* Tensor of nonabsolute displacements on Grassman-like manifold of centered planes. J. Math. Sci. (New York), **177**:5, 647—648 (2011).

27. *Belova, O. O.:* The Grassmann-like manifold of centered planes. Math. Notes, **104**:6, 789—798 (2018).

28. *Belova, O.:* Generalized affine connections associated with the space of centered planes. Mathematics MDPI, **9**:7, 782 (2021), https://doi.org/10.3390/math9070782.

29. *Mikeš, J.*, *Stepanova, E.*, *Vanžurova, A., et al.:* Differential geometry of special mappings. Olomouc, 2015.

30. *Polyakova, K. V.:* Connections in the bundles associated with the manifold of pairs of tangent and contact planes of a surface. Tr. Geom. Sem. Kazan Math. Soc., 23, 99—112 (1997).

31. *Polyakova, K. V.:* Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci. (New York), **162**:5, 675—709 (2009).

32. *Polyakova, K. V.:* Second-order tangent-valued forms. Math. Notes, **105**:1, 71—79 (2019).

33. *Polyakova, K. V.:* Prolongations generated by horizontal vectors. J. Geom., 110, 53 (2019), https://doi.org/10.1007/s00022-019-0510-2.

34. *Shevchenko, Y. I.:* Degeneration of plane affine Stolyarov connections. J. Math. Sci. (New York), **177**:5, 753—757 (2011).

For citation: Belova, O. O.: Non-absolute transfer object for cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, **57**:2, 19—34 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-3.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2020: 53C21, 53C50

B. Kırık Rácz
Department of Mathematics, Marmara University
Göztepe Campus 34722, İstanbul, Türkiye
bahar.kirik@marmara.edu.tr
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-4

Some remarks on 2-Killing vector fields

The aim of this paper is to comment on 2-Killing vector fields which are an extension of Killing vector fields. Some algebraic structures of these vector fields are studied and various comparisons are made with Killing vector fields which are fundamental in the study of symmetries. A number of evaluations are conducted and several remarks are issued related to these vector fields. The existence of 2-Killing vector fields on specific 4-dimensional manifolds is investigated and some examples are constructed in this manner. More specifically, vector fields that are 2-Killing but not Killing are established. Furthermore, it is proven that the set of 2-Killing vector fields does not satisfy some basic properties, such as forming a vector space or a Lie algebra and curvature collineation.

Keywords: 2-Killing vector field, Killing vector field, Lie algebra, 4-dimensional manifolds

1. Introduction

The notion of symmetry is an essential concept both in differential geometry and physics, being a transformation under which certain geometric or physical properties unchanged. In other words, a symmetry of a geometric structure on a (smooth) Riemannian or semi-Riemannian manifold is a diffeomorphism preserving some geometric data. Such a transformation is usually expressed by us-

Submitted on May 15, 2026
© Kırık Rácz B., 2026

ing Lie derivatives, and we often attempt to understand a symmetry through infinitesimally transformations. These infinitesimal transformations are defined by vector fields on a manifold, some of the well-known ones being affine, conformal, Killing, homothetic and projective vector fields (see, e. g., [9; 10]). Among these, Killing vector fields are very important in terms of reflecting the symmetry of the metric. Given a smooth manifold M with a metric g, a Killing vector field, say V, is a smooth vector field leading to a transformation that leaves g unchanged, and which satisfies the condition $\mathcal{L}_V g = 0$, where $\mathcal{L}_V$ represents the Lie derivative along V. To put it another way, one has $\varphi_t^*(g) = g$ for the pullback φ_t^* of any local diffeomorphism φ_t arising from V. Notably, the collection of all such vector fields is a Lie algebra, referred to as the *Killing algebra*, equipped with commutator [,], of finite dimension, indicated by $\mathcal{K}(M)$. For $V \in \mathcal{K}(M)$, the following Killing equations are satisfied:

$$\nabla_j V_i + \nabla_i V_j = 0 \ \left(\Leftrightarrow \nabla_j V_i = F_{ij} = -F_{ji}\right),$$
$$\nabla_k \nabla_j V^i = \nabla_k F^i{}_j = \mathcal{R}^i{}_{jkl} V^l, \qquad (1)$$

where V^i and $\mathcal{R}^i{}_{jkl}$ are the components of V and the Riemann tensor, respectively. Furthermore, the 2-form F in (1) is called the *Killing bivector* of V with components $F_{ij} = -F_{ji}$. For a smooth manifold M of dimension n, note that

$$\dim\mathcal{K}(M) \leq \frac{1}{2} n(n+1)$$

(for details, see, e. g., [9; 12]).

The concept of *2-Killing vector fields* is inspired by, and emerges as a generalization of, Killing vector fields which are significant both mathematically and physically (see [13]). A 2-Killing vector field on M is a vector field V satisfying

$$\mathcal{L}_V \mathcal{L}_V g = 0, \qquad (2)$$

that is, the second Lie derivative of g in the direction of V vanishes. Each $V \in \mathcal{K}(M)$ is necessarily a 2-Killing vector field, but the

converse does not hold in general and for which counter examples are provided in Section 3. Recently, there has been growing interest in 2-Killing vector fields; among these, studies concerning warped, doubly warped, multiply warped product manifolds and multiply twisted product space-times can be found respectively in [14], [1], [3] and [2]. Additionally, more recent papers have analyzed these vector fields in almost contact metric structures [4; 8], hyperbolic Yamabe solitons [5], Poisson doubly warped product manifolds [6], and sequential doubly warped products [7].

As outlined above, while 2-Killing vector fields have been studied with rising curiosity in prior research, some of their essential properties do not seem to have been presented explicitly. This paper attempts to make these main features more precise and to highlight the algebraic differences between Killing and 2-Killing vector fields. These points are supported by illustrative examples. Within this framework, Section 2 provides a comparison between Killing and 2-Killing vector fields. Demonstrations of these discussions are presented in Section 3.

2. Some comparisons of Killing and 2-Killing vector fields

Building on the discussion of Section 1, the algebraic structure of 2-Killing vector fields will now be discussed in more detail. Let $\mathcal{K}'(M)$ denote the set of 2-Killing vector fields. For $V \in \mathcal{K}'(M)$, the local expression of (2) is written as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \mathcal{L}_V g = \mathcal{L}_V\big(\nabla_j V_i + \nabla_i V_j\big) = \\ = V^k \nabla_k\big(\nabla_j V_i + \nabla_i V_j\big) + \big(\nabla_i V^k\big)\big(\nabla_k V_j + \nabla_j V_k\big) + \\ + \big(\nabla_j V^k\big)(\nabla_k V_i + \nabla_i V_k) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

where ∇ is the Levi-Civita connection of g. Clearly, a member of $\mathcal{K}(M)$ satisfies the equation (3), whereas Killing equations given by (1) do not necessarily apply to a member of $\mathcal{K}'(M)$. Accordingly, the following remarks are also worth mentioning:

Remark 1. $\mathcal{K}'(M)$ generally does not constitute a vector space. For example, $\mathcal{K}'(M)$ is not closed under addition. In a clearer way, let V and W be members of $\mathcal{K}'(M)$. By using (2), one has

$$\mathcal{L}_{V+W}\left(\mathcal{L}_{(V+W)}g\right) =$$
$$= \mathcal{L}_V\mathcal{L}_V g + \mathcal{L}_V\mathcal{L}_W g + \mathcal{L}_W\mathcal{L}_V g + \mathcal{L}_W\mathcal{L}_W g =$$
$$= \mathcal{L}_V\mathcal{L}_W g + \mathcal{L}_W\mathcal{L}_V g. \qquad (4)$$

It is evident that Eq. (4) does not have to equal zero and the anticipated result is obtained. Even if one of them were an element of $\mathcal{K}(M)$, it would not be sufficient to satisfy the requirement (see Section 3).

Remark 2. Once again, it is important to note that $\mathcal{K}(M)$ is a Lie algebra. For $V, W \in \mathcal{K}(M)$, one has $\mathcal{L}_{[V,W]}g = 0$, and so $[V, W] \in \mathcal{K}(M)$. But, $\mathcal{K}'(M)$ generally fails to produce a Lie algebra structure since it is not a vector space. In this respect, $\mathcal{K}'(M)$ differs significantly from $\mathcal{K}(M)$.

Remark 3. While Killing symmetries preserve the Riemann tensor, denoted by $\mathcal{R}$, members of $\mathcal{K}'(M)$ often do not. As is well known, if $V \in \mathcal{K}(M)$, it is a curvature collineation, i. e., $\mathcal{L}_V\mathcal{R} = 0$. However, this is not valid for a member of $\mathcal{K}'(M)$ as demonstrated by a counterexample in Section 3.

Remarks 1—3 imply that although $\mathcal{K}(M)$ and $\mathcal{K}'(M)$ are defined by similar geometric objects and tools, they are in fact algebraically different. Thus, in these aspects, 2-Killing vector fields are distinct from well-known symmetries such as affine vector fields and their subclasses.

3. Existence of 2-Killing vector fields on some special space-times

Here, we provide illustrative examples to clarify the remarks made in Section 2. Some of the calculations were performed using Maple software.

Example 1. On $M = \mathbb{R}^4$ with coordinates (u, v, x, y), take the metric via the line element

$$ds^2 = y(u^2 + x^2)du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2, \qquad (5)$$

where $y > 0$. When the coefficient of du^2 in (5) is generally a smooth function such as $H(u, x, y)$, then (M, g) represents a *pp-wave space-time*, a significant concept in general relativity (see, e. g., [9; 15]). The metric (5) admits precisely one (independent) Killing vector field $l \coloneqq \frac{\partial}{\partial v}$, and so $\dim\mathcal{K}(M) = 1$. Define a vector field $V = y\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}$ on M. In this case, one gets

$$\mathcal{L}_V g = (u^2 + x^2)dudu + dudy + dydu. \qquad (6)$$

Clearly, $\mathcal{L}_V g \neq 0$, and so $V \notin \mathcal{K}(M)$. However, by taking the Lie derivative of (6) with respect to V once again, we get $\mathcal{L}_V\mathcal{L}_V g = 0$, which proves that V is a 2-Killing vector field on M.

On the other hand, the components of $\mathcal{R}$ that are non-zero are calculated by

$$\mathcal{R}^v_{xuy} = \mathcal{R}^x_{uyu} = \mathcal{R}^y_{uxu} = \mathcal{R}^v_{yux} = -\mathcal{R}^v_{yxu} = -\mathcal{R}^v_{xyu} =$$
$$= -\mathcal{R}^y_{uux} = -\mathcal{R}^x_{uuy} = -x,$$
$$\mathcal{R}^v_{xux} = \mathcal{R}^x_{uxu} = -\mathcal{R}^v_{xxu} = -\mathcal{R}^x_{uux} = -y,$$

which yield

$$(\mathcal{L}_V\mathcal{R})^v_{xux} = (\mathcal{L}_V\mathcal{R})^x_{uxu} = -(\mathcal{L}_V\mathcal{R})^v_{xxu} = -(\mathcal{L}_V\mathcal{R})^x_{uux} = -1,$$
$$(\mathcal{L}_V\mathcal{R})^v_{uux} = -(\mathcal{L}_V\mathcal{R})^v_{uxu} = -x$$

meaning that $\mathcal{L}_V\mathcal{R} \neq 0$, and so the situation described in the Remark 3 occurs here.

On top of that, if we define vector fields $U \coloneqq xy\frac{\partial}{\partial v}$ and $W \coloneqq \frac{\partial}{\partial y}$, it turns out that

$$\mathcal{L}_U g = x(dudy + dydu) + y(dudx + dxdu), \qquad (7)$$

and

$$\mathcal{L}_W g = (u^2 + x^2)dudu. \qquad (8)$$

Taking the Lie derivative once again over U and W respectively in equations (7) and (8), we find

$$\mathcal{L}_U\mathcal{L}_U g = 0 = \mathcal{L}_W\mathcal{L}_W g,$$

which guarantees that both U and W are members of $\mathcal{K}'(M)$. In spite of that, the sum of U and W gives

$$\mathcal{L}_{U+W}g = (u^2 + x^2)dudu + x(dudy + dydu) + \\ + y(dudx + dxdu),$$

and

$$\mathcal{L}_{U+W}\big(\mathcal{L}_{(U+W)}g\big) = dudx + dxdu. \qquad (9)$$

Thus, $U + W \notin \mathcal{K}'(M)$ by equation (9), and this serves as an example of the situation mentioned in Remarks 1 and 2. This leads to the following result:

Theorem 1. *The space-time endowed with the metric (5) contains* 2*-Killing vector fields* $y\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}$, $xy\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ *which are not Killing, and these lead to the conclusion that* $\mathcal{K}'(M)$ *does not form a Lie algebra structure.*

Example 2. Now, let us replace the coefficient of du^2 in the metric (5) by $u(u^2 + x^2)$, where $u > 0$. For this case, $X \coloneqq \\ \coloneqq -y\frac{\partial}{\partial v} + u\frac{\partial}{\partial y}$ is a member of $\mathcal{K}(M)$, i. e., $\mathcal{L}_X g = 0$. Next, consider the vector field $Y \coloneqq y\frac{\partial}{\partial v}$. Then, one gets

$$\mathcal{L}_Y g = dudy + dydu \ \text{ and } \ \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_Y g = 0,$$

which tells us that $Y \in \mathcal{K}'(M)$. Nevertheless, it can be computed that $\mathcal{L}_{X+Y}\big(\mathcal{L}_{(X+Y)}g\big) = 2dudu$, that is, $X + Y \notin \mathcal{K}'(M)$, and hence the argument discussed in Remark 1 is observed here.

Example 3. In local coordinates (u, v, x, y) on $M = \mathbb{R}^4$, consider the metric with the line element

$$ds^2 = (u^2 - v^2)du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2. \qquad (10)$$

Let us begin by establishing that the metric (10) admits a Ricci soliton arising as special solutions to the Ricci flow introduced by R. S. Hamilton [11], which is described by the equation

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_U g + Ric = \lambda g, \tag{11}$$

where λ denotes a constant and Ric is the Ricci tensor. Firstly, for the metric (10), one obtains

$$Ric = -(u^2 - v^2)dudu - 2dudv. \tag{12}$$

Define $U = -x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$. In this case, one gets

$$\mathcal{L}_U g = -2dxdx - 2dydy,$$

which yields together with equation (12)

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_U g + Ric + g = 0. \tag{13}$$

Comparing equations (11) and (13) results that the structure (M, g, U, λ) is a model of an *expanding Ricci soliton* for $\lambda = -1 < 0$ and the potential field U.

Next, let $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$, in which case we obtain

$$\mathcal{L}_V g = (2u - 2v)dudu,$$

and this gives rise to $\mathcal{L}_V \mathcal{L}_V g = 0$. Accordingly, $V \in \mathcal{K}'(M)$ and one can check that the potential field U is orthogonal to V. From these, the following theorem follows:

Theorem 2. *The space-time endowed with the metric (10) is a model of an expanding Ricci soliton for $\lambda = -1 < 0$, having the potential field $U = -x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$. Moreover, it contains a 2-Killing vector field $V = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ which is orthogonal to U.*

Remark 4. Beyond what has been said above, a much more generalized condition for Killing vector fields can also be defined, giving rise to the concept of "n-Killing vector fields". To give an example, let us look at the metric (10) again. We define the vector field W as $u\frac{\partial}{\partial x}$. In this case, we get the following relations:

$$\mathcal{L}_W g = dudx + dxdu, \qquad \mathcal{L}_W \mathcal{L}_W g = 2dudu,$$
$$\mathcal{L}_W \mathcal{L}_W \mathcal{L}_W g = 0. \tag{14}$$

Equations (14) state that W is neither Killing nor 2-Killing. However, it can be considered as a vector field called "3-Killing" since the third order Lie derivative of g with respect to W vanishes.

4. Conclusion

This study investigates several basic properties of 2-Killing vector fields, considered as a generalization of Killing vector fields, and constructs examples of them on 4-dimensional manifolds, particularly on space-times. As can be observed with examples, the set of 2-Killing vector fields (i. e., $\mathcal{K}'(M)$) is algebraically quite different from the set of Killing vector fields (i. e., $\mathcal{K}(M)$), as it cannot even form the much more fundamental vector space structure. Therefore, the author would like to emphasize that 2-Killing vector fields do not reflect as specific and nice symmetry properties as Killing vector fields. Already highlighted, a 2-Killing vector field V does not have to preserve the metric g directly. But, it maintains the rate of change of g along the flow generated by V.

References

1. *Blaga, A. M., Özgür, C.*: Killing and 2-Killing vector fields on doubly warped products. Mathematics, **11**:24, 4983 (2023).

2. *Blaga, A. M.*: Characterizing the 2-Killing vector fields on multiply twisted product spacetimes. Phys. Scr., **99**:9, 095227 (2024).

3. *Blaga, A. M., Özgür, C.*: 2-Killing vector fields on multiply warped product manifolds. Chaos, Solitons and Fractals, 180, 114561 (2024).

4. *Blaga, A. M., Özgür, C.*: On 2-Killing vector fields in almost contact metric geometry. Period. Math. Hung., **90**:1, 22—34 (2025).

5. *Blaga, A. M., Özgür, C.*: Some properties of hyperbolic Yamabe solitons. Phys. Scr., **100**:4, 045230 (2025).

6. *Chen, B.-Y., Choudhary, M. A., Aloui, F., Al-Dayel, I.*: Killing and 2-Killing 1-forms on Poisson doubly warped product manifolds. Mathematics, **14**:2, 301 (2026).

7. *Elsharkawy, A., Elsayied, H. K., Tawfiq, A. M., De, U. C.*: The geometry of 2-Killing vector fields in sequential doubly warped products. Math. Slovaca, **76**:1, 209—224 (2026).

8. *Ghosh, A.*: 2-Killing vector field and its applications on Ricci almost solitons and contact structures. Mediterr. J. Math., **23**:2, 63 (2026).

9. *Hall, G. S.*: Symmetries and Curvature Structure in General Relativity. World Scientific (2004).

10. *Hall, G.*: Four-Dimensional Manifolds and Projective Structure. CRC Press (2023).

11. *Hamilton, R. S.*: Three-manifolds with positive Ricci curvature. J. Differential Geom., **17**:2, 255—306 (1982).

12. *O'Neill, B.*: Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press (1983).

13. *Oprea, T.*: 2-Killing vector fields on Riemannian manifolds. Balkan J. Geom. Appl., **13**:1, 87—92 (2008).

14. *Shenawy, S., Ünal, B.*: 2-Killing vector fields on warped product manifolds. Int. J. Math., **26**:9, 1550065 (2015).

15. *Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., et al.*: Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge University Press (2009).

For citation: Kırık Rácz B.: Some remarks on 2-Killing vector fields. DGMF, **57**:2, 35—45 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-4.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.764

Б. Кирик Рац
Университет Мармара, Стамбул, Турция
bahar.kirik@marmara.edu.tr
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-4

Некоторые замечания о 2-векторных полях Киллинга

Поступила в редакцию 15.05.2026 г.

Цель статьи — прокомментировать 2-киллинговы векторные поля, являющиеся расширением киллинговых векторных полей. Изучаются некоторые алгебраические структуры

этих векторных полей и проводятся различные сравнения с киллинговыми векторными полями, фундаментальными в изучении симметрий. Приведен ряд вычислений, высказано несколько замечаний, касающихся данных векторных полей. Исследовано существование 2-киллинговых векторных полей на конкретных 4-мерных многообразиях, на основе чего построены некоторые примеры, а именно установлены векторные поля, которые являются 2-киллинговыми, но не киллинговыми. Кроме того, доказано, что множество 2-киллинговых векторных полей не удовлетворяет некоторым основным свойствам, таким как образование векторного пространства или алгебры Ли, а также коллинеация кривизны.

Ключевые слова: 2-векторное поле Киллинга, векторное поле Киллинга, алгебра Ли, 4-мерные многообразия

Список литературы

1. *Blaga A. M., Özgür C.* Killing and 2-Killing vector fields on doubly warped products // Mathematics. 2023. Vol. 11, № 24. Art. № 4983.

2. *Blaga A. M.* Characterizing the 2-Killing vector fields on multiply twisted product spacetimes // Physica Scripta. 2024. Vol. 99, № 9. Art. № 095227.

3. *Blaga A. M., Özgür C.* 2-Killing vector fields on multiply warped product manifolds // Chaos, Solitons and Fractals. 2024. Vol. 180. Art. № 114561.

4. *Blaga A. M., Özgür C.* On 2-Killing vector fields in almost contact metric geometry // Periodica Math. Hungarica. 2025. Vol. 90, № 1. P. 22—34.

5. *Blaga A. M., Özgür C.* Some properties of hyperbolic Yamabe solitons // Physica Scripta. 2025. Vol. 100, № 4. Art. № 045230.

6. *Chen B.-Y., Choudhary M. A., Aloui F., Al-Dayel I.* Killing and 2-Killing 1-forms on Poisson doubly warped product manifolds // Mathematics. 2026. Vol. 14, № 2. Art. № 301.

7. *Elsharkawy A., Elsayied H. K., Tawfiq A. M., De U. C.* The geometry of 2-Killing vector fields in sequential doubly warped products // Math. Slovaca. 2026. Vol. 76, № 1. P. 209—224.

8. *Ghosh A.* 2-Killing vector field and its applications on Ricci almost solitons and contact structures // Mediterranean J. Math. 2026. Vol. 23, iss. 2. Art. № 63.

9. *Hall G. S.* Symmetries and Curvature Structure in General Relativity. World Scientific Publ., 2004.

10. *Hall G.* Four-Dimensional Manifolds and Projective Structure. CRC Press, 2023.

11. *Hamilton R. S.* Three-manifolds with positive Ricci curvature // J. Diff. Geom. 1982. Vol. 17, № 2. P. 255—306.

12. *O'Neill B.* Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, 1983.

13. *Oprea T.* 2-Killing vector fields on Riemannian manifolds // Balkan J. Geom. Appl. 2008. Vol. 13, № 1. P. 87—92.

14. *Shenawy S., Ünal B.* 2-Killing vector fields on warped product manifolds // Internat J. Math. 2015. Vol. 26, № 9. Art. № 1550065.

15. *Stephani H., Kramer D., MacCallum M. et al.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge University Press, 2009.

Для цитирования: *Кирик Рац Б.* Некоторые замечания о 2-векторных полях Киллинга // ДГМФ. 2026. № 57 (2). С. 35—45. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-4.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.75

***М. В. Кретов*[1], *Е. М. Кретова*[2]**
[1, 2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*
[1] Kretov1@mail.ru, [2] e.kretova1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-5

Комплексы гиперболических параболоидов без фокальных многообразий

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) гиперболических параболоидов. Рассматривается подкласс ранее изученных комплексов $\widehat{\Gamma\Pi}_3$ гиперболических параболоидов без фокального многообразия. Доказано, что характеристическое многообразие исследуемого многообразия содержится на третьей координатной прямой. Установлено, что концы первых двух координатных векторов и точки первой координатной плоскости описывают трехпараметрические семейства поверхностей, не зависящие от параметра, а конец третьего координатного вектора и точки остальных координатных плоскостей описывают трехпараметрическое семейство поверхностей, зависящее от параметра. Найдены также другие геометрические свойства исследуемого многообразия.

Ключевые слова: аффинное пространство, гиперболический параболоид, комплекс, многообразие, репер, система уравнений Пфаффа, фокальное многообразие, характеристическое многообразие, трехпараметрическое семейство

В работе [1] исследованы комплексы $\widehat{\Gamma\Pi}_3$ гиперболических параболоидов в аффинном пространстве, когда индикатрисы векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ неподвижны, а координатный вектор $\bar{e}_3$ опи-

Поступила в редакцию 22.12.2025 г.
© Кретов М. В., Кретова Е. М., 2026

сывает линии с касательными, параллельными ему в репере $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, который характеризуется следующим образом: A — вершина гиперболического параболоида [2], векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены и лежат в главной плоскости образующего элемента, вектор $\bar{e}_3$ направлен по оси параболоида, конец P вектора $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ лежит на гиперболическом параболоиде. При этом уравнение гиперболического параболоида q согласно [2] имеет вид

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 - x^3 = 0.$$

Примем формы ω^1, ω^2, ω^3 за независимые первичные параметры согласно [1; 3; 4]. Тогда система уравнений Пфаффа многообразия $\widehat{\Gamma\Pi}_3$ имеет вид

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = 0,$$
$$\omega_3^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3,$$

где параметры α, β, γ введены в работе [1].

Определение 1. Комплекс $\widehat{\Gamma\Pi}_3$ гиперболических параболоидов без фокальных многообразий [5] назовем *комплексом* $\Gamma\Pi_0$ *гиперболических параболоидов.*

Теорема 1. *Многообразия* $\Gamma\Pi_0$ *существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.*

Доказательство. Систему уравнений Пфаффа многообразия $\Gamma\Pi_0$ легко найти по аналогии с работами [6—8] в виде

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_1^3 = \omega_3^1 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = 0,$$
$$\omega_3^3 = \gamma\omega^3. \qquad (1)$$

Чистое замыкание [9] системы (1) имеет вид

$$\alpha\gamma \wedge \omega^3 = 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 0, N = Q = 1.$$

Система (1; 2) в инволюции и определяет комплексы гиперболических параболоидов $\Gamma\Pi_0$ с произволом одной функции одного аргумента. Теорема доказана.

Обозначим через A_i концы векторов $\bar{e}_i$, M_i — текущие точки координатных прямых $(A, \bar{e}_i)$, а через M_{3+i} текущие точки соответствующих координатных плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ и $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Из системы уравнений (1) и деривационных формул репера R по аналогии с работами [6—8] находим

$$d\bar{e}_1 = 0,\ d\bar{e}_2 = 0,\ d\bar{e}_3 = \gamma\omega^3\bar{e}_3,$$

$$dA_1 = dA_2 = dM_1 = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 + \omega^3\bar{e}_3, \qquad (3)$$

$$dA_3 = dM_2 = dM_3 = \omega^1\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2 + (1+\gamma)\omega^3\bar{e}_3.$$

Анализируя формулы (3), согласно [9] получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Комплексы* $\Gamma\Pi_0$ *гиперболических параболоидов обладают следующими геометрическими свойствами:*

1) координатные векторы $\bar{e}_1$ *и* $\bar{e}_2$ *постоянны;*

2) координатный вектор $\bar{e}_3$ *описывает линии с касательными, параллельными ему;*

3) концы векторов $\bar{e}_1$ *и* $\bar{e}_2$*, а также точки координатной плоскости* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ *описывают трехпараметрическое семейство поверхностей, не зависящее от параметра* γ;

4) конец вектора $\bar{e}_3$*, а также точки координатных плоскостей* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_3)$ *и* $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ *описывают трехпараметрическое семейство поверхностей, зависящее от параметра* γ.

Для исследуемого комплекса гиперболических параболоидов согласно работам [5; 6] легко найти характеристическое многообразие образующего элемента.

Используя уравнения

$$x^1 = 0,\ x^2 = 0,\ 1 + \gamma x^3 = 0,$$

можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Характеристическое многообразие гиперболического параболоида, описывающего комплекс* $\Gamma\Pi_0$*, состоит из одной точки, лежащей на третьей координатной прямой.*

Список литературы

1. *Кретов М.В.* Комплексы гиперболических параболоидов // ДГМФ. 2018. Вып. 49. С. 107—111.

2. *Комиссарук А.М.* Аффинная геометрия. Минск, 1977.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

5. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в *n*-мерном проективном пространстве // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113—134.

6. *Малаховский В.С.* Краткий курс дифференциальной геометрии. Калининград, 2010.

7. *Кретов М.В.* Об одном комплексе однополостных гиперболоидов // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 77—82.

8. *Кретов М.В.* Дифференцируемое отображение, порожденное комплексами эллиптических параболоидов // ДГМФ. 2020. Вып. 51. С. 76—80.

9. *Малаховский В.С.* Некоторые проблемы дифференциальной геометрии многообразий фигур // ДГМФ. 1974. Вып. 5. С. 64—84.

Для цитирования: *Кретов М.В., Кретова Е.М.* Комплексы гиперболических параболоидов без фокальных многообразий // ДГМФ. 2026. №57 (2). С. 46—51. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-5.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53A15, 58A10

M. V. Kretov[1], *E. M. Kretova*[2]
[1, 2] *Immanuel Kant Baltic Federal Univetsity, Russia*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] Kretov1@mail.ru, [2] e.kretova1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-5

Complexes of hyperbolic paraboloids without focal varieties

Submitted on December 22, 2025

In the three-dimensional affine space, the study of complexes (three-parameter families) of hyperbolic paraboloids continues. A subclass of previously studied complexes of hyperbolic paraboloids without a focal manifold is considered. It is proved that the characteristic manifold of the studied manifold is contained in the third coordinate line. It is found that the ends of the first two coordinate vectors and the points of the first coordinate plane describe three-parameter families of surfaces that do not depend on the parameter, while the end of the third coordinate vector and the points of the remaining coordinate planes describe a three-parameter family of surfaces that depends on the parameterand other geometric properties of the manifold under study.

Keywords: affine space, hyperbolic paraboloid, complex, manifold, reference frame, Pfaff system of equations, focal manifold, characteristic manifold, three-parameter family

References

1. *Kretov, M. V.:* Complexes of Hyperbolic Paraboloids. DGMF, 49, 107—111 (2018).

2. *Komissaruk, A. M.:* Affine geometry. Minsk (1977).

3. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Math. Obs., 2, 275—382 (1953).

4. *Malakhovsky, V.S.:* Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978).

5. *Malakhovsky, V.S., Makhorkin, V.V.:* Differential geometry of varieties of hyperquadrics in n-dimensional projective space. Tr. Geom. Sem. Moscow, 6, 113—134 (1974).

6. *Malakhovsky, V.S.:* A Short Course in Differential Geometry. Kaliningrad (2010).

7. *Kretov, M.V.:* On a Complex of Single-Cavity Hyperboloids. DGMF, 47, 77—82 (2016).

8. *Kretov, M.V.:* Differentiable mapping generated by complexes of elliptic paraboloids. DGMF, 51, 76—80 (2020).

9. *Malakhovsky, V.S.:* Some problems of differential geometry of manifolds of shapes. DGMF, 5, 64—84 (1974).

For citation: Kretov, M.V., Kretova, E.M.: Complexes of hyperbolic paraboloids without focal varieties. DGMF, **57**:2, 46—51 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-5.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.765

***В. А. Кыров*[1], *Д. М. Шинжина*[2]**
[1, 2] Горно-Алтайский государственный университет, Россия
[1] KyrovVA@yandex.ru; [2] dasasin31@gmail.com
[1] SPIN-код: 8220-8157, [1] AuthorID: 12169
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-6

Кривизна псевдогельмгольцевой группы в связности с векторным кручением

При построении классификации геометрий локальной максимальной подвижности на плоскости (феноменологически симметричных геометрий) Г. Г. Михайличенко была найдена геометрия, названная псевдогельмгольцевой. Им вычислена группа движений этой геометрии, которая задается действием трехмерной матричной группы Ли, называемой псевдогельмгольцевой. Ранее были найдены левоинвариантная метрика на этой группе Ли и компоненты связности Леви-Чивиты на псевдогельмгольцевой группе. Так, для задания левоинвариантной метрики в алгебре Ли псевдогельмгольцевой группы в одной из статей первым соавтором было введено евклидово скалярное произведение, в котором базисные векторы этой алгебры ортонормированы.

В данной статье приводятся явные выражения для компонент связности с векторным кручением. Находится тензор кручения. Вычисляются компоненты тензоров кривизны и Риччи, а также скалярная и секционная кривизны. При этом скалярная кривизна может иметь любой знак. Находится условие, при котором тензор Риччи симметричен. Устанавливается, при каких условиях тензоры Риччи в связности Леви-Чивиты и связности с векторным кручением совпадают. Доказывается, что на псевдогельмгольцевой группе в связности с векторным кручением существует площадка неположительной секционной кривизны.

Поступила в редакцию 31.05.2026 г.
© Кыров В. А., Шинжина Д. М., 2026

Ключевые слова: псевдогельмгольцева группа, связность Леви-Чивиты на группе Ли, связность с векторным кручением, кривизна Риччи, секционная кривизна

Г.Г. Михайличенко была найдена геометрия (псевдогельмгольцева), задаваемая функцией пары точек (метрической функцией) на плоскости [1; 2]:

$$f(1,2) = \frac{(y_2 - y_1)^\alpha}{(x_2 - x_1)^\beta},$$

где $1 = (x_1, x_2), 2 = (y_1, y_2)$ — две произвольные точки плоскости, а α и β – произвольные вещественные числа, причем $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \pm\beta$.

Группа движений такой геометрии задается действием псевдогельмгольцевой группы [3]:

$$G := \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базис алгебры Ли этой группы обозначается e_1, e_2, e_3, выполняются коммутационные соотношения

$$[e_1, e_2] = 0, [e_2, e_3] = -\beta e_2, [e_3, e_1] = \alpha e_1.$$

В данной алгебре Ли вводится скалярное произведение, относительно которого этот базис ортонормирован:

$$g(e_{i,} e_k) = \delta_{ik}, i, k = 1, 2,$$

где δ_{ik} — симметричный символ Кронекера. Это скалярное произведение задает на группе Ли левоинвариантную метрику.

Связность Леви-Чивиты в группе Ли G с такой левоинвариантной метрикой имеет вид [2]

$$\nabla^g_{e_1} e_1 = \alpha e_3,\ \nabla^g_{e_1} e_2 = 0,\ \nabla^g_{e_1} e_3 = -\alpha e_1,$$
$$\nabla^g_{e_2} e_1 = 0,\ \nabla^g_{e_2} e_2 = \beta e_3,\ \nabla^g_{e_2} e_3 = -\beta e_2,$$
$$\nabla^g_{e_3} e_1 = 0,\ \nabla^g_{e_3} e_2 = 0,\ \nabla^g_{e_3} e_3 = 0.$$

Связность на группе Ли G с векторным кручением задается формулой (см.: [4; 5])

$$\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} = \nabla^{g}_{X}Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X,$$

где $V = V^1e_1 + V^2e_2 + V^3e_3$ — некоторое фиксированное векторное поле, а $X = X^1e_1 + X^2e_2 + X^3e_3$, $Y = Y^1e_1 + Y^2e_2 + Y^3e_3$ — произвольные векторные поля. В работе [6] вычисляются компоненты этой связности:

$$\nabla_{e_1}e_1 = V^2e_2 + (V^3+\alpha)e_3,\ \ \nabla_{e_1}e_2 = -V^2e_1,$$
$$\nabla_{e_1}e_3 = -(\alpha+V^3)e_1,\ \ \nabla_{e_2}e_1 = -V^1e_2,$$
$$\nabla_{e_2}e_2 = V^1e_1 + (V^3+\beta)e_3,\ \nabla_{e_2}e_3 = -(\beta+V^3)e_2,$$
$$\nabla_{e_3}e_1 = -V^1e_3,\ \nabla_{e_3}e_2 = -V^2e_3,\ \nabla_{e_3}e_3 = V^1e_1 + V^2e_2.$$

Тензор кручения, как известно, определяется формулой [4; 5]

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = g(X,Y)V - g(V,Y)X.$$

Тогда компоненты тензора кручения связности ∇ с векторным кручением следующие:

$$T(e_1,e_1) = V^2e_2 + V^3e_3,\ \ T(e_1,e_2) = -V^2e_1,$$
$$T(e_1,e_3) = -V^3e_1,\ \ T(e_2,e_1) = -V^1e_2,$$
$$T(e_2,e_2) = V^1e_1 + V^3e_3, T(e_2,e_3) = -V^3e_2,$$
$$T(e_3,e_1) = -V^1e_3, T(e_3,e_2) = -V^2e_3,$$
$$T(e_3,e_3) = V^1e_1 + V^2e_2.$$

Далее вычислим компоненты тензора кривизны в группе G, для чего используется формула

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z. \qquad (1)$$

Предложение 1. *Ненулевые компоненты тензора кривизны группы Ли G в связности Леви-Чивиты ∇^g имеют следующий явный вид:*

$$R^g(e_1,e_2)e_2 = \alpha\beta e_1,\ \ R^g(e_1,e_2)e_1 = -\alpha\beta e_2,$$
$$R^g(e_1,e_3)e_1 = -\alpha^2 e_3,\ \ R^g(e_1,e_3)e_3 = \alpha^2 e_1,$$
$$R^g(e_2,e_3)e_2 = -\beta^2 e_3,\ \ R^g(e_2,e_3)e_3 = \beta^2 e_2.$$

Для доказательства применяется формула (1), коммутационные соотношения в алгебре Ли и компоненты связности ∇^g.

Предложение 2. *Ненулевые компоненты тензора кривизны группы Ли G в связности* ∇ *с векторным кручением имеют следующий явный вид:*

$$R(e_1,e_2)e_1 = -(\alpha+V^3)(\beta+V^3)e_2 + V^2(\beta+V^3)e_3,$$
$$R(e_1,e_2)e_2 = (\alpha+V^3)(\beta+V^3)e_1 - V^1(\alpha+V^3)e_3,$$
$$R(e_1,e_2)e_3 = -V^2(\beta+V^3)e_1 + V^1(\alpha+V^3)e_2,$$
$$R(e_1,e_3)e_1 = V^2V^3e_2 - ((V^2)^2+\alpha^2+\alpha V^3)e_3,$$
$$R(e_1,e_3)e_2 = -V^2V^3e_1 + V^1V^2e_3,$$
$$R(e_1,e_3)e_3 = ((V^2)^2+\alpha^2+\alpha V^3)e_1 - V^1V^2e_2,$$
$$R(e_2,e_3)e_1 = -V^1V^3e_2 + V^1V^2e_3,$$
$$R(e_2,e_3)e_2 = V^1V^3e_1 - ((V^1)^2+\beta^2+\beta V^3)e_3,$$
$$R(e_2,e_3)e_3 = -V^1V^2e_1 + ((V^1)^2+\beta^2+\beta V^3)e_2,$$

Доказательство сводится к применению в формуле (1) компонент связности ∇.

Контравариантный тензор кривизны, как известно, задается формулой [5]

$$R(X,Y,Z,T) = g(R(X,Y)Z,T). \qquad (2)$$

Предложение 3. *Компоненты контравариантного тензора кривизны группы Ли G в связности Леви-Чивиты* ∇^g *имеют следующий вид:*

$$R^g(e_1,e_2,e_1,e_2) = -\alpha\beta,$$
$$R^g(e_1,e_3,e_1,e_3) = -\alpha^2,$$
$$R^g(e_2,e_3,e_2,e_3) = -\beta^2.$$

Для доказательства применяется формула (2) и результаты предложения 1.

Аналогичный результат получаем и для связности с векторным кручением.

Предложение 4. *Компоненты контравариантного тензора кривизны группы Ли G в связности* ∇ *с векторным кручением принимают следующий явный вид:*

$$R(e_1,e_2,e_1,e_2) = -R(e_1,e_2,e_2,e_1) = -(\alpha + V^3)(\beta + V^3),$$
$$R(e_1,e_2,e_1,e_3) = -R(e_1,e_2,e_3,e_1) = V^2(\beta + V^3),$$
$$R(e_1,e_2,e_2,e_3) = -R(e_1,e_2,e_3,e_2) = -V^1(\alpha + V^3),$$
$$R(e_1,e_3,e_1,e_3) = -R(e_1,e_3,e_3,e_1) = -((V^2)^2 + \alpha^2 + \alpha V^3),$$
$$R(e_1,e_3,e_2,e_3) = -R(e_1,e_3,e_3,e_2) = V^1V^2,$$
$$R(e_2,e_3,e_1,e_3) = -R(e_2,e_3,e_3,e_1) = V^1V^2,$$
$$R(e_2,e_3,e_2,e_3) = -R(e_2,e_3,e_3,e_2) = -((V^1)^2 + \beta^2 + \beta V^3),$$
$$R(e_2,e_3,e_1,e_2) = -R(e_2,e_3,e_2,e_1) = -V^1V^3,$$
$$R(e_1,e_3,e_2,e_1) = -R(e_1,e_3,e_1,e_2) = -V^2V^3.$$

В дифференциальной геометрии важное место занимает исследование тензора Риччи, который задается формулой

$$r_{ik} = R_{ijks}g^{js}. \qquad (3)$$

Далее приводятся результаты вычисления компонент этого тензора как для связности Леви-Чивиты, так и для связности с векторным кручением. Все подробные вычисления сводятся к применению формулы (3) и результатов предложений 1 и 2.

Предложение 5. *Компоненты тензора Риччи группы Ли G в связности Леви-Чивиты* ∇^g *имеют такой вид:*

$$r_{11}^g = -\alpha^2 - \alpha\beta,\ r_{12}^g = 0,\ r_{13}^g = 0,$$
$$r_{21}^g = 0,\ r_{22}^g = -\alpha\beta - \beta^2,\ r_{23}^g = 0,$$
$$r_{31}^g = 0,\ r_{32}^g = 0,\ r_{33}^g = -\alpha^2 - \beta^2.$$

Предложение 6. *Компоненты тензора Риччи группы Ли G в связности* ∇ *с векторным кручением следующие:*

$$r_{11} = R_{1111} + R_{1212} + R_{1313} =$$
$$= -(V^2)^2 - (\alpha + V^3)(\alpha + \beta + V^3),$$
$$r_{12} = R_{1121} + R_{1222} + R_{1323} = V^1V^2,$$
$$r_{13} = R_{1131} + R_{1232} + R_{1333} = V^1(\alpha + V^3),$$
$$r_{21} = R_{2111} + R_{2212} + R_{2313} = V^1V^2,$$

$$r_{22} = R_{2121} + R_{2222} + R_{2323} =$$
$$= -(V^1)^2 - (\beta + V^3)(\alpha + \beta + V^3),$$
$$r_{23} = R_{2131} + R_{2232} + R_{2333} = V^2(\beta + V^3),$$
$$r_{31} = R_{3111} + R_{3212} + R_{3313} = V^1V^3,$$
$$r_{32} = R_{3121} + R_{3222} + R_{3323} = V^2V^3,$$
$$r_{33} = R_{3131} + R_{3232} + R_{3333} =$$
$$= -((V^2)^2 + \alpha^2 + \alpha V^3) - ((V^1)^2 + \beta^2 + \beta V^3).$$

Найдем условие, при котором тензор Риччи симметричен, то есть $r_{12} = r_{21},\ r_{13} = r_{31},\ r_{23} = r_{32}$. Тогда имеем равенства

$$V^1(\alpha + V^3) = V^1V^3, V^2(\beta + V^3) = V^2V^3.$$

Очевидно, симметрия выполняется тогда и только тогда, когда $V^1 = V^2 = 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Тензор Риччи на группе Ли G в связности* ∇ *с векторным кручением симметричен тогда и только тогда, когда* $V^1 = V^2 = 0$.

Скалярная кривизна в связности Леви-Чивиты вычисляется следующим образом:

$$S^g = r_{ik}^g g^{ik} = -2\alpha^2 - 2\beta^2 - 2\alpha\beta.$$

Скалярная кривизна в связности с векторным кручением:

$$S = r_{ik}g^{ik} = -2(V^1)^2 - 2(V^2)^2 - (\alpha + V^3)(2\alpha + \beta + V^3) -$$
$$- (\beta + V^3)(\alpha + 2\beta + V^3) =$$
$$= -2(V^1)^2 - 2(V^2)^2 - 2(V^3)^2 -$$
$$- 2\alpha^2 - 2\beta^2 - 2\alpha\beta\ - 4(\alpha + \beta\ )V^3.$$

Видно, что знак скалярной кривизны может быть любым. Легко заметить, что при $V^3 = 0$ и $\alpha\beta > 0$ скалярная кривизна строго отрицательна.

Секционная кривизна в направлении линейно независимых векторов X и Y задается формулой [4]

$$K(X,Y) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - (g(X,Y))^2}. \qquad (4)$$

Предложение 7. *Компоненты тензора секционной кривизны группы Ли G в связности Леви-Чивиты ∇^g имеют следующий вид:*

$$K_{12}^g = K^g(e_1, e_2) = -\alpha\beta,$$
$$K_{13}^g = K^g(e_1, e_3) = -\alpha^2,$$
$$K_{23}^g = K^g(e_2, e_3) = -\beta^2.$$

Для вычисления этих компонент применяем результаты предложения 3 в формуле (4).

Несложно заметить, что

$$K_{13}^g + 2K_{12}^g + K_{23}^g = -(\alpha + \beta)^2.$$

Предложение 8. *Компоненты тензора секционной кривизны группы Ли G в связности с векторным кручением ∇ имеют вид:*

$$K_{12} = K(e_1, e_2) = -(\alpha + V^3)(\beta + V^3),$$
$$K_{13} = K(e_1, e_3) = -((V^2)^2 + \alpha^2 + \alpha V^3),$$
$$K_{23} = K(e_2, e_3) = -((V^1)^2 + \beta^2 + \beta V^3).$$

Легко заметить, что

$$K_{13} + 2K_{12} + K_{23} = -(V^1)^2 - (V^2)^2 - 2(V^3)^2 - $$
$$-3(\alpha + \beta)V^3 - (\alpha + \beta)^2.$$

Заметим, что эти результаты можно получить как непосредственно, применяя формулу (4), так и используя другую формулу [4]:

$$K(X, Y) = K^g(X, Y) + g([Y, V], Y) + g([X, V], X) +$$
$$+ \pi^2(X) + \pi^2(Y) - \pi(V),$$

которая верна для произвольных двух линейно независимых ортонормированных векторов X и Y, причем $\pi(X) = g(X, V)$. Очевидно, справедливы равенства

$$\pi(e_1) = V^1, \quad \pi(e_2) = V^2, \quad \pi(e_3) = V^3,$$
$$\pi(V) = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2.$$

Следствие. *Секционные кривизны в связностях Леви-Чивиты и с векторным кручением при* $V \neq 0$ *совпадают тогда и только тогда, когда*

$$V^3 = -\alpha - \beta \neq 0,\ (V^1)^2 = (\alpha+\beta)\beta,\ \ (V^2)^2 = (\alpha+\beta)\alpha,$$

причем $\alpha\beta > 0$.

Теорема 2. На *группе Ли G с заданной выше левоинвариантной римановой метрикой в связности* ∇ *с векторным кручением существует площадка неположительной секционной кривизны.*

Доказательство. Предположим, что для любой площадки секционная кривизна строго положительна:

$$K_{12} = -(\alpha + V^3)(\beta + V^3) > 0,$$
$$K_{13} = -((V^2)^2 + \alpha^2 + \alpha V^3) > 0,$$
$$K_{23} = -((V^1)^2 + \beta^2 + \beta V^3) > 0.$$

Положим $V^3 = 0$, тогда получим неравенства

$$K_{12} = -\alpha\beta > 0,\ K_{13} = -(V^2)^2 > 0,\ K_{23} = -(V^1)^2 > 0.$$

Очевидно, последние два неравенства противоречивы. Теорема доказана.

В конце статьи заметим, что в работах [7; 8] изучаются поверхности в псевдогельмгольцевой группе.

Список литературы

1. *Михайличенко Г.Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск, 2016.

2. *Михайличенко Г.Г.* Групповая симметрия физических структур. Барнаул, 2003.

3. *Кыров В.А.* Левоинвариантные метрики некоторых трехмерных групп Ли // Математические заметки СВФУ. 2023. Т. 30, №4. С. 24—36. doi: 10.25587/2411-9326-2023-4-24-36.

4. *Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.* О секционной кривизне связностей с векторным кручением // Изв. вузов. Математика. 2020. №6. С. 86—92. doi: 10.26907/0021-3446-2020-6-86-92.

5. *Клепиков П.Н., Родионов Е.Д., Хромова О.П.* Уравнения Эйнштейна на трехмерных локально симметричных (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Математические заметки СВФУ. 2019. Т. 26, №4. С. 25—36. doi: 10.25587/SVFU.2019.49.61.003.

6. *Кыров В.А., Захарьев В.А.* Связности на группах Гельмгольца // Научный вестник Горно-Алтайского государственного университета. 2025. №19. С. 15—18.

7. *Кыров В.А.* Поверхности на псевдогельмгольцевой группе // Математические заметки. 2025. Т. 117, №2. С. 285—294. doi: https://doi.org/10.4213/mzm14390.

8. *Кыров В.А.* Поверхности на группах гельмгольцева типа // Сибирский математический журнал. 2025. Т. 66, №5. С. 909—923. doi: 10.33048/smzh.2025.66.511.

Для цитирования: *Кыров В.А., Шинжина Д.М.* Кривизна псевдогельмгольцевой группы в связности с векторным кручением // ДГМФ. 2026. №57 (2). С. 52—62. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-6.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 53C35

V. A. Kyrov[1], *D. M. Shinzhina*[2]
[1, 2] *Gorno-Altaisk State University,*
Lenkina Str., 1, Gorno-Altaisk, 649000, Russia
[1] KyrovVA@yandex.ru; [2] dasasin31@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-6

Curvature of the pseudo-Helmholtz group in a connection with vector torsion

Submitted on May 31, 2026

While constructing a classification of geometries of local maximum mobility on the plane (phenomenologically symmetric geometries), Gennady Grigorievich Mikhailichenko discovered a

geometry called pseudo-Helmholtz. He calculated the group of motions of this geometry, which is defined by the action of a three-dimensional matrix Lie group, called the pseudo-Helmholtz group. Previously, a left-invariant metric on this Lie group and the Levi-Civita connection components on the pseudo-Helmholtz group were found. Thus, to define a left-invariant metric in the Lie algebra of the pseudo-Helmholtz group, in one of the articles, the first co-author introduced the Euclidean scalar product, in which the basis vectors of this algebra are orthonormal.

This article provides explicit expressions for the connection components with vector torsion. The torsion tensor is found. The components of the curvature and Ricci tensors, as well as the scalar and sectional curvatures, are calculated. The scalar curvature can have either sign. A condition is found under which the Ricci tensor is symmetric. It is established under what conditions the Ricci tensors in the Levi-Civita connections and those with vector torsion coincide. It is proved that a region of nonpositive sectional curvature exists on the pseudo-Helmholtz group in a connection with vector torsion.

Keywords: pseudo-Helmholtz group, Levi-Civita connection on a Lie group, connection with vector torsion, Ricci curvature, sectional curvature

References

1. *Mikhailichenko, G.G.:* Mathematical foundations and results of the theory of physical structures. Gorno-Altaisk (2016).

2. *Mikhailichenko, G.G.:* Group symmetry of physical structures. Barnaul (2003).

3. *Kyrov, V.A.:* Left-invariant metrics of some three-dimensional Lie groups. Mathematical notes of NEFU, **30**:4, 24—36 (2023), doi: 10.25587/2411-9326-2023-4-24-36.

4. *Klepikov, P.N., Rodionov, E.D., Khromova, O.P.:* On the sectional curvature of connections with vector torsion. News of universities. Mathematics, 6, 86—92 (2020), doi: 10.26907/0021-3446-2020-6-86-92.

5. *Klepikov, P.N., Rodionov, E.D., Khromova, O.P.:* Einstein equations on three-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vector torsion. Math. Notes of NEFU, **26**:4, 25—36 (2019), doi: 10.25587/SVFU.2019.49.61.003.

6. *Kyrov, V.A., Zakharyev, V.A.*: Connections on Helmholtz groups. Scientific Bulletin of the Gorno-Altai State University, 19, 15—18 (2025).

7. *Kyrov, V.A.:* Surfaces on the pseudo-Helmholtz group. Math. Notes, **117**:2, 300—308 (2025). doi: https://doi.org/10.1134/S0001434625010274.

8. *Kyrov, V.A.:* Surfaces on Helmholtz type groups. Siberian Math. J., **66**:5, 1218—1230 (2025), doi: 10.1134/S0037446625050118.

For citation: Kyrov, V.A., Shinzhina, D.M.: Curvature of the pseudo-Helmholtz group in a connection with vector torsion. DGMF, **57**:2, 52—62 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-6.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.76

К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
polyakova_@mail.ru
SPIN-код: 2956-1618, AuthorID: 14320
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-7

Полусимметрия слоевых координат 3-го порядка и касательные векторы 3-го порядка для деформирующегося многообразия

В статье рассматривается многообразие с несимметричными векторами касательного пространства n-го порядка и несимметричными формами дифференциальной группы n-го порядка, построенное с помощью обобщенных дифференциалов. Слоевые координаты 2-го порядка этого многообразия являются полусимметричными. Показано, что полусимметрия слоевых координат 2-го порядка наследуется координатами 3-го порядка.

Проведен сравнительный анализ касательных пространств 2-го и 3-го порядков для рассматриваемого m-мерного многообразия, а также для m-мерного многообразия, отнесенного к голономным и неголономным реперам (то есть для голономного и неголономного m-мерных многообразий по терминологии Ю. И. Шевченко).

Показано, что построенное с помощью обобщенных дифференциалов многообразие является промежуточным вариантом между голономным и неголономным многообразиями.

Ключевые слова: возмущение дифференциала, касательное пространство 3-го порядка, несимметричные реперы 3-го порядка, несимметричные кореперы 3-го порядка, полусимметричные координаты

Поступила в редакцию 02.07.2026 г.
© Полякова К. В., 2026

Введение

Известно, что главное расслоение касательных реперов $L(X_m)$ над m-мерным гладким многообразием X_m задается структурными уравнениями (см.: [11; 13])

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{1}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i. \tag{2}$$

Здесь и далее индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k = 1, \dots, m.$$

Линейная группа $GL(m)$, действующая в касательном пространстве TX_m, является типовым слоем расслоения $L(X_m)$. Формы $(\omega^i, \omega_j^i, \omega_{jk}^i)$ инвариантного корепера относительно натурального корепера $(dx^i, dx_j^i, dx_{jk}^i)$ могут быть представлены формулами (см.: [2; 3; 7])

$$\omega^i = x_j^i dx^j,$$

$$\omega_j^i = -\overset{*}{x}{}_j^k dx_k^i - x_{jk}^i \omega^k, \tag{3}$$

$$\omega_{jk}^i = \Delta x_{jk}^i + (x_{j[k}^s x_{sl]}^i - x_{jkl}^i)\omega^l.$$

Тензорный дифференциальный оператор Δ действует по закону

$$\Delta S_{jk}^i = dS_{jk}^i + S_{jk}^l \omega_l^i - S_{lk}^i \omega_j^l - S_{jl}^i \omega_k^l.$$

Локальные координаты x^i точки на многообразии являются базисными координатами, x_j^i — слоевыми координатами 1-го порядка. Матрица $\left(x_j^i\right)$ невырожденная. Соответствующую обратную матрицу будем обозначать $\left(\overset{*}{x}{}_j^i\right)$, то есть $\overset{*}{x}{}_j^i x_k^j = \delta_k^i$. Симметричные по нижним индексам слоевые координаты 2-го и 3-го порядков x_{jk}^i, x_{jkl}^i рассматриваются как независимые переменные [3, с. 149].

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m и слой расслоения $L(X_m)$. При этом касательное пространство $TL(X_m)$ содержит вертикальное пространство $T^v L(X_m)$, касательное к слою в точке многообразия. Вертикальные векторы имеют вид $e^i_j = -x^i_k \partial^k_j$, $\partial^k_j = \frac{\partial}{\partial x^j_k}$ (см.: [6]).

Представляет интерес рассмотрение многообразий с несимметричными векторами касательного пространства *n*-го порядка и несимметричными формами дифференциальной группы *n*-го порядка, поскольку все современные модели фундаментальных взаимодействий являются моделями с нарушенными симметриями [12, с. 74]. Пример такого многообразия — многообразие $\breve{X}_m$, введенное в статьях [7—10].

С целью построения такого многообразия введем отображение

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\wedge^2 T^*} \tag{4}$$

как деформацию внешнего дифференциала D в кокасательном пространстве $T^* X_m$ и отображение

$$\breve{d}v = dv + d(v(f^\xi))\partial_\xi \big|_{T^*} \tag{5}$$

как деформацию дифференциала касательных векторов в касательном пространстве TX_m.

В формулах (4, 5) функции

$$f = f(x^i, x^\xi) \text{ и } f^\xi = f^\xi(x^i)$$

позволяют деформировать внешний и обычный дифференциалы, причем

$$d\big(v(f^\xi)\big) = v^i d(\partial_i f^\xi),$$

где $v = v^i \partial_i$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial x^\xi}$, а x^ξ — слоевые координаты. Продолжаем изучать случай, когда значения индекса ξ нумеруют элементы матрицы (x^i_j), то есть $(x^\xi) = (x^i_j)$ и

$$\xi = m+1, \dots, m+m^2,$$

причем $f^{\xi} = f|_{x^{\xi}=1,\text{остальные}=0}$. В общем случае можно рассматривать $\left(x^{\xi}\right) = (x^i_j, x^i_{jk}, \dots)$.

Для натурального кобазиса dx^i и базиса ∂_i отображения (4, 5) принимают вид

$$\breve{D}(dx^i) = \overline{N}^i_{jk} dx^j \wedge dx^k,$$

$$\breve{d}(\partial_i) = \left(\partial_{ij} + \overline{N}^{\xi}_{ij}\partial_{\xi}\right) \otimes dx^j,$$

где кососимметрический объект $\overline{N}^i_{jk} = \delta^i_{[k}\partial_{j]} f$ и симметрический объект $\overline{N}^{\xi}_{ij} = \partial_{ij} f^{\xi}$ задают возмущения дифференциалов $\breve{D}$ и $\breve{d}$ на элементах dx^i и ∂_i соответственно. При этом, например, $\breve{D} g(x^i, x^{\xi}) = dg$, $\breve{D}(df) = 0$, $\breve{D}\left(dx^{\xi}\right) = 0$, кроме того, вдоль любой линии ρ на многообразии $\breve{X}_m$ справедливо $\breve{D}^2\big|_{\rho} = 0$.

Определим внешнее (см.: [7]) возмущение дифференциала для элементов $\partial_{\xi} = \frac{\partial}{\partial x^{\xi}}$. Дифференцируем ∂_{ξ} с помощью дифференциала $\breve{d}$:

$$\breve{d}\left(\partial_{\xi}\right) = d\left(\partial_{\xi}\right)\big|_{T^*} + \left(\partial_{\xi i} f^{\eta}\partial_{\eta}\right) \otimes dx^i = \partial_{\xi i} \otimes dx^i.$$

Отсюда следует

$$\breve{d}\left(\partial_{\xi}\right) = \partial_{\xi i} \otimes dx^i,$$

причем элементы

$$\partial_{\xi i} = \frac{\partial^2}{\partial x^{\xi} \partial x^i} = \frac{\partial^2}{\partial x^j_k \partial x^i} \text{ при } x^{\xi} = x^j_k$$

$$\text{и } \partial_{\xi i} \in T^2 L(X_m).$$

Ввиду того что дифференциалы деформируются, подразумевается, что и само многообразие $\breve{X}_m$ представляет собой деформацию обычного гладкого многообразия X_m, вследствие чего оно названо *деформирующимся* (см.: [5; 15]).

В [7—10] с помощью введенного отображения $\breve{D}$ над m-мерным деформирующимся многообразием $\breve{X}_m$ было построено главное расслоение реперов 2-го порядка $D_m^2(\breve{X}_m)$ со структурными уравнениями

$$\begin{aligned} \breve{D}\omega^i &= \omega^j \wedge \breve{\omega}_j^i, \\ \breve{D}\breve{\omega}_j^i &= \breve{\omega}_j^k \wedge \breve{\omega}_k^i + \omega^k \wedge \breve{\omega}_{jk}^i, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \omega^i &= x_j^i dx^j, \\ \breve{\omega}_j^i &= -\overset{*}{x}_j^k dx_k^i - \breve{x}_{jk}^i \omega^k, \\ \breve{\omega}_{jk}^i &= \breve{\Delta}\breve{x}_{jk}^i + (\breve{x}_{j[k}^s \breve{x}_{sl]}^i - \breve{x}_{jkl}^i)\omega^l. \end{aligned} \tag{7}$$

Дифференциальный тензорный оператор $\breve{\Delta}$ действует по закону

$$\breve{\Delta}S_j^i = dS_j^i + S_j^l \breve{\omega}_k^i - S_k^i \breve{\omega}_j^k.$$

Формулы (6, 7) аналогичны формулам (1—3). Галочка показывает, что объекты получены в результате применения оператора $\breve{D}$. При этом новые слоевые координаты $\breve{x}_{jk}^i$ и $\breve{x}_{jkl}^i$ 2-го и 3-го порядков выражаются через симметричные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \breve{x}_{jk}^i &= x_{jk}^i - N_{jk}^i, \\ \breve{x}_{jkl}^i &= x_{jkl}^i - x_{j(k}^s N_{l)s}^i - N_{j(k}^s x_{l)s}^i, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$N_{jk}^i = \overset{*}{x}_{[j}^l \delta_{k]}^i \partial_l f = \overline{N}_{pq}^i \overset{*}{x}_j^p \overset{*}{x}_k^q \tag{9}$$

— кручение канонической связности, то есть связности с симметричным тензором деформации γ_{jk}^i с нулевой кривизной (см.: [1]).

1. Полусимметрия координат 3-го порядка $\breve{x}^i_{jkl}$

Альтернации слоевых координат 2-го и 3-го порядков, представленных выражениями (8, 9), удовлетворяют равенствам

$$\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk},$$

$$\breve{x}^i_{j[kl]} = 0,$$

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{2}(N^s_{l[j}x^i_{k]s} - x^s_{l[j}N^i_{k]s} - N^s_{jk}x^i_{sl}), \qquad (10)$$

$$\breve{x}^i_{[j|k|l]} = \frac{1}{4}(N^s_{lk}x^i_{sj} - 2x^s_{k[j}N^i_{l]s} - N^s_{jk}x^i_{sl} - 2N^s_{jl}x^i_{sk}).$$

Перепишем равенство (9) с учетом (8)

$$\breve{x}^i_{jkl} = x^i_{jkl} - \frac{1}{2}\big(\breve{x}^s_{jk} + N^s_{jk}\big)N^i_{ls} - \frac{1}{2}\big(\breve{x}^s_{jl} + N^s_{jl}\big)N^i_{ks} -$$
$$- \frac{1}{2}N^s_{jk}\big(\breve{x}^i_{ls} + N^i_{ls}\big) - \frac{1}{2}N^s_{jl}\big(\breve{x}^i_{ks} + N^i_{ks}\big),$$

тогда

$$\breve{x}^i_{jkl} = x^i_{jkl} - \breve{x}^s_{j(k}N^i_{l)s} - N^s_{j(k}\breve{x}^i_{|s|l)} - 2N^s_{j(k}N^i_{l)s}.$$

Альтернации слоевых координат 3-го порядка, представленных выражением (9′), удовлетворяют равенствам

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{2}(N^i_{s[k}\breve{x}^s_{j]l} - N^s_{jk}\breve{x}^i_{sl} - \breve{x}^i_{s[k}N^s_{j]l} - N^s_{jk}N^i_{sl}). \qquad (10')$$

В работе [9] показано, что координаты 2-го порядка $\breve{x}^i_{jk}$ (компоненты канонической связности) являются полусимметрическими (см.: [4; 14; 16]), так как их альтернации представимы в виде (см.: [4, гл. IV, § 40])

$$N^i_{jk} = \tfrac{1}{m-1}\big(\delta^i_j N_k - \delta^i_k N_j\big), \qquad (11)$$

причем

$$N^i_{jk} = -\breve{x}^i_{[jk]}, \quad N_k = \breve{x}^s_{[sk]}. \qquad (12)$$

Найдем формулы для N^i_{jkl}, аналогичные формулам (11, 12).

Теорема. *Полусимметрия координат 2-го порядка* $\breve{x}^i_{jk}$ *наследуется координатами 3-го порядка* $\breve{x}^i_{jkl}$ *в виде*

$$N^i_{jkl} = \frac{1}{m-1}\left(\delta^i_l N_{jk} - \delta^i_k N_{jl}\right), \tag{13}$$

где

$$N^i_{jkl} = \breve{x}^i_{[jk]l}, \quad N_{jk} = \breve{x}^s_{[sj]k} + \breve{x}^s_{[jk]s}. \tag{14}$$

Доказательство. Подставив обозначение (9) в равенство (10), перепишем (10) в виде суммы симметричных по нижним индексам координат x^i_{jk} обычного многообразия X_m:

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{8}\left(\delta^i_k \overset{*}{x}{}^p_s x^s_{jl} - \delta^i_l \overset{*}{x}{}^p_s x^s_{jk} + \overset{*}{x}{}^p_l x^i_{jk} - \overset{*}{x}{}^p_j x^i_{kl}\right)\partial_p f. \tag{15}$$

Найдем свертку (15) по индексам i и j:

$$\breve{x}^i_{[ik]l} = \frac{1}{8}\left(\overset{*}{x}{}^p_l x^i_{ik} - \overset{*}{x}{}^p_i x^i_{kl}\right)\partial_p f.$$

Свертку компонент $\breve{x}^i_{[jk]l}$ по индексам i и l приведем к виду

$$\breve{x}^i_{[jk]i} = \frac{1}{8}\left((m-1)\overset{*}{x}{}^p_s x^s_{jk} + \overset{*}{x}{}^p_i x^i_{jk} - \overset{*}{x}{}^p_j x^i_{ki}\right)\partial_p f.$$

Тогда компоненты $\breve{x}^i_{[jk]l}$ выражаются по формуле

$$\breve{x}^i_{[jk]l} = \frac{1}{m-1}\left(\delta^i_l\left(\breve{x}^s_{[jk]s} + \breve{x}^s_{[sj]k}\right) - \delta^i_k\left(\breve{x}^s_{[jl]s} + \breve{x}^s_{[sj]l}\right)\right)\partial_p f. \tag{16}$$

Учитывая обозначения (14) в равенстве (16), получим (13).

2. Касательные пространства 2-го и 3-го порядков

Проведем сравнительный анализ касательных пространств 2-го и 3-го порядков для многообразия $\breve{X}_m$, а также для голономного $\overset{h}{X}_m$ и неголономного $\overset{nh}{X}_m$ многообразий по терминологии Ю.И. Шевченко [13]. В случае голономного и неголономного многообразий говорят, что многообразие отнесено к голономным и неголономным реперам (см.: [11]). Пусть $T\breve{X}_m = span(\varepsilon_i)$ и $T^*\breve{X}_m = span(\omega^i)$ — касательное и кокасательное пространства к многообразию $\breve{X}_m$ в его текущей точ-

ке, причем $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Для построенных дифференциалов справедливо

$$\breve{D}\omega^i = D\omega^i + N^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$\breve{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N^\xi_{ij}\omega^j \otimes \partial_\xi.$$

где $N^\xi_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \overline{N}^\xi_{lk}$.

Касательное пространство 2-го порядка $T^2\breve{X}_m$ деформирующегося многообразия $\breve{X}_m$ натянуто на векторы

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j,$$

$$\breve{\varepsilon}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi,$$

$\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$, причем

$$\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j, \quad \breve{\Delta}\breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\omega}^k_{ij} \otimes \varepsilon_k = \omega^k \otimes \breve{\varepsilon}_{ijk}; \qquad (17)$$

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]} = -N^k_{ij}\varepsilon_k.$$

Для векторов оператор $\breve{\Delta}$ имеет вид

$$\breve{\Delta}\breve{\varepsilon}_{ij} = \breve{d}\breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\varepsilon}_{kj}\breve{\omega}^k_i - \breve{\varepsilon}_{ik}\breve{\omega}^k_j.$$

Тогда $\dim T^2\breve{X}_m = m + \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}m(m+3)$.

Замечание. Для многообразия $\breve{X}_m$ прикасающиеся (см.: [13]) пространства 2-го порядка совпадают между собой, а прикасающиеся пространства 3-го порядка совпадают между собой.

Касательные векторы $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ 3-го порядка выражаются через векторы ε_l, $\breve{\varepsilon}_{lp}$, ∂_{lsp}, ∂_ξ, $\partial_{p\xi}$ следующим образом:

$$\breve{\varepsilon}_{ijk} = \left(\breve{x}^l_{ijk} - \breve{x}^l_{ip}\breve{x}^p_{jk} - \breve{x}^l_{p(j}\breve{x}^p_{|i|k)}\right)\varepsilon_l +$$

$$+\left(\delta^p_j \breve{x}^l_{ik} + \delta^l_i \breve{x}^p_{jk} + \delta^p_k \breve{x}^l_{ij}\right)\breve{\varepsilon}_{lp} +$$

$$+\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_j \overset{*}{x}{}^p_k \left(\partial_{lsp} f^\xi + \partial_p N^\xi_{ls}\right)\partial_\xi +$$

$$+\left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_j \overset{*}{x}{}^p_k\right)\partial_{lsp} + \left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_j \overset{*}{x}{}^p_k N^\xi_{ls}\right)\partial_{p\xi}.$$

При этом касательные векторы 3-го порядка выходят за пределы пространства $span(\partial_i, \partial_{jk}, \partial_{lpq})$ за счет вертикальных векторов $\partial_\xi = \partial_j^k$, $\partial_{i\xi} = \partial_{ij}^{\ k}$.

Найдем альтернации векторов $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ по двум индексам:

$$\breve{\varepsilon}_{i[jk]} = \left(\breve{x}^l_{i[jk]} - \breve{x}^l_{ip}\breve{x}^p_{[jk]}\right)\varepsilon_l + \breve{x}^p_{[jk]}\breve{\varepsilon}_{ip} + \\ + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^s_{[j}\overset{*}{x}{}^p_{k]}\left(\partial_p N^\xi_{ls}\partial_\xi + N^\xi_{ls}\partial_{p\xi}\right),$$

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]k} = \left(\breve{x}^l_{[ij]k} - \breve{x}^l_{[i|p|}\breve{x}^p_{j]k} - \tfrac{1}{2}\breve{x}^l_{p[j}\breve{x}^p_{i]k} - \tfrac{1}{2}\breve{x}^l_{pk}\breve{x}^p_{[ij]}\right)\varepsilon_l + \\ + \left(\delta^p_{[j}\breve{x}^l_{i]k} + \delta^l_{[i}\breve{x}^p_{j]k} + \delta^p_k\breve{x}^l_{[ij]}\right)\breve{\varepsilon}_{lp},$$

$$\breve{\varepsilon}_{[i|j|k]} = \breve{x}^s_{j[k}\breve{\varepsilon}_{i]p} + \breve{\varepsilon}_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} - N^s_{ik}\breve{\varepsilon}_{sj} + \tfrac{1}{2}\big(N^l_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} + \breve{x}^l_{js}N^s_{ik} - \\ - \breve{x}^l_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} - 2\breve{x}^l_{[i|s|}\breve{x}^s_{|j|k]} - 2\breve{x}^l_{s[k}N^s_{i]j}\big)\varepsilon_l + \\ + \overset{*}{x}{}^l_{[i}\overset{*}{x}{}^s_j\overset{*}{x}{}^p_{k]}\left(\partial_p N^\xi_{ls}\partial_\xi + N^\xi_{ls}\partial_{p\xi}\right)$$

в силу (9) и симметрии $\partial_{lsp} = \frac{\partial^3}{\partial x^l \partial x^s \partial x^p}$.

Учитывая альтернации (10) и (10′) координат 2-го и 3-го порядков, получим

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]k} = \big(\delta^s_{[j}\breve{x}^l_{i]k} + \delta^l_{[i}\breve{x}^s_{j]k} - \delta^s_k N^l_{ij}\big)\breve{\varepsilon}_{ls} + \\ + \big(N^l_{s[j}\breve{x}^s_{i]k} + \tfrac{1}{2}N^s_{ij}N^l_{ks} - \tfrac{1}{4}\breve{x}^l_{s[j}\breve{x}^s_{|k|i]} - \tfrac{3}{4}\breve{x}^l_{[i|s|}\breve{x}^s_{j]k}\big)\varepsilon_l, \quad (18)$$

$$\breve{\varepsilon}_{i[jk]} = \breve{x}^l_{ip}N^p_{jk}\varepsilon_l - N^p_{jk}\breve{\varepsilon}_{ip} + \overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^s_{[j}\overset{*}{x}{}^p_{k]}\left(\partial_p N^\xi_{ls}\partial_\xi + N^\xi_{ls}\partial_{p\xi}\right),$$

$$\breve{\varepsilon}_{[i|j|k]} = \breve{x}^s_{j[k}\breve{\varepsilon}_{i]s} + \breve{\varepsilon}_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} - N^s_{ik}\breve{\varepsilon}_{sj} + \tfrac{1}{2}\big(N^l_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} + \breve{x}^l_{js}N^s_{ik} - \\ - \breve{x}^l_{s[k}\breve{x}^s_{i]j} - 2\breve{x}^l_{[i|s|}\breve{x}^s_{|j|k]} - 2\breve{x}^l_{s[k}N^s_{i]j}\big)\varepsilon_l + \\ + \overset{*}{x}{}^l_{[i}\overset{*}{x}{}^s_j\overset{*}{x}{}^p_{k]}\left(\partial_p N^\xi_{ls}\partial_\xi + N^\xi_{ls}\partial_{p\xi}\right).$$

Из (18) видно, что альтернации $\breve{\varepsilon}_{[ij]k}$ векторов 3-го порядка принадлежат касательному пространству $T^2\breve{X}_m$ 2-го порядка, а альтернации $\breve{\varepsilon}_{i[jk]}$ и $\breve{\varepsilon}_{[i|j|k]}$ ему не принадлежат.

Найдем размерность касательного пространства 3-го порядка $T^3\breve{X}_m = span(\varepsilon_i, \breve{\varepsilon}_{ij}, \breve{\varepsilon}_{ijk})$. Векторы 3-го порядка $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ несимметричны, но линейно зависимы. Поскольку альтернации $\breve{\varepsilon}_{[ij]k}$ векторов $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ принадлежат пространству $T^2\breve{X}_m = span(\varepsilon_i, \breve{\varepsilon}_{ij})$, а альтернации $\breve{\varepsilon}_{i[jk]}$ и $\breve{\varepsilon}_{[i|j|k]}$ — пространству $span(\varepsilon_l, \breve{\varepsilon}_{sj}, \partial_\xi, \partial_{p\xi})$, то количество векторов $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ равно $\bar{C}^2_m \cdot m = C^2_{m+1} \cdot m = \frac{1}{2}m^2(m+1)$. Следовательно,

$$\dim T^3\breve{X}_m = \dim T^2\breve{X}_m + \frac{1}{2}m^2(m+1) =$$

$$= \frac{1}{2}m(m+3) + \frac{1}{2}m^2(m+1) = \frac{1}{2}m(m^2+2m+3).$$

Итак, размерность касательного пространства 3-го порядка $T^3\breve{X}_m$ (ср.: [11; 13]) равна

$$\dim T^3\breve{X}_m = \tfrac{1}{2}m(m^2+2m+3).$$

Известны размерности касательных пространств порядка p для голономного многообразия $\overset{h}{X}_m$ $(m > 1)$ (см.: [3]):

$$\dim T^p\overset{h}{X}_m = C^p_{m+p} - 1, \tag{19}$$

и для неголономного многообразия $\overset{nh}{X}_m$ $(m > 1)$ (см.: [13]):

$$\dim T^p\overset{nh}{X}_m = \frac{m(m^p-1)}{m-1}. \tag{20}$$

При $p = 2$ и $p = 3$ формулы (19) и (20) дают следующие размерности:

$$\dim T^2\overset{h}{X}_m = C^2_{m+2} - 1 = \tfrac{1}{2}m(m+3),$$

$$\dim T^2\overset{nh}{X}_m = \frac{m(m^2-1)}{m-1} = m(m+1);$$

$$\dim T^3\overset{h}{X}_m = C^3_{m+3} - 1 = \tfrac{1}{6}m(m^2+6m+11),$$

$$\dim T^3\overset{nh}{X}_m = \frac{m(m^3-1)}{m-1} = m(m^2+m+1).$$

Для размерностей рассматриваемого в данной статье многообразия $\breve{X}_m$ $(m > 1)$, а также голономного и неголономного многообразий по терминологии Ю.И. Шевченко (см.: [13]) имеем следующие взаимосвязи:

$$\dim T^2\breve{X}_m = \dim T^2\overset{h}{X}_m,$$

$$\dim T^3\overset{h}{X}_m < \dim T^3\breve{X}_m < \dim T^3\overset{nh}{X}_m.$$

Последнее неравенство

$$\frac{1}{6}m(m^2+6m+11) < \frac{1}{2}m(m^2+2m+3) < m(m^2+m+1)$$

показывает, что построенное с помощью обобщенных дифференциалов многообразие $\breve{X}_m$ является промежуточным вариантом между голономным $\overset{h}{X}_m$ и неголономным $\overset{nh}{X}_m$ многообразиями.

Замечание. При m $= 1$, то есть для кривой, имеем

$$\dim T^2\overset{h}{X}_1 = dim T^2\breve{X}_1 = dim T^2\overset{nh}{X}_1 = 2,$$

$$\dim T^3\overset{h}{X}_1 = dim T^3\breve{X}_1 = dim T^3\overset{nh}{X}_1 = 3.$$

3. Касательные векторы 3-го порядка

На многообразии X_m имели равенство $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_j(\varepsilon_i)$ (см.: [6]).

Из (17) следует, что векторнозначная форма

$$\breve{d}\varepsilon_i = \varepsilon_j \otimes \breve{\omega}_i^j + \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j$$

действует как отображение в пространстве $T^2\breve{X}_m$. Вычислим его действие на векторах ε_j:

$$\breve{d}\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{x}_{ij}^k\varepsilon_k.$$

Сами векторы ε_j также порождают отображение — производную по направлению, поэтому получим векторы 2-го порядка

$$\varepsilon_j(\varepsilon_i) = \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k \partial_{kl} = \breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{x}_{ij}^k \varepsilon_k - \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k N_{lk}^{\xi} \partial_{\xi}.$$

На многообразии $T^2\breve{X}_m$ получим

$$\breve{d}\varepsilon_i\big(\varepsilon_j\big) = \varepsilon_j(\varepsilon_i) + \overset{*}{x}{}_i^l \overset{*}{x}{}_j^k N_{lk}^{\xi} \partial_{\xi} = \varepsilon_j(\varepsilon_i) + \overline{N}_{ij}^{\xi} \partial_{\xi},$$

то есть имеет место неравенство $\breve{d}\varepsilon_i\big(\varepsilon_j\big) \neq \varepsilon_j\big(\varepsilon_j\big)$.

Под действием отображений ε_k векторы 2-го порядка $\breve{\varepsilon}_{ij}$ переходят в векторы 3-го порядка $\varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big)$, которые обозначим $\breve{\varepsilon}_{ij,k}$, то есть

$$\breve{\varepsilon}_{ij,k} = \varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big) = \overset{*}{x}{}_k^s \partial_s \left(\overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \partial_{pq} + \breve{x}_{ij}^p \varepsilon_p + \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q N_{pq}^{\xi} \partial_{\xi} \right) =$$

$$= \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s \partial_{pqs} + \overset{*}{x}{}_k^s \breve{x}_{ij}^p \overset{*}{x}{}_p^q \partial_{qs} + \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s \left(N_{pq}^{\xi} \partial_{\xi s} + \partial_s N_{pq}^{\xi} \partial_{\xi} \right).$$

Под действием отображений $\breve{\varepsilon}_{ij}$ векторы 1-го порядка ε_k переходят в векторы 3-го порядка $\varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big)$, которые обозначим $\breve{\varepsilon}_{k,ij}$, то есть

$$\breve{\varepsilon}_{k,ij} = \breve{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k) = \left(\overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \partial_{pq} + \breve{x}_{ij}^p \varepsilon_p + \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q N_{pq}^{\xi} \partial_{\xi} \right) \left(\overset{*}{x}{}_k^s \partial_s \right) =$$

$$= \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s \partial_{spq} + \overset{*}{x}{}_k^s \breve{x}_{ij}^p \overset{*}{x}{}_p^q \partial_{sq} + \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s N_{pqv}{}^u \left(\partial_{su}^v - \overset{*}{x}{}_u^v \partial_s \right).$$

Разность полученных векторов 3-го порядка не является нулевой:

$$\breve{\varepsilon}_{ij,k} - \breve{\varepsilon}_{k,ij} = \varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big) - \breve{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k) =$$

$$= \overset{*}{x}{}_i^p \overset{*}{x}{}_j^q \overset{*}{x}{}_k^s \left(\partial_s N_{pqv}{}^u \partial_u^v - N_{pqv}{}^u \overset{*}{x}{}_u^v \partial_s \right),$$

тогда как на многообразии X_m имеем перестановочность $\varepsilon_{ij,k} = \varepsilon_{k,ij}$.

Выразим $\breve{\varepsilon}_{ij,k}$ и $\breve{\varepsilon}_{k,ij}$ через $\breve{\varepsilon}_{ijk}$ и $\breve{\varepsilon}_{ij}$:

$$\breve{\varepsilon}_{ij,k} = \varepsilon_k\big(\breve{\varepsilon}_{ij}\big) = \breve{\varepsilon}_{ijk} - \breve{x}_{ik}^p \breve{\varepsilon}_{pj} - \breve{x}_{jk}^p \breve{\varepsilon}_{ip} -$$

$$-\left(\breve{x}^l_{ijk}-\breve{x}^l_{ip}\breve{x}^p_{jk}-\breve{x}^l_{p[j}\breve{x}^p_{|i|k]}\right)\varepsilon_l-$$

$$-\left(\overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^s_j\overset{*}{x}{}^p_k\partial_{lsp}f^\xi+\breve{x}^p_{ij}\overset{*}{x}{}^l_p\overset{*}{x}{}^s_kN^\xi_{ls}\right)\partial_\xi,$$

$$\breve{\varepsilon}_{k,ij}=\breve{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k)=\breve{\varepsilon}_{ijk}-\breve{x}^p_{ik}\breve{\varepsilon}_{pj}-\breve{x}^p_{jk}\breve{\varepsilon}_{ip}-$$

$$-\left(\breve{x}^l_{ijk}-\breve{x}^l_{ip}\breve{x}^p_{jk}-\breve{x}^l_{p(j}\breve{x}^p_{|i|k)}+\overset{*}{x}{}^p_i\overset{*}{x}{}^q_j\overset{*}{x}{}^s_kN_{pqs}{}^l\right)\varepsilon_l-$$

$$-\overset{*}{x}{}^l_i\overset{*}{x}{}^s_j\overset{*}{x}{}^p_k\left(\partial_{lsp}f^\xi+\partial_pN^\xi_{ls}\right)\partial_\xi.$$

Замечание. Если $N^\xi_{pq}=0$, то $\varepsilon_k\left(\breve{\varepsilon}_{ij}\right)=\breve{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k)$.

Список литературы

1. *Белова О.О.* Плоские связности в области проективного пространства // ДГМФ. 2025. №56. С. 59—68.

2. *Евтушик Л.Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2. С. 119—150.

3. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. *Петрова Л.И.* Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. М., 2006.

6. *Полякова К.В.* О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков // ДГМФ. 2016. Вып. 47. С. 109—126.

7. *Полякова К.В.* О расширении касательного пространства 2-го порядка гладкого многообразия // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 94—111.

8. *Полякова К.В.* О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 29—44.

9. *Полякова К.В.* Аналоги симметрической и плоской связностей с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 78—95.

10. *Полякова К.В.* Обобщенные тождества Риччи и Бианки для с вязности с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2025. №56. С. 107—118.

11. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. № 1. С. 73—80.

12. *Сарданашвили Г. А.* Геометрия и классические поля. Современные методы теории поля. Т. 1. М., 1996.

13. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

14. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection // Tensor N. S. 1975. Vol. 29. P. 249—254.

15. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10. Art. № 46.

16. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.

Для цитирования: *Полякова К. В.* Полусимметрия слоевых координат 3-го порядка и касательные векторы 3-го порядка для деформирующегося многообразия // ДГМФ. 2026. № 57 (2). С. 63—78. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-7.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010:53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-7

Third-order tangent vectors and semi-symmetric third-order fiber coordinates for a deforming manifold

Submitted on July 2, 2026

The paper considers a manifold with non-symmetric tangent vectors of the n-th order and non-symmetric forms of the n-th order differential group, constructed using generalized differentials.

The second-order fiber coordinates of this manifold are semi-symmetric. It is shown that the semi-symmetry of the second-order fiber coordinates is inherited by the third-order coordinates.

A comparative analysis of the second- and third-order tangent spaces is carried out for the m-dimensional manifold under consideration, as well as for an m-dimensional manifold referred to holonomic and non-holonomic frames (i. e., for holonomic and non-holonomic m-dimensional manifolds according to Yu. I. Shevchenko's terminology).

It is shown that the manifold constructed using generalized differentials is an intermediate case between holonomic and non-holonomic manifolds.

Keywords: deformation of differentials, third-order tangent space, non-symmetric third-order frames, non-symmetric third-order coframes, semi-symmetric coordinates

References

1. *Belova, O.O.:* Flat connections in a domain of projective space. DGMF, 56, 59—68 (2025).

2. *Evtushik, L.E.:* Differential connections and infinitesimal transformations of a prolonged pseudogroup. Tr. Geom. Sem., 2, Moscow, 119—150 (1969).

3. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Problems in Geometry. Tr. Geom. Sem. Itogi Nauki i Tekhn., 1, Moscow, 139—189 (1966).

4. *Norden, A.P.:* Spaces of affine connection. Moscow (1976).

5. *Petrova, L.I.:* Skew-symmetric differential forms: Conservation-laws. Fundamentals of fielf theory, Moscow (2006).

6. *Polyakova, K.V.:* Vector-valued forms of the 1st, 2nd and 3rd orders for affine connection of the 2nd order. DGMF, 47, 109—126 (2016).

7. *Polyakova, K.V.:* On some extension of the second order tangent space for a smooth manifold. DGMF, 53, 94—111 (2022).

8. *Polyakova, K.V.:* On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 54(2), 29—44 (2023).

9. *Polyakova, K.V.:* Analogues of torsion-free and curvature-free connections with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 55(2), 78—95 (2024).

10. *Polyakova, K.V.:* Generalized Ricci and Bianchi identities for a connection with torsion non-tensor and curvature non-tensor. DGMF, 56, 107—118 (2025).

11. *Rybnikov, A.K.:* Second-order generalized affine connections. J. Soviet Math., **27**:1, 84—93 (1983).

12. *Sardanashvily, G.A.:* Geometry and Classical Fields. Modern Methods of Field Theory, 1, Moscow (1996).

13. *Shevchenko, Yu.I.:* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

14. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection. Tensor N.S., 29, 249—254 (1975).

15. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, 10, 46 (2021).

16. *Yano, K.:* On semi-symmetric metric connection. Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées, 15, 1579—1586 (1970).

For citation: Polyakova, K.V.: Third-order tangent vectors and semi-symmetric third-order fiber coordinates for a deforming manifold. DGMF, **57**:2, 63—78 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-7.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC (2020): 53C40; 58E12

S. E. Stepanov
Department of Mathematics, Financial University, Russia
s.e.stepanov@mail.ru
SPIN code: 8403-0453, AuthorID: 6991
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-8

On stable minimal submanifolds in Riemannian manifolds

In this paper, we study stable minimal submanifolds of Riemannian manifolds. We generalize classical theorems of the theory using a generalized Bochner technique. We consider a complete stable minimal hypersurface M in $(n+1)$-dimensional Riemannian manifold with non-negative Ricci curvature in the direction of the unite normal vector to M is non-negative at every point $x \in M$. It is proved, that if (M, g) is parabolic (in particular, a complete manifold of finite volume) and there exists a function $u(x) \in C^2(M)$ that has no zeros on M and satisfying at each point of M the inequality $\mathcal{L}\, u(x) \leq 0$ with the Jacobi operator $\mathcal{L}$, then (M, g) must be totally geodesic submanifold.

Keywords: complete Riemannian manifold, stable minimal submanifolds, the generalized Bochner technique, superharmonic function, Jacobi operator

1. Introduction

In this paper, we study minimal submanifolds from the perspective of the *generalized Bochner technique*, which are longstanding variational problems in Riemannian geometry. The *generalized Bochner technique* (see, for instance, [1] and [2]) is an important component of geometric analysis (see, for example, [3]).

Submitted on April 8, 2026
© Stepanov S. E., 2026

The obtaining rigidity results for minimal and, in particular, stable minimal submanifolds in Riemannian manifolds has been a problem of significant interest in the geometric analysis community. This has been explored from the classical paper [4] to more recent works, such as [5], which also utilized the generalized Bochner technique. As an example, we recall the following theorem (see [1, Theorem 3.1]):

Let (M, g) be an n-dimensional stable manifold minimally immersed in an $(n+1)$-dimensional Riemannian manifold $(\bar{M}, \bar{g})$ with non-negative sectional curvature. If (M, g) is *parabolic*, then it must be totally geodesic and have non-negative sectional curvature. We will continue this research in our paper. Bochner's generalized methodology enables us to obtain new results in this actively studied area of research (see, for example, [6]).

We presented some of our results in reports at the "XIV Belarusian Mathematics Conference" (October 28 — November 1, 2024, Minsk, Belarus).

2. Complete stable minimal submanifolds in Riemannian manifolds

We consider a smooth connected n-dimensional Riemannian manifold (M, g) that is isometrically immersed into an $(n+1)$-dimensional Riemannian manifold $(\bar{M}, \bar{g})$. Such a manifold is called a *hypersurface*.

We denote by ∇ and $\bar{\nabla}$ the Levi-Civita connections on (M, g) and $(\bar{M}, \bar{g})$, respectively. In this case, the *Gauss formula* says that

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - g(A_g X, Y)\, N,$$

where X, Y are any vector fields tangent to (M, g), the vector field N is the global unite vector field normal to (M, g) and A_g stands the shape operator of (M, g). The second fundamental form of a hypersurface (M, g) is defined by the identity $(X, Y) := g(A_g X, Y)$, where X, Y are any vector fields tangent to (M, g). Then φ is a symmetric differential 2-form on (M, g).

As we recalled before, stability is related to the non-negativity of the second variation or, equivalently, the non-positivity of the *stability operator* (also called the *Jacobi operator*) on (M, g) (see [5])

$$\mathcal{L} := \Delta + \|\varphi\|_g^2 + \overline{Ric}(N, N),$$

where N is a globally defined unit normal vector field on M, which means $N_x \in T_x^{\perp}M$ and $\bar{g}(N_x, N_x) = 1$ at each point $x \in M$. Therefore, in this case we have

$$\Delta u \leq -\left(\|\varphi\|_g^2 + \overline{Ric}(N_x, N_x)\right) u(x) \tag{1}$$

for any $u(x) \in C^{\infty}(M)$. Then, using (1), we have

$$\frac{1}{2}\Delta u^2 = \|du\|_g^2 + u(x)\,(\Delta u) =$$

$$= \|du\|_g^2 - \left(\|\varphi\|_g^2 + \overline{Ric}(N_x, N_x)\right) u(x)^2 \leq$$

$$\leq -\left(\|\varphi\|_g^2 + \overline{Ric}(N_x, N_x)\right) u(x)^2. \tag{2}$$

Therefore, if $u(x)$ is a function that has no zeros on M and satisfying the inequality $\mathcal{L}\,u(x) \leq 0$, and $\overline{Ric}(N_x, N_x) \geq 0$ at every point $x \in M$, then u^2 is a positive superharmonic function (see: [7, p. 150]). At the same time, a complete manifold (M, g) is *parabolic* if any positive superharmonic function on (M, g) is constant, otherwise, it is considered non-parabolic (see: [7, p. 164]). Therefore, if a hypersurface (M, g) is a complete parabolic Riemannian submanifold of $(\overline{M}, \bar{g})$ and there exists a function $u(x) \in C^2(M)$ that has no zeros on M and satisfying the inequality $\mathcal{L}\,u(x) \leq 0$, then $u(x)$ is a constant and from (1) we deduce that $\varphi = 0$ and $\overline{Ric}(N_x, N_x) = 0$ at every point of M. In this case, (M, g) must be a totally geodesic submanifold of $(\overline{M}, \bar{g})$ and $\overline{Ric}(N_x, N_x)$ also vanishes at every point $x \in M$. This leads to the following straightforward theorem.

Theorem 1. *Let* (M, g) *be a complete stable minimal hypersurface in* $(n+1)$*-dimensional Riemannian manifold* $(\overline{M}, \bar{g})$ *with*

non-negative Ricci curvature $\overline{Ric}$ *in the direction of the unite normal vector* N_x *to* M *is non-negative at every point* $x \in M$. *If* (M, g) *is parabolic* (*in particular, a complete manifold of finite volume*) *and there exists a function* $u(x) \in C^2(M)$ *that has no zeros on* M *and satisfying the inequality* $\mathcal{L}\, u(x) \leq 0$ *at each point of* M, *where* $\mathcal{L}$ *denotes the stability* (*or Jacobi*) *operator*, *then* (M, g) *must be totally geodesic submanifold. Moreover, the Ricci curvature* $\overline{Ric}(N_x, N_x)$ *also vanishes at every point* $x \in M$.

There is a generalization of parabolic manifolds known as *stochastically complete manifolds*. Specifically, any parabolic manifold is stochastically complete, but the converse is not necessarily true. Recall that if we consider a minimal Wiener process on (M, g), that is, a diffusion process generated by the Laplace — Beltrami operator Δ with absorption conditions at infinity, then if the probability of absorption at infinity in a finite amount of time is zero, the manifold (M, g) is said to be stochastically complete (see, for instance, [10]). In conclusion, we can formulate the theorem.

Theorem 2. *Let* (M, g) *be a complete, stable, and stochastically complete minimal hypersurface in a Riemannian manifold* $(\overline{M}, \bar{g})$, *such that the Ricci curvature of* $(\overline{M}, \bar{g})$ *in the direction of the unite normal vector* N_x *to* M *is non-negative at every point* $x \in M$. *If there exists a function* $u(x) \in C^2(M) \cap L^1(M)$ *that has no zeros and satisfies the inequality* $\mathcal{L}\, u(x) \leq 0$ *at each point of* M, *where* $\mathcal{L}$ *denotes the stability* (*or Jacobi*) *operator*, *then* (M, g) *is totally geodesic submanifold.*

Proof. Let (M, g) be a complete, stable, and stochastically complete minimal hypersurface in a Riemannian manifold $(\overline{M}, \bar{g})$, such that the Ricci curvature of $(\overline{M}, \bar{g})$ in the direction of the unite normal vector N_x to M is non-negative at every point $x \in M$.

Next, we recall that if (M, g) a stochastically complete manifold, then every positive superharmonic function $u(x) \in L^1(M)$ is constant (see [10]). Therefore, if a hypersurface (M, g) in $(\overline{M}, \bar{g})$ is a stochastically complete Riemannian manifold, then from (2) for a

function $u(x) \in C^2(M) \cap L^1(M)$ that has no zeros on M, we obtain $\varphi = 0$. Consequently, (M, g) must be a totally geodesic submanifold of $(\bar{M}, \bar{g})$.

Remark. In [9] and [10], with references to [11], respectively, it was claimed that on a complete, non-compact stable minimal hypersurface (M, g) of $(\bar{M}, \bar{g})$, there exists a globally defined positive function $u(x)$ that belongs to the kernel of the Jacobi operator $\mathcal{L}$. In this case, if the Ricci curvature of $(\bar{M}, \bar{g})$ in the direction of the unite normal vector N_x to M is non-negative at every point $x \in M$, then

$$\Delta u = -\left(\|\varphi\|_g^2 + \overline{Ric}(N_x, N_x)\right) u(x) \leq 0.$$

Therefore, $u(x)$ is a positive superharmonic function. This allows us to simplify the requirements of Theorems 1 and 2.

References

1. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.:* Vanishing and finiteness results in geometric Analysis. A generalization of the Bochner technique, Basel, Boston, Berlin (2008).

2. *Mikeš J., Stepanov S.:* What is the Bochner technique and where is it applied. Lobachevskii J. Math., 43(3), 709—719 (2022).

3. *Jost, J.:* Riemannian Geometry and Geometrical Analysis, Berlin (2017).

4. *Chern, S.S., do Carmo, M.P., Kobayashi, S.:* Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. Functional Analysis and Related Fields, Springer, 59—75 (1970).

5. *Catino, G., Mastrolia, P., Roncoroni, A.:* Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces. Geom. Funct. Anal., 34, 1—18 (2024).

6. *Mikeš, J., Stepanov, S., Tsyganok, I.:* On minimal hypersurfaces in Euclidean spaces and Riemannian manifolds. Turkish J. Math., 49(1), 131—138 (2025).

7. *Grigor'yan, A.:* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. Bulletin AMS, 36(2), 135—249 (1999).

8. *Grigor'yan, A.:* Stochastically complete manifolds and summable harmonic functions. Izvestia Akad. Nauk USSR, Math., 33(2), 425—432 (1989).

9. *Kim, J.-J., Yun, G.:* Structure of stable minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of nonnegative Ricci curvature. Bull. Korean Math. Soc., 50(4), 1201—1207 (2013).

10. *Fischer-Colbrie, D.:* On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds. Invent. Math., 82, 121—132 (1985).

11. *Fischer-Colbrie, D., Schoen, R.:* The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. Comm. Pure Appl. Math., 33(2), 199—211 (1980).

For citation: Stepanov, S. E.: On stable minimal submanifolds in Riemannian manifolds. DGMF, **57**:2, 79—86 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-8.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 514.764.274

С. Е. Степанов

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

s.e.stepanov@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-8

О стабильных минимальных подмногообразиях римановых многообразий

Поступила в редакцию 08.04.2026 г.

В данной работе мы изучаем стабильные минимальные подмногообразия римановых многообразий. Мы обобщаем классические теоремы теории, используя обобщенную технику Бохнера. Рассматривается полная стабильная минимальная гиперповерхность M в $(n+1)$-мерном римановом

многообразии с неотрицательной кривизной Риччи в направлении единичного вектора нормали к M в каждой его точке x. Доказано, что если M параболическое (в частности, полное многообразие конечного объема) и существует функция $u(x) \in C^2(M)$, не имеющая нулей на M и удовлетворяющая в каждой точке многообразия M неравенству $\mathcal{L}\,u(x) \leq 0$ с оператором Якоби $\mathcal{L}$, то M должно быть вполне геодезическим подмногообразием.

Ключевые слова: полное риманово многообразие, устойчивое минимальное подмногообразие, обобщенная техника Бохнера, супергармоническая функция, оператор Якоби

Список литературы

1. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Vanishing and finiteness results in geometric Analysis. A generalization of the Bochner technique. Basel ; Boston ; Berlin, 2008.

2. *Mikeš J., Stepanov S.* What is the Bochner technique and where is it applied // Lobachevskii J. Math. 2022. Vol. 43, №3. P. 709—719.

3. *Jost J.* Riemannian Geometry and Geometrical Analysis. Berlin, 2017.

4. *Chern S.S., do Carmo M.P., Kobayashi S.* Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length // Functional Analysis and Related Fields. Springer, 1970. P. 59—75.

5. *Catino G., Mastrolia P., Roncoroni A.* Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces // Geom. Funct. Anal. 2024. Vol. 34. P. 1—18.

6. *Mikeš J., Stepanov S., Tsyganok I.* On minimal hypersurfaces in Euclidean spaces and Riemannian manifolds // Turkish Journal of Mathematics. 2025. Vol. 49, №1. P. 131—138.

7. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bulletin AMS. 1999. Vol. 36, №2. P. 135—249.

8. *Григорьян А.А.* Стохастически полные многообразия и суммируемые гармонические функции // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1988. Т. 52, №5. С. 1102—1108.

9. *Kim J.-J., Yun G.* Structure of stable minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of nonnegative Ricci curvature // Bull. Korean Math. Soc. 2013. Vol. 50, №4. P. 1201—1207.

10. *Fischer-Colbrie, D.* On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds // Invent. Math., 1985. Vol. 82. P. 121—132.

11. *Fischer-Colbrie D., Schoen R.* The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature // Comm. Pure Appl. Math. 1980. Vol. 33, №2. P. 199—211.

Для цитирования: *Степанов С.Е.* О стабильных минимальных подмногообразиях римановых многообразий // ДГМФ. 2026. №57 (2). С. 79—86. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-8.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

УДК 512.6

***А. Я. Султанов*[1], *Г. А. Султанова*[2]**

***М. В. Глебова*[3], *О. А. Монахова*[4]**
[1, 4] Пензенский государственный университет, Россия
[2] Филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулева Министерства обороны РФ, Пенза, Россия
[3] Пензенский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, Россия
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
[3] mvmorgun@mail.ru, [4] oxmonakh@mail.ru
[1] SPIN-код: 7105-6226, AuthorID: 561203
[2] SPIN-код: 2503-5253, AuthorID: 846241
[3] SPIN-код: 1464-0816, AuthorID: 729264
[4] SPIN-код: 5397-3423, AuthorID: 387556
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-9

О некоторых типах почти йордановых алгебр

В настоящей работе вводятся понятия йордановой и почти йордановой алгебр над произвольным полем. Приведены примеры некоторых йордановых алгебр. Отмечено, что класс почти йордановых алгебр шире, чем класс йордановых алгебр. Доказано существование различных типов почти йордановых алгебр над произвольным полем, отличных от йордановых алгебр. В частности, на векторном пространстве построена алгебра $A(\alpha, \beta, \theta)$ линейной формы θ и двух скаляров α и β, умножение в которой задается специальным условием. Доказаны некоторые свойства алгебры $A(\alpha, \beta, \theta)$. Получено условие эластичности этой алгебры. Показано, что рассматриваемая алгебра является почти йордановой алгеброй.

Поступила в редакцию 15.04.2026 г.
© Султанов А. Я., Султанова Г. А., Глебова М. В., Монахова О. А., 2026

Среди множества всех почти йордановых алгебр $A(\alpha, \beta, \theta)$ выделены классы коммутативных алгебр Йордана и алгебр Йордана с антикоммутативным умножением, а также доказаны некоторые их свойства. Получено условие равенства почти йордановой алгебры алгебре Ли.

Ключевые слова: йорданова алгебра, почти йорданова алгебра, почти йорданова алгебра над произвольным полем, алгебра Ли

Введение

Йордановы алгебры возникли в 1933 г. в работе немецкого физика и математика П. Йордана (1902—1980), посвященной аксиоматизации основ квантовой механики [1]. Первоначально такие алгебры назывались *r*-системами счисления, но в 1946 г. американский математик А. Альберт (1905—1972) переименовал их в йордановы алгебры и начал систематическое изучение общих йордановых алгебр.

Йордановы алгебры остаются важным математическим объектом и находят применение в различных областях математики, таких как группы и алгебры Ли [2], алгебраическая геометрия [3], математическая статистика, дифференциальные уравнения, вещественный и комплексный анализ, а также в физике и статистической механике [4].

Исследованию свойств йордановых алгебр посвящены работы А. Я. Султанова. В статье [5] доказаны некоторые свойства йордановых алгебр. В статье А. А. Попова рассмотрены дифференциально-простые йордановы алгебры [6]. Специальные йордановы алгебры изучались А. М. Слинько [7], Е. И. Зельмановым и В. Г. Скосырским [8].

Наряду с йордановыми алгебрами рассматриваются почти йордановы алгебры, которые являются расширением класса йордановых алгебр. Исследованию почти конечномерных йордановых алгебр посвящены работы В. Н. Желябина и А. С. Панасенко [9; 10].

1. Основные определения и факты

Определение 1. Векторное пространство V над полем P, на котором задана билинейная операция умножения $(x, y) \mapsto xy$ для любых $x, y \in V$, называется *алгеброй Йордана* (иначе *йордановой алгеброй*), если введенная операция удовлетворяет следующим аксиомам [1]:

(1) $xy = yx$,

(2) $x^2(yx) = (x^2y)x$

для любых $x, y \in V$.

Приведем примеры йордановых алгебр.

Пример 1. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем P, характеристика которого отлична от 2. На A зададим новую операцию умножения $\cdot$ по формуле

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

Полученная линейная алгебра обозначается символом A^+. В алгебре A^+ выполнены тождества (1) и (2). Следовательно, алгебра A^+ является йордановой алгеброй. Такую алгебру называют *специальной йордановой алгеброй*. Йорданова алгебра, не являющаяся специальной, называется *исключительной йордановой алгеброй*.

Пример 2. Предположим, что на векторном пространстве V над полем P задана симметрическая билинейная форма f, то есть f является отображением $V \times V$ в поле P, удовлетворяющим условиям:

1) $f(x, y) = f(y, x)$,

2) $f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x, z) + \mu f(y, z)$

для всех $x, y, z \in V$ (см.: [11]).

На прямом произведении $P \times V$ возникает естественная структура векторного пространства над полем P. На этом векторном пространстве зададим операцию умножения по формуле

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta + f(x, y), \alpha y + \beta x),$$

где $\alpha, \beta \in P$; $x, y \in V$. Получим в результате йорданову алгебру.

Замечание. Построенные примеры йордановых алгебр обладают единицами. Это свойство имеет место не для всех йордановых алгебр.

2. Почти йордановы алгебры

Определение 2. Векторное пространство V, на котором задана операция умножения, удовлетворяющая условию (аксиоме Йордана)

$$x^2(yx) = (x^2y)x$$

для всех $x, y \in V$, называется почти *йордановой алгеброй* (см.: [9]).

Исключение в определении 1 аксиомы коммутативности существенно расширяет класс почти йордановых алгебр.

Действительно, если на векторном пространстве V задана антикоммутативная операция умножения, то есть умножение, удовлетворяющее тождеству $xy = -yx$, и характеристика поля P не равна 2, то алгебра будет почти йордановой. Любая альтернативная алгебра является почти йордановой.

3. Алгебры, операции умножения в которых задаются с помощью двух фиксированных элементов поля и линейной формы

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем P; α, β — фиксированные элементы поля P; θ — линейная форма, заданная на векторном пространстве V со значением в поле P.

На векторном пространстве V зададим операцию умножения условием

$$xy = \alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x \qquad (1)$$

для всех $x, y \in V$ (см.: [5]).

Легко показать, что операция умножения, определенная формулой (1), является билинейной. Следовательно, векторное

пространство V с операцией умножения (1) является линейной алгеброй. Эту алгебру можно назвать *алгеброй линейной формы θ и скаляров α и β*. Обозначим эту алгебру символом $A(\alpha, \beta, \theta)$. Изучим свойства алгебры A.

Из определения операции умножения, то есть из формулы (1), следует, что $x^2 = (\alpha + \beta)\theta(x)x$ для любого $x \in A$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *В алгебре A с операцией умножения (1) выполняется тождество*

$$x(yx) = (xy)x. \tag{2}$$

Доказательство. На основании определения операции умножения (1) преобразуем ассоциатор $x(yx) - (xy) = (x, y, x)$:

$$\begin{aligned}(x, y, x) &= x(\alpha\theta(y)x + \beta\theta(x)y) - (\alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x)x = \\ &= \alpha\theta(y)x^2 + \beta\theta(x)(xy) - \alpha\theta(x)(yx) - \beta\theta(y)x^2 = \\ &= (\alpha - \beta)\theta(y)(\alpha + \beta)\theta(x)x + \beta\theta(x)(\alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x) - \\ &- \alpha\theta(x)(\alpha\theta(y)x + \beta\theta(x)y) = 0.\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана. В связи с этой теоремой отметим, что алгебра, в которой имеет место тождество (2), называется *эластичной*, а само тождество (2) называется *тождеством эластичности* (см.: [12]).

Опираясь на теорему 1, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *В $A(\alpha, \beta, \theta)$ — алгебре с операцией умножения (1) выполняется тождество Йордана*

$$(x^2y)x = x^2(yx).$$

Доказательство. Для произвольных $x, y \in A(\alpha, \beta, \theta)$ имеем

$$\begin{aligned}&(x^2y)x - x^2(yx) = \\ &= (\alpha + \beta)\theta(x)(xy)x - (\alpha + \beta)\theta(x)x(yx) = \\ &= (\alpha + \beta)\theta(x)((xy)x - x(yx)) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, алгебра $A(\alpha, \beta, \theta)$ является почти йордановой.

4. Некоторые типы почти йордановых алгебр

Рассмотрим частные случаи йордановых алгебр.

Случай 1. В алгебре $A(\alpha,\beta,\theta)$ выделим алгебры условием $[x,y]=0$. Полученная алгебра является коммутативной алгеброй Йордана. Условие $[x,y]=0$ равносильно условию

$$0 = xy = yx = \alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x = \alpha\theta(y)x - \beta\theta(x)y = \\ = (\alpha-\beta)(\theta(x)y - \theta(y)x).$$

Если $\alpha=\beta$, то $[x,y]=0$ и $\dim_P V \geq 2$. Поскольку θ — ненулевая линейная форма, то $Ker\theta \neq 0$. Из условия $\dim_P V \geq 2$ следует, что существуют элементы $a,b \neq 0 \in A$ такие, что $\theta(b)=0$, $\theta(a)\neq 0$. Поэтому равенство $[\alpha,\beta]=0$ влечет за собой равенство

$$0 = (\alpha-\beta)(\theta(a)b - \theta(b)a) = (\alpha-\beta)\theta(a).$$

Отсюда $\alpha-\beta=0$. Тем самым доказана

Теорема 3. *Алгебра $A(\alpha,\beta,\theta)$ коммутативна тогда и только тогда, когда $\alpha=\beta$ и $\dim_P V \geq 2$.*

В коммутативной алгебре $A(\alpha,\beta,\theta)$ выберем базис $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ с элементом e_1, удовлетворяющим условию

$$\alpha\theta(e_1)=1, \qquad e_k \in Ker\theta \ \ (k=2,3,\dots,n).$$

Поскольку $xy=\alpha\theta(x)y+\alpha\theta(y)x$, то $e_1e_1=2e_1$, $e_1e_k = \\ = \alpha\theta(e_1)e_k = e_k$; аналогично $e_ke_1=e_k$, $e_ke_m=0$ $(k,m = \\ = 2,3,\dots,n)$. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Каждая коммутативная алгебра $A(\alpha,\beta,\theta)$ при $\alpha\neq 0$ и $\theta\neq 0$ изоморфна алгебре A с базисом $(e_1,e_2,\dots,e_n)$, элементы которой удовлетворяют соотношениям*

$$e_1e_1=2e_1,\ e_1e_k=e_ke_1=e_n,\\ e_ke_m=0\ \ (k,m=2,3,,\dots,n).$$

Перейдем к алгебрам с антикоммутативным умножением.

Случай 2. Пусть в алгебре $A(\alpha,\beta,\theta)$ выполняется тождество $xy=-yx$.

Тогда

$$xy = \alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x,$$
$$yx = \alpha\theta(y)x + \beta\theta(x)y.$$

В силу антикоммутативности операции умножения $xy + yx = 0$, поэтому

$$0 = (\alpha + \beta)\theta(x)y + (\alpha + \beta)\theta(y)x.$$

Таким образом,

$$(\alpha + \beta)(\theta(x)y + \theta(y)x) = 0.$$

Предположим, что линейная форма $\theta \neq 0$ и $\dim_P V \geq 2$. Тогда существуют элементы $a \neq 0$ и $b \neq 0$ такие, что $\theta(a) \neq 0$, $\theta(b) \neq 0$. Поэтому будет выполняться равенство

$$(\alpha + \beta)(\theta(a)b + \theta(b)a) = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$(\alpha + \beta)\theta(a)b = 0.$$

Следовательно, $\alpha + \beta = 0$.

Обратное утверждение о том, что равенство $\alpha + \beta = 0$ влечет антикоммутативность операции умножения, то есть $xy = -yx$, является очевидным. Тем самым доказана

Теорема 5. *Операция умножения в алгебре $A(\alpha, \beta, \theta)$ антикоммутативна тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta = 0$.*

Таким образом, операция умножения в алгебре $A(\alpha, -\alpha, \theta)$ задается формулой

$$xy = \alpha\theta(x)y - \alpha\theta(y)x = r(x)y - r(y)x,$$

где $r(x) = \alpha\theta(x)$.

Покажем, что эта операция умножения удовлетворяет тождеству Якоби. Для этого проведем прямые вычисления в выражении

$$x(yz) + y(zx) + z(xy).$$

Вычислим отдельно каждое слагаемое:

$$x(yz) = \eta(x)(yz) - \eta(yz)x =$$
$$= \eta(x)(\eta(y)z - \eta(z)y) - \eta(\eta(y)z - \eta(z)y)x =$$
$$= \eta(x)\eta(y)z - \eta(x)\eta(z)y - \eta(y)\eta(z)x + \eta(y)\eta(z)x =$$
$$= \eta(x)\eta(y)z - \eta(x)\eta(z)y;$$
$$y(zx) = \eta(y)(zx) - \eta(zx)y =$$
$$= \eta(y)(\eta(z)x - \eta(x)z) - \eta(\eta(z)x - \eta(x)z)y =$$
$$= \eta(y)\eta(z)x - \eta(y)\eta(x)z - (\eta(x)\eta(z) - \eta(x)\eta(z)) =$$
$$= \eta(y)\eta(z)x - \eta(x)\eta(y)z,$$
$$z(xy) = \eta(z)(\eta(x)y - \eta(y)x) - \eta(\eta(x)y - \eta(y)x) =$$
$$= \eta(z)\eta(x)y - \eta(y)\eta(z)x.$$

Найдем сумму этих выражений:

$$x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0.$$

Мы доказали, что имеет место

Теорема 6. *Почти йорданова алгебра A, операция умножения в которой задается условием*

$$xy = \eta(x)y - \eta(y)x,$$

является алгеброй Ли.

В этой алгебре размерности ≥ 2 существует базис, относительно которого операция умножения базисных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будет иметь вид:

$$e_1 e_k = e_k, \qquad e_k e_1 = -e_k,$$
$$e_k e_m = 0 \ \ (k, m = 2, \ldots n).$$

Случай 3. Выясним существование среди алгебр $A(\alpha, \beta, \theta)$ ассоциативных алгебр. Рассмотрим ассоциатор

$$(x, y, z) = x(yz) - (xy)z:$$
$$x(yz) - (xy)z = x(\alpha\theta(y)z + \beta\theta(z)y) - (\alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x)z =$$
$$= \alpha\theta(y)(\alpha\theta(x)z + \theta(z)x) + \beta\theta(z)(\alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x) -$$
$$-\alpha\theta(x)(\alpha\theta(y)z + \beta\theta(z)y) - \beta\theta(y)(\alpha\theta(x)z + \beta\theta(z)x) =$$
$$= \alpha^2\theta(y)\theta(x)z + \alpha\beta\theta(y)\theta(z)x + \alpha\beta\theta(x)\theta(z)y +$$

$$+\beta^2\theta(y)\theta(z)x-\alpha^2\theta(x)\theta(y)z-\alpha\beta\theta(x)\theta(z)y-$$
$$-\alpha\beta\theta(x)\theta(y)z-\beta^2\theta(y)\theta(z)x=$$
$$=\alpha\beta\theta(z)(\theta(y)x-\theta(x)y)+$$
$$+2\beta\theta(x)(\theta(z)y-\theta(y)z)=$$
$$=\alpha\beta\theta(y)(\theta(z)x-\theta(x)z).$$

Отсюда следует, что если $\alpha\beta=0$, то $(x,y,z)=0$.

Пусть $(x,y,z)=0$ для всех $x,y,z\in A$. Тогда при $\dim_P A\geq 2$ существуют элементы $a=b\neq 0$, $a\notin Ker\theta$, $c\in Ker\theta$ такие, что

$$(a,a,b)=\alpha\beta\theta(a)(\theta(c)a-\theta(a)c)=-\alpha\beta\theta(a).$$

Отсюда в силу равенства $(a,a,c)=0$ имеем $\alpha\beta=0$. Таким образом, алгебра $A(\alpha,\beta,\theta)$ ассоциативна тогда и только тогда, когда $\alpha\neq 0,\beta=0$ либо $\alpha=0,\ \beta\neq 0$. Случай $\alpha=\beta=0$ приводит к алгебре с нулевым умножением. Учитывая полученные равенства, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 7. *Каждая ассоциативная почти йорданова алгебра $A(\alpha,\beta,\theta)$ изоморфна одной из следующих алгебр с таблицами умножения:*

$$e_1e_i=e_i\ \ (i=1,2,\dots,n);$$
$$e_ie_1=e_i\ \ (i=1,2,\dots,n).$$

Кроме перечисленных алгебр специального типа остается серия алгебр почти йордановых, в которых операция умножения задается формулой

$$xy=\alpha\theta(x)y+\beta\theta(y)x.$$

Список литературы

1. *Jordan P.* Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Klasse. Ausg. 41. Berlin, 1933. S. 209—217.

2. *Gavioli N., Monti V., Scoppola C. M.* Just infinite periodic Lie algebras // Finite groups 2003 : Proc. Gainesville conf. on finite groups in honour of J. Thompson to his 70th birthday. Berlin, 2004. P. 73—85.

3. *Старикова О. А.* Нормальный вид и классы проективно конгруэнтных симметричных матриц // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2019. № 3. С. 27—33.

4. *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М., 1976.

5. *Султанов А. Я., Глебова М. В.* Об алгебре Ли дифференцирований йордановой алгебры билинейной симметрической формы // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 222. С. 94—99. doi: 10.36535/0233-6723-2023-222-94-99.

6. *Попов А. А.* Дифференциально простые йордановы алгебры // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 4. С. 890—901.

7. *Слинько А. М.* О специальных многообразиях йордановых алгебр // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 3. С. 337—344.

8. *Зельманов Е. И., Скосырский В. Г.* Специальные йордановы ниль-алгебры ограниченного индекса // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 6. С. 626—635.

9. *Желябин В. Н., Панасенко А. С.* Почти конечномерные йордановы алгебры // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 5. С. 522—546.

10. *Панасенко А. С.* Йордановы алгебры: классическая теория. Новосибирск, 2024.

11. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1 : Основы алгебры. М., 2002.

12. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. М.* Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1978.

Для цитирования: *Султанов А. Я., Султанова Г. А., Глебова М. В., Монахова О. А.* О некоторых типах почти йордановых алгебр // ДГМФ. 2026. № 57 (2). С. 87—98. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-9.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 17C50

A.Ya. Sultanov[1], G.A. Sultanova[2]
M.V. Glebova[3], O.A. Monakhova[4]
[1, 4] Penza State University,
37 Lermontova Str., Penza, 440026, Russia
[2] Logistic Military Educational Institution named after general A.V. Khrulov
of the Ministry of Defence of the Russian Federation,
125 Military Town, Penza-5, Russia
[3] Financial University under the Government of the Russian Federation, Penza branch,
33b, Kalinina Str., Penza, Russia
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
[3] mvmorgun@mail.ru, [4] oxmonakh@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-9

On some types of almost Jordan algebras

Submitted on April 15, 2026

In this paper, we introduce the concepts of Jordan and almost Jordan algebras over an arbitrary field. Examples of some Jordan algebras are given. It is noted that the class of almost Jordan algebras is wider than the class of Jordan algebras. The existence of various types of almost Jordan algebras over an arbitrary field, distinct from Jordan algebras, is proved. In the paper, in particular, an algebra $A(\alpha, \beta, \theta)$ of a linear form θ and two scalars α and β is constructed on a vector space, the multiplication in which is specified by a special condition. In the work, some properties of the algebra $A(\alpha, \beta, \theta)$ are proved. A condition for the elasticity of this algebra is obtained. It is shown that the algebra under consideration is an almost Jordan algebra.

Among the set of all almost Jordan algebras $A(\alpha, \beta, \theta)$, classes of commutative Jordan algebras and Jordan algebras with anticommutative multiplication are distinguished, and some of their properties are proved. In the article, a condition is obtained for when an almost Jordan algebra is a Lie algebra.

Keywords: Jordan algebra, almost Jordan algebra, almost Jordan algebra over an arbitrary field, Lie algebra

References

1. *Jordan, P.:* Ueber Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik. Nachr. Akad. Wiss. Göottingen. Math. Phys. Kl., 41, 209—217 (1933).

2. *Gavioli, N., Monti, V., Scoppola, C.M.:* Just infinite periodic Lie algebras. Finite groups 2003. Proc. Gainesville conf. on finite groups in honour of J. Thompson to his 70th birthday, Berlin, 73—85 (2004).

3. *Starikova, O.A.:* Normal form and classes of projectively congruent symmetric matrices. Izvestia Vuzov. North Caucasus Region. Natural Sci., 3, 27—33 (2019).

4. *Emkh, J.:* Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory. Moscow (1976).

5. *Sultanov, A.Ya., Glebova, M.V.:* On the Lie algebra of differentiations of the Jordan algebra of a bilinear symmetric form. Itogi Nauki i Techn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 222, 94—99 (2023). doi: 10.36535/0233-6723-2023-222-94-99.

6. *Popov, A.A.:* Differentially simple Jordan algebras. Siberian Math. J., **54**:4, 890—901 (2013).

7. *Slinko, A.M.:* On special varieties of Jordan algebras. Math. Notes, **26**:3, 337—344 (1979).

8. *Zel'manov, E.I., Skosyrskii, V.G.:* Special Jordan nil-algebras of bounded index. Algebra and Logic, **22**:6, 626—635 (1983).

9. *Zhelyabin, V.N., Panasenko, A.S.:* Almost finite-dimensional Jordan algebras. Algebra and Logic, **57**:5, 522—546 (2018).

10. *Panasenko A.S.:* Jordan algebras: classical theory. Novosibirsk (2024).

11. *Kostrikin, A.I.:* Introduction to algebra. Part I. Fundamentals of algebra. Moscow (2002).

12. *Zhevlakov, K.A., Slinko, A.M., Shestakov, I.P., Shirshov A.M.:* Rings close to associative. Moscow (1978).

For citation: Sultanov, A.Ya., Sultanova, G.A., Glebova, M.V., Monakhova, O.A.: On some types of almost Jordan algebras. DGMF, **57**:2, 87—98 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-9.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

Editorial Board

Dr Olga O. Belova, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia) — *Editor-in-chief*; *Dr Katerina V. Polyakova*, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia) — *Executive secretary*; *Prof. Yuri I. Shevchenko*, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia); *Prof. Sándor Bácsó*, University of Debrecen (Debrecen, Hungary); *Prof. Vladimir Balan*, National University of Science and Technology Politehnica (Bucharest, Romania); *Dr Vitaly V. Balashchenko*, Belarusian State University (Minsk, Republic of Belarus); *Dr Ruzinazar Beshimov*, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan); *Dr Tengiz Bokelavadze*, Akaki Tsereteli State University (Kutaisi, Georgia); *Dr Giovanni Falcone*, University of Palermo (Palermo, Italy); *Prof. Graham Hall*, University of Aberdeen (Aberdeen, United Kingdom); *Dr Ágota Figula*, University of Debrecen (Debrecen, Hungary); *Dr Irena Hinterleitner*, Brno University of Technology (Brno, Czech Republic); *Dr Bahar Kırık Rácz*, Marmara University (Istanbul, Turkey); *Dr Mikhail V. Kretov*, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia); *Dr Artur V. Kuleshov*, Immanuel Kant Baltic Federal University (Kaliningrad, Russia); *Prof. Josef Mikeš*, Palacký University Olomouc (Olomouc, Czech Republic); *Prof. Vanya A. Mirzoyan*, National Polytechnic University of Armenia (Yerevan, Armenia); *Prof. Péter Nagy*, Obuda University (Budapest, Hungary); *Prof. Vladimir Yu. Rovenski*, University of Haifa (Haifa, Israel); *Prof. Liudmila L. Sabinina*, Autonomous University of the State of Morelos (Cuernavaca, Mexico); *Prof. Sergey Ye. Stepanov*, Financial University under the Government of the Russian Federation (Moscow, Russia); *Prof. Alexander M. Shelekhov*, Moscow State Pedagogical University (Moscow, Russia); *Prof. Ljubica Velimirovic*, University of Niš (Niš, Serbia)

Published since 1970.
Indexing: MathSciNet (American Mathematical Society), ZBMATH — The database Zentralblatt MATH.
Frequency — twice a year (from 2023)

Publisher:
Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

Научное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

DIFFERENTIAL GEOMETRY
OF MANIFOLDS OF FIGURES

2026

Том 57
№ 2

Корректор *Д. А. Малеваная*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 27.10.2026 г.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 6,3
Тираж 33 экз. Заказ 97

Издательство Балтийского федерального университета им. И. Канта
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14