

ISSN 2500-0403

ВЕСТНИК
БАЛТИЙСКОГО
ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. И. КАНТА

Серия
Физико-математические
и технические науки

№ 1

Калининград
Издательство Балтийского федерального университета
им. Иммануила Канта
2021

Редакционная коллегия

А. В. Юров, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта (главный редактор);
С. В. Мацневский, канд. физ.-мат. наук, доц., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта (ответственный редактор); *Н. Л. Великанов*, д-р техн. наук, проф., Институт транспорта и технического сервиса, БФУ им. И. Канта; *В. Е. Захаров*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *А. И. Иванов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *С. А. Ишанов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *С. Б. Лебле*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *И. В. Карпов*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *С. И. Корягин*, д-р техн. наук, проф., Институт транспорта и технического сервиса, БФУ им. И. Канта; *С. П. Кшевцевский*, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта; *И. Б. Петров*, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. РАН, факультет управления и прикладной математики, Московский физико-технический институт (государственный университет); *А. А. Шананин*, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. РАН, факультет управления и прикладной математики, Московский физико-технический институт (государственный университет); *Б. Н. Четверушкин*, д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН; *А. А. Шпилевой*, канд. физ.-мат. наук, доц., Институт физико-математических наук и информационных технологий, БФУ им. И. Канта

Учредитель

Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта

Редакция

236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Издатель

236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Типография

236001, Россия, Калининград, ул. Гайдара, 6

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-65005 от 04 марта 2016 г.

Тираж 1000 экз.

Дата выхода в свет 16.06.2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика и информатика

<i>Ветров И. А., Подтопелный В. В.</i> Особенности подготовки активного аудита информационной безопасности АСУТП.....	5
<i>Саяпина М. Е.</i> Автоматизированная обучающая система по изучению комплекса радиомониторинга и анализа сигналов	12
<i>Сохарева А. Ю.</i> Разработка автоматизированной обучающей программы «Детектор нелинейных переходов» для дистанционного обучения специалистов по защите информации.....	20
<i>Стрельников Р. В.</i> СОС. Начинает и проигрывает	26
<i>Персичкин А. А., Персичкина Н. В., Шпилевая С. Г.</i> Особенности образования ПЭМИН в клавиатуре компьютера с точки зрения обеспечения информационной безопасности	31

Теоретическая и экспериментальная физика

<i>Колесников А. В., Румовская С. Б., Ясинский Э. В., Демьянец Р. В.</i> Интеллектуализация оперативно-технологического управления региональной электроэнергетикой методами когнитивных гибридных интеллектуальных систем. Часть 2.....	38
<i>Бордаг М., Пирожено И. Г.</i> Возвращение к замкнутой кусочно-однородной струне	51
<i>Бордаг Л. А.</i> Оптимизация инвестиционного портфеля с неликвидным активом в случае экспоненциальной функции полезности	73
<i>Пониматкин В. Е., Шпилевая С. Г., Гоглев В. А., Бурмистров В. И.</i> Передающая антенная система для радиочастотных методов исследования вещества	103

CONTENTS

Mathematics and computer science

Vetrov I.A., Podtopelny V.V. Features of preparation of an active audit of information security of the process control system	5
Sayapina M.E. Automated training system for studying the complex of radio monitoring and signal analysis	12
Sokhareva A.Y. Development of automated study program "Detector of non-linear transitions" for data protection specialists distance learning	20
Strelnikov R. V. SOC. Starts and loses	26
Persichkin A.A., Persichkina N.V., Shpilevaya S.G. Features of the formation of TEMPEST in a computer keyboard from the point of view of ensuring information security	31

Theoretical and experimental physics

Kolesnikov A. V., Rumovskaya S.B., Yasinsky E. V., Demyanets R. V. Intellectualization of operational and technological control of regional electric power by cognitive hybrid intelligent systems. Part 2	38
Bordag M., Pirozhenko I.G. The closed piecewise uniform string revisited	51
Bordag L. A. Portfolio optimization in the case of an exponential utility function and in the presence of an illiquid asset	73
Ponimatkin V.E., Shpilevaya S.G., Goglev V.A., Burmistrov V.I. Transmitting antenna system for radio frequency methods of substance research	103

И. А. Ветров, В. В. Подтопельный

ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ АКТИВНОГО АУДИТА ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ АСУТП

Рассмотрены проблемы, возникающие на предприятии при постановке задач активного аудита информационной безопасности автоматизированных систем управления технологическими процессами при использовании трансляции данных в режиме реального времени. Указаны особенности методики определения безопасного активного аудита автоматизированных систем управления при их совместной работе с другими системами. Рассмотрены особенности определения параметров безопасного аудита многоуровневых автоматизированных систем управления.

The problems that arise when setting the tasks of active audit of information security of automated control systems for technological processes when using data transmission in real time at the enterprise are considered. The features of the methodology for determining the safe active audit of automated process control systems when they work together with other systems are indicated. The features of determining the parameters of a secure audit of multi-level APCS are considered.

Ключевые слова: аудит, риск, информационная система, автоматизированная информационная система технологических процессов, уязвимость

Keywords: audit, risk, information systems, automated information system of technological processes, vulnerability

Введение

При аудите информационной безопасности (ИБ) инфраструктуры современных производственных предприятий следует учитывать распределение подсистем автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУТП) по функциональным уровням. Аудит активного типа производится при функционировании системы, что может негативно повлиять на скорость передачи данных и работоспособность системных компонентов. Соответственно, из-за специфики среды исследования набор задач и порядок процедур аудита АСУТП будет отличаться от набора задач и порядка, принятого при исследовании безопасности корпоративных информационных систем (КИС), в среде которых ошибки при трансляции допустимы. Кроме того, содержательная часть подобных задач должна включать отдельное рассмотрение угроз, возникающих по отношению к системным сервисам и трафику в режиме производственной эксплуатации АСУ (real-time) при инструментальном поиске уязвимостей.



Определение специфики подготовки безопасного активного аудита информационной безопасности АСУТП

Изначально в соответствии с порядком решения задач аудита перед инструментальным поиском уязвимостей требуется провести комплексное исследование инфраструктуры АСУТП: определить специфику передачи информации, протоколы промышленного типа, способ распределения данных, службы, функционирующие в границах уровня АСУ. Также необходимо распределить системные компоненты и актуальные протокольные среды по выделенным уровням. Обычно выделяют следующие уровни:

6

- уровень КИС;
- диспетчерский уровень, на котором совмещаются компоненты и протоколы промышленного типа и уровня КИС (сервисы и протоколы семиуровневой модели OSI);
- уровень, на котором используется только компоненты и протоколы обработки промышленных данных (полевой уровень).

Далее необходимо решить следующие задачи [1; 2]:

1. Сбор информации с уровневым разделением (инвентаризация).
2. Поиск уязвимостей (при решении этой задачи предполагается не только анализ транслируемой информации, но и активное воздействие на нее и ее источник). При этом поиск уязвимостей может быть реализован даже в организационной составляющей комплекса ИБ. Процедура активного сбора и аудита технической составляющей предполагает определение:

- будут ли задержки при передаче данных;
- будет ли искажения информации при передаче данных;
- будут ли изменяться настройки систем передачи данных и т. д.

3. Анализ угроз, обнаруженных уязвимостей и вычисление рисков с последующим определением уровня защищенности.

Так как условия проведения аудита ИБ всех уровней инфраструктуры предприятия разные, как и число процедур на различных уровнях АСУТП предприятия, следует выделить две модели аудита:

- 1) модель аудита, которая относится непосредственно к верхним уровням – модель КИС;

- 2) модель аудита нижних уровней (три уровня, на которых активно используются промышленные протоколы). Она будет содержать дополнительные задачи, связанные с вычислением успешной реализации процедур аудита и времени его безопасной реализации. На основе анализа полученных в результате вычислений данных необходимо принимать решение о целесообразности применения инструментального поиска уязвимостей и определения меры их эксплуатируемости на рассматриваемых уровнях.

Поскольку основная проблема активного аудита в сетевых системах реального времени связана именно с задержкой передачи данных, то



очевидно, что угрозы, которые существуют в системе, не относятся к типичным видам угроз ИБ (перехват данных, подмена таковых, раскрытие конфиденциальной информации). Основными угрозами при активном аудите являются именно возникновение не предполагаемой алгоритмом протокола задержки пакета данных или появление недопустимых периодов прерывания трансляции, которые препятствуют передаче данных в режиме real-time, вызывая их запаздывание, недопустимое по технологическим спецификациям уровня АСУТП. Поскольку воздействие активного аудита приводит к тем же результатам, что и целенаправленная атака, то их можно отождествить с той лишь разницей, что тип угрозы при аудите заранее известен и по способу реализации неизменен. Соответственно, перед проведением аудита требуется рассмотреть проблемы возникновения рисков прерывания трансляции технических данных, которые могут привести к повреждению системы и, соответственно, прекращению самих процедур аудита.

7

Таким образом, этапы анализа будут включать не только выявление угроз и уязвимостей, определение рисков, но и предварительный анализ безопасности процедуры аудита на основе априорных оценок рисков возникающего при исследовании систем АСУТП негативного воздействия инструментария исследования. Это является отличительной особенностью реализации активного аудита в системах реального времени (разного типа) на предприятиях с распределенными функциональными уровнями АСУТП. Соответственно, в список задач требуется внести дополнительную задачу определения безопасности процедур поиска уязвимостей и инвентаризации системных сервисов исследуемой инфраструктуры.

Поскольку угроза при процедуре аудита была определена как временной период, за который система утрачивает функциональность, необходимо подобрать такую модель расчета успешности аудита, которая будет учитывать специфику используемых параметров, то есть позволит вычислить вероятность появления задержки при передаче данных, период ее существования и период штатного функционирования системы при активном аудите. Такая модель может быть основана на методике определения надежности функционирования систем.

Предполагается, что период, учитываемый в расчетах, охватывает время сканирования инфраструктурных компонентов. Любая задержка трансляции информационных пакетов промышленных протоколов типа CAN, ModBus, HART приводит к нарушению режима работы real-time и, соответственно, будет считаться отказом (поскольку переданная информация не пришла к адресату вовремя в соответствии со спецификацией протокола) [3]. Тогда интенсивность отказов будет трактоваться как интенсивность (среднее число) фиксаций задержек при передаче данных в процессе активного аудита ИБ в режиме real-time. Несмотря на то что угрозы задержек трансляции на каждом уровне типологически тождественны, длительность задержки, которая будет являться критичной, для каждого уровня будет своя. Соответственно, интен-



сивность отказа системы передачи данных по промышленным протоколам равна сумме интенсивностей задержек фиксируемых при аудите на каждом уровне АСУТП и рассчитывается по следующей формуле [6]:

$$A = \sum_{i=1}^n a_i, \quad (1)$$

где A – интенсивность отказа системы передачи данных по промышленным протоколам; a_i – интенсивность задержек при аудите.

Таким образом, вероятность $p(t)$ исправной работы в течение интервала времени проведения аудита t с учетом интенсивности отказов, то есть задержек при передаче данных, определяется так:

$$p(t) = e^{-at}. \quad (2)$$

Учитывая уровневую сегментацию АСУТП, можно рассчитать для каждого уровня вероятность исправной работы и вычислить вероятность исправной работы в целом для системы, суммируя показатели всех существующих на производстве систем, связанных с передачей данных в режиме real-time, и таким же образом вычислить среднее время работы взаимосвязанных систем АСУТП.

Однако с учетом связанности уровней инфраструктуры необходимо рассматривать влияние функционала одной подсистемы на работоспособность других. Поскольку это влияние определяется спецификой промышленных протоколов и служб, показатель вероятности исправной работы должен отражать специфичность данных взаимосвязей и взаимозависимостей. С другой стороны, учитывая технологическую специфику рассматриваемых уровней (три нижних уровня АСУТП технологически схожи), их можно объединить в единый сегмент. Решение рассматривать подсистемы реального времени как единый сегмент или как несколько взаимосвязанных зависит от специфики распространения протокольных сред и системных сервисов на следующих уровнях АСУТП [5]:

- уровень диспетчерского управления;
- уровень автоматического управления и полевого управления.

Использование промышленных протоколов между уровнем диспетчерского управления и уровнем автоматического управления, уровнем автоматического управления и полевого управления подразумевает наличие взаимосвязей между их службами.

Далее необходимо рассмотреть промежуток времени между двумя задержками при передаче пакетов по промышленным протоколам. Данный параметр является показателем времени успешной работы системы при активном аудите до первого отказа (задержки), обозначается как «наработка на отказ трансляции данных при активном аудите и инвентаризации сетевых сервисов» (H) и рассчитывается по следующей формуле [6]:

$$H = \frac{1}{A}. \quad (3)$$



Для каждого уровня АСУ этот показатель рассчитывается отдельно. Однако если рассматривать два нижних уровня как единый сегмент автоматизированной системы, то и время наработки на отказ будет единым для данной сборки уровней. Таким образом, можно выявить время успешной работы систем аудита и инструментария инвентаризации сетевых сервисов без прерывания трансляции данных, возможные периоды возникновения проблем с передачей данных и вероятность возникновения этих проблем в период активной эксплуатации промышленных протоколов в режиме real-time.

Поскольку в состоянии системы «как есть» (as-is) параметр времени восстановления H_r будет оцениваться как время, которое потребуется для возобновления режима real-time, то, соответственно, данный параметр не следует рассматривать как показатель нивелирования канала несанкционированного доступа (НСД). В данном случае возникновения угроз НСД, в отличие от параметров вычислительной модели риска, рассматривается всего одна угроза (задержка трансляции данных), которая хорошо известна и перекрывается простым отключением инструментов исследования подсистем АСУТП. При этом система в режиме real-time (в соответствии с моделью) возобновит свою работу так же, как если бы возобновляла свою работу система защиты, при условии того что она была бы повреждена. Это позволяет определить коэффициент готовности возобновления трансляции данных с требуемой скоростью и выявить, насколько этот коэффициент соответствует тому показателю, который означал бы возможность возобновления работы системы без каких-либо критических ее повреждений. Таким образом, коэффициент готовности системы возобновить трансляцию и работу в целом без критических повреждений является ключевым показателем в модели расчетов:

$$K_w = \frac{H}{(H - Hr)}. \quad (4)$$

Соответственно, можно вычислить также коэффициент неготовности K_{nw} системы к возобновлению трансляции данных в режиме реального времени:

$$K_{nw} = 1 - K_w. \quad (5)$$

Совмещение работы систем в режиме real-time и работы в виртуальном режиме возможно на одном уровне АСУ предприятия. Поэтому всегда следует дифференцированно подходить к вопросу определения допустимого времени прерывания трансляции данных и количества задержек (нужно знать точно компонентный состав анализируемого оборудования, его характеристики, спецификации протокольных сред).

При выявлении специфики активного аудита и порядка его проведения предварительно не требуется анализировать модель нарушителя



и применять таковую при обработке собранных данных. Это существенно облегчает работу по подготовке процедур безопасного активного исследования подсистем АСУТП при их непосредственной эксплуатации.

Выводы

Таким образом, перед проведением активного аудита АСУТП, работающих на диспетчерском, полевом и других уровнях, компоненты которых используют промышленные протоколы, требуется решить ряд дополнительных задач. Первоначально следует разделить АСУ предприятия на уровни, использующие и не использующие реальный режим. Затем необходимо проанализировать исследуемые системы и определить специфику (допустимость) проведения активного аудита. В процессе анализа нужно определить вероятность успешной работы системы при использовании инструментария аудита (ключевой параметр), допустимое время задержки с учетом спецификаций промышленных протоколов, время успешной работы аудита до возможного первого отказа. Последний параметр необходим для создания специальной методики активного аудита, которая будет ориентироваться на допустимые периоды тестирования в соответствии с технологическими спецификациями промышленных протоколов АСУТП. В системах с мягким режимом real-time минимальные задержки допустимы. Поэтому следует применять методику тестирования с учетом времени восстановления скорости трансляции данных и работы сервисов, которое не должно превышать периода отсутствия информационных пакетов в канале передачи данных. Для более точного определения этих параметров требуется определить еще один ключевой параметр – коэффициент готовности системы возобновить трансляцию.

Список литературы

1. Аверичников В.И., Рытов М.Ю., Кувылкин А.В., Рудановский М.В. Аудит информационной безопасности органов исполнительной власти: учеб. пособие. М., 2011.
2. Астахов А. Введение в аудит информационной безопасности: доклад // GlobalTrust Solutions. 2018. URL: <http://globaltrust.ru> (дата обращения: 29.01.2018).
3. Большев А., Чербов Г., Черкасова С. Компоненты DTM: тайные ключи к королевству АСУ ТП / Исследовательский центр DigitalSecurity. М., 2014.
4. Горбачев И.Е., Глухов А.П. Моделирование процессов нарушения информационной безопасности критической инфраструктуры // Тр. СПИИРАН. 2015. Вып. 1 (38). С. 112–135.
5. Макаренко С.И. Аудит информационной безопасности: основные этапы, концептуальные основы, классификация мероприятий // Системы управления, связи и безопасности. 2018. №1. URL: <http://sccs.intelgr.com/archive/2018-01/01-Makarenko.pdf> (дата обращения: 15.01.2021).
6. Щеглов А.Ю. Защита компьютерной информации от несанкционированного доступа. СПб., 2004.



Об авторах

Игорь Анатольевич Ветров – канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: vetrov.gosha2009@yandex.ru

Владислав Владимирович Подтопельный – ст. преп., Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота ФГБОУ ВО «КГТУ», Россия.

E-mail: ionpvv@mail.ru

The authors

Dr Igor A. Vetrov, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: vetrov.gosha2009@yandex.ru

Vladislav V. Podtopelny, Assistant Professor, Baltic State Academy of Fishing Fleet, Russia.

E-mail: ionpvv@mail.ru

М. Е. Саяпина

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ОБУЧАЮЩАЯ СИСТЕМА ПО ИЗУЧЕНИЮ КОМПЛЕКСА РАДИОМОНИТОРИНГА И АНАЛИЗА СИГНАЛОВ

12

Предложены пути и принципы создания автоматизированных обучающих систем на примере обучающей программы по изучению комплекса радиомониторинга и анализа сигналов (класса «Кассандра») для подготовки специалистов по информационной безопасности. Данные разработки могут быть использованы образовательными организациями и учебными центрами, ведущими подготовку в этой области.

The article proposes ways and principles of creating automated training systems using the example of a training program for studying a radio monitoring and signal analysis complex (Kassandra class) for training information security specialists, which can be used by educational organizations and training centers conducting training in this area.

Ключевые слова: обучающая система, радиомониторинг, анализ сигналов, «Кассандра»

Keywords: training system, radio monitoring, signal analysis, Kassandra

В современном мире информационные технологии затрагивают многие сферы нашей жизни. Не обошли они стороной и образование. Для подготовки и переподготовки специалистов в области информационной безопасности начали создавать автоматизированные обучающие системы. Разработка таких систем весьма актуальна, так как позволяет образовательным организациям и учебным центрам, осуществляющим подготовку, повышение квалификации и переподготовку специалистов по защите информации, повысить качество обучения, не прибегая к использованию в учебном процессе реального дорогостоящего оборудования, зачастую имеющегося в организациях в единичном экземпляре.

Автоматизированная обучающая система представляет собой комплекс теоретической, практической и организационной составляющих. Она строится на основе продуктивного взаимодействия с пользователем путем диалоговых окон, меню форм, что делает интерфейс понятным. Улучшению восприятия учебного материала, а значит, и повышению эффективности обучаемости способствуют анимации и другие объекты мультимедиа. Также возможно использование видеуроков. Обучающая программа может оценивать уровень усвоения материала пользователем путем проведения тестов. Пользователь получает возможность оценить уровень своих знаний и при необходимости повторить материал. Тем самым автоматизированные обучающие системы



могут как в полной мере выполнять роль преподавателя, так и быть средством взаимосвязи в обучении между пользователем программы и преподавателем [1].

Программы строятся на основе адаптивных алгоритмов, позволяющих реализовать удобную навигацию по программе и структурировать информацию для лучшего ее понимания и усвоения. Подобные алгоритмы строятся с учетом особенностей восприятия человеком информации. После создания схемы алгоритма отбирается и структурируется необходимая информация для каждого пункта. Реализация происходит покадрово (по пунктам) и, как правило, слева направо и сверху вниз. Расположение элементов в таком порядке является наиболее организованным и понятным.

13

Ниже приведены элементы интерфейса разработанной обучающей программы по изучению комплекса радиомониторинга и анализа сигналов «Кассандра К6», реализованной на основе созданного алгоритма. Данная программа предназначена для подготовки специалистов по компьютерной безопасности и бакалавров по информационной безопасности в Институте физико-математических наук и информационных технологий БФУ им. И. Канта.

Элементы программы реализованы на основе оптимизированных алгоритмов, обладают понятным диалоговым интерфейсом, удобной навигацией (рис. 1), обеспечивают эффект прямого манипулирования элементами оборудования, насыщены дополнительными формами и анимацией. Все эти аспекты позволяют проводить обучение более продуктивно.

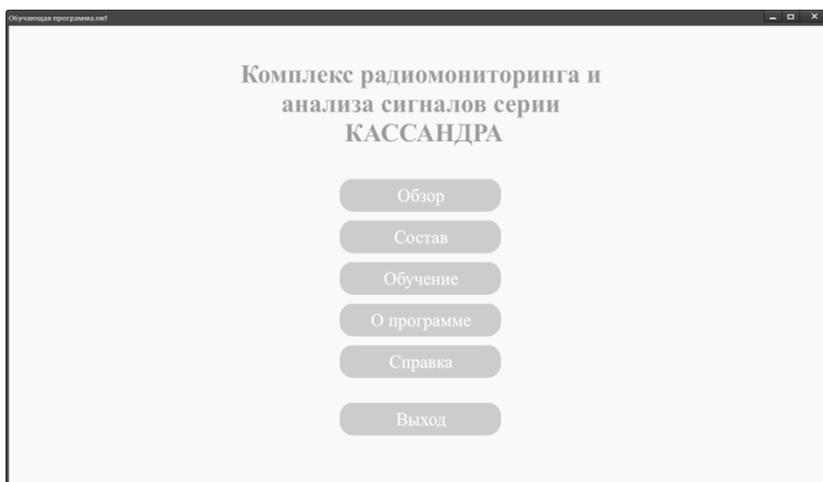


Рис. 1. Меню программы

Вкладка *Обзор* знакомит пользователя с устройством различных моделей комплекса «Кассандра», их техническими характеристиками и функциональными схемами (рис. 2).



Рис. 2. Обзор комплексов серии «Кассандра»

Во вкладке *Технические характеристики* можно подробно узнать о параметрах каждого комплекса: радиочастотной части, цифровой обработке, массе, габаритах и т. д. *Функциональная схема* рассказывает об устройстве и работе программно-аппаратного комплекса (рис. 3). Подробнее его элементы будут рассматриваться дальше.

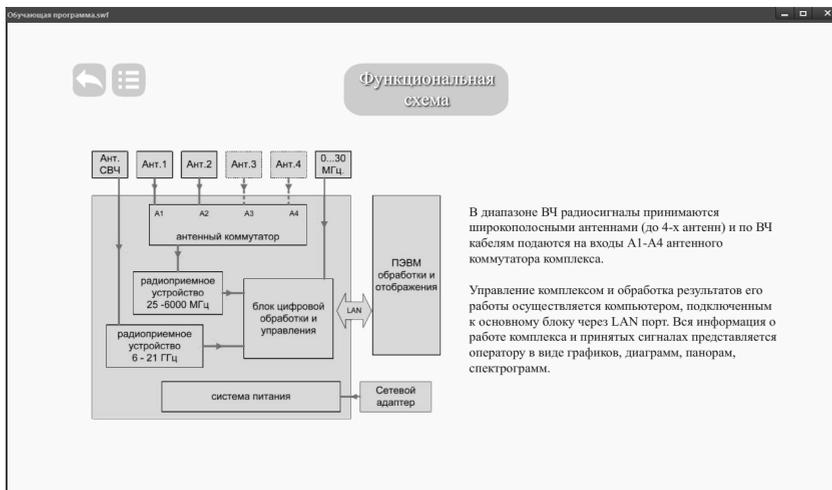


Рис. 3. Функциональная схема

В разделе *Конструкция* наглядно показываются и описываются все органы управления и коммутации реального комплекса, что помогает пользователю быстрее запомнить функциональность различных кнопок, значения индикаторов и т.п. (рис. 4). Зная функции органов управления, пользователь сможет быстро приступить к практической



работе на комплексе. При необходимости при клике по конструкции она откроется в новом окне в большем масштабе. Информация представлена кратко и ясно, по числовым меткам.



Рис. 4. Конструкция

Комплектацию комплекса можно увидеть во вкладке *Состав*. Здесь представлены элементы как базового комплекта, так и расширенного. Элементы и соответствующие им названия выделяются (путем увеличения размера или жирным шрифтом) при наведении курсора, а подробное описание можно увидеть, кликнув по элементу или его названию (рис. 5). Такие манипуляции с объектами программы говорят о простоте и удобстве обучения.



Рис. 5. Элементы комплекса и их описание



Автоматизированная обучающая система предоставляет возможность не только получить теоретические знания, но и применить их на практике. Так, программа обучения состоит из *теоретической* и *практической частей*, а для комплексного изучения, не требующего действий пользователя, представлен *автоматический режим* (рис. 6).

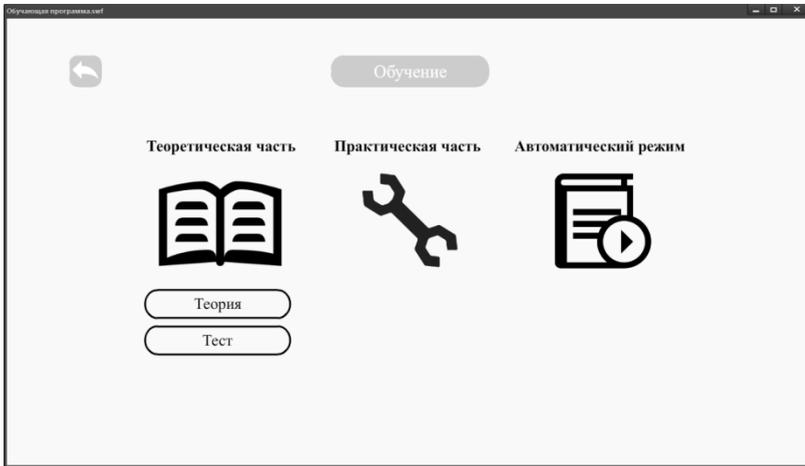


Рис. 6. Режимы обучения

В *теоретической части* пользователь может подробно узнать о принципах работы комплекса радиомониторинга. В данном разделе с помощью графики последовательно описываются процессы, происходящие в различных частях основного блока (рис. 7). После изучения материала автоматизированная обучающая система позволяет проверить степень освоения информации с помощью теста. При использовании обучающей программы группой людей можно централизовать тестирование. Тогда данные и результаты тестов, которые вычисляются программой самостоятельно, будут переданы и доступны преподавателю.

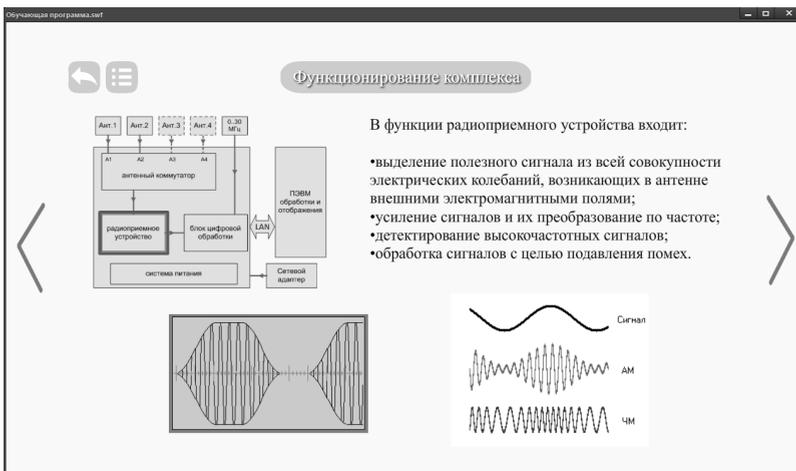


Рис. 7. Функционирование комплекса



Практическая часть позволяет пользователю ознакомиться с органами управления и получить навыки эксплуатации путем выполнения последовательных заданий, а также самостоятельно практиковаться в работе с комплексом. Манипуляции можно проводить как с самими элементами, так и с их органами управления – кнопками, разъемами и т.д. На рисунке 8 показано окно, предоставляющее поле для работы с элементами комплекса радиомониторинга, где пользователь может переносить и объединять объекты, манипулировать органами управления основного блока, взаимодействовать с различными кабелями и разъемами. Все действия выполняются на интуитивном уровне, не требуют специальных знаний и навыков. Для удобства используются дополнительные окна, в которых также выполняются некоторые действия.

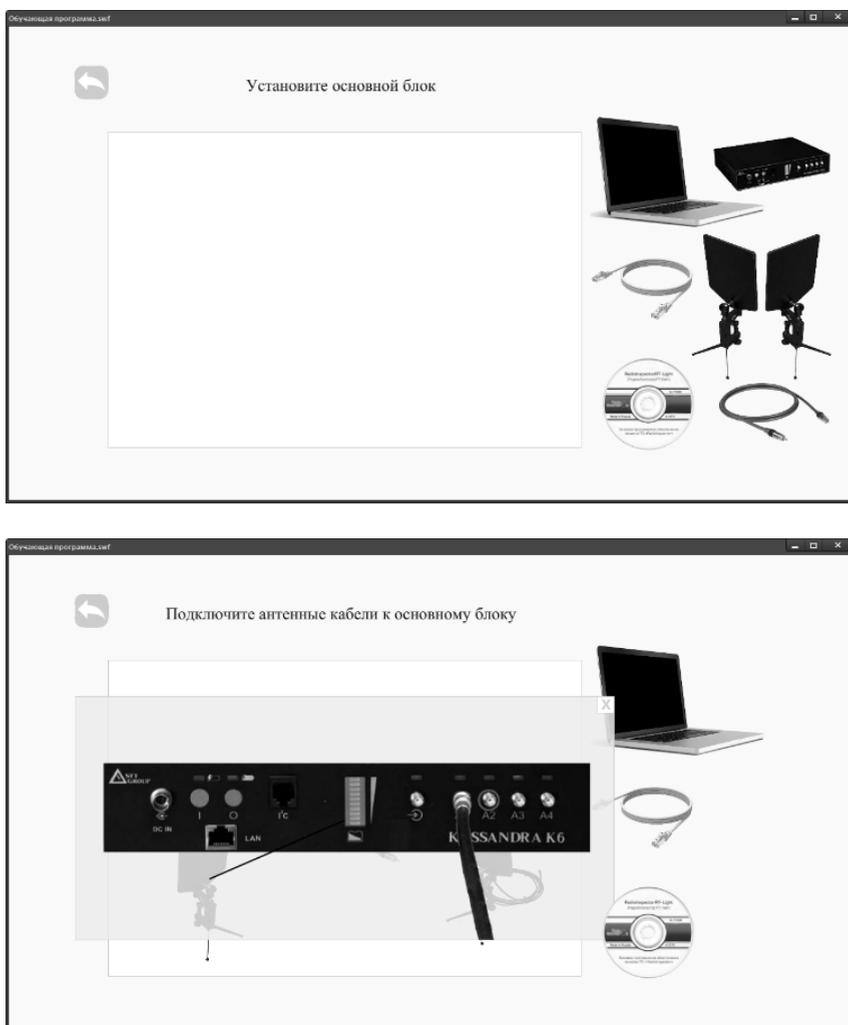


Рис. 8. Практическая часть обучения



Для ознакомления с функциональными возможностями предлагается режим с указателями и всплывающими окнами, отображающимися при наведении на кнопку или элемент. В связи с широкой функциональностью программного обеспечения в программе отображены наиболее важные функции.

Автоматический режим представляет собой последовательное предъявление информации пользователю, порядок работы с комплексом без участия самого пользователя. Для лучшего понимания материала в данный режим можно включить видеуроки.

Раздел *Справка* предоставляет информацию об используемых в программе источниках и позволяет загрузить некоторые файлы источников при нажатии на него.

Подобные автоматизированные обучающие системы в полном объеме дают пользователю представление о работе оборудования и его эксплуатации. К тому же различные методы концентрации внимания и упрощения понимания делают такие программы адаптированными под обучение, а простой и понятный интерфейс, диалоговые окна позволяют проводить обучение без вмешательства преподавателя. Данный способ обучения считается обоснованно эффективным и уже используется в некоторых учреждениях.

Преимуществом подобного рода обучения является возможность удаленного обучения без вмешательства преподавателя. Актуальность таких обучающих программ также связана с высокой стоимостью оборудования для защиты информации и необходимостью обучения работе с ним.

Описанная выше программа реализована в среде разработки Adobe Flash Professional CS с использованием языка ActionScript 3.0. Данная среда разработки предоставляет широкий диапазон возможностей для создания подобных автоматизированных рабочих систем, а также является мощным средством создания различных анимаций и мультипликаций, что положительно сказывается на восприятии информации и становится большим преимуществом в обучении. Работа с анимациями также не требует широких знаний в данной области и серьезных затрат: многие движения анимаций реализуются путем установки начального и конечного положения, формы и других характеристик, далее программа сама прорисовывает промежуточные кадры.

Программа реализована на языке программирования ActionScript 3.0, совместима с операционными системами Windows, Linux и macOS, не требует специального софта, занимает 30 Мбайт памяти.

Данная автоматизированная обучающая система может быть использована при освоении дисциплины «Техническая защита информации», входящей в учебный план.

Список литературы

1. *Ветров И. А.* Практическое применение методологии интенсивного информатизированного обучения для подготовки специалистов по информации.



онной безопасности // Доклады V Пленума СибРУМО по образованию в области информационной безопасности и XIII конференции (Томск, Новосибирск, 5–9 июня 2012 г.). Томск, 2012.

Об авторе

Мария Евгеньевна Саяпина – студ., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
E-mail: tatulya1998@mail.ru

The author

Maria E. Sayapina, Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: tatulya1998@mail.ru

А. Ю. Сохарева

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ «ДЕТЕКТОР НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕХОДОВ» ДЛЯ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО ЗАЩИТЕ ИНФОРМАЦИИ

20

Предложены пути создания автоматизированных обучающих систем для повышения качества подготовки специалистов по информационной безопасности в дистанционном формате на примере обучающей программы «Детектор нелинейных переходов».

The article proposes ways to create automated training systems to improve the quality of training information security specialists in a remote format using the example of the training program «Nonlinear transition detector».

Ключевые слова: автоматизированная обучающая программа, программный тренажер, детектор нелинейности, платформа Adobe Animate

Keywords: automated training program, software simulator, nonlinearity detector, Adobe Animate platform

В настоящее время значительно вырос уровень внедрения дистанционных образовательных технологий для подготовки квалифицированных специалистов различного профиля. Данный вопрос стал еще более актуальным в условиях распространения коронавируса, когда образовательные организации и учебные центры фирм и предприятий оказались вынуждены переводить своих сотрудников и обучающихся на удаленную работу и дистанционную форму обучения. При этом остро встал вопрос обучения, повышения квалификации и переподготовки специалистов по информационной безопасности, которые изучают программно-аппаратные и телекоммуникационные средства защиты информации. Кроме того, высокая стоимость перечисленного оборудования не всегда позволяет осуществить на должном уровне обучение группы специалистов по защите информации, так как оборудование в образовательных организациях или предприятиях представлено либо в единичном экземпляре, либо эксплуатируется для выполнения других (конкретных) задач.

Решением данной проблемы является разработка и применение автоматизированных обучающих систем (АОС) с набором различных задач, теоретических материалов, с разными способами представления информации. Такие АОС могут получить широкое применение как для очного, так и для дистанционного обучения, позволят самостоятельно отработать умения и навыки работы со средствами защиты информации. Это, несомненно, повысит эффективность обучения и даст возможность самостоятельной квалифицированной подготовки. В данной статье представлен один из подходов к разработке АОС в виде обучающей программы по изучению детектора нелинейных переходов, используемого для решения ряда задач по защите информации.



Мы предлагаем разрабатывать автоматизированную обучающую систему в виде программно-технического комплекса, включающего в себя методическую, учебную и организационную поддержку процесса обучения, проводимого на базе информационных технологий. При этом АОС выполняет функции не только электронного учебника, обучающей программы, но и программного тренажера, позволяющего изучать оборудование и отрабатывать инженерные, эксплуатационные и навигационные задачи, что обеспечивает доступное образование высокого качества.

Предлагаемая структура АОС содержит два блока:

а) учебный, формирующий процесс обучения и включающий информационно-образовательные и исследовательские ресурсы, материалы тестовых заданий, осуществляющих контроль знаний, необходимые учебные материалы, видеоуроки, тесты;

б) программный – программные средства, управляющие информацией и базами данных автоматизированной системы, позволяющие анализировать и оценивать уровень знаний обучающихся [1].

Разработанная автоматизированная обучающая программа включает следующие элементы:

– учебное пособие, имеющее качественный, удобный интерфейс и состоящее из учебных материалов и руководств по эксплуатации технических средств, представленных в различных формах: изображение, текст, видео, анимация;

– теоретические сведения и тестовые задания;

– режим изучения средства защиты информации;

– список научной литературы.

В режиме изучения технического средства представлены следующие информация и возможности:

– описание и отображение структурных и функциональных схем технического оборудования;

– имитация формирования и прохождения сигналов нелинейного локатора и их отображение на схемах;

– описание состава, функций и назначения блоков и элементов;

– инструкции по неисправностям оборудования и способам их устранения;

– возможность самостоятельного поиска обучающимися причин неисправностей и анализ действий в процессе их поиска;

– возможность использования различных режимов обучения (автоматический и ручной);

– техническая и специальная литература;

– видеоуроки и тестовые задания с контролем знаний обучающихся [2].

Учебное пособие в совокупности с обучающей программой составляют программный тренажер. Режим работы данного тренажера аналогичен режиму работы технического оборудования и должен включать в себя режим эксплуатации технического средства; отображение навигационной среды, органов управления, реальных настроек технического средства и его регулировки; контроль действий обучающегося.



Ниже приведены некоторые элементы интерфейса разработанной обучающей программы по изучению детектора нелинейности, имеющей удобную и понятную навигацию для лучшего восприятия пользователя при подготовке или повышении квалификации в области информационной безопасности [3].

Главное меню программы (рис. 1) содержит основные разделы, находящиеся на пользовательском экране. Данная структура является максимально воспринимаемой и удобной для реализации автоматизированной обучающей программы и состоит из таких разделов, как «Обзор», «Состав», «Структура», «Обучение». Первый раздел содержит обзор основных, наиболее отличных друг от друга детекторов нелинейности, их назначение и технические характеристики (рис. 2). Во втором разделе, «Состав», рассматриваются все элементы, входящие в комплект изделия. Представлен обзор каждого элемента в отдельности и его взаимодействия с другими элементами. В разделе «Структура» приведены структурные схемы работы устройства и прохождения сигнала в приборе, каждый элемент схемы имеет подробное описание, возникающее при наведении на объект. Раздел «Обучение» позволяет ознакомиться с теоретическими сведениями по работе с прибором и применить полученные знания на практике.

ДЕТЕКТОР НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕХОДОВ



Рис. 1. Основное окно обучающей программы

Переносной детектор нелинейных переходов «NR-900S»



ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Предназначен для поиска скрыто установленных электронных устройств, содержащих полупроводниковые компоненты, таких как радионяушники, проводные микрофоны, средства звука и видео записи, электронные таймеры, исполнительные механизмы самодельных взрывных устройств и т.п., находящихся как во включенном, так и в выключенном состоянии. Обеспечивает эффективный поиск и высокую степень локализации местоположения искомых объектов в ограждающих строительных конструкциях, в предметах интерьера. Обеспечивает оператору возможность отличить объекты поиска от естественных (коррозионных) нелинейных отражателей. Предоставляет возможность выявления и селекции активных электронных цепей на фоне помеховых электронных устройств.

Технические характеристики:

- Несущая частота зондирующего сигнала передатчика
- Ослабление мощности зондирующего сигнала
- Чувствительность приемника при отключенном сигнале/шум
- Динамический диапазон приемников
- Дальность обнаружения штатного имитатора*
- Коэффициенты усиления
 - передаточной антенны
 - приемной антенны
- Положительная антенна (коэффициент зилитичности)
- Уровень заднего лепестка диаграммы направленности передающей и приемной антенны
- Источник питания
- Время непрерывной работы
- Режим поиска
- Режим 20К

848 МГц,
одна ступень, 9 дБ,
не хуже 40 мВт, 138 дБ/Вт,
не менее 40 дБ,
не менее 1 м
не менее 6 дБ
не менее 8 дБ
круговое (не хуже 0,8)
не более 15 дБ
автоматич., встроенный
не менее 8 часов
не менее 4 часов

НА ГЛАВНУЮ НАЗАД ОБЗОР ВПЕРЕД

а

НА ГЛАВНУЮ НАЗАД ОБЗОР ВПЕРЕД

б

Рис. 2. Раздел «Обзор»: а – назначение и функции прибора; б – технические характеристики



Расположение разделов обеспечивает обучающемуся последовательный переход от обзора, детального изучения существующих устройств, их состава и структуры к изучению инженерных и эксплуатационных задач технического средства.

Информация в пользовательском окне размещается слева направо, все иллюстрации, схемы, анимации обычно располагаются в левой части или в середине экрана, а текст — в правой части или внизу, написание производится шрифтом без засечек для удобства восприятия пользователем. Кнопки навигации и переключения по уровням отделов «Вперед», «Назад», «На главную» находятся в нижней части экрана и позволяют легко ориентироваться (рис. 2). Пользователю доступно прямое взаимодействие с объектами на экране и манипуляции с элементами прибора, что позволяет более наглядно знакомиться с изделием без его фактического наличия.

Обучающая программа содержит различные учебные режимы (рис. 3): теоретический, видеообучение, автоматический, ручной (самостоятельный). Теоретический режим обучения включает в себя учебные материалы по общему назначению нелинейных локаторов, по внутренней работе прибора, по технической эксплуатации и ее ограничениям, по размещению, хранению и транспортировке изделия.



Рис. 3. Раздел «Обучение»:
 а — основные режимы; б — раздел автоматического режима

В разделе видеообучения пользователь может ознакомиться с видео, в котором демонстрируется работа с нелинейным локатором. Автоматический режим состоит из разделов, направленных на изучение пульта управления и индикации детектора нелинейности, режимов работы устройства, включения прибора и проверки его работоспособности, схем прохождения сигналов в приборе и показателей пульта индикации при наличии и отсутствии объекта поиска (радиоэлектронного запоминающего устройства). Схема прохождения сигнала анимированна, что позволяет наглядно ознакомиться с внутренним устройством прибора и лучше понять принцип его работы. Также в разделе автоматического



обучения пользователю предоставляется возможность самостоятельной работы с прибором, после изучения всех подразделов можно проверить полученные знания на практике с помощью ручного режима использования нелинейного локатора. Обучающемуся предлагается выполнить последовательность действий для включения прибора и проверки его работоспособности с помощью штатного имитатора поиска радиоэлектронных устройств (рис. 4, а). Приведены иллюстрации реального внешнего вида технического устройства и всех его элементов, что позволяет пользователю реально представлять техническое средство и работу с ним.



Рис. 4. Пульт управления и индикации:

а – включение и проверка работоспособности прибора; б – характеристика

В программе применяются средства анимации и диалогового взаимодействия с пользователем. Также для концентрации внимания на различных элементах прибора, в частности пульта управления и индикации (рис. 4, б), используется эффект подсвечивающихся мигающих рамок или появления текстовой справки при наведении курсора мыши на элемент состава. При нажатии на элемент осуществляется переход к блоку с более подробной информацией, назначением и функциями.

Для лучшего восприятия и понимания материала в программе заложена возможность просмотра не только текстовых теоретических сведений, но и учебных видеоматериалов, а также использования программного тренажера по эксплуатации детектора нелинейности.

Возможности автоматизированной обучающей программы реализованы программными средствами платформы Adobe Animate с встроенным объектно-ориентированным языком программирования ActionScript, базирующемся на библиотеках JavaScript. С помощью встроенного языка можно запрограммировать объект на выполнение различных задач пользователя, что обеспечивает наглядную демонстрацию работы технического средства, взаимодействие пользователя с объектами на экране и полное его вовлечение в процесс обучения. Программа обладает модульной гибкой структурой, позволяющей изменять и дополнять ее информационную составляющую и функцио-



нальные возможности, благодаря чему при необходимости можно достаточно быстро перенастроить программный блок и внести изменения в информационные ресурсы.

Данная обучающая программа реализована практически и может быть внедрена в учебный процесс для подготовки специалистов по компьютерной и информационной безопасности в рамках такой дисциплины, как «Технические средства защиты информации». Программа совместима с операционными системами Windows, macOS и Linux.

Список литературы

1. Щерипанова Д.А. Динамика использования и развития автоматизированных обучающих систем // Аллея науки : междунар. науч.-исслед. электрон. журнал. 2018. №5 (21). URL: https://alley-science.ru/domains_data/files/114MAY2018/DINAMIKA%20ISPOLZOVANIYa%20I%20RAZVITIYa%20AVTOMATIZIROVANNYH%20OBUCHAYuShIH%20SISTEM.pdf (дата обращения: 20.01.2021).

2. Карпова И.П. Исследование и разработка подсистемы контроля знаний в распределенных автоматизированных обучающих системах : дис. ... канд. техн. наук. М., 2002.

3. Детектор нелинейных переходов : свид. о гос. регистр. программы для ЭВМ №2020663535 Рос. Федерация / И.А. Ветров, А.Ю. Сохарева ; заявитель и правообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта». №2020662850 ; заявл. 23.10.2020 ; опубл. 28.10.2020.

Об авторе

Анна Юрьевна Сохарева – студ., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: ansokhareva@mail.ru

The author

Anna Y. Sokhareva, Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: ansokhareva@mail.ru

Р. В. Стрельников

СОС. НАЧИНАЕТ И ПРОИГРЫВАЕТ

Проанализированы основные недостатки и проблемы противостояния ситуационного центра мониторинга информационной безопасности (Security Operation Center) методам социальной инженерии.

The paper analyzes the main shortcomings and problems of opposition to the methods of social engineering a situational center for monitoring information security (Security Operation Center).

26

Ключевые слова: СОС, центр мониторинга информационной безопасности, информационная безопасность, социальная инженерия

Keywords: SOC, information security monitoring center, information security, social engineering

Введение

Продолжая тему, затронутую в изданной ранее статье [1], рассмотрим типичную ситуацию. Есть центр мониторинга некой финансовой организации. Произошел случай вывода средств клиента. Заявление от клиента поступило в службу безопасности. Начинается расследование.

Шаг первый — звонок клиенту:

— Сообщите пожалуйста код, который вам пришел через СМС.

Клиент, знающий основы информационной безопасности (ИБ) в финансовой сфере:

— Я вам сообщать пароль (код) не буду.

Шаг второй — убеждение:

— И правильно делаете, мы просто проверили вашу осведомленность в области защиты. Перевожу вас на автоматического помощника, чтобы закончить процесс.

Клиент не сообщал код собеседнику по телефону, как его информировали в брошюре, выданной в кредитной организации.

Шаг третий — техническая подготовка злоумышленника. Разговор переводится на автоответчик. Металлический голос бота подсказывает:

— Наберите в тоновом режиме 6 цифр кода, полученного посредством СМС.

Так на практике срабатывают методы социальной инженерии (СИ).

СОС и СИ

Как происходит типичная эволюция информационной системы? Есть некая инфраструктура, которая развивается, зреет, повышает уровень своей информационной безопасности. В результате возникает центр мониторинга, который защищает от киберугроз. Все прекрасно работает. Однако...



Большинство команд ИБ приоритетно фокусируется на таргетированных угрозах, наиболее актуальных для финансового сектора. Такие атаки реализуются с использованием технических методов, а их доля в общем числе атак составляет не более 5%. Иными словами, сотрудники SOC фокусируются лишь на малой части кибератак.

Это связано с тем, что технические векторы много проще отследить, проще настроить сценарии реагирования. К тому же высокой квалификации специалистов для выявления такого рода атак не требуется.

Однако в реальности большинство таргетированных атак сочетают в себе векторы нетехнические (социальной инженерии в том числе) и технические.

По факту СИ:

- всегда действует в зависимости от уровня зрелости ИБ;
- представляет собой огромное количество нетехнических и технических векторов атак и стратегий;
- может являться составной частью стратегии кибератаки;
- всегда таргетирована и предполагает цель (ориентирована на организацию, конкретного сотрудника и т. д.);
- может использовать непредсказуемые сценарии.

Угроза ИБ может быть реализована без вектора кибератаки. За последний год много данных утекло не по техническим каналам. Таким образом, непредсказуемость действий социальных инженеров предполагает невозможность построения вектора атаки. То есть кибератаки с применением методов СИ в большинстве своем являются успешными и невидимыми для SOC. Коммерческим организациям это наиболее очевидно, именно поэтому в последнее время происходит такое сокращение количества SOC. Технические средства не поспевают за талантами социальных инженеров, и финансовые вложения в создание и развитие SOC становятся менее оправданными.

Однако в методах кибератак с использованием СИ можно выявить закономерность и цикличность, как и в любой атаке ИБ, которая зависит от подготовки атакующего: разведка – сбор информации – извлечение информации – предлог – манипуляция и обман – убеждение – определение цели.

Техники социальной инженерии

Основные (некоторые) техники СИ:

- первичная обработка (загрузка информации, фоновая обработка);
- манипуляция и обман (жесты и мимика, сомнение, наказание, шантаж, комплименты, противоречия, колебания, повышение предсказуемости, отвлечение, контроль окружающей обстановки, слабость, работа по типу мышления, работа с микроэкспрессиями, фиксация изменения поведения, невербалика);
- нейролингвистическое программирование (воздействие на восприятие, воздействие на убеждения, воздействие интонацией, метамоделирование, воздействие звуками, воздействие вербальными образами, «загрузка»);



– предлоги (махинации с телефонами, использование личных интересов, применение диалектов);

– извлечение информации (волонтерство, техника «хорошего» слушателя, подтасовка данных, апеллирование к эго, искренность и заинтересованность, лесть, игнорирование, алкоголь, техника управляемых вопросов);

– влияние (последовательный переход, уступки, искусственный дефицит, симпатия, услуга за услугу, социальное, юридическое и организационное влияние, подарки, влияние авторитетом, подмена реальности).

Со многими из перечисленных техник можно бороться превентивными мерами. Однако есть целый пласт атак, которые действуют на уровне подсознания. Среди экспертов ИБ существует дискуссия на эту тему, поэтому приведу факты:

– в подсознании сосредоточено от 95 до 99 % вычислительной мощности мозга;

– в подсознании сосредоточено приблизительно 95 % когнитивной деятельности;

– сознание ограничено;

– скорость распространения импульса в сознании почти в 1000 раз меньше, чем в подсознании;

– количество бит информации в секунду в подсознании больше на 400 млрд;

– глубина памяти в сознании составляет до 20 секунд и бесконечна в подсознании;

– подсознание оперирует настоящим временем;

– 99 % решений мы принимаем подсознательно.

Исходя из изложенных фактов и учитывая скорость роста возможностей искусственного интеллекта, использование машинного обучения в системах слежения за человеком, изучение карты быта человека, поведенческих характеристик и карты человеческого сознания в итоге, высока вероятность того, что в скором будущем станет возможным «подобрать ключ» к любому человеку. Если при воздействии на сознание оно может сопротивляться осознаваемому воздействию (постсознательные процессы), то подсознание без сопротивления запускает целезависимые (предсознательные) процессы. В результате «уязвимости» мозга на порядки превышают уязвимости программного обеспечения.

Техническое оснащение социальных инженеров также прогрессирует, делая возможными, например, подделку интонаций и синтезирование тембра голоса начальника при звонке подчиненному с помощью программных средств.

Очевидно, что количество угроз с использованием методов СИ в будущем только возрастет.

Почему SOC проигрывает?

Почему финансовые средства, вложенные в центры мониторинга, пропадают?

Используя модель SANS Institute, можно увидеть, что каким бы технически оснащенным ни был центр мониторинга, какая бы киберза-



щита ни была построена, при реальном мотиве Red Team может сделать с защищенной информацией что угодно (первый и второй уровни) [2].

Но даже с учетом роста технической подготовки SOC не представляется возможным фиксировать намерения злоумышленников. Поэтому создать матрицу по атомарным техникам технических векторов предатаки касательно СИ невозможно [3].

Хорошо подготовленный социальный инженер, предполагая наличие грамотных специалистов центров мониторинга, будет максимально обходить «опасные места» для своей атаки, нивелировать этап сбора информации (делая, например, фотографию информации с экрана).

Для SOC борьба с пользователями защищаемой информационной структуры меняет модель. Причем остается всего два-три этапа до фиксации действий злоумышленника. А с учетом того, что политики безопасности по умолчанию настроены более щадящее по отношению к внутренним сотрудникам (пользователям), атака с использованием СИ становится успешной.

При низкой зрелости системы информационной безопасности, когда предполагается, что атакующий будет реализовывать атаку при помощи технических векторов, методы СИ могут не требоваться в принципе. Успешные работы команд пентестеров доказывает этот факт.

В более зрелых системах ИБ злоумышленнику будет сложнее выстраивать стратегию атаки, то есть происходит удорожание реализации атаки, использующей технические векторы. В данном случае применение методов СИ существенно упростит реализацию. Стоит отметить, что в случае применения СИ происходит деанонимизация и риск раскрытия физической личности злоумышленника возрастает. В зависимости от цели (финансовая, шпионаж, дестабилизация работы, промышленная авария) меняется и риск злоумышленника.

Как же действовать при нетехнических векторах атак?

Первичный вектор (выявление атакующего) предполагает информированность сотрудников. Вторичный (выявление атакуемого) предполагает анализ различных событий технических систем (UAM, DLP, UBA, TBA, EDR, MDM, Threat hunting).

Борьба с СИ

В 2017 г. в России произошло знаковое событие, на которое мало кто обратил внимание: Банк России совместно с Министерством образования утвердил «дорожную карту» повышения финансовой грамотности населения страны в области информационной безопасности. Как показывает практика утечек информации, краж финансовых средств, самым слабым звеном в цепи защиты информации является человек. И обучать методикам детектирования использования злоумышленниками СИ необходимо со школьной скамьи.

Однако наряду с повышением грамотности в вопросах ИБ скачкообразно растет количество атак на кредитные организации с использо-



ванием СИ. Не стоит полагать, что параллельно создаются и развивается аналогичные школы злоумышленников, но методы и сценарии реализации атак становятся все изощреннее.

Многие кредитные организации, имея собственный SOC, разрабатывают программы повышения квалификации сотрудников, направленные в том числе на борьбу с социальными инженерами команд злоумышленников. В некоторых организациях проводятся тренировки по целевому антифишингу. Но даже в условиях осведомленности сотрудников, по статистике, от 10 % фишинговых атак являются успешными при грамотном предоставлении информации.

Концепцию Zero Trust в отношении сотрудников защищаемой SOC информационной инфраструктуры трудно реализовать на практике. А такой способ защиты, как непрерывная верификация-аутентификация пользователей, слишком дорог в реализации. Остальные методы защиты SOC будут, к сожалению, давать сбой при столкновении с методами социальной инженерии.

30

Список литературы

1. Стрельников Р. В. SOC. Неэффективность внедрения // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2019. №4. С. 81 – 85.

2. Muniz J., McIntyre G., Al Fardan N. Security Operations Center: Building, Operating, and Maintaining your SOC // Cisco Press. Nov 2, 2015. URL: <http://www.ciscopress.com/store/security-operations-center-building-operating-and-main-taining-9780134052076> (дата обращения: 15.09.2020).

3. SANS Institute. URL: <https://www.sans.org> (дата обращения: 15.09.2020).

Об авторе

Роман Владимирович Стрельников – техн. директор, компания «Информационная безопасность», Россия.

E-mail: strelnikov.roman@gmail.com

The author

Roman V. Strelnikov, Technical Director, «Infobez39.ru», Russia.

E-mail: strelnikov.roman@gmail.com

А. А. Персичкин, Н. В. Персичкина, С. Г. Шпилевая

ОСОБЕННОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ПЭМИН В КЛАВИАТУРЕ КОМПЬЮТЕРА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Проанализированы возможности образования в компьютерных клавиатурах с интерфейсом ps/2 побочных электромагнитных излучений и наводок, способных приводить к информационным утечкам. Установлены зависимости физических параметров ПЭМИН от конструктивных особенностей используемого оборудования. Проанализированы возможные каналы несанкционированного съема информации посредством использования ПЭМИН. Сформированы рекомендации по безопасному использованию клавиатур ps/2 в информационных системах.

31

The paper analyzes the possibilities of the formation of spurious electromagnetic radiation and interference in computer keyboards with the ps/2 interface, which can lead to information leaks. The dependences of the physical parameters of the PEMIN on the design features of the equipment used are established. Possible channels of unauthorized information retrieval, through the use of TEMPEST, are analyzed. Recommendations for the safe use of ps/2 keyboards in information systems are formed.

Ключевые слова: клавиатура, интерфейс, ПЭМИН, информационная безопасность, канал утечки

Keywords: keyboard, interface, TEMPEST, Information Security, leak channel

Как известно, клавиатура является неотъемлемой частью персонального компьютера (ПК), обеспечивающей ввод текстовой информации и многие другие операции, к которым в частности относится парольная аутентификация, создание документов, содержащих сведения конфиденциального характера, и т.п. В результате с точки зрения потенциальных угроз по утечке информации данное устройство можно рассматривать как критическое звено ПК, о чем свидетельствует широкое распространение клавиатурных перехватчиков [1].

Доставка перехваченной информации в основном происходит двумя путями: передачей данных через телекоммуникационные каналы связи и через отчуждаемые носители информации (USB-накопители, компакт-диски и т.д.). Несанкционированное функционирование клавиатурных перехватчиков может быть успешно блокировано за счет соблюдения общих требований компьютерной безопасности и некоторых режимных мер. Однако указанные меры защиты не устраняют канал утечки, реализуемый через побочные электромагнитные излучения и наводки (далее — ПЭМИН) [1–3]. В работах [2; 3], в частности, приводятся результаты измерений ПЭМИН клавиатуры ps/2 в широкой полосе частот на расстоянии до нескольких метров. Полноценный

анализ причин возникновения ПЭМИН в упомянутых работах, однако, не выполнялся либо сделаны выводы о наличии высших гармоник в побочном сигнале [4; 5].

В данной статье представлен анализ причин и характерных особенностей образования возможного канала утечки по ПЭМИН для клавиатур с интерфейсом ps/2.

Из данных, приводимых в [2; 3], следует, что ширина спектра ПЭМИН может составлять до десятков МГц. Максимальной для ps/2 можно считать частоту импульсов синхронизации (≈ 13 кГц) [6]. Таким образом, прием сигнала на сотой и выше гармониках маловероятен, и для объяснения процесса необходимо искать другие физические источники образования ПЭМИН.

Схемотехнически интерфейс ps/2 построен по схеме с открытым коллектором, что является простым и эффективным решением, поскольку в этом случае один провод используется как для приема, так и для передачи информации. Соответственно, в линии связи ps/2 имеются только два информационных провода, обеспечивающих синхронизацию (clock) и передачу данных (data) (рис. 1). В случае прохождения сигналов от клавиатуры к компьютеру они транслируются по линии с волновым сопротивлением ≈ 120 Ом на приемник с входным сопротивлением в десятки кОм.

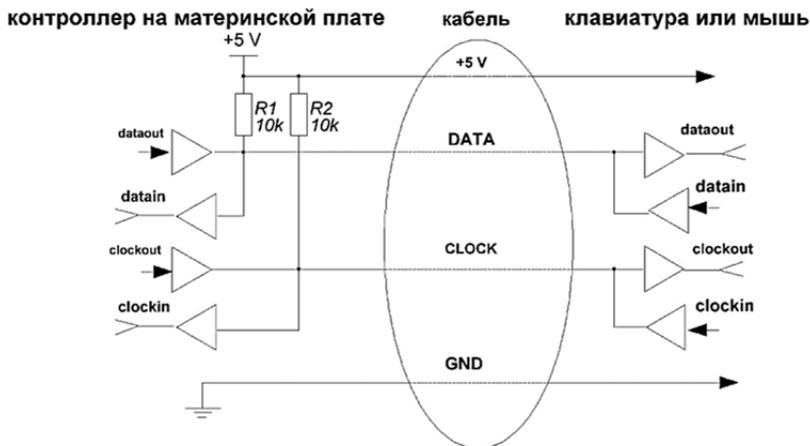


Рис. 1. Принципиальная схема интерфейса ps/2

Известно, что при передаче импульсного сигнала по линии связи с нагрузкой, превосходящей по величине эквивалентное волновое сопротивление, может наблюдаться переходной процесс в виде высокочастотного затухающего периодического колебания («звона»), в общем случае описываемого выражением

$$S(t) = b(t)e^{(2j\pi f + \alpha)t}, \quad (1)$$

где f — частота колебаний; α — постоянная затухания.

О возможности появления указанного эффекта, характеризуемого выражением (1) при прохождении импульсного сигнала в линии связи, упоминается в работе [7], где рассмотрен интерфейс RS-232.

Для моделирования переходных процессов, которые могут возникнуть в линии клавиатуры ps/2 (рис. 2), воспользуемся программой схемотехнического моделирования Micro-Cap 8 [8]. В качестве исходных данных используем параметры реального кабеля клавиатуры с интерфейсом ps/2 и материнской платы: волновое сопротивление линии 120 Ом; физическая длина линии 1,3 м; сопротивление нагрузки 10 кОм.

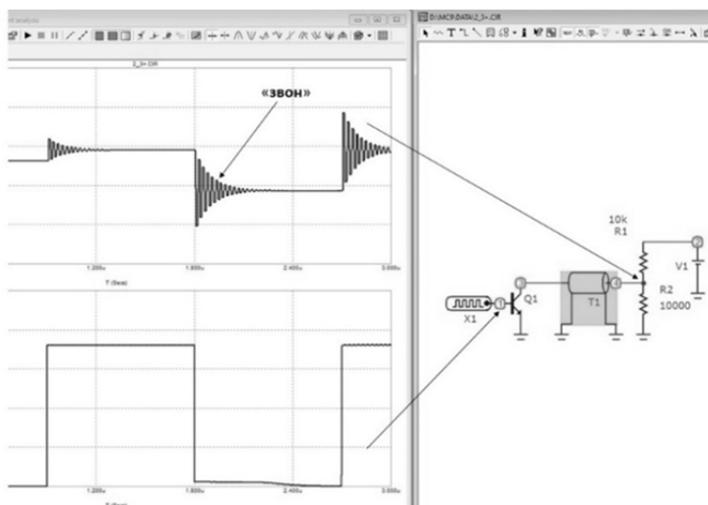


Рис. 2. Результаты компьютерного моделирования переходных процессов в кабеле клавиатуры ps/2

Как показывает модельное представление, частота переходного процесса («звона») в основном зависит от физической длины линии связи, а амплитуда — от сопротивлений потерь линии и внутреннего сопротивления источника, что согласуется с выполненными нами экспериментальными измерениями.

При непосредственных измерениях сигнала с клавиатуры «звон» был выражен значительно слабее либо не фиксировался вовсе. Это связано с наличием блокирующего конденсатора емкостью 300 пФ (рис. 3), расположенного на материнской плате и непосредственно подключенного к линии данных разъема ps/2, а также малыми значениями токов в линии.

Наличие блокирующего конденсатора не является обязательным, поскольку и не входит в спецификацию интерфейса ps/2. Данный элемент представляет собой дополнительную конструктивную опцию, введенную производителем оборудования с целью улучшения электромагнитной совместимости изделия [9].

Помимо сигнала ПЭМИН, вызванного несогласованностью волнового сопротивления линии и нагрузки при передаче информационного сигнала, в линиях связи клавиатур ps/2 постоянно присутствует сигнал в виде всплесков с амплитудой до 50 мВ и частотой следования в десятки кГц (рис. 4).

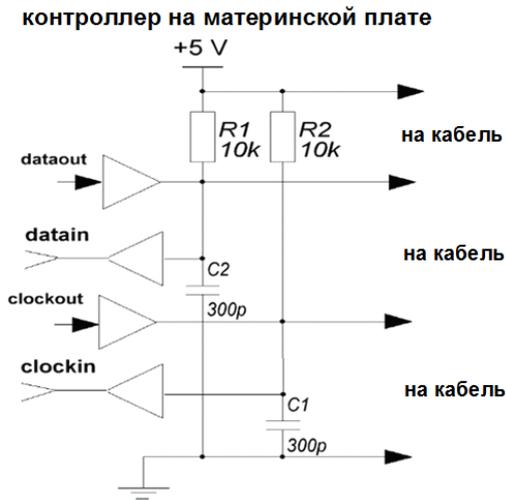


Рис. 3. Схема интерфейса ps/2 со стороны материнской платы

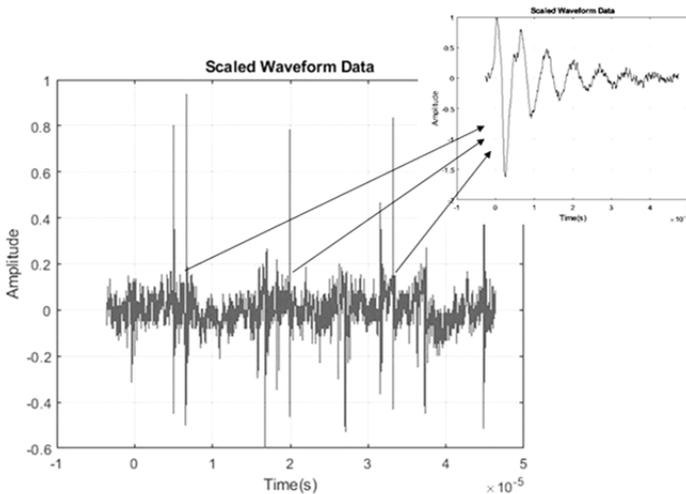


Рис. 4. Всплески сигнала, возникающие в кабеле ps/2

Указанные аномалии представляют собой переходный процесс, образованный за счет емкостной связи между информационным проводом, проводниками питания и экраном кабеля ps/2. Его источником являются неотфильтрованные помехи, просачивающиеся из импульсного блока питания компьютера с частотой преобразования инвертора (50–100 кГц). Результаты моделирования данного процесса представлены на рисунке 5. Сигнал в точке 1 имитирует неотфильтрованные импульсные «всплески» в шине питания, а конденсатор C1 служит аналогом емкостной связи между проводником питания (экраном) и информационным проводом кабеля ps/2.

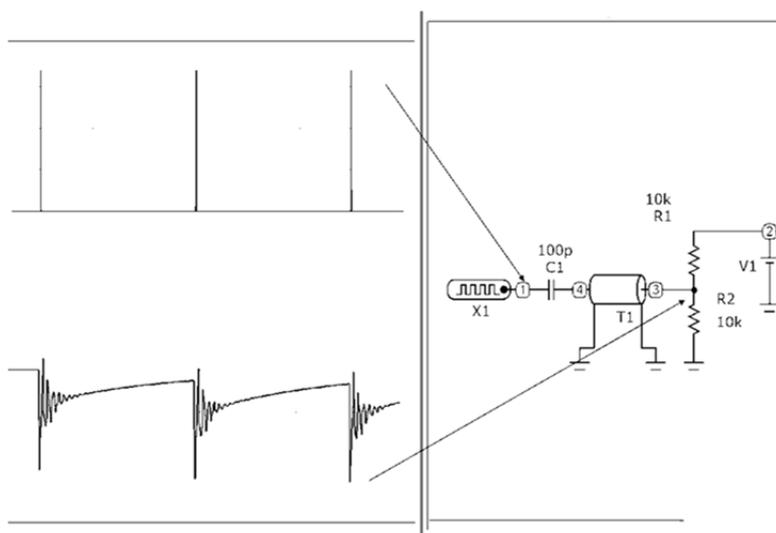


Рис. 5. Результаты моделирования процесса образования наведенных ПЭМИН в линии связи интерфейса ps/2

Как и в предыдущем случае, частота переходных процессов определяется физической длиной линии связи и составляет десятки МГц. Несмотря на то что наведенный сигнал ПЭМИН имеет характер периодических всплесков, он может служить несущей составляющей канала утечки, поскольку формируется кодовой последовательностью с клавиатуры.

Таким образом, можно сделать вывод о потенциальной уязвимости интерфейса ps/2 с точки зрения образования ПЭМИН. Причем в его спецификации не предусмотрены меры по их блокировке. Образование побочного излучения зависит в основном от того, использован ли производителем оборудования блокирующий конденсатор, и от технологии, по которой создан контроллер клавиатуры (ТТЛ или КМОП).

Как правило, в моделях информационных угроз канал утечки по ПЭМИН не считается актуальным, поскольку стоимость оборудования для организации перехвата (широкополосные приемники с преобразованием Фурье) очень велика, что делает его недоступным для потенциального нарушителя. Однако вероятность утечки информации через указанный технический канал является вполне реальной. За последние 10 лет, в особенности с развитием технологии SDR (Software-defined radio), цены на данное оборудование фактически «обвалились» до уровня около 50 долл. за приемник с управляющим и аналитическим программным обеспечением [10; 11]. Причем это соответствует наиболее трудному случаю – перехвату по ПЭМИН изображения на мониторе (пример организации указанного канала утечки с использованием SDR-технологии [12]).



На основании вышеизложенного можно заключить, что при формировании моделей угроз вновь создаваемых информационных систем следует уделять существенное внимание детальной проработке раздела технических каналов утечки. В уже функционирующих информационных системах с целью повышения степени их защищенности рекомендуется отказаться от использования в качестве устройств ввода клавиатур с интерфейсом ps/2.

Авторы благодарят государственное автономное учреждение Калининградской области «Калининградский государственный научно-исследовательский центр информационной и технической безопасности» за предоставленную альтернативную измерительную площадку и контрольно-измерительное оборудование.

36

Список литературы

1. Базовая модель угроз безопасности персональных данных при их обработке в информационных системах персональных данных (утв. 15.02.2008 г.) // ФСТЭК России. URL: <https://fstec.ru/tekhnicheskaya-zashchita-informatsii/dokumenty/114-spetsialnye-normativnye-dokumenty/379-bazovaya-model-ugroz-bezopasnosti-personalnykh-dannykh-pri-ikh-obrabotke-v-informatsionnykh-sistemakh-personalnykh-dannykh-vypiska-fstek-rossii-2008-god> (дата обращения: 12.12.2020).
2. 18th USENIX Security Symposium 2009 in August 2009. URL: https://www.usenix.org/legacy/event/sec09/tech/full_papers/sec09_attacks.pdf (дата обращения: 18.05.2020).
3. *Meynard O., Guilley S., Flament F.* Characterization of the Electromagnetic Side Channel in Frequency Domain // Information Security and Cryptology : 6th International Conference (Inscrypt 2010, Shanghai, China, October 20 – 24, 2010). Springer, 2011. P. 471 – 486.
4. *Закандаев Т.Ю., Степаненко В.М.* Оценка возможности перехвата побочных электромагнитных излучений клавиатуры компьютера. URL: <http://ptmir.ipt.kpi.ua/wp-content/uploads/sites/6/2014/06/Zakandaev.pdf> (дата обращения: 18.11.2020).
5. *Хорев А.* Оценка возможности перехвата побочных электромагнитных излучений клавиатуры компьютера // Специальная техника. 2011. № 5. С. 24 – 31.
6. *Гук М.* Аппаратные интерфейсы ПК : энциклопедия. СПб., 2002.
7. *Smulders P.* The Threat of Information Theft by Reception of Electromagnetic Radiation from RS-232 Cables // Computers & Security. 1990. № 9. P. 53 – 58.
8. *Амелина М.А., Амелин С.А.* Программа схемотехнического моделирования Micro-Cap 8. М., 2007.
9. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники / пер. с англ. 2-е изд. М., 2014.
10. *Аминев А.В., Блохин А.В.* Измерения в телекоммуникационных системах. Екатеринбург, 2015.
11. *Галкин В.А.* Основы программно-конфигурируемого радио. М., 2013.
12. *Перехват изображения с монитора по радиоканалу с помощью TempstSDR (ПЭМИН).* 13.05.2018. URL: https://www.youtube.com/watch?v=Pv_v1HgjN3Q (дата обращения: 12.12.2020).

Об авторах

Андрей Андреевич Персичкин – ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: a.persichkin@kgnic.ru



Наталья Витальевна Персичкина — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: persichkina@rambler.ru

Светлана Геннадьевна Шпилевая — канд. пед. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

The authors

Andrey A. Persichkin, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: a.persichkin@kgnic.ru

Natalia V. Persichkina, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: persichkina@rambler.ru

Dr Svetlana G. Shpilevaya, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

УДК 004.8

*А. В. Колесников, С. Б. Румовская
Э. В. Ясинский, Р. В. Демьянец*

ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИЯ ОПЕРАТИВНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКОЙ МЕТОДАМИ КОГНИТИВНЫХ ГИБРИДНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ Часть 2

38

Исследования интеллектуального управления в динамической среде и работы оператора выявили серьезные отличия ментального образа объекта оперативно-технологического управления от его отображения в автоматизированных системах, используемых оператором, что мешает ему работать и выполнять действия в уме, способствует возникновению ошибок интерпретации данных. Обработка разнородной информации логико-символьными методами изучена и результаты широко применяются на практике. Однако вопросы именно правосторонних, визуально-образных рассуждений оператора, обеспечивающих интуитивное принятие решений на основе демонстрируемого образа проблемной ситуации и предлагаемых вариантов ее понимания, остаются неизученными. В данной работе представлены результаты исследования субъекта оперативно-технологического управления в региональной энергосистеме, особенностей его работы, мышления и окружающей его действительности.

Studies of intelligent control in a dynamic environment and the work of an operator have revealed serious differences between the mental image of an operational and technological control object and its display in automated systems used by the operator, which prevents him from working and performing actions in his mind, and contributes to the occurrence of data interpretation errors. The processing of heterogeneous information by logical-symbolic methods has been studied and the results are widely used in practice. However, the questions of the right-handed, visual-figurative reasoning of the operator remain unexplored. Such reasoning provides intuitive decision-making based on the demonstrated image of the problem situation and the proposed options for understanding it. This paper presents the results of the study of the subject of operational and technological management in the regional power system, the features of his work, thinking and his surrounding reality.

Ключевые слова: интеллектуальная электроэнергетическая система, субъект управления, мышление оператора, язык отношений и связей оператора

Keywords: intelligent power system, the subject of control, the thinking of the operator, the language of relations and connections of the operator



Введение

Настоящая работа — вторая часть публикации с единым названием, логически увязанная с содержанием первой части [29], где рассмотрены результаты анализа особенностей и структуры системы оперативно-технологического управления (ОТУ) региональными электроэнергетическими системами на примере Калининградской области, а также результаты исследования объекта оперативно-технологического управления с онтологической и математической точек зрения. В настоящей части изложены результаты анализа субъекта (человеческого фактора) оперативно-технологического управления в региональной интеллектуальной электроэнергетике, его внешней среды, особенностей восприятия им информации и его мыслительных механизмов, а также языка профессиональной деятельности.

39

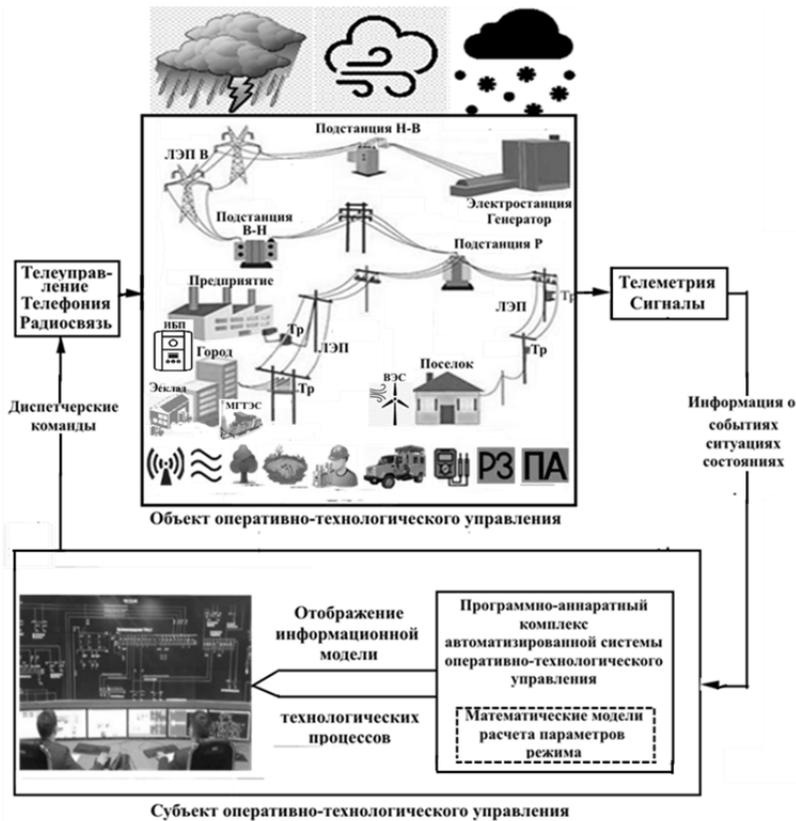
Онтологическая семантика субъекта оперативно-технологического управления в региональной интеллектуальной электроэнергетике

Субъекты электроэнергетики — лица, осуществляющие деятельность в сфере электроэнергетики, в том числе производство электрической, тепловой энергии и мощности, приобретение и продажу электрической энергии и мощности, энергоснабжение потребителей, оказание услуг по передаче электрической энергии и оперативно-диспетчерскому управлению в электроэнергетике, сбыт электрической энергии (мощности), организацию купли-продажи электрической энергии и мощности [1].

Оперативно-технологическое управление — комплекс мер по управлению технологическими режимами работы объектов электроэнергетики и энергопринимающих устройств потребителей электрической энергии [1].

Оперативно-диспетчерское управление в электроэнергетике — комплекс мер по централизованному управлению технологическими режимами работы объектов электроэнергетики и энергопринимающих устройств потребителей электрической энергии [1].

Субъект ОТУ региональной энергосистемы (ЭС) в условиях внешней среды представлен на рисунке следующими основными компонентами: «человеческий фактор» — коллектив диспетчеров; динамическое пространство экранов видеостен и рабочих мест; математические модели расчета параметров режима; программно-аппаратный комплекс автоматизированной системы ОТУ.



- Н-В – низкое напряжение – высокое напряжение
В-Н – высокое напряжение – низкое напряжение
Р – распределительная
ЛЭП В – высоковольтная линия электропередачи
Тр – трансформатор
ИБП – источник бесперебойного питания
Эсклад – склад инструментов и электрооборудования оперативно-выездных бригад
МГТЭС – мобильная газотурбинная электростанция
ВЭС – ветроэлектрическая электростанция
РЗ – релейная защита
ПА – противоаварийная автоматика

Рис. Схема системы оперативно-технологического управления региональной электроэнергетической системой в условиях внешней среды

Человеческий фактор (коллектив диспетчеров). В [2] подчеркнута актуальность человеческого фактора для повышения скорости и надежности ОДУ и оперативно-диспетчерского управления (ОДУ) сложными технологическими процессами. Об этом говорят и сами специалисты, например диспетчер центров управления сетями (ЦУС) по Екатеринбург и Свердловской области В. Никонов: «Для работы диспетчером электросетей нужны технические познания и понимание физики процессов. Когда возникает событие, диспетчер должен в голове прики-



нуть, что его ждет: по перетокам мощности, по уровню напряжения в контрольных точках. Без технического склада ума здесь работать нельзя. Более четко оценить последствия события помогает программный комплекс. Наша профессия противопоказана людям медлительным, скрупулезным: порой у нас нет времени вдумываться, поэтому надо заранее знать, что делать. Важен оперативный склад ума и быстрое принятие решений. На мнемосхеме диспетчер видит только условные обозначения ЛЭП, надписи, которые на самом деле, в реальности – отдельные электроэнергетические установки с работающими на них людьми, электромонтерами. Они прекрасно знают объект, но не понимают картину в целом, которую видит диспетчер ЦУС, координирующий их работу и раздающий команды. Диспетчер управляет людьми, которые уже воздействуют на электроустановку» [3].

Одно из важнейших условий безаварийной работы энергообъектов – обеспечение надежности человеческого фактора, представляющего собой совокупность интеллектуальных, физиологических, эмоциональных, волевых, мотивационных и других качеств личности, обеспечивающих безошибочное, своевременное и адекватное восприятие сложившейся ситуации, выполнение предписанных функций в определенных режимах работы [4].

Из детального анализа [5] видно, что наиболее значимыми источниками ошибочных действий оперативного персонала являются некорректные процедуры, неадекватный человеко-машинный интерфейс и неэффективная тренировка. Анализ 35 нештатных ситуаций на Кольской АЭС показал, что в 77 % случаев от общего числа инцидентов оперативный персонал совершил ошибки в интерпретации информации (41%), аналитические (38 %) и сенсомоторные (неадекватные действия, запоздалые реакции) ошибки (21 %) [6]. В частности, ошибки взаимодействия с автоматикой в ситуациях, когда РЗ и ПА бурно прогрессирует; отсутствие взаимопонимания из-за разных моделей мышления оперативного персонала, работающего в одной смене за одной мнемосхемой, разных традиций отображения информации и различного культурного опыта; использование в коллективной коммуникации, несмотря на нормы, неоднозначных по смыслу и понимаемых по-разному слов; нарушение координации, многословие; несоблюдение «стерильности оперативного помещения»; эффект «слепоты к изменениям» (диспетчер не знает, где именно происходит изменение, и поэтому не замечает его); пространственная дезориентация в восприятии и интерпретации событий и ситуаций объекта ОГУ.

Динамическое пространство экранов видеостен и рабочих мест. Основные инструменты труда человека-оператора в ОГУ и ОДУ – мнемосхема динамической и статической систем управляемого объекта для слежения в основном за событиями, возникающими при перемещении динамических ресурсов относительно статичных и относительно друг друга, отображенная на технических носителях (например, на жидкокристаллических видеостенах значительных размеров) диспетчерских пультов управления, и средства голосовой коммуникации (телефоны и



радиосвязь). Мнемосхема в инженерной психологии — совокупность опорных точек производственной мыслительной деятельности оператора, основное средство формирования у диспетчера динамической, образно-концептуальной модели объекта управления (ОУ) — основы его трудового мышления. В [7] подчеркнуто, что понятия «информационная модель» и «концептуальная модель деятельности» приобрели общепсихологический характер.

Информационная модель — совокупность организованной информации, получаемой разными способами по сигналам от программно-технического комплекса автоматизированной системы ОУ (АС ОУ). С одной стороны, сигнал, исполняя семантическую функцию, осведомляет человека-оператора о событиях, ситуациях, состоянии, чаще всего об отклонениях от нормального режима, причем предполагается, что эта информация является значимой для человека-оператора. С другой стороны, прагматическая функция сигнала — предупредить о необходимости или целесообразности действий оператора, его воспринимающего.

Вне зависимости от соотношения количества семантической и прагматической информации в сигнале и от характера самой операции-действия (например, передача, распределение, преобразование электроэнергии) основные задачи переработки информации оператором — диагностирование проблемной ситуации, выбор, планирование и организация релевантной реакции-действия. При этом прием и переработка информации, зависят от качества систем отображения информации (СОИ) мнемосхемами, видеокубами, видеостенами и другими средствами когнитивной инженерии.

Для человека-оператора лишь незначительный процент отражаемых на панелях ситуаций (событий, состояний объекта ОУ) требует вмешательства. Автоматизация усугубляет разрыв между семантической и прагматической функциями сигналов: количество семантической информации возрастает из-за актуальности представления в СОИ не только смены состояний объектов ОУ, но и работы РЗ и ПА, а количество прагматической информации по мере совершенствования этих устройств сокращается. Это ведет к тому, что большая часть результатов телеизмерения и телесигнализации прагматична лишь потенциально.

Человек-оператор часто вынужден исходить в своих решениях из информации не о факте возникновения события, а из предшествующей последовательности (истории) событий на мнемосхеме, перегруженной сигнализацией. Кроме того, оператор, по мнению профессионала В. Никонова, не располагает достаточным временем для ретроспективного анализа истории событий в тот момент, когда событие уже налицо и, следовательно, переработка информации будет неэффективной. В ОУ актуальны постоянный контроль за динамикой параметров, прогнозирование возникновения событий и экстраполирование, что может подготовить оператора к действиям в критический момент.



Форма сигнализации на мнемосхемах нерелевантна оперативной деятельности. Сложная, событийно ориентированная сигнализация затрудняет восприятие оператора, избирательную функцию его внимания. Необходимо отказаться от однопланового, рядоположного отображения на панели хода технологического процесса в целом. Представление на панели последовательных состояний объекта ОТУ должно быть функционально и подчинено процессу управления, динамике взаимоотношений между субъектом и объектом ОТУ. Актуален контроль (мониторинг) всех показателей динамики процесса, соотношение их с нормами и прогнозирование тех или иных событий. Нужно отображать только динамику развития процессов в сторону отклонения от норм и на тех интервалах времени, когда события, ситуации и состояние развиваются к аварийным. Д. А. Ошанин [8] подчеркивает, что очень удобным может оказаться отображение процессов в виде элементарных, легко воспринимаемых, опознаваемых и дифференцируемых пространственно-временных структур. При этом динамике развития процесса в сторону одного из событий соответствует постепенное приближение преобразующейся на панели структуры к стандартной форме — фигуре-коду данного события.

Математические модели расчета параметров режима. Достаточно полно математические модели по составу задач (функций) ОДУ в ЭС рассмотрены в [9]: переработка исходной информации, ведение баз данных, надежность технических средств (5 задач); планирование электрических режимов (27 задач); планирование энергетических режимов (26 задач); обучение (2 задачи). Цели и задачи, принципы организации и структура ОДУ ЭС, методы, модели и средства управления нормальными режимами ЭС, методические подходы к ликвидации основных аварийных режимов в энергосистемах, системообразующих и распределительных сетях даны в [10]. Главная цель применения искусственного интеллекта (ИИ) в АС ОТУ — уменьшение влияния человеческого фактора и целесообразность использования технологий ИИ по функциям АСУ ТП (табл.) [11].

Целесообразность использования методов, систем и технологий ИИ по функциям АСУ ТП

Функция АСУ ТП	Содержание функции	Целесообразность использования методов, систем и технологий ИИ
Первичная обработка информации	Ввод/вывод данных и преобразование их в цифровой (физический) вид	Нецелесообразно
Верификация данных	Контроль достоверности данных и замена недостоверных достоверными	Возможно, актуальны экспертные системы
Сигнализация	Оценка отклонения параметра от установленных регламентных границ	Возможно и целесообразно
Архивирование	Сжатие, архивирование, извлечение из архива	Нецелесообразно



Окончание табл.

Функция АСУ ТП	Содержание функции	Целесообразность использования методов, систем и технологий ИИ
Противоаварийные защиты	Мониторинг и реагирование в случае аварийных ситуаций	Недопустимо из-за фактора неопределенности
Автоматическое регулирование	Регулирование технологических процессов в зависимости от анализа поступающих данных	Перспективно, востребовано
Дистанционное управление	Управление оборудованием, изменение положения исполнительных механизмов, коммуникации с персоналом	Перспективно в формате ЦС
Расчеты	Расчеты и вычисления автоматизированного управления	Не требует ИИ
Диагностика ТОУ	Мониторинг оборудования и технологического процесса	Перспективно в формате ЦС
Диагностика ПТК	Вспомогательная функция в АСУ ТП, мониторинг ПТК	Перспективно в формате ЦС
Человеко-машинный интерфейс	Комплекс задач взаимодействия пользователей с ПТК АСУ ТП	Перспективно

44

Примечание: ТОУ – технологический объект управления; ПТК – программно-технический комплекс; ЦС – цифровой советник.

Одна из тенденций интеллектуализации ЭС – внести смысл «внутрь» аппаратно-программного комплекса АС ОТУ, что требует интеграции, объединения на формальном уровне математических моделей вербально-предикативного и предметно-изобразительного представлений знаний. Эта потребность, уже реализуемая в теории познания (проблема интерпретации) и компьютерном моделировании, до настоящего времени еще не осознана разработчиками АС ОТУ. Однако «законы природы» с указанием условий их применения могут постепенно накапливаться в базе знаний независимо от постановки тех или иных конкретных задач. Совокупность законов и теорий образует при этом «глобальную модель действительности» [12].

Описание закона или изложение теории физической реальности аппаратом математической реальности ОТУ ЭС распадается на две части: 1) математическая формула или система формул («математический аппарат», «математическая действительность») и 2) содержательное описание – неформальное, словесно-вербальное представление на профессиональном языке, устанавливающее связь между системой понятий, умственных обобщенных концептов, существенных для электростатики, электродинамики ОТУ ЭС, а также для неэлектрических процессов и явлений, в том числе природного характера, и математическими знаками (символами) в математическом формализме. Рассмотрим



это на примере закона Ома для переменного тока: $I = U/Z$, где I, U – действующие значения переменного тока и напряжения, Z – полное сопротивление данного участка цепи. Курсив относится к содержательному описанию, интерпретирующему употребляемые в формуле математические символы в терминах понятий «электрический ток», «напряжение», «полное сопротивление», которые предполагаются в языке физики известными. В содержательное описание войдет и указание на условия и допущения («полное», «переменный», «участок цепи») применимости формулы. Проблема отображения «физического смысла» состоит в том, что содержательное описание остается вне машинной, расчетной математической модели, затрудняет и ограничивает стыковку запрограммированных по отдельности расчетных моделей, возможности расширения, анализ, корректировку их исходных посылок и результатов в человеко-машинном диалоге.

В этой связи традиционно «узкое место» в жизненном цикле разработки интеллектуальных систем (ИС) [13] составляют логико-семантические аспекты на стадии концептуального анализа или структурирования знаний. Кроме того, описание понятийной системы именно как системы требует введения в словарь АС ОТУ единиц, никогда не употреблявшихся в речи, внутрисистемных единиц [12]. Стремление к логической полноте концептуальной модели ведет к тому, что эксперт, конструирующий модель, постоянно обнаруживает логические пробелы в профессиональной терминологической системе.

Программно-аппаратный комплекс автоматизированной системы ОТУ [14]. Тенденциями технического оснащения современных ЭС в индустриально развитых странах являются гибкие, управляемые системы электропередачи (англ. Flexible Alternative Current Transmission Systems – FACTS), асинхронизированные синхронные машины (АСМ), интеллектуальные сети (англ. Smart Grids), транзит ультравысокого напряжения постоянного и переменного тока (Сибирь – Урал – европейская часть России), распределенная генерация, силовая электроника в сетевых управляемых устройствах, гибкие системы передачи переменного тока, интеллектуальные электронные устройства с поддержкой технологии векторных измерений, распределенные системы автоматики (англ. Wide Area Control System – WACS), распределенные системы релейной защиты (англ. Wide Area Protection System – WAPS), комбинированные распределенные системы управления, защиты и автоматики (англ. Wide Area Monitoring, Protection, and Control System – WAMPACS).

Из изученных по открытым источникам программно-технических комплексов ниже приведен список организаций – разработчиков базисных решений для интеллектуализации ОТУ и ОДУ в ЭС: АО «РТСофт» (rtsoft.ru), компания «АльтерпоПауэр» (alteropower.ru), АО «Монитор Электрик» (monitel.ru), АО «НТЦ ФСК ЕАС» (ntc-power.ru), ООО «Институт энергосистем» (enersys.ru), ООО «Созвездие-Сервис» (sozvezdie-service.ru), «Сименс» (Siemens, smart-grid.siemens.ru), АБВ (new.abb.com), компания «ПиЭлСи Технолоджи» (plctech.ru), ЗАО



«НПФ Прорыв» (proryv.com), группа компаний «Прософт-Системы» (prosoftsystems.ru), АО «Атомик Софт» (automiq.ru), инженерный центр ЭНТЕЛС (ersr.ru), ООО ETAP SYSTEMS Russia (etapru.ru). Ниже перечислены интеграторы и решения по щитовому оборудованию для ОТУ и ОДУ ЭС: компании ПОИСК (poisk-company.ru), «Делайт 2000» (delight2000.com), «Юг-Система Плюс» (yugsys.nt-rt.ru), MultiRu (multi-ru.ru), «СофтСистема» (video-panels.ru), «Форсайт» (forsite-company.ru), ООО «ТехПроМедиа» (displite.ru), ВГУП «Уральский электромеханический завод» (uemz.ru), центр проекционных технологий «Викинг» (viking.ru).

Язык отношений и связей человека-оператора в системе оперативно-технологического управления региональной интеллектуальной электроэнергетикой

В дистанционном централизованном управлении ЭС посредством телеизмерения, телесигнализации и телеуправления наиболее полно воплощены характерные черты человека как регулятора ИС управления. Особенности и компоненты интеллектуальной деятельности, психологии мышления человека-оператора в процессе ОТУ, его роли в производстве исследованы в [15–19].

Д. А. Поспелов и В. Н. Пушкин неразрывно связывают качество и надежность диспетчерского труда с построением в структурах мозга посредством «языка» информационных аналогов ресурсов той среды, в которой живет и действует человек-оператор. Воссоздавая тот или иной ресурс окружающей среды, оператор фиксирует его свойства относительно времени и в своем сознании изменяет отражаемый ресурс, преобразует его. Благодаря способности строить информационные модели («внутренние образно-концептуальные модели обстановки», по Г. В. Дружинину [20], «образно-концептуальные модели обстановки», по С. И. Магиду [21], «концептуальные модели деятельности», по С. А. Дружилову [7], которые следует отличать от информационных моделей-мнемосхем на «языке мнемонического изображения», по Д. А. Ошанину), оператор апробирует варианты поведения «про себя», прежде чем начать действовать.

Ресурсы в объекте ОТУ по-разному воздействуют на органы чувств человека-оператора и находятся друг с другом в определенных отношениях. Для разумных целенаправленных действий в системе ОТУ оператору нужна возможность отражать эти отношения. Поскольку отношения и связи ресурсов не отображаются чувственно, актуальна роль мышления в деятельности человека-оператора. Мышление, по Д. А. Поспелову и В. Н. Пушкину, — это установление отношений между ресурсами. Мыслительными механизмами объект управления, в котором действует человек-оператор, воссоздается в его голове с отражением обнаруживаемых свойств и связей между ресурсами. В отличие от языка восприятия, фиксирующего свойства ресурсов, проявляющиеся в воздействиях на органы чувств, для мышления характерен специальный



язык отношений и связей (ЯОС), посредством которого субъект получает возможность внутренней работы с теми ресурсами и их свойствами, которые не даны в восприятии и находятся вне сферы его непосредственных контактов с ОУ. Мышление объединяет, интегрирует всю воссоздающую деятельность человека-оператора, которого Д. А. Поспелов и В. Н. Пушкин сравнивают с математиком, решающим алгоритмически неразрешимую задачу в проблемной ситуации.

Операторы ЦУС решают задачи [9] как форму взаимодействия с неопределенностью, условия запуска мыслительного процесса [22], выполняя функции планирования, контроля, разработки регулирующих воздействий, мероприятий и диагностики. Труд операторов сопряжен с возникновением проблемных ситуаций с недостаточно выявленными или обнаруженными условиями и с неопределенной целью, которую необходимо достичь, чтобы уменьшить или целиком снять затруднения [23], с резкими, кажущимися непреодолимыми противоречиями в оценке контрольной информации по мнемосхеме. Для проблем у оператора нет четкого способа действия, реагирования: либо он не известен из личного опыта и не предусмотрен регламентами и инструкциями, либо известны отдельные приемы (регулирующие команды), комбинируя которые можно снять противоречия и справиться с проблемой. У оператора могут «выпадать» из памяти известные ему инструктивные способы решения (прецеденты), и он вынужден «открывать» их для себя заново. Оператор — предметное существо, действующее предметным образом в созданном человеком искусственном предметном мире — «мире оперативно-технологической действительности» (мир ОТД).

Распредмечивание — превращение, «перевод» определений предмета, логики его бытия на «язык» живых сущностных сил человека (субъекта). Это раскрытие объекта ОТУ субъекту [23].

Для категориального отражения предметного мира ОТД актуален когнитивно-семантический анализ языка профессиональной деятельности (ЯПД) оператора ОТУ, объясняющий механизмы концептуализации, категоризации и вербализации в языке как форме сознания и мышления.

Категоризация, по Е. С. Кубряковой, — мыслительная операция, направленная на формирование категорий как понятий, предельно обобщающих и классифицирующих результаты познавательной деятельности человека. Понятие категоризации — одно из фундаментальных понятий человеческой деятельности и ключевое понятие когнитивного подхода: оно тесно связано со всеми когнитивными способностями человека-оператора и компонентами когнитивной системы — вниманием, распознаванием объектов, умозаключениями и памятью [24].

Специалист по теории управления имеет свою концепцию языка. Для него язык выступает как средство описания тех объектов, которыми он собирается управлять, ситуаций, складывающихся на этих объектах, и процедур управления [25].

Концептуализация, по Д. А. Поспелову, — поиск механизмов, посредством которых ЯПД выражает понятия, отношения и роли, важные для



управленца, выработка упрощенного взгляда на мир, выделение только тех элементов предметной области, которые необходимы для данной задачи. Результат концептуализации называют концептуальной схемой.

Концептуальная схема инженерной задачи – абстрактный упрощенный взгляд на предметную область данной задачи, выражающийся в выделении только тех свойств предметной области, которые полезны для целей данной задачи, и отбрасывании из рассмотрения остальных ее свойств [26].

Структурирование (или *концептуализация*) знаний, по Т. А. Гавриловой и В. Ф. Хорошевскому, – разработка неформального описания знаний в виде графа, таблицы, диаграммы или текста, которое отражает основные концепции и взаимосвязи между понятиями предметной области. Такое описание называется полем знаний, а язык его описания содержит минимум неточностей, без двусмысленностей, поскольку является символьным либо графическим (схемы, рисунки, пиктограммы) [27]. Лингвисты рассматривают также такие понятия, как внешняя (композиционная) и внутренняя (содержательная) структуры текста. Первая соответствует композиционно-логической схеме текста и принадлежит линейному плану текста, а вторая (семантическая, глубинная, когнитивная) отражает реальную ситуацию и относится к когнитивному плану со структурой, присущей организации знания и отражающей то, как человек-оператор воспроизводит и моделирует действительность, «вписывает себя» в окружающую действительность [28].

Заключение

Рассмотрена категоризация онтологической семантики субъекта ОТУ в региональной ЭС: свойства и особенности коллективного человеческого фактора, специфика и проблематика динамического пространства экранов видеостен и рабочих мест ЦУС, разработчики программно-аппаратных комплексов АС ОТУ, понятие «информационная модель» и математические модели расчета параметров режима. Показаны целесообразность использования методов систем и технологий искусственного интеллекта по функциям АСУ ТП и тенденции интеллектуализации ЭС.

Отмечается, что для мышления операторов ЦУС характерен специальный язык отношений и связей, посредством которого субъект получает возможность внутренней работы с ресурсами, не данными в восприятии и находящимися вне сферы его непосредственных контактов с объективной реальностью. Раскрыто содержание концептов «концептуализация» и «структурирование» ЯОС, посредством отображения которых человек-оператор воспроизводит, моделирует и «вписывает себя» в окружающую действительность.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00208.



Список литературы

1. ГОСТ Р 57114-2016. Электроэнергетические системы. Оперативно-диспетчерское управление в электроэнергетике и оперативно-технологическое управление. Термины и определения. Утв. 04.10.2016. М., 2016.
2. Штейнбок Л. С. Ситуационная технология отображения информации. М., 2017.
3. Интервью с диспетчером ЦУС по городу Екатеринбург и Свердловской области В. Никоновым. URL: https://www.youtube.com/watch?v=Hf7O909s_Jo (дата обращения: 17.11.2020).
4. Илюкевич И. П. Влияние человеческого фактора на безопасность и надежность функционирования предприятий электроэнергетики // Сб. тр. Междунар. науч.-техн. конф. «Современное состояние и перспективы развития энергетики» : в 2 т. Ташкент, 2011. Т. 1. С. 125–129.
5. Острейковский В. А. Теория надежности : учебник для вузов. М., 2003.
6. Башлыков А. А., Еремеев А. П. Основы конструирования интеллектуальных систем поддержки принятия решений в атомной энергетике : учебник. М., 2018.
7. Дружилов С. А. Формирование модели мира человека в новой информационной реальности // Современные научные исследования и инновации. 2011. №1.
8. Ошанин Д. А. Предметное действие и оперативный образ: Избранные психологические труды. М. ; Воронеж, 1999.
9. Руденко Ю. Н., Семенов В. А. Автоматизация диспетчерского управления в электроэнергетике. М., 2000.
10. Калентиионок Е. В. Оперативное управление в энергосистемах : учеб. пособие. Минск, 2007.
11. Шехтман М. Разработка АСУТП с искусственным интеллектом. 17.09.2018. URL: <https://energiavita.ru/2018/09/17/mihail-shekhtman> (дата обращения: 17.11.2020).
12. Рубашкин В. Ш. Онтологическая семантика. Знания. Онтологии. Онтологически ориентированные методы информационного анализа текстов. М., 2013.
13. Гаврилова Т. А., Хорошевский В. Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. СПб., 2001.
14. Колесников А. В., Листопад С. В., Майтаков Ф. Г. Интеллектуализация оперативно-диспетчерского управления сложной региональной динамической электроэнергетической системы // Системы и средства информатики. 2019. Т. 29, №2. С. 46–59.
15. Поспелов Д. А., Пушкин В. Н. Мышление и автоматы. М., 1972.
16. Пушкин В. Н. Оперативное мышление в больших системах. М. ; Л., 1965.
17. Завалишина Д. Н. Практическое мышления: Специфика и проблемы развития. М., 2005. С. 67–86.
18. Завалишина Д. Н. Интуиция и формирование обобщенного способа решения задач // Вопросы психологии. 1979. №2. С. 109–116;
19. Завалишина Д. Н. Микро- и макрогенетический анализ мышления // Категории, принципы и методы психологии. Психические процессы : тезисы науч. сообщений сов. психологов к V Всесоюз. съезду общества психологов СССР. М., 1983. Ч. 2. С. 275–277.
20. Дружинин Г. В. Человек в моделях технологий : учеб. пособие : в 3 ч. Ч. 1 : Свойства человека в технологических системах. М., 1996.
21. Магид С. И. Подготовка персонала энергопредприятий: О целесообразности использования «компьютерных тренажеров» // Энергетика и промышленность России. 2002. №11 (27).



22. Спиридонов В.Ф. Психология мышления: Решение задач и проблем : учеб. пособие. М., 2006.
23. Райбекас А.Я. Вещь, свойство, отношение как философские категории. Томск, 1977.
24. Абишева К.М. Категоризация и ее основные принципы // Вопросы когнитивной лингвистики. 2013. №2 (035). С. 21 – 30.
25. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. М., 1986.
26. Лапшин В.А. Онтологии в компьютерных системах. М., 2010.
27. Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. СПб., 2000.
28. Павлова Д.С., Ерофеева Е.В. Семантическая структура устного спонтанного текста: теоретические и методологические подходы к исследованию // Вестник Пермского университета. Российская и зарубежная филология. Вып. 1 (29). 2015. С. 5 – 17.
29. Колесников А.В., Румовская С.Б., Ясинский Э.В., Солдатов С.А. Интеллектуализация оперативно-технического управления региональной электроэнергетикой методами когнитивных гибридных интеллектуальных систем. Ч. 1 // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2020. №4. С. 57 – 87.

Об авторах

Александр Васильевич Колесников – д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: avkolesnikov@yandex.ru

София Борисовна Румовская – канд. техн. наук, науч. сотр., Калининградский филиал ФИЦ ИУ РАН, Россия.

E-mail: sophiyabr@gmail.com

Эрик Викторович Ясинский – асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта; ведущий разработчик, ООО «Роуттех», Россия.

E-mail: ejasinski96@gmail.com

Роман Владимирович Демьянец – начальник департамента корпоративных и технологических АСУ, ПАО «МРСК Центра», Россия.

The authors

Prof. Alexander V. Kolesnikov, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: avkolesnikov@yandex.ru

Dr Sophiya B. Rumovskaya, Research Fellow, Kaliningrad branch of the FRC «Computer Science and Control» of the RAS, Russia.

E-mail: sophiyabr@gmail.com

Eric V. Yasinsky, PhD Student, Immanuel Kant Baltic Federal University; Lead Developer, Ltd «Routtech», Russia.

E-mail: ejasinski96@gmail.com

Roman V. Demyanets, head of the department of corporate and technological ACS, PJSC «MRKC Center», Russia.

THE CLOSED PIECEWISE UNIFORM STRING REVISITED

We reconsider the composite string model introduced 30 years ago to study the vacuum energy. The model consists of a scalar field, describing the transversal vibrations of a string consisting of piecewise constant sections with different tensions and mass densities, keeping the speed of light constant across the section. We consider the spectrum using transfer matrices and Chebyshev polynomials to get a closed formula for the eigenfrequencies. We calculate vacuum and free energy as well as the entropy of this system in two approaches, one using contour integration and another one using a Hurwitz zeta function. The latter results in a representation in terms of finite sums over polynomials. Several limiting cases are considered as well, for instance, the high-temperature expansion, which is expressed in terms of the heat kernel coefficients. The vacuum energy has no ultraviolet divergences, and the corresponding heat kernel coefficient a_1 is zero due to the constancy of the speed of light. This is in parallel to a similar situation in macroscopic electrodynamics.

Мы заново рассматриваем модель кусочно-однородной струны, предложенную 30 лет назад для того, чтобы исследовать энергию вакуума. Поперечные колебания струны, состоящей из кусочно-постоянных сегментов с разными натяжениями и плотностями массы, описываются скалярным полем, причем в данной модели скорость света при переходе одного участка струны к другому сохраняется. Используя T -матрицы и полиномы Чебышева, мы получаем замкнутую формулу для собственных частот и находим спектр. Мы вычисляем вакуумную и свободную энергию, а также энтропию этой системы двумя способами: методом контурного интегрирования и с помощью дзета-функции Гурвица. Вторым способом приводится представление в виде конечных сумм многочленов. Рассмотрены также несколько предельных случаев, например высокотемпературная асимптотика, которая выражается через коэффициенты теплового ядра. Вакуумная энергия не имеет ультрафиолетовых расходимостей, и соответствующий коэффициент теплового ядра a_1 равен нулю вследствие постоянства скорости света вдоль струны. Аналогичное сокращение расходимостей наблюдается в макроскопической электродинамике.

Keywords: piecewise uniform string, vacuum energy, heat kernel coefficients, zeta function, Chebyshev polynomials, high temperature expansion

Ключевые слова: кусочно-однородная струна, вакуумная энергия, коэффициенты теплового ядра, дзета-функция, полиномы Чебышева, высокотемпературное разложение

1. Introduction

In the piecewise uniform string model [1], a closed or open string is considered, which consists of two or more segments. This is a generalization of a homogeneous relativistic string with the same string tension T



everywhere. In opposite to the standard case of a homogeneous string, this string consists of homogeneous segments with different string tensions T_i and mass densities, ρ_i , such that their ratio is just the constant speed of light,

$$c = \sqrt{\frac{T_i}{\rho_i}}. \quad (1)$$

We assume that alternating sections with different T_i and ρ_i repeat periodically and that the string is closed.

52

The canonical quantization of this model, which is also called *composite string model*, requires a target space with the dimension $D = 26$ [2]. However, in the string potential, the dimension appears just as a factor $(D-2)$ in front of the first quantum correction (the Casimir energy). The latter is calculated in $(1+1)$ -dimensional space of the string world surface and coincides with the renormalized vacuum energy of a scalar field which describes the transversal vibrations of the string. This scalar field $\phi(\sigma, \tau)$ obeys the $(1+1)$ -dimensional wave equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) \phi = 0, \quad (2)$$

with the matching conditions

$$\phi|_{x=L-0} = \phi|_{x=L+0}, \quad T_I \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \Big|_{x=L-0} = T_{II} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \Big|_{x=L+0}, \quad (3)$$

at the junctions, which imply the continuity of the displacement of the string and of the restoring force. Obviously, because of equations (1) and (2), the model is relativistic.

In this model, we are primarily interested in the dispersion relation and the band structure of the string excitation spectrum. Second, we consider the vacuum energy of excitations, that is, the Casimir effect associated with this system. Finally, we introduce finite temperature and examine the corresponding thermodynamic quantities. The inclusion of impurities may be of additional interest. The merit of this model, which it shares with several others, is its simplicity, which makes it possible to study the physical quantities mentioned most explicitly and easily.

The piecewise uniform string was first considered in [1], and shortly thereafter in [3] a much simpler representation was found for the model, which in [4] was generalized to a string with $2N$ equal sections. In [4], a string with three pieces was studied. Its vacuum energy has shown a non monotone (in opposite to the two-piece case, see below) dependence on the two ratios of the tensions. We mention also an open composite string model [5].

In the papers [2; 6] the thermodynamic quantities were calculated for a two-piece and $2N$ -piece strings, and the Hagedorn (critical) temperature was found, which increases with the number of string segments and inverse



proportional to $\sqrt{D-1}$. The negative Casimir energy of the composite string has prompted some speculations about the importance of the model for cosmology [6]. In [7], a twisted string was considered together with possible relations to processes in the early universe and to gravity. A generalization to a charged string placed in a magnetic field was studied in [8]. In this paper also a variational principle for the string was set-up. In [9] an interesting scaling property was found. It appears that the ratio of the vacuum energies, $f(x) = E_N(x) / E_N(0)$, is approximately independent of N , provided $N \geq 2$, and lies in the interval $0 < f(x) < 1$.

There are interesting links to the composite string model and neighboring topics. Let us start with an analogy in macroscopic electrodynamics. If one considers some material body having permittivity ε and permeability μ , the speed of light inside is $c = 1 / \sqrt{\varepsilon\mu}$. In such systems, the vacuum energy of the electromagnetic field has specific ultraviolet divergences which are even today not fully understood. For the first time this problem was observed in [10], in detail it was investigated in [11]. This divergence is absent if the speeds of light inside and outside the material bodies are equal. It must be mentioned that even for equal speeds of light across an interface, the electromagnetic fields are different, obeying well-known matching conditions on the the interface. Boiling down to (1+1) dimensions, in the composite string model we observe the same situation.

Further similar (1+1)-dimensional periodic objects are nanowires and optical lattices. There is a huge amount of papers on this topic and we let us mention only the first, [12], which introduced the Kronig-Penney model. Of special interest for their simplicity are also models with background potentials with zero range support; for a recent review see [13] and for the most general case in the sense of selfadjoint extensions see [14]. There is an analogy between closed composite $2N$ string discussed in the present paper and a δ -ring, which is a chain of δ -potentials placed on a circle. In the recent papers [15; 16], a formalism was put forward for calculating the vacuum energy in one-dimensional periodic backgrounds formed of generalized δ -potentials. The use of Chebyshev polynomials allowed to significantly simplify the calculations. In Sect. 2 we apply this approach to the $2N$ piecewise string. In [17] Casimir energies for self-similar (fractal-like) sets of parallel plates with δ -potential separated by distances

$z = a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8} \dots$ were studied. It was observed that these systems manifest an analogy to the theory of the piecewise uniform string.

In most of the above mentioned papers on the composite string model, much effort was put into the investigations of different regularizations of the vacuum energy of the string. However, looking from the point of the heat kernel expansion on these, one observes that the decisive coefficient a_1 (which comes in (1+1)-dimensions in place of a_2 in (3+1)) is zero (see below in Sect. 4.3). In such case, as known from the general theory (see, e. g., Chapt. 4



in [18]), all divergences can be removed uniquely, not leaving room for any ambiguity. In some regularizations, for instance, in the zeta functional one, there are no divergences at all. For this reason, we will be very brief on this topic.

Another interesting observation concerns entropy in Casimir effect like configurations, where negative entropy was observed, first in [19], for a recent overview see the introduction in [20] and for single standing objects see [21–23]. Thus, it is necessary to consider the question of what entropy a piecewise uniform string will show.

In the present paper, we reconsider the closed composite string and calculate vacuum and free energies as well as the entropy using integral representation and sum representation as well.

We use zeta functional regularization and calculate the heat kernel coefficients, pointing out the uniqueness of the result. Also, we get the high and low-temperature asymptotics of the free energy and demonstrating how the general scheme is applied in the given case. We add not much, but we are interested in a more streamlined and most transparent and unified formulation of this topic.

Throughout the paper we use units with $c = \hbar = k_B = 1$.

2. The piecewise uniform string and its spectrum

We consider a piecewise uniform closed string composed of $2N$ segments. After Fourier transform in τ , the solution of the string equation,

$$(-\omega^2 - \partial_\sigma^2)\phi(\sigma) = 0, \quad (4)$$

consists of plane wave segments,

$$\phi(\sigma) = \sum_n \phi_n(\sigma)\theta_n(\sigma), \quad \phi_n(\sigma) = A_n e^{i\omega(\sigma-an)} + B_n e^{-i\omega(\sigma-an)}, \quad (5)$$

and we use the notation

$$\theta_n(\sigma) = \begin{cases} 1, & a(n-1) < \sigma < an, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (6)$$

The limits of fields and their derivatives at the string junctions are denoted by

$$\phi_n^\pm = \left(\begin{array}{c} \phi_n(\sigma) \\ \phi_n'(\sigma) \end{array} \right) \Big|_{an \pm 0}. \quad (7)$$

With the shorthand notation,

$$\Psi_n = \left(\begin{array}{c} A_n \\ B_n \end{array} \right), \quad (8)$$



the expression (7) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \phi_n^- &= \begin{pmatrix} A_n + B_n \\ i\omega A_n - i\omega B_n \end{pmatrix} = K\Psi_n, \\ \phi_n^+ &= \begin{pmatrix} A_n e^{-i\omega a} + B_n e^{i\omega a} \\ i\omega A_n e^{-i\omega a} - i\omega B_n e^{i\omega a} \end{pmatrix} = KQ\Psi_{n+1}, \end{aligned} \tag{9}$$

with the matrices

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} e^{-i\omega a} & 0 \\ 0 & e^{i\omega a} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

The matching conditions (3) at a junction can also be written using a matrix, M_n ,

$$M_n \phi_n^- = \phi_n^+. \tag{11}$$

For the piecewise uniform string this matrix reads

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{(-1)^{n+1}} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

where x is the ratio of the string tensions

$$x = \frac{T_I}{T_{II}}. \tag{13}$$

For comparison, we mention the corresponding matrix,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1-\beta}{1+\beta} & 0 \\ \frac{\alpha}{1-\beta^2} & \frac{1+\beta}{1-\beta} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

where α and β are some couplings, for the more general setting of generalized delta functions at the junctions, as used, for example, in [23].

The transfer matrix T_n is defined as to relate the solutions in neighboring segments,

$$T_n \Psi_n = \Psi_{n+1}. \tag{15}$$

Inserting (9) and (10) into (11),

$$M_n K \Psi_n = K Q \Psi_{n+1}, \tag{16}$$

we get

$$T_n = Q^{-1} K^{-1} M_n K. \tag{17}$$



For two neighboring segments of the string, having with (12)

$$\text{odd } n: M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad \text{even } n: M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix}, \quad (18)$$

we define

$$T = T_{n(\text{odd})} \circ T_{n(\text{even})}. \quad (19)$$

This matrix does not depend on n and it takes the form

$$T = \begin{pmatrix} W & Z \\ Z^* & W^* \end{pmatrix}, \quad (20)$$

with

$$W = \frac{1}{4x} \left((1+x)^2 e^{2i\omega a} - (1-x)^2 \right), \quad (21)$$

$$Z = \frac{1-x^2}{4x} \left(-e^{2i\omega a} + 1 \right).$$

In (21), the parameter a is the length of a single section. It is connected with the length L of the string and the number N of the pairs of sections by

$$a = \frac{L}{2N}. \quad (22)$$

For a string with non-equal segments one would have to put different a 's into the Q 's, (10), corresponding to the two matrices entering (19). Accordingly, the expressions in (21) would become more complicated.

The transfer matrix has the property

$$\det T = 1, \quad (23)$$

preserving unitarity. In fact, (21) and (22) correspond to Eqs. (13) and (14) in [24].

Now, repeatedly applying (15), we get with

$$\Psi_{2N+1} = T_{2N} T_{2N-1} \dots T_1 \Psi_1 \quad (24)$$

a relation between the first element of the string and any other element. To obtain the closed string with $2N$ elements we demand periodicity,

$$\Psi_{2N+1} = \Psi_1. \quad (25)$$

At this place, it should be mentioned that a quasi-periodic closure of the string,

$$\Psi_{2N+1} = e^{i\Theta} \Psi_1, \quad (26)$$

results also in real eigenfrequencies. The interpretation could be a charged string, allowed to oscillate only in parallel to a magnetic field penetrating the loop (other couplings to a magnetic field were considered in [8]). In the antiperiodic case, $\Theta = \pi$, one comes to the twisted string considered in [7].



With (25), we are faced with a homogeneous system of equations and its determinant must vanish. We define with

$$\Delta(\omega) \equiv \det(T_{2N}T_{2N-1} \dots T_1 - 1) \tag{27}$$

the mode generating function. Its zeros, i. e., the solutions of the equation

$$\Delta(\omega) = 0, \tag{28}$$

are the eigenfrequencies for the vibrations of a closed composite string. Since we consider a string of equal pairs of sections, all T_i in (27) are equal and the mode generating function simplifies to

$$\Delta(\omega) = \det(T^N - 1). \tag{29}$$

Now, as a matrix obeys its characteristic equation, using the property (23) and introducing the notation

$$\xi \equiv \frac{1}{2} \operatorname{tr} T, \tag{30}$$

one arrives at the relation

$$T^2 = 2\xi T - 1. \tag{31}$$

Repeatedly multiplying the equation (31) by T and each time substituting the right-hand side of the equation (31) for T^2 , we obtain

$$T^n = T u_{n-1}(\xi) - u_{n-2}(\xi). \tag{32}$$

Here, the u_n are Chebyshev polynomials,

$$u_n(\xi) = \frac{\sin((n+1)\gamma)}{\sin(\gamma)}, \quad \cos(\gamma) = \xi. \tag{33}$$

For a chain of delta functions, the approach with Chebyshev polynomials was used in [25] for a finite size Kronig-Penney model. Applied there to expressions like (24) with $T_i = T$, these relations gave closed, explicit expressions for the amplitudes of the wave function. The same would happen for the composite string; however, we do not go into that detail. We mention, the in [24] a recursive formula was found, which gives the same results as the application of the Chebyshev polynomials.

Using the above formulas we get from (29)

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= \det(T u_{N-1}(\xi) - (u_{N-2}(\xi) + 1)), \\ &= u_{N-1}(\xi)^2 - 2\xi u_{N-1}(\xi)(u_{N-2}(\xi) + 1) + (u_{N-2}(\xi) + 1)^2, \end{aligned} \tag{34}$$

for the mode generating function. After inserting (33), this expression can be simplified and we obtain

$$\Delta(\omega) = 4 \sin^2 \left(\frac{N}{2} \gamma \right). \tag{35}$$



Rewriting the above equation as $\Delta(\omega) = 2 - (e^{iN\gamma} + e^{-iN\gamma})$ and defining $\alpha = \frac{1-x}{1+x}$, one can convert the expression (35) into the form,

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= 2 - (1 - \alpha^2)^{-N} (\lambda_+^N + \lambda_-^N), \\ \lambda_{\pm} &= \cos(2a\omega) - \alpha^2 \pm \sqrt{(\cos(2a\omega) - \alpha^2)^2 - (1 - \alpha^2)^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

which was obtained in [24].

It should be mentioned [24], that the result (35), i.e., the expression for the determinant, can be obtained also in an easier way. Let $\lambda_{1,2}$ be the eigenvalues of the transfer matrix T ,

$$\det(T - \lambda_{1,2}1) = 0. \quad (37)$$

With (23) we get

$$\lambda_{1,2} = \xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}, \quad \xi = \frac{1}{2} \text{tr} T. \quad (38)$$

Now we consider (29) and diagonalize the matrix, not changing this way its determinant,

$$\Delta(\omega) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1^N - 1, & 0 \\ 0, & \lambda_2^N - 1 \end{pmatrix} = (\lambda_1^N - 1)(\lambda_2^N - 1) \quad (39)$$

and inserting $\cos(\gamma)$ for ξ we come also to (35).

We use the mode generating function in the form (35) as it allows one in the most instructive way to analyze the structure of the spectrum. The solutions of (35) are

$$\gamma_j = \frac{2j\pi}{N}, \quad (j \text{ integer}). \quad (40)$$

Computing 2ξ as the trace of the transfer matrix with elements given by (20) and (21), we obtain from (33)

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{4x} \left(-(1-x)^2 + (1+x)^2 \cos(2a\omega) \right). \quad (41)$$

This is the dispersion relation for the string under consideration. Obviously, γ is the quasi momentum. To have a real spectrum, the condition

$$-1 \leq \frac{-(1-x)^2 + (1+x)^2 \cos(2a\omega)}{4x} \leq 1, \quad (42)$$

must hold, defining the zone structure. It should be mentioned, that the spectrum is completely discrete (since the closed string has finite spatial extend), and, strictly speaking, there are no bands. This is obvious especially in the case $x = 1$ of a completely homogeneous string having an equidistant spectrum. However, with more sections on the string, the eigenvalues start to group; forming zones eventually when their number reaches infinity.



Eq. (41) can be inverted easily,

$$\cos(2a\omega) = \frac{4x \cos(\gamma) + (1-x)^2}{(1+x)^2}, \tag{43}$$

and with γ_j , (40), we get explicit expressions,

$$\omega_{n,j} = \frac{\omega_j + 2\pi n}{2a}, \quad \left(j = 1, \dots, \left[\frac{N}{2} \right], n = 0, 1, \dots \right), \tag{44}$$

$$\omega_{n,j} = \frac{2\pi - \omega_j + 2\pi n}{2a}, \quad \left(j = 0, \dots, \left[\frac{N}{2} \right], n = 0, 1, \dots \right),$$

where we defined

$$\omega_j = \arccos\left(\frac{4x \cos(\gamma_j) + (1-x)^2}{(1+x)^2} \right), \tag{45}$$

for the eigenfrequencies. The arccos is defined on its main branch. The constant mode, i.e., $\omega = 0$, is excluded since it does not contribute to the energy. An example is shown in Fig. 1. The degeneracy of the modes results in a weight function

$$\chi_j = \begin{cases} 1 & \text{for } N \text{ even and } j = \frac{N}{2}, \\ 2 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{46}$$

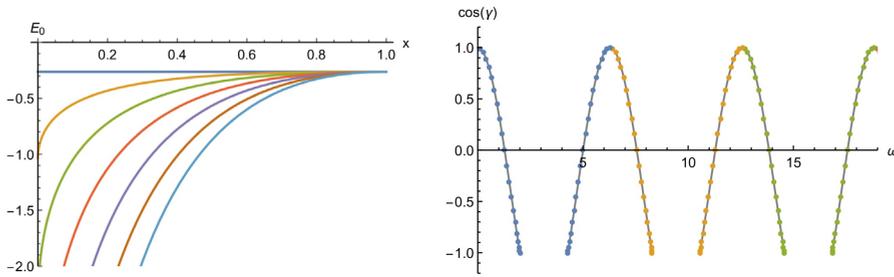


Fig. 1. The spectrum according to eq. (41) for a string with $N = 40$ sections, $x = 0.3$ and $L = 1$. The dots denote the eigenvalues. For $N \rightarrow \infty$ or $L \rightarrow \infty$ these approach the solid line

The degeneracy is 2 except for the modes with $j = \frac{N}{2}$ for even N .

3. Vacuum energy

In zeta functional regularization, the vacuum energy is defined as

$$E_0 = \frac{\mu^{2s}}{2} \sum_{(n)} \omega_{(n)}^{1-2s}. \tag{47}$$



The sum goes over all nonzero eigenvalues $\omega_{(n)}$ with the corresponding multiplicity. In our case, the eigenvalues are specified by (44). The arbitrary parameter μ comes in with the regularization and is chosen as to preserve the correct dimension of the regularized energy.

It should be mentioned that frequently the vacuum energy is considered relative to the vacuum energy of the empty space. Accordingly, in all papers on the composite string, it is considered relative to that of the homogeneous string. To be more precise, people consider the difference between the vacuum energy of the composite string and that of the homogeneous string. This procedure is meaningful in the case of an infinite space since its vacuum energy is proportional to its (infinite) volume. In the case of the closed string, which has with its finite length a finite 'volume', we consider the mentioned subtraction as superfluous and consider the complete vacuum energy.

There are two (main) approaches to calculate the vacuum energy. One is to transform the sum in (47) into an integral and to move the integration path towards the imaginary axis. This way is especially preferable, not only by avoiding to work with oscillating quantities as one has typically for real frequencies but for easy separation of the volume contribution for problems in infinite volume. Also, it allows for an easy generalization to Matsubara representation (at finite temperature). The other way is a direct summation in (47). This is especially preferable for a linear spectrum, allowing easily for results in terms of the Riemann zeta function or related zeta functions. Many examples of this kind are collected in [26]. Below, we discuss both approaches.

3.1. Vacuum energy in integral approach

In this approach one starts from the frequencies $\omega_{n,j}$ as solutions of the equation (28). With

$$\Delta(\omega) = 4g(\omega)^2, \quad g(\omega) = \sin\left(\frac{N}{2}\gamma\right), \quad (48)$$

where γ is given by (41), we define a modified mode generating function $g(\omega)$ having zeros in the same locations as (28), but as single zeros.

We are going to transform the sum in (47) into a contour integral. For that, we define with

$$h(\omega) = \ln \frac{g(\omega)}{g_0(\omega)}, \quad g_0(\omega) = \frac{N\omega(1+x)}{4\sqrt{x}}, \quad (49)$$

a function whose logarithmic derivative has single zeros in the eigenfrequencies, $\omega_{n,j}$, and which vanishes at the origin,

$$h(\omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \omega^2. \quad (50)$$



With these, the vacuum energy becomes

$$E_0 = \mu^{2s} \int_C \frac{d\omega}{2\pi i} \omega^{1-2s} \partial_\omega h(\omega), \quad (51)$$

where we accounted for a factor of 2 which results from switching from the mode generating function $\Delta(\omega)$ to $g(\omega)$ in eq. (48). The contour C encircles the real ω -axis. We mention that we excluded any contribution from the origin by dividing by $g_0(\omega)$ in (49). This way we exclude the constant mode which is in this case with a massless field a zero-mode and which should not enter in zeta-functional regularization.

We continue with the Wick rotation, $\omega = i\zeta$, on the upper half of the integration path C , and $\omega = -i\zeta$ on the lower half. We get with

$$E_0 = -\frac{\cos(\pi s)}{\pi} \mu^{2s} \int_0^\infty d\zeta \zeta^{1-2s} \partial_\zeta h(i\zeta), \quad (52)$$

a representation in terms of imaginary frequency ζ , which is, as usual, convenient for further work. The function $h(i\zeta)$ has a quite simple explicit form,

$$h(i\zeta) = \ln \left(\sinh \left(\frac{N}{2} \operatorname{arccosh} \frac{-(1-x)^2 + (1+x)^2 \cosh(2a\zeta)}{4x} \right) \right) - \ln \left(\frac{N2a\zeta(1+x)}{4\sqrt{x}} \right), \quad (53)$$

which is in terms of real functions.

We mention the asymptotic properties

$$h(i\zeta) \underset{\zeta \rightarrow 0}{\sim} \zeta^2, \quad h(i\zeta) \underset{\zeta \rightarrow \infty}{\sim} \zeta \quad (54)$$

allowing the integration in (52) to converge for $1 < s < \frac{3}{2}$.

We have to construct the analytic continuation to $s = 0$. For this, we define functions

$$h^{as} = \frac{h^{inf}}{1 + \zeta^{-3}}, \quad h^{inf} = \frac{N\zeta}{2} + (N-1) \ln \left(\frac{(1+x)}{2\sqrt{x}} \right) - \ln \left(\frac{N\zeta}{2} \right), \quad (55)$$

$$h^{sub} = h - h^{as}$$

having the properties

$$h^{sub} \underset{\zeta \rightarrow 0}{\sim} \zeta^2, \quad h^{sub} \underset{\zeta \rightarrow \infty}{\sim} \zeta^{-2}, \quad (56)$$

$$h^{as} \underset{\zeta \rightarrow 0}{\sim} \zeta^{-2}, \quad h^{as} \underset{\zeta \rightarrow \infty}{\sim} \zeta.$$

Here we dropped for a moment the arguments of the functions to simplify notations. The function h^{inf} is just the asymptotic expansion of h , (53), for $\zeta \rightarrow \infty$ up to exponentially decreasing terms. We split the vacuum energy according to

$$E_0 = E^{fin} + E^{as}, \quad (57)$$



into finite and asymptotic parts with

$$E^{fin} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta h^{sub}, \quad E^{as} = \frac{(1-2s)\cos(\pi s)}{\pi} \mu^{2s} \int_0^\infty d\zeta \zeta^{-2s} h^{as}. \quad (58)$$

In E^{fin} we could remove the regularization by putting $s=0$ due to the decrease (56). Also, we integrated by parts which is possible without surface terms, also due to (56). This expression has to be evaluated numerically.

The asymptotic part, E^{as} in (58), can be integrated explicitly with the result

$$E^{as} = \frac{(\mu L / N)^{2s}}{6} \frac{(2s-1)\cos(\pi s)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}(2s+1)\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{6}(4s+1)\right)} \times \quad (59)$$

$$\times \left[\left(2\cos\left(\frac{4\pi s}{3}\right) + 1 \right) [(N-1)\ln\gamma_0 - \ln(N)] + N \cos\left(\frac{\pi}{3}(4s+1)\right) + N + \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{4\pi s}{3}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right].$$

The analytic continuation to $s=0$ reveals no pole. This way, within the zeta functional regularization there is no ultraviolet divergence. This is in accordance with the heat kernel coefficients which will be discussed in Sect. 4.3. Finally, for $s=0$, the asymptotic part reads

$$E^{as} = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{N}{L} \left((N-1)\ln\gamma_0 - \ln N + \frac{N}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right). \quad (60)$$

To compute the vacuum energy we scale out the dimensional parameters, $\zeta \rightarrow \frac{\zeta}{2a}$, to rewrite the finite part of the energy, (58), in the form

$$E^{fin} = \frac{N}{\pi L} \int_0^\infty d\zeta h^{sub} \left(i\zeta \frac{L}{N} \right), \quad (61)$$

where the integral is now dimensionless. Examples for E_0 are shown in Fig. 2.

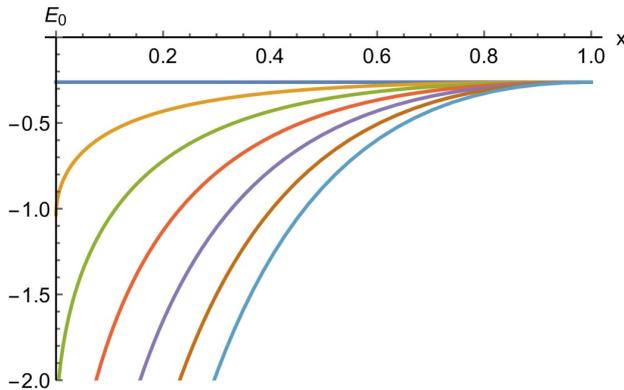


Fig. 2. The vacuum energy E_0 , (57), (61), for a composite string as a function of the ratio x , (13), of the string tensions for several numbers N of sections of the string. N increases from top to bottom (color online). The length of the string is $L=1$



3.2. Vacuum energy in sum approach

The sum representation (47) of the vacuum energy needs to be specified in terms of the eigenfrequencies (44). Accounting for the multiplicity (46), it reads

$$E_0 = \frac{1}{2(2a)^{1-2s}} \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_j (\omega_j + 2\pi n)^{1-2s} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_j (2\pi - \omega_j + 2\pi n)^{1-2s} \right]. \quad (62)$$

It should be mentioned, that the account for the multiplicity, which here is taken care of by the function χ_j , happens automatically in the integral approach.

The sums over n define Hurwitz zeta functions, as first in this context mentioned in [3], and we arrive at

$$E_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{1-2s} \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j \zeta_H \left(2s-1, \frac{\omega_j}{2\pi} \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j \zeta_H \left(2s-1, 1 - \frac{\omega_j}{2\pi} \right) \right]. \quad (63)$$

Now the analytic continuation in s is given by the properties of the Hurwitz zeta function and we arrive immediately at

$$E_0 = \frac{\pi}{2a} \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j \zeta_H \left(-1, \frac{\omega_j}{2\pi} \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j \zeta_H \left(-1, 1 - \frac{\omega_j}{2\pi} \right) \right]. \quad (64)$$

Again, as in the preceding section, we observe no pole in s . We mention the known relation $\zeta_H(-1, 1-a) = \zeta_H(-1, a)$, allowing for some insignificant simplification. Further, we mention that the Hurwitz zeta function with negative integer argument has an explicit expression in terms of Bernoulli polynomials. Specifically in our case

$$\zeta_H(-1, a) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - a + a^2 \right) \quad (65)$$

holds, showing that we have with (64) an expression for the vacuum energy of the composite string in terms of finite sums over polynomials. This representation is, of course, equivalent to (64) and (57) in the sense that these and (64) are different representations of the same quantity. The sum representation (64) appears to be somehow simpler.

4. Limiting cases of the vacuum energy and the heat kernel coefficients

4.1. The cases $x = 0$ and $x = 1$

The limiting cases $x = 0$ and $x = 1$ (homogeneous string) can be easiest obtained from the sum representation (64). For $x = 0$ we mention with (45)

$\omega_j = 0$ and with $\zeta_H(-1, 0) = -\frac{1}{12}$ we get a sum over the j 's in the form



$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j = 2N. \quad (66)$$

For $x = 1$ we note $\omega_j = \gamma_j$ and use the property

$$\sum_{k=1}^n \zeta_{\text{H}} \left(-1, \frac{k}{n} \right) = -\frac{1}{12n} \quad (67)$$

of the Hurwitz zeta function. The sums in (64) collect just into the form (67). As a result, for this two cases we get

64

$$E_{0|x=0} = -\frac{\pi N^2}{6L}, \quad E_{0|x=1} = -\frac{\pi}{6L}. \quad (68)$$

The same results can be obtained from the integral approach.

4.2. Limiting cases $N \rightarrow \infty$

We consider this limit in both representations and start with the integral representation, Sect. 3.1. First, we consider E^{fin} , (58). It is possible to perform the limit $N \rightarrow \infty$ under the sign of the integral. We get from (53) and (55)

$$h^{\text{sub}} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} h_{\text{inf}}^{\text{sub}} \quad (69)$$

$$h_{\text{inf}}^{\text{sub}} = \frac{N}{2} \operatorname{arccosh} \frac{-(1-x)^2 + (1+x)^2 \cosh(\zeta)}{4x} - \frac{1}{1+\zeta^{-3}} \left(\frac{N\zeta}{2} + N \ln \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) \right).$$

We denote the finite part of the vacuum energy in this limit by $E_{\text{inf}}^{\text{fin}}$ and with (69) it has the representation

$$E_{\text{inf}}^{\text{fin}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\zeta h_{\text{inf}}^{\text{sub}}. \quad (70)$$

From the asymptotic part, (60), we have in this limit

$$E_{\text{inf}}^{\text{as}} = \frac{4N}{3\sqrt{3}} \left(\ln \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{2} \right) \quad (71)$$

and together we get

$$E_0 \underset{N \rightarrow \infty}{\simeq} E_{\text{inf}}^{\text{fin}} + E_{\text{inf}}^{\text{as}}. \quad (72)$$

which is proportional to N , and after restoring the dimensions to N^2 .

Another approach starts with the sum representation (64). In the limit $N \rightarrow \infty$, the sum over j turns into an integration according to the rules

$$\frac{j}{N} \rightarrow \frac{\gamma}{2\pi}, \quad \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \rightarrow \frac{N}{2\pi} \int_0^\pi d\gamma. \quad (73)$$



In this limit, the differences between the starting points in the two sums in (64), as well as the factor χ_j , become unimportant and we end up with

$$E_0 \underset{N \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{2N^2}{L} w(x), \quad w(x) = \int_0^\pi d\gamma \zeta_H \left(-1, \frac{\omega(\gamma)}{2\pi} \right), \quad (74)$$

with

$$\omega(\gamma) = \arccos \frac{4x \cos(\gamma) + (1-x)^2}{(1+x)^2}. \quad (75)$$

Both expressions, (72) and (74), represent the same limit of the vacuum energy. The first one involves infinite integration, the other a finite one. Both integrations cannot be done analytically; however, it is easy to evaluate them numerically. A plot is shown in Fig. 3. In this plot, for $x = 0$, we note from (75) $\omega(\gamma) = 0$ and we get $E_0 \sim -N^2 / 6L$. In $x = 1$ we have $\omega(\gamma) = \gamma$ and the integration over γ gives zero.

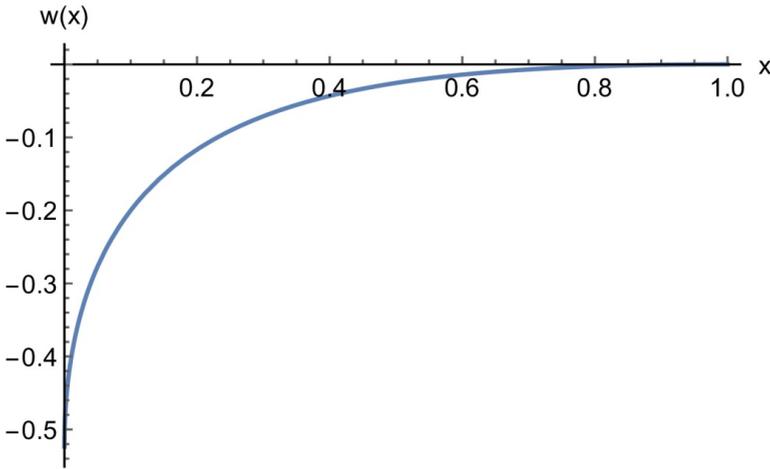


Fig. 3. The limiting slope $w(x)$ of the vacuum energy (74) for $N \rightarrow \infty$ as a function of the ratio x

4.3. The heat kernel coefficients

The heat kernel expansion and its coefficients are the universal tool to investigate the ultraviolet behavior of the vacuum energy. At once this is a semiclassical expansion since in powers of \hbar and, at once, in inverse powers of the mass (if present). In terms of eigenvalues, the heat kernel and its expansion are defined as,

$$K(t) = \sum_{(n)} e^{-t\omega^2(n)} \underset{t \rightarrow 0}{\square} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{n \geq 0} a_n t^n, \quad (76)$$



where d is the space dimension, $d = 1$ in our case, and the a_n are the heat kernel coefficients. To calculate the coefficients we use the relation to the zeta function $\zeta_P(s)$, (93), of the composite string. Using an integral representation we get

$$\zeta_P(s) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s)} \sum_{(n)} e^{-t\omega_{(n)}^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s)} K(t). \quad (77)$$

The behavior of the integrand for small t results in poles which can be determined by inserting the expansion (76) into (77). Integrating t from 0 to 1 one gets the pole part,

66

$$\zeta_P(s) \simeq \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{\sqrt{4\pi} \Gamma(s)} \frac{1}{s + n - \frac{1}{2}} + \dots, \quad (78)$$

and the dots denote the regular part. This formula allows calculating the coefficients from the residues,

$$a_n = \operatorname{res}_{s=\frac{1}{2}-n} \sqrt{4\pi} \Gamma(s) \zeta_P(s). \quad (79)$$

As a special case we mention that for $n = \frac{1}{2}$ the relation

$$a_{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\pi} \zeta_P(0) \quad (80)$$

follows.

Next, we use the information on $\zeta_P(s)$, which is collected in the Appendix, eq. (97). For $n = 0$, we have the pole of $\zeta_P(s)$ in $s = \frac{1}{2}$. For $n = \frac{1}{2}$ we have the pole of the gamma function in $s = 0$ and for $n = 1$ we have no pole. Accordingly, the coefficient is zero, which is in agreement with the absence of ultraviolet divergences observed earlier. With these remarks, the coefficients become

$$a_0 = L, \quad a_{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\pi}, \quad a_1 = 0. \quad (81)$$

All higher order coefficients are zero. This is in agreement with the observation that there are only exponentially small corrections to the asymptotic expansion h^{inf} , defined in (55), of the mode generating function h , (53), in (52).

It should be mentioned that the coefficient $a_{\frac{1}{2}}$, which is non-zero, does not depend on the parameters of the string. For instance, it does not disappear when taking the limit of the homogeneous string ($x \rightarrow 1$). Similar features were observed in [27] for a flat plasma sheet in the TM-mode and, similar, in [28] for a spherical plasma shell. As discussed in [21] (Sect. 4), this is related to the Klauder-phenomenon stating that some singular perturba-



tions (like the jump between the sections of the string in our case) cannot be turned off to restore the unperturbed situation. Doubts in the physical meaning of such a situation were discussed in [29].

5. The free energy

At finite temperature, there are basically two approaches. One is in terms of the Matsubara frequencies, the other in terms of real frequencies. In the first one, which was used also in the literature [6; 30; 31], one starts from the integral representation in terms of imaginary frequencies like (52) after integrating by parts,

$$E_0 = \frac{(1-2s)\cos(\pi s)}{\pi} \mu^{2s} \int_0^\infty d\zeta \zeta^{-2s} h(i\zeta), \quad (82)$$

and substitutes the integration by a sum,

$$\int_0^\infty d\zeta f(\zeta) \rightarrow T \sum_{l=0}^{\infty} f(2\pi Tl), \quad (83)$$

(the contribution from $l=0$ enters with weight $\frac{1}{2}$). As mentioned, this expression contains the ultraviolet divergence. In the given case, the simplest way to get rid of it is to subtract the homogeneous string contribution and to treat it separately. After that, one can put $s=0$ and comes to the conventional shape of this representation.

The other representation is

$$F = \sum_{n,j} \left(\frac{\omega_{n,j}}{2} + T \ln \left(1 - e^{-\omega_{n,j}/T} \right) \right). \quad (84)$$

The first term in the parenthesis is the vacuum energy and the second is the temperature-dependent part, $\Delta_T F$, of the free energy. In the following, we focus on it and on the entropy $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$. We represent these in the form

$$\Delta_T F = T \sum_{n,j} f \left(\frac{\omega_{n,j}}{T} \right), \quad S = \sum_{n,j} s \left(\frac{\omega_{n,j}}{T} \right), \quad (85)$$

with

$$f(\omega) = \ln(1 - e^{-\omega}), \quad g(\omega) = -\ln(1 - e^{-\omega}) + \frac{\omega}{e^\omega - 1}. \quad (86)$$

With the summations defined as in (62), since these sums are fast converging now, one can easily produce numbers and plots. Examples are shown in Fig. 4. As can be seen, the free energy is monotone and so is the entropy. It has the right sign and vanished at the origin. Thus, the thermodynamics of the considered system does not bear an interesting feature like that mentioned in the Introduction.

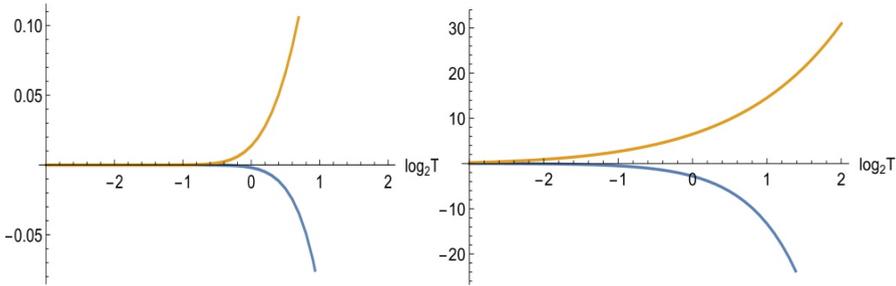


Fig. 4. The free energy (lower curve) and the entropy (upper curve) of the composite string for $N = 1$ (left panel) and $N = 16$, $x = 0.9$ (right panel)

The limiting cases for small and high temperatures can be obtained easily, following Chapt. 5 in [18], for instance. The low-temperature behavior, since the spectrum is discrete, is determined by the lowest non zero

eigenvalue, $\omega_{0,1} = \frac{1}{2a} \arccos \left(\frac{4x \cos(\frac{2\pi}{N}) + (1-x)^2}{(1+x)^2} \right)$, in (44), to be

$$\Delta_T F \underset{T \rightarrow 0}{\simeq} T \left(1 - e^{-\omega_{0,1}/T} \right). \quad (87)$$

For the high-temperature expansion we use the heat kernel expansion. The ready-to-use formula (5.53) in [18] is for (3+1)-dimensions. Therefore we go back to (5.43),

$$F = -\frac{T}{2} \partial_s \mu^{2s} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^s}{\Gamma(s)} \sum_l e^{-t\xi_l^2} K(t), \quad (88)$$

where $\xi_l = 2\pi Tl$ are the Matsubara frequencies, and we have to put $s = 0$ at the end. This is an expression of the free energy in terms of the heat kernel. The high- T expansion follows from the heat kernel expansion. Inserting (76) with $d = 1$, and separating the contribution from $l = 0$, we arrive at

$$F \simeq -\frac{T}{2} \partial_s \mu^{2s} \left[\zeta_P(s) + \sum_{n \geq 0} a_n \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{t^{s+n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi}\Gamma(s)} 2 \sum_{l=1}^\infty e^{-t\xi_l^2} \right]. \quad (89)$$

Now the integration over t can be carried out. Subsequently, the sum over l gives a Riemann zeta function and we arrive at

$$F \simeq -\frac{T}{2} \partial_s \mu^{2s} \left[\zeta_P(s) + \sum_{n \geq 0} a_n \frac{\Gamma(s+n-\frac{1}{2})}{\sqrt{4\pi}\Gamma(s)} (2\pi T)^{1-2s-2n} 2\zeta_R(2s+2n-1) \right], \quad (90)$$



which for $d = 1$ comes in place of (5.49) in [18]. Now we take the derivative, put $s = 0$ and arrive at the high- T expansion in the form

$$F \underset{T \rightarrow \infty}{\simeq} -\frac{\pi}{6} a_0 T^2 - \left(\frac{\ln(T)}{2\sqrt{\pi}} a_1 + \frac{1}{2} \zeta'_P(0) \right) T + \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{4\pi T}{\mu} - \gamma \right) a_1 + O(T^{-1}). \quad (91)$$

Inserting the coefficients (81) we arrive at the expansion

$$F \underset{T \rightarrow \infty}{\simeq} -\frac{\pi L}{6} T^2 + \frac{1}{2} (\ln(T) - \zeta'_P(0)) T + \dots \quad (92)$$

The corrections are exponentially small like in the case of the Casimir free energy for ideal parallel plates in accordance with the vanishing of the higher-order heat kernel coefficients. The first term is black-body radiation in the given case.

69

6. Conclusions

The composite string is an interesting model to study vacuum (Casimir) energy and thermodynamic properties in a non-trivial, but simple model. It allows us to demonstrate the basic technical tools and to get the most explicit results. The model itself is not very interesting; however easy generalizations may reveal more interesting features like Hagedorn temperature or instabilities, to mention two which were discussed in the literature.

In the present paper, we recalculated the mentioned quantities in two representations. We used only zeta functional regularization well knowing that all other regularizations will be equivalent. The system has a vanishing heat kernel coefficient a_1 . Thus, there are no ambiguities in its renormalization and in zeta-functional regularization no renormalization is needed. The thermodynamic properties are most simple, free energy and entropy are monotone functions; in opposite to some mentioned other simple systems.

The authors hope that the above presentation of the topic may serve as a good starting point for more interesting applications and further developments.

This paper is an extended version of a talk one of the authors (I.G. Pirozhenko) gave on The 10th International workshop «Waves in inhomogeneous media and integrable systems», held in September 24 – 25, 2020, at IKBFU (Kaliningrad, Russia), and we thank the organizers for the opportunity to present this talk.

Appendix: The zeta function of the composite string

The zeta function $\zeta_P(s)$ of the composite string is the zeta function associated with the operator \mathbf{P} which is determined by the equation (2) and the matching conditions (3) and (25). In terms of its eigenvalues, $\omega_{(n)}$, it is given by

$$\zeta_P(s) = \sum_{(n)} \omega_{(n)}^{-2s}. \quad (A.1)$$



This is similar to the definition (47) of the vacuum energy and the relation

$$E_0(s) = \frac{\mu^{2s}}{2} \zeta_P(s - \frac{1}{2}) \quad (\text{A.2})$$

holds. Using the same steps which resulted in eq. (63), we get

$$\zeta_P(s) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-2s} \left(\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j \zeta_H\left(2s, \frac{\omega_j}{2\pi}\right) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j \zeta_H\left(2s, 1 - \frac{\omega_j}{2\pi}\right) \right). \quad (\text{A.3})$$

70

To continue we use the following properties of the Hurwitz zeta function,

$$\zeta_H(2s, a) = \frac{1}{2s-1} + \dots \quad \text{for } s \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (\text{A.4})$$

$$\zeta_H(0, a) = \frac{1}{2} - a$$

$$\zeta_H(-1, a) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - a + a^2 \right).$$

Further, we need to know that $\zeta_H'(0, a)$ (the derivative with respect to s) is a finite function of x and N .

With these properties, it is easy to get the following relations,

$$\zeta_P(s) = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{s - \frac{1}{2}} + \dots \quad \text{for } s \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (\text{A.5})$$

$$\zeta_P(0) = -\frac{\pi N}{L}.$$

In the first one we used

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j = 2N \quad (\text{A.6})$$

and for the second one, with the second line in (A.4), we note

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_j}{2\pi} \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi_j \left(-\frac{1}{2} + \frac{\omega_j}{2\pi} \right) = -1. \quad (\text{A.7})$$

Here all terms except the first one ($j=0$) canceled and $\omega_0 = 0$ holds. Finally, we mention that the value of $\zeta_P(s)$ at $s = -\frac{1}{2}$ is the vacuum energy,

(A.2), and the derivative in $s = -\frac{1}{2}$ is a finite function.



References

1. Brevik I., Nielsen H.B. Casimir Energy for a Piecewise Uniform String // Phys. Rev. D. 1990. Vol. 41 (4). P. 1185–1192.
2. Brevik I., Bytsenko A.A., Gonçalves A.E. Mass and decay spectra of the piecewise uniform string // Physics Letters B. 1999. Vol. 453 (3). P. 217–221.
3. Li Xz., Shi X., Zhang Jz. Generalized Riemann Zeta-Function Regularization and Casimir Energy for a Piecewise Uniform String // Phys. Rev. D. 1991. Vol. 44 (2). P. 560–562.
4. Brevik I.H., Nielsen H.B., Odintsov S.D. Casimir energy for a three piece relativistic string // Phys. Rev. D. 1996. Vol. 53. P. 3224–3229.
5. Hadasz L., Lambiase G., Nesterenko V.V. Casimir energy of a nonuniform string // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62. 025011.
6. Brevik I., Bytsenko A.A., Sollie R. Thermodynamic properties of the 2N-piece relativistic string // J. of Mathematical Physics. 2003. Vol. 44 (3). P. 1044–1055.
7. Bayin S. Eñ., Krisch J.P., Oezcan M. The casimir energy of the twisted string loop: Uniform and two segment loops // J. of Mathematical Physics. 1996. Vol. 37 (8). P. 3662–3674.
8. Berntsen M.H., Brevik I., Odintsov S.D. Casimir theory for the piecewise uniform relativistic string // Ann. Phys. 1997. Vol. 257 (1). P. 84–108.
9. Brevik I., Elizalde E., Sollie R., Aarseth J.B. A new scaling property of the Casimir energy for a piecewise uniform string // J. Math. Phys. 1999. Vol. 40 (3). P. 1127–1135.
10. Schwinger J., DeRaad L.L. (Jr.), Milton K.A. Casimir Effect in Dielectrics // Ann. Phys. 1978. Vol. 115. P. 1–23.
11. Bordag M., Kirsten K., Vassilevich D.V. On the ground state energy for a penetrable sphere and for a dielectric ball // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59. 085011.
12. Kronig R. De L., Penney W.G. Quantum Mechanics of Electrons in Crystal Lattices // Proc. R. Soc. A. 1931. Vol. 130. P. 499.
13. Bordag M., Pirozhenko I.G. Surface plasmons for doped graphene // Phys. Rev. D. 2015. Vol. 91. 085038.
14. Asorey M., Alvarez D. Garcia, Munoz-Castaneda J.M. Casimir effect and global theory of boundary conditions // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. Vol. 39. P. 6127–6136.
15. Bordag M., Castañeda Muñoz J.M., Santamaría-Sanz L. Vacuum energy for generalised Dirac combs at $T = 0$. 2018. ArXiv:1812.09022.
16. Bordag M. On Bose-Einstein condensation in one-dimensional lattices of delta functions // Mod. Phys. Lett. 2020. Vol. A35 (03). 2040005.
17. Shajesh K.V., Brevik I., Cervero-Peláez I., Parashar P. Casimir energies of self-similar plate configurations // Phys. Rev. D. 2016. Vol. 94. 065003.
18. Bordag M., Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M. Advances in the Casimir Effect. Oxford University Press, 2009.
19. Geyer B., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M. Thermal corrections in the Casimir interaction between a metal and dielectric // Phys. Rev. A. 2005. Vol. 72. 022111.
20. Milton K.A., Kalauni P., Parashar P., Li Y. Casimir self-entropy of a spherical electromagnetic δ -function shell // Phys. Rev. D. 2017. Vol. 96. 085007.
21. Bordag M., Kirsten K. On the entropy of a spherical plasma shell // J. Phys. A: Math. Gen. 2018. Vol. 51. 455001.
22. Bordag M. Entropy in some simple one-dimensional configurations. 2018. ArXiv: 1807.10354quant-ph.
23. Bordag M., Munoz-Castaneda J.M., Santamaría-Sanz L. Free energy and entropy for finite temperature quantum field theory under the influence of periodic backgrounds // Eur. Phys. J. C. 2020. Vol. 80 (3).



24. *Brevik I., Sollie R.* On the Casimir energy for a 2N-piece relativistic string // J. of Mathematical Physics. 1997. Vol. 38 (6). P. 2774–2785.
25. *Griffiths D.J., Steinke C.A.* Waves in locally periodic media // American J. of Physics. 2001. Vol. 69 (2). P. 137–154.
26. *Elizalde E.* Ten Physical applications of Spectral Zeta Functions. Springer, 1995.
27. *Bordag M., Pirozhenko I.G., Nesterenko V.V.* Spectral analysis of a flat plasma sheet model // J. Phys. 2005. Vol. A38. 11027.
28. *Bordag M., Khusnutdinov N.* On the vacuum energy of a spherical plasma shell // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 77. 085026.
29. *Milton K.A., Kalauni P., Parashar P., Li Y.* Remarks on the Casimir self-entropy of a spherical electromagnetic δ -function shell // Phys. Rev. 2019. Vol. D99 (4). 045013.
30. *Brevik I., Nielsen H.B.* Casimir Theory for the Piecewise Uniform String: Division into 2N Pieces // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 51 (4). P. 1869–1874.
31. *Brevik I., Bytsenko A.A., Nielsen H.B.* Thermodynamic properties of the piecewise uniform string // Classical and Quantum Gravity. 1998. Vol. 15 (11). P. 3383–3395.

The authors

Dr Michael Bordag, Institute for Theoretical Physics, Leipzig University, Germany.

E-mail: bordag@uni-leipzig.de

Dr Irina G. Pirozhenko, Head of Sector, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna; Associate Professor, Dubna State University, Russia.

E-mail: pirozhen@theor.jinr.ru

Об авторах

Михаэль Бордаг – д-р естеств. наук, Институт теоретической физики Лейпцигского университета, Германия.

E-mail: bordag@uni-leipzig.de

Ирина Георгиевна Пироженко – канд. физ.-мат. наук, нач. сектора, Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна; доц., Государственный университет «Дубна», Россия.

E-mail: pirozhen@theor.jinr.ru

L. A. Bordag

**PORTFOLIO OPTIMIZATION IN THE CASE
OF AN EXPONENTIAL UTILITY FUNCTION
AND IN THE PRESENCE OF AN ILLIQUID ASSET**

73

We study an optimization problem for a portfolio with a risk-free, a liquid, and an illiquid risky asset. The illiquid risky asset is sold in an exogenous random moment with a prescribed liquidation time distribution. We assume that the investor chooses an exponential utility function. Study of optimization problems with three assets including an illiquid asset leads to three-dimensional nonlinear Hamilton – Jacobi – Bellman (HJB) equations.

It is well known that the exponential utility function is connected with the HARA utility function through a limiting procedure if the parameter of the HARA utility function is going to infinity. We show that the optimization problem with the exponential utility function is not connected to the optimization problem with the HARA utility by the limiting procedure and we obtain essentially different results. We provide the Lie group analysis of the corresponding HJB equation.

For the main three-dimensional PDE with the exponential utility function, we obtain the complete set of the nonequivalent Lie group invariant reductions to two-dimensional PDEs according to an optimal system of subalgebras of the admitted Lie algebra. We prove that in just one case the invariant reduction is consistent with the boundary condition. This reduction represents a significant simplification of the original problem.

Изучена проблема оптимизации инвестиционного портфеля, включающего безрисковый актив, высоколиквидный и неликвидный активы. При этом неликвидный актив может быть продан в независимый случайный момент времени, и для него распределение времени ликвидации известно. Мы предполагаем, что инвестор предпочитает экспоненциальную функцию полезности. Изучение проблем оптимизации с тремя активами, включая неликвидный актив, приводит к трехмерным нелинейным уравнениям Гамильтона – Якоби – Беллмана (HJB).

Хорошо известно, что экспоненциальная функция полезности связана с гиперболической функцией полезности (гиперболическое неприятие абсолютного риска – HARA) посредством предельного перехода, при котором параметр гиперболической функции полезности стремится к бесконечности. Мы показываем, что проблема оптимизации инвестиционного портфеля с экспоненциальной функцией полезности не связана предельным переходом с проблемой оптимизации с гиперболической функцией полезности, и для нее получены существенно другие результаты.

Мы проводим теоретико-групповой анализ соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана в случае использования экспоненциальной функции полезности. Для главного трехмерного уравнения в частных производных мы получаем полный набор неэквивалентных Ли групповых инвариантных редукций к двумерным уравнениям в частных производных согласно оптимальной системе подалгебр максимальной Ли алгебры, допускаемой этим уравнением. Мы доказываем,



что только в одном случае инвариантная редукция совместима с поставленным граничным условием. Эта редукция представляет собой существенное упрощение исходной задачи.

Keywords: portfolio optimization, illiquidity, Lie group analysis, invariant reductions

Ключевые слова: оптимизация портфеля ценных бумаг, неликвидность, Ли групповой анализ, инвариантные редукции

1. Introduction

74

We study an optimization problem for a portfolio with an illiquid, a liquid risky, and a risk-free asset in the framework of continuous time. We suppose that the illiquid asset is sold in an exogenous random moment T with a prescribed liquidation time distribution.

Optimization problems, where the time-horizon is an exogenous random variable, may arise in different situations. The international financial crisis 2008–2009 initiated a change in the financial policy towards new, stronger regulations in many countries and also to some special insolvency regulations in EU countries. The actual corona crisis differs from the previous crisis 2008–2009 because of its strong global impact on economics. As a consequence, optimization problems with an exogenous random time of liquidation become right now very topical for most countries in Europe. Many small and medium-sized companies are forced now to liquidate their factories or houses because they cannot pay obligations in time. During this crisis, many investors changed also their risk tolerance towards a strong conservative one and the exponential utility function became more relevant than the HARA utility function. One can find many references on this topic in the short review [9] (which became especially actual right now), which is devoted to assessing risk tolerance in dependence of economic cycles as well as to a discussion of different parameter choices and forms of utility functions. This supports our assumption that during an economic crisis some investors will prefer to use instead of a HARA utility function a CARA utility function, for instance, an exponential utility function.

There are a large number of papers that generalize the famous Merton's model [16], for instance, some of them introducing a stochastic income in the Merton's classical portfolio as in [8], and others are devoted to the classical optimal investment problem with a random endowment such as works [7; 10]. The main new feature in our problem is that the portfolio includes an illiquid asset with a prescribed liquidation time distribution. For the first time, the optimization problem in this form with the HARA utility function was introduced in the paper [4] and later studied in papers [2; 3; 5]. If the illiquid asset in the portfolio is a real estate, a factory, a plant, or store then you can sell it as a whole only. It is a typical situation with the selling of houses, small factories, or shops that you know the market situation and a typical liquidation time distribution. For instance, in a seller market, the liquidation time distribution will be rather an exponential distribution. If it is the buyer market then it will be closer to a Weibull distribution. We study in this paper both liquidation time distributions as special cases.



The influence of the risk tolerance preferred by the investor on the solution of an optimization problem was studied before for different portfolio settings with and without an illiquid asset. We review here some results which are relevant for the selection of the utility function.

In the paper [18], the authors started with the classical Merton's optimization problem used in [15; 16]. The portfolio contains one liquid risky asset and a risk-free money market account. The trading takes place within a fixed finite time horizon. The authors explore the question of risk management under different risk preferences of the investor. They study the optimal wealth process and the portfolio process across different utilities and provide transformations between two such processes corresponding to two arbitrary utilities. It is possible to find a deterministic transformation using the local absolute risk tolerance function associated with the corresponding utility function. This transformation is defined by a solution of a linear heat equation with the risk tolerance function as a coefficient by the second spatial derivative. Because of the classical problem features, it is possible to study the influence of the chosen utility and the risk tolerance on the wealth process and the different characteristics of the optimal portfolio in detail. The authors prove that the curvature of the risk tolerance function of the preferred utility function plays the main role. Certainly, we cannot expect such tractability from an optimization problem with an illiquid asset, but we can use this model as a benchmark for the case if the volume of the illiquid position of the studied portfolio vanishes.

The dependence of optimal liquidation strategies from the risk aversion of investors was studied in [23]. The authors consider the infinite time horizon in the optimal portfolio liquidation problem and use a stochastic control approach. In this model, a large investor trades one risky and one risk-free asset. Thereby due to insufficient liquidity of the risky asset the investor's trading rate moves the market price for the risky asset. The authors obtain nonlinear parabolic partial differential equations (PDEs) for the value function and the optimal strategy. They have to determine the adaptive trading strategy that maximizes the expected utility of the proceeds of a large asset sale. Withal authors studied the financial influence of different types of investor's utility functions. They found that the optimal strategy is aggressive or passive in-the-money in dependence of the investor's risk tolerance, i.e. if the utility function displays increasing or decreasing risk aversion. The authors proved that such strategies are rational for investors with different absolute risk aversion profiles.

Another approach to a liquidation problem of an illiquid asset is provided in paper [17]. It is devoted to the problem of how efficiently liquidate large assets positions up to an exogenous fixed terminal time. The author supposes that the investor prefers the exponential utility function and seeks to maximize the expected utility of the terminal value of his wealth. The portfolio contains an illiquid asset called a primary risky asset, a liquid asset that is imperfectly correlated with the primary asset and is called a proxy risky asset as well as a riskless money market account that



pays zero interest rate. In practice, the investor tries to reduce the price impact by trading a large number of assets and to hedge market risk of the liquidated portfolio. As a common strategy one chooses splitting of the given order into smaller pieces and to trade these pieces sequentially over time. The author can find optimal strategies explicitly and study their properties. The strategies depend on time and parameters of the model only and are solutions of a linear ordinary differential equation (ODE) of the second order. The author proves that this case is a generalization of the original Merton's model studied in [15; 16]. He also noticed that the explicit and simple results for optimal strategies were possible to obtain just by using finite terminal time and because of the investor used the exponential utility function. A more realistic setting, for instance, where the investor receives multiply orders at random times or the liquidation time is not fixed in the beginning leads to an essential more complicated model. In comparison to our case, the illiquid asset in [17] does not pay any dividends and the investor can also split the illiquid asset and sell them piece by piece as well as the investor has no consumption during the lifetime of the portfolio.

Study of optimization problems with three assets including an illiquid asset leads to three-dimensional nonlinear Hamilton – Jacobi – Bellman (HJB) equations. The corresponding nonlinear three-dimensional PDEs include a lot of parameters describing the behavior of assets and are challenging for analytical and numerical methods. To simplify the investigated problem one tries to find an inner symmetry of such an equation and reduce the number of independent variables at least to two or if possible to one. Usually, lower-dimensional problems are better studied and are, therefore, easier to handle. We use in this paper the powerful method of Lie group analysis. This method is very well known for more than 100 years. It is very often used in the area of mathematical physics or to study nonlinear diffusion in porous media where similar nonlinear heat equations arise (see [24–26]). Over the past 20 years this method also used in financial mathematics [1]. Nearly all known explicit solutions to ODEs or PDEs were found or can be found algorithmically (i.e. without guessing) by this method. This method is up to now the most appropriate method to find algorithmically substitutions to reduce a higher-dimensional PDE to a lower-dimensional one or even to an ODE.

The Lie algebraic structure of the corresponding HJB equation is one of the two main results of this paper. The Lie algebraic structure of the HJB equation reveals important structural properties of the considered equation. For instance, for the linear Black-Scholes equation, the corresponding Lie algebraic structure gives rise to famous substitutions which reduce it to the heat equation or it allowed to obtain the fundamental solution and the explicit formulas for European Call or Put. For a nonlinear equation like that studied here, we cannot get any fundamental solution but we can obtain reductions of the high-dimensional HJB equation to simpler ones. We study the complete set of all possible reductions and describe the unique reduction



to a two-dimensional PDE which satisfies the boundary conditions. We present also the explicit form of the corresponding investment-consumption strategies in invariant variables. This reduction also means that for all further investigation it is sufficient to use the two-dimensional PDE instead of the three-dimensional main HJB equation.

Our paper is organized as follows. In Section 2 we introduce the economic problem features in detail. We provide there a theorem stating that the HJB equation with a HARA utility function possesses a unique viscosity solution which was earlier proved in [4]. This Theorem will be now modified for the case of an exponential utility function. In Section 3 we provide the Lie group analyses of the optimization problems with a general liquidation time distribution and different utility functions. We prove that the cases of a HARA utility and an exponential utility are completely different. The usual limiting procedure between the HARA and exponential utility functions gives us wrong results for the corresponding Lie algebraic structures. In Section 4, for the optimization problem with the exponential utility function, we chose an optimal system of subalgebras of the admitted Lie algebra and provide the complete set of all invariant reductions of the corresponding three-dimensional PDE. Because this is an essential step, the complete prove with all details is given and the meaning of each reduction is explained. In each case, we prove if the invariant substitutions are compatible with the boundary condition. In Section 5 we discuss the connection between different results and see that the radical change of the investment-consumption strategies is connected with the chosen exponential utility function.

2. Economical setting

We study an optimization problem for a portfolio in the framework of continuous time. An investor has a portfolio with three assets: an illiquid, a liquid risky, and a risk-free asset. The investor has an illiquid asset that has some paper value and can not be sold until some moment T that is random with a prescribed liquidation time distribution. The investor tries to maximize her average consumption investing into a liquid risky asset that is partly correlated with the illiquid one. The investor is free to choose a utility function in correspondence with her risk tolerance. In our previous papers [3–5] we assumed that the investor chooses a hyperbolic absolute risk aversion (HARA) utility function or a logarithmic (LOG) utility function as a special case of the HARA utility. Now we suppose that the investor has a quite different risk tolerance as before and chooses an exponential utility function. We notice that a risk tolerance $R(c)$ of an investor is defined as

$R(c) = -\frac{U'(c)}{U''(c)}$ for any utility function $U(c)$, $c \in [0, \infty)$. For the HARA utility

function, the risk tolerance $R(c)$ is a linear function of c and for the exponential utility function, it is a constant.



Because the form of utility functions define the form of HJB equations and the limiting procedures connecting the HARA utility with the logarithmical and exponential utility functions play an important role in this paper we describe these relations in more detail. In the previous papers [2–5] we used the HARA and LOG utility functions and studied the connection between both optimization problems. We used the HARA utility function in the form

$$U_1^{HARA}(c) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\left(\frac{c}{1-\gamma} \right)^\gamma - 1 \right), \quad 0 < \gamma < 1. \quad (1)$$

78

It is easy to see that as $\gamma \rightarrow 0$ then the HARA utility function written as (1) tends to the LOG utility

$$U_1^{HARA}(c)_{\gamma \rightarrow 0} \rightarrow U^{LOG}(c) = \ln c. \quad (2)$$

In common literature is often noticed that we obtain an exponential utility function as a limit case of a HARA utility function by $\gamma \rightarrow \infty$. This assertion is correct just if the HARA utility function takes a special form, for instance, for the HARA utility in the form (1) it is not the case. It is easy to prove that if we take the HARA utility in the form

$$U_2^{HARA}(c) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{ac}{1-\gamma} + 1 \right)^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad a > 0, \quad (3)$$

then we obtain by the limiting procedure an exponential utility function

$$U_2^{HARA}(c)_{\gamma \rightarrow \infty} \rightarrow U^{EXP}(c) = -e^{-ac}. \quad (4)$$

It is a so-called exponential utility function (denoted as EXP). The most common form of the exponential utility function is

$$U^{EXPp}(c) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ac}), \quad a > 0. \quad (5)$$

We call it a positive exponential utility function (and denote it as EXPp). Both (4) and (5) utility functions differ just by an additive and a multiplicative constant $\frac{1}{a}$. We will prove later that both optimization problems, with EXP and EXPp utility functions are equivalent.

The forms U_1^{HARA} and U_2^{HARA} of the HARA utility function are often used and from an economical point of view, both of them have properties of a HARA type utility function. From the analytical point of view, the HARA utility functions U_1^{HARA} and U_2^{HARA} are different.

In the case of U_1^{HARA} , we obtain by limiting transition $\gamma \rightarrow 0$ a LOG utility function (2). As we mentioned before the risk tolerance, in this case, is equal to

$$R_1(c) = -\frac{U'(c)}{U''(c)} = \frac{c}{1-\gamma}, \quad (6)$$



and by $\gamma \rightarrow 0$ we obtain $R_{LOG}(c) = c$ as it to expect. But we get neither a finite limit by $\gamma \rightarrow \infty$ of the function $U_1^{HARA}(c)$ nor a relevant value for the risk aversion $R_1(c)$ in this case.

In the second case for the utility function U_2^{HARA} (3), we obtain for the risk tolerance the expression

$$R_2(c) = \frac{ac + 1 - \gamma}{a(1 - \gamma)} = \frac{c}{1 - \gamma} + \frac{1}{a}. \quad (7)$$

Here U_2^{HARA} tends by the limiting transition $\gamma \rightarrow \infty$ to the EXP utility function (4) and the risk tolerance takes a constant value $R_2(c) = a^{-1}$ as it is to expect in the case of an exponential utility function. But here in contradiction to the first case of U_1^{HARA} , we cannot obtain any meaningful expression by the limiting procedure $\gamma \rightarrow 0$, it means we do not obtain a transition to the LOG utility function.

In other words to study the connection between two optimization problems with a HARA utility function and with a logarithmic utility function we should use the HARA utility for instance in the form $U_1^{HARA}(c)$ to be able to provide the limiting procedure $\gamma \rightarrow 0$ in all formulas. For the study the connection between two optimization problems with a HARA utility and with an exponential utility we should use another form of the HARA utility, for instance, of type $U_2^{HARA}(c)$ to be able to make the limiting transition for $\gamma \rightarrow \infty$ in corresponding formulas.

Because of the relation (4) to correct comparison of the results for the optimization problem with the HARA utility function $U_2^{HARA}(c)$ with the results for an optimization problem with an exponential utility function we need to study first the optimization problem with the exponential utility function $U^{EXP}(c)$. The optimization problems with exponential utility functions (4), (5) describe economically equivalent situations. There exist one-to-one analytical substitution which provides the equivalence relation between two of these optimization problems which we show explicitly later in Section 3.2.

From (6) and (7) follows that the functions $R_1(c), R_2(c), R_{LOG}(c)$ are linear functions of c . It means also that the absolute risk tolerance is increasing or decreasing with the consumption c in these cases. For an exponential utility function the risk tolerance is a constant. In other words, all the time the absolute risk tolerance stays unaltered in the framework of these optimization problems.

We see that even though both the LOG and EXP utility functions can be regarded as a limit case of the HARA utility function they describe quite different economical situations: in the first case, the risk tolerance changes with the consumption c and in the case of the EXP utility function the risk tolerance do not depend on the level of the consumption at all.

It means that now the investor has a constant risk tolerance. Maybe it explains that both optimization problems studied before and presented now have quite different analytic and Lie algebraic structures as we show it later.



2.1. Formulation of the optimization problem

We introduce a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, where $\mathbb{F} = (F_t)_{t \geq 0}$ is the natural filtration, generated by two independent standard Brownian motions W^1 and W^2 , and verifying usual properties: it is completed and right continuous (see [12]).

The liquidation time T of the portfolio is a non-negative random variable on the same probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, and this allows us to introduce an additional source of uncertainty that is not connected to the randomness of the financial market. We suppose that the cumulative distribution function Φ of the random variable T is known and related to the law P_T of T in the usual way: $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(t) = P_T([-\infty, t])$.

The probability density function of the liquidation time distribution is denoted by $\phi(t)$, whereas $\bar{\Phi}(t)$ denotes the survival function, also known as a reliability function, $\bar{\Phi}(t) = 1 - \Phi(t)$. We skip here the explicit notion of the possible parameters of the distribution to make the formulas shorter.

In dependence on the rate of illiquidity, the liquidation time distribution can take different forms. Typically one uses the simplest one parameter exponential distribution with the reliability function $\bar{\Phi}(t) = e^{-\kappa t}$, where κ is the parameter of the distribution or a more advanced Weibull distribution with $\bar{\Phi}(t) = e^{-(t/\lambda)^k}$ with two parameters, λ and k . We will take these two distributions as examples in our investigation. We notice that the exponential distribution is a special case of the Weibull distribution by $k = 1$ and $\kappa = 1/\lambda$.

Assumptions and constrains.

We suppose that a utility function $U(\cdot)$ satisfies the following conditions:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Phi}(t) E[U(c_t)] = 0, \bar{\Phi}(t) \sim e^{-\kappa t}, \kappa > 0 \text{ or faster as } t \rightarrow \infty. \quad (8)$$

For a variable $c \in [0, \infty)$ the function $U(c)$ is strictly increasing, concave and twice differentiable in c , further on

$$U(c) \leq M(1+c)^\gamma, 0 < \gamma < 1, M > 0, \quad (9)$$

$$\text{and either } \lim_{c \rightarrow 0} U'(c) = +\infty, \lim_{c \rightarrow +\infty} U'(c) = 0, \quad (10)$$

$$\text{or } U'(c)|_{c=0} = \text{const.} > 0, \lim_{c \rightarrow +\infty} U'(c) = 0. \quad (11)$$

The investor's portfolio includes a risk-free bond B_t , a risky asset S_t and a non-traded asset H_t that generates stochastic income, i.e. dividends or costs of maintaining the asset. The risk-free bank account B_t , with the interest rate r , follows



$$dB_t = rB_t dt, \quad t \leq T, \quad (12)$$

where r is constant. The lower case index t denotes the spot value of the asset at the moment t .

The stock price S_t follows the geometrical Brownian motion

$$dS_t = S_t(\alpha dt + \sigma dW_t^1), t \leq T, \quad (13)$$

with the continuously compounded rate of return $\alpha > r$ and the standard deviation σ . The illiquid asset H_t , that can not be traded up to the time T and its paper value is correlated with the stock price and is governed by

$$\frac{dH_t}{H_t} = (\mu - \delta)dt + \eta \left(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right), t \leq T, \quad (14)$$

where μ is the expected rate of return of the risky illiquid asset, (W_t^1, W_t^2) are two independent standard Brownian motions, δ is the rate of dividend paid by the illiquid asset, η is the standard deviation of the rate of return, and $\rho \in (-1, 1)$ is the correlation coefficient between the stock index and the illiquid risky asset. The parameters μ , δ , η , ρ are all assumed to be constant.

The randomly distributed time T is an exogenous time and it does not depend on the Brownian motions (W_t^1, W_t^2) as we mentioned before.

Given the filtration \mathbb{F} , we assume that the consumption process $(c_t)_{t \geq 0}$ is an element of the space \mathcal{L}_+ of non-negative \mathbb{F} -progressively measurable processes such that $E \left(\int_0^t c_s ds \right) < \infty$, $t \in [0, T]$.

All the income is derived from the capital gains and the investor must be solvent. In other words, the liquid wealth process $(L_s)_{t \leq s \leq T}$ must cover the consumption stream. The wealth process $(L_s)_{t \leq s \leq T}$ is the sum of cash holdings in bonds, stocks and *random* dividends from the non-traded asset minus the consumption stream, i. e. it must satisfy the balance equation

$$dL_s = (rL_s + \delta H_s + \pi_s(\alpha - r) - c_s)ds + \pi_s \sigma dW_s^1, \quad t \leq s \leq T. \quad (15)$$

The set of admissible policies $(\pi_t, c_t)_{t \geq 0}$ is standard and consists of allocation-consumption strategies such that: $(c_t)_{t \geq 0}$ belongs to \mathcal{L}_+ ; $(\pi_t)_{t \geq 0}$ is \mathbb{F} -progressively measurable and $\int_t^s (\pi_\tau)^2 d\tau < \infty$ a.s. for any $t \leq s \leq T$; $(L_s)_{t \leq s \leq T}$, defined by the stochastic differential equation (15) and initial conditions $L_t = l > 0, H_t = h > 0$ a.e. The consumption stream $(c_t)_{t \geq 0}$ is admissible if and only if it is positive and if there exists a strategy that finances it. We assume that the investor consumes at rate $(c_t)_{t \geq 0}$ from the liquid wealth and the allocation-consumption plan $(\pi_t, c_t)_{t \geq 0}$ consists of the allocation of the portfolio with the cash amount $(\pi_t)_{t \geq 0}$ invested in stocks, the consumption stream $(c_t)_{t \geq 0}$ and the rest of the capital kept in bonds.



Remark 1. Further on we sometimes omit the dependence on t in some of the equations for the sake of clarity of the formulas.

The investor wants to maximize the overall utility consumed up to the random time of liquidation T , given by

$$\mathcal{U}(c_t) := E \left[\int_0^{\infty} \bar{\Phi}(t) U(c_t) dt \right], \quad (16)$$

as it was shown in [4]. It means we work with the problem (16) that corresponds to the *value function* $V(l, h, t)$, which is defined as

$$V(l, h, t) = \max_{(\pi_t, c_t)} E \left[\int_t^{\infty} \bar{\Phi}(s) U(c_s) ds \mid L_t = l, H_t = h, l, h > 0 \right], \quad (17)$$

where l could be regarded as initial capital and h as a paper value of the illiquid asset. The value function $V(l, h, t)$ satisfies the HJB equation

$$\begin{aligned} V_t(l, h, t) + \frac{1}{2} \eta^2 h^2 V_{hh}(l, h, t) + (rl + \delta h) V_l(l, h, t) + \\ (\mu - \delta) h V_h(l, h, t) + \max_{\pi} G[\pi] + \max_{c \geq 0} H[c] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$G[\pi] = \frac{1}{2} V_{ll}(l, h, t) \pi^2 \sigma^2 + V_{hl}(l, h, t) \eta \rho \pi \sigma h + \pi(\alpha - r) V_l(l, h, t), \quad (19)$$

$$H[c] = -c V_l(l, h, t) + \bar{\Phi}(t) U(c), \quad (20)$$

with the boundary condition

$$V(l, h, t) \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow \infty. \quad (21)$$

In [4; 5] the authors have already demonstrated that the formulated problem has a unique solution under certain conditions. Namely, the following theorem was proved

Theorem 1 [4]. *There exists a unique viscosity solution of the corresponding HJB equation (17) – (21) if the conditions (8), (9), and (10) are fulfilled.*

In this paper, we restrict ourselves to the case of an exponential utility function that satisfies three first conditions (8), (9) of Theorem 1 by definition. We checked the proof of the theorem in [4] and see that the Inada condition (10) can be replaced by the condition (11) and the existence and uniqueness of the viscosity solution of HJB equation is still guaranteed.

Further, we will use instead of the fourth condition in Theorem 1 the condition (11) which will be satisfied by an exponential utility function. It means that there exists a unique viscosity solution to the HJB equation (17) – (21) with an exponential utility function.

Now we can adjust and reformulate Lemma proved in [4] about the properties of the value function as follows

Lemma 1. *Under the conditions (8), (9) and the condition (11) the value function $V(t, l, h)$ (17) has the following properties:*

- (i) $V(l, h, t)$ is concave and non-decreasing in l and in h ,
- (ii) $V(l, h, t)$ is strictly increasing in l ,



- (iii) $V(l, h, t)$ is strictly decreasing in t starting from some point,
 (iv) $0 \leq V(l, h, t) \leq O(|l|^\nu + |h|^\nu)$ uniformly in t .

In the next sections, we will first study three-dimensional PDE which we obtain from the HJB equation after formal maximization, then we will try to simplify this three-dimensional PDE as far as possible using its internal algebraic structure. The properties of the value function listed in Lemma 1 we will use to define the reduction which keeps all properties of the original optimization problem. It follows that if one can find a solution to the reduced equation it will be also the unique viscosity solution of the optimization problem.

3. Lie group analyses of the optimization problem with a general liquidation time distribution and an exponential utility function

First, we study the case of an optimization problem with the EXP utility function (4). As usual, we provide a formal maximization of (19) and (20) for the chosen utility function in the HJB equation (18) and get a three-dimensional nonlinear PDE.

The HJB equation (18) after the formal maximization procedure will take the form

$$\begin{aligned}
 & V_t(l, h, t) + \frac{1}{2} \eta^2 h^2 V_{hh}(l, h, t) + (rl + \delta h) V_l(l, h, t) + (\mu - \delta) h V_h(l, h, t) \\
 & - \frac{(\alpha - r)^2 V_l^2(l, h, t) + 2(\alpha - r) \eta \rho h V_l(l, h, t) V_{lh}(l, h, t) + \eta^2 \rho^2 \sigma^2 h^2 V_{hh}^2(l, h, t)}{2\sigma^2 V_{ll}(l, h, t)} \\
 & + \frac{1}{a} V_l(l, h, t) \ln V_l(l, h, t) - \frac{1}{a} (1 + \ln \bar{\Phi}(t)) V_l(l, h, t) - \frac{\ln a}{a} V_l(l, h, t) = 0, \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$V \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Here the investment $\pi(l, h, t)$ and consumption $c(l, h, t)$ strategies look as follows in terms of the value function $V(l, h, t)$

$$\pi(l, h, t) = - \frac{\eta \rho \sigma h V_{lh}(l, h, t) + (\alpha - r) V_l(l, h, t)}{\sigma^2 V_{ll}(l, h, t)}, \quad (23)$$

$$c(l, h, t) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\bar{\Phi}(t)}{a V_l(l, h, t)} \right). \quad (24)$$

Equation (22) is a nonlinear three-dimensional PDE with the three independent variables l, h, t . Such equations are demanding by study with analytical or numerical methods. The Lie group analysis of a nonlinear PDE is a proper tool to obtain the Lie algebra admitted by this equation. Using the generators of this symmetry algebra one can reduce the dimension of the equation (22) and make a problem better tractable.



Roughly speaking to obtain internal Lie algebraic structure of a differential equation on any function $V(l, h, t)$ we present this equation as an algebraic equation, for instance like $\Delta(l, h, t, V, V_l, V_h, V_t, V_{ll}, V_{lh}, V_{hh}) = 0$ in some special space called the jet bundle. This space is denoted by $j^{(n)}$, where n is the order of the highest derivative in the differential equation. All derivatives will be now considered as new dependent variables. Thereafter we study the properties of the solution manifold of this equation, which is now a surface in the jet bundle $j^{(n)}$. We take a generator \mathbf{U} of a point transformation in the corresponding jet bundle and act on the solution manifold to define invariant subspaces. One obtains a large system of partial differential equations on the coefficients of the generator \mathbf{U} . Usually, this system does not have any nontrivial solution at all, and correspondingly the studied differential equation does not admit any symmetry. In seldom cases, one gets nontrivial generators of the point transformations admitted by the equation. The symmetry properties will then used to simplify the studied equation and one obtains a so-called reduced equation. In detail, one can find the description of this method in [11; 19], or in [1] where a short and comprehensive introduction in this method is given as well as applications to other PDEs arising in financial mathematics.

Here we formulate the main theorem of Lie group analysis for the optimization problem with the EXP utility function.

Theorem 2. *The HJB equation (22) with the EXP utility function (4) and with a general liquidation time distribution $\Phi(T)$ admits the four-dimensional Lie algebra L_4^{EXP} spanned by generators $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4$, i.e. $L_4^{EXP} = \langle \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4 \rangle$, where*

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial l} - V \frac{\partial}{\partial V}, \quad \mathbf{U}_2 = \frac{\partial}{\partial V}, \quad (25)$$

$$\mathbf{U}_3 = -\frac{1}{ar} \left(e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) \right) \frac{\partial}{\partial l} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{U}_4 = e^{rt} \frac{\partial}{\partial l}$$

with following nontrivial commutation relations

$$[\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2] = \mathbf{U}_2, \quad [\mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4] = \mathbf{U}_4, \quad (26)$$

i.e. L_4^{EXP} is of the type $A_2 \oplus A_2$ after the classification provided in [22]. Except for the finite-dimensional Lie algebra L_4^{EXP} (25), the equation (22) admits also an infinite-dimensional algebra $L_\infty = \langle \psi(h, t) \frac{\partial}{\partial V} \rangle$ where the function $\psi(h, t)$ is any solution of the linear parabolic PDE

$$\psi_t(h, t) + \frac{1}{2} \eta^2 h^2 \psi_{hh}(h, t) + (\mu - \delta) h \psi_h(h, t) = 0. \quad (27)$$

Remark 2. First the formulation of this theorem was presented in [6].



Proof. As it shown in [19], [11] or [1] we introduce the second jet bundle $j^{(2)}$ and present the equation (22) in the form $\Delta(l, h, t, V, V_l, V_h, V_t, V_{ll}, V_{lh}, V_{hh}) = 0$ as a function of these variables in the jet bundle $j^{(2)}$. We look for generators of the admitted Lie algebra in the form

$$\mathbf{U} = \xi_1(l, h, t, V) \frac{\partial}{\partial l} + \xi_2(l, h, t, V) \frac{\partial}{\partial h} + \xi_3(l, h, t, V) \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1(l, h, t, V) \frac{\partial}{\partial V}, \quad (28)$$

where the functions $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1$ can be found using the overdetermined system of determining equations

$$\mathbf{U}^{(2)} \Delta(l, h, t, V, V_l, V_h, V_t, V_{ll}, V_{lh}, V_{hh})|_{\Delta=0} = 0, \quad (29)$$

where $\mathbf{U}^{(2)}$ is the second prolongation of \mathbf{U} in $j^{(2)}$. We look at the action of $\mathbf{U}^{(2)}$ on $\Delta(l, h, t, V, V_l, V_h, V_t, V_{ll}, V_{lh}, V_{hh})$ located on its solution subvariety $\Delta = 0$ and obtain an overdetermined system of PDEs on the functions ξ_1, ξ_2, ξ_3 , and η_1 from (28). This system has 130 PDEs on the functions $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1$. Most of them are trivial and lead to the following conditions on the functions

$$\begin{aligned} (\xi_1)_h &= 0, (\xi_1)_V = 0, (\xi_1)_{ll} = 0, (\xi_1)_l = \xi_{11}(t), \\ (\xi_2)_l &= 0, (\xi_2)_V = 0, \\ (\xi_3)_l &= 0, (\xi_3)_h = 0, (\xi_3)_V = 0, \\ (\eta_1)_l &= 0, (\eta_1)_{VV} = 0, (\eta_1)_V = \eta_{11}(h, t). \end{aligned}$$

Consequently, the unknown functions in (28) have the following structure

$$\begin{aligned} \xi_1(l, h, t, V) &= \xi_{11}(t)l + \xi_{12}(t), \quad \xi_2(l, h, t, V) = \xi_2(h, t), \quad \xi_3(l, h, t, V) = \xi_3(t), \\ \eta_1(l, h, t, V) &= \eta_{11}(h, t)V + \eta_{12}(h, t). \end{aligned} \quad (30)$$

Here $\xi_{11}(t), \xi_{12}(t), \xi_2(h, t), \xi_3(t), \eta_{11}(h, t)$, and $\eta_{12}(h, t)$ are some functions which will be defined later. To find these unknown functions we should have a closer look at the nontrivial equations of the obtained system, that are left. After all simplifications, we get the system of seven PDEs

$$\begin{aligned} \eta_{1t} + \frac{\eta^2 h^2}{2} \eta_{1hh} + (\mu - \delta) h \eta_{1h} &= 0, \\ \xi_{3t} - \xi_{3l} &= 0, \\ (\mu - \delta) (\xi_2 - h \xi_{2h} + h \xi_{3t}) - \frac{1}{2} \eta^2 h^2 \xi_{2hh} + \eta^2 h^2 \eta_{11h} &= 0, \\ h \xi_{3t} + 2(\xi_2 - h \xi_{2h}) &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$



$$\frac{1}{a}\eta_{11} + r\xi_1 - \frac{1}{a}\xi_{1t} + \delta\xi_2 - \frac{1}{a}\frac{\bar{\Phi}_t}{\Phi}\xi_3 = 0,$$

$$(\alpha - r)\xi_{3t} + 2\eta\rho h\eta_{11h} = 0,$$

$$(\alpha - r)(\xi_2 - h\xi_{2h} + h\xi_{3t}) + \eta\rho\sigma^2 h^2 \eta_{11h} = 0.$$

We introduce the differential operator $\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\eta^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} + (\mu - \delta)h \frac{\partial}{\partial h}$

using this operator we can rewrite the first equation in the above system as conditions on the functions $\eta_{11}(h, t)$ and $\eta_{12}(h, t)$ which appears in the last equation of (30) correspondingly as $\mathbf{L}\eta_{11}(h, t) = 0$ and $\mathbf{L}\eta_{12}(h, t) = 0$. Other equations in the above system do not contain the function $\eta_{12}(h, t)$ at all. If we now denote $\eta_{12}(h, t) = \psi(h, t)$ then we see that we proved the last statement of the theorem, see (27).

Solving the system (31) for an arbitrary function $\bar{\Phi}(t)$ we obtain

$$\xi_1 = c_{11}e^{rt} + \eta_{11} \frac{1}{ar} - \xi_3 \frac{1}{a} e^{rt} \int e^{-rt} \frac{\bar{\Phi}_t}{\Phi} dt, \quad \xi_2 = 0,$$

$$\xi_3 - \text{const.}, \quad \eta_1 = \eta_{11}V + \eta_{122} + \psi(h, t), \quad c_{11}, \eta_{11}, \eta_{122} - \text{const.} \quad (32)$$

The equations (32) contain four arbitrary constants $\xi_3, c_{11}, \eta_{11}, \eta_{122}$ and a function $\eta_{12}(h, t) = \psi(h, t)$ which is an arbitrary solution of $\mathbf{L}\psi(h, t) = 0$. Formulas (32) define four generators of the finite-dimensional Lie algebra L_4^{EXP} (25) and the infinitely dimensional algebra L_∞ (27) as it was described in Theorem 2.

Remark 3. The found four-dimensional Lie algebra describes the symmetry property of the equation (22) for any function $\bar{\Phi}(t)$. In [4; 5] we have proved the theorem for existence and uniqueness of the solution of HJB equation for a liquidation time distribution for which $\bar{\Phi}(t) \sim e^{-kt}$ or faster as $t \rightarrow \infty$, therefore we will regard this type of the distribution studying the analytical properties of the equation further on.

First, we explain the meaning of some generators of the Lie algebra listed in Theorem 2. We start with the second generator $\mathbf{U}_2 = \frac{\partial}{\partial V}$. It means

that the original value function $V(l, h, t)$ which is a solution of the equation (22), can be shifted on any constant and still be a solution of the same equation. Neither allocation π nor consumption function c will change their values because they also depend only on the derivatives of the value function. In some sense, it is a trivial symmetry, since the equation (22) contains just the derivatives of $V(l, h, t)$ so we certainly can add a constant to this function and it still will be a solution of the equation. Following this symmetry does not give a rise to any reductions of the studied three-



dimensional PDE and this symmetry does not satisfy the boundary condition $V(l, h, t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ because of that, it is not interesting by solving of the posed optimization problem.

The fourth generator $U_4 = e^{rt} \frac{\partial}{\partial l}$ means that the value of the independent variable l can be shifted on the arbitrary value de^{rt} , i.e. the shift $l \rightarrow l + de^{rt}$, $d - const.$ leaves the solution unaltered. From an economical point of view, it means that the absolute value of the initial capital is not important for this problem. We can arbitrarily shift the initial liquidity l on a bank account $d, d > 0$ or credit $d, d < 0$ yet $l + de^{rt}$ should be positive in the initial time moment. The value function $V(l, h, t)$ as a solution to the equation (22) and the allocation-consumption strategy (π, c) will be unaltered. This symmetry is trivial and it does not provide any reductions of the original three-dimensional PDE.

We also get the infinitely dimensional algebra $L_\infty = \langle \psi(h, t) \frac{\partial}{\partial V} \rangle$ where the function $\psi(h, t)$ is any solution of the linear PDE

$$\psi_t + \frac{1}{2} \eta^2 h^2 \psi_{hh} + (\mu - \delta) h \psi_h = 0,$$

see Theorem 2. It has a special meaning - we can add any solution $\psi(h, t)$ of this equation to the value function $V(l, h, t)$ without any changes of the allocation-consumption strategy (π, c) . From an economical point of view, it means that the additional use of some financial instrument which is the solution of $\psi_t + \frac{1}{2} \eta^2 h^2 \psi_{hh} + (\mu - \delta) h \psi_h = 0$ do not change the investment-allocation strategies in this optimization problem. The boundary condition $V(l, h, t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ leads to the following boundary condition on the solution of this equation $\psi(h, t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. It means it is a financial instrument which value is defined just by the paper value of the illiquid asset and time only, can not change the allocation-consumption strategy (π, c) . We notice also that after the substitution $h = e^x$, $t = -2\tau / \eta^2$, $\psi(t, h) = h^{(\mu - \delta - \frac{1}{2}\eta^2)/\eta^2} e^{-(\mu - \delta - \frac{1}{2}\eta^2)^2 \tau / \eta^4} v(\tau, x)$ we obtain on the function $v(\tau, x)$ the parabolic equation of the type $v_t = v_{xx}$, which is well studied. The solution methods as well as the fundamental solution of this equation are well known.

3.1. Relation between two optimization problems: one with the HARA and one with the EXP utility function

In our previous papers, we studied the optimization problem with an illiquid asset in the case if the investor used the HARA utility function (1) or the logarithmic utility function (2). It is well known that both problems are

connected by limiting procedure if $\gamma \rightarrow 0$. In the previous paper [3] we proved that also analytic and Lie algebraic structures of both optimization problems also connected with the same limiting procedure.

We noticed before that the EXP utility function is connected to the HARA utility function $U_2^{HARA}(c)$ with the limiting procedure by $\gamma \rightarrow \infty$, see (4).

It means also that we cannot use directly the results of the Lie group analysis obtained in previous works [2; 3] to compare the admitted Lie algebras for the optimization problem with the HARA utility function in the form $U_1^{HARA}(c)$ with the results in this work for an optimization problem with an exponential utility function. Because of that, we should recalculate the results of the Lie group analysis for the new form of the HARA utility function. We remember that we first provide the formal maximization in the HJB equation (18) and correspondingly to the chosen utility function we obtain a three-dimensional PDE. In our previous works [2; 3] we used the utility function $U_1^{HARA}(c)$ in the form (1). Now if we insert in the HJB equation (18) the HARA utility function $U_2^{HARA}(3)$ then we obtain the PDE in the form

88

$$\begin{aligned}
 & V_t(t, l, h) + \frac{1}{2} \eta^2 h^2 V_{hh}(t, l, h) + (rl + \delta h) V_l(t, l, h) + (\mu - \delta) h V_h(t, l, h) \\
 & - \frac{(\alpha - r)^2 V_l^2(t, l, h) + 2(\alpha - r) \eta \rho h V_l(t, l, h) V_{lh}(t, l, h) + \eta^2 \rho^2 \sigma^2 h^2 V_{hh}^2(t, l, h)}{2\sigma^2 V_{ll}(t, l, h)} \\
 & + \frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma} \bar{\Phi}(t)^{\frac{1}{1-\gamma}} V_l(t, l, h)^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} - \frac{1 - \gamma}{a} V_l(t, l, h) = 0, \quad V_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (33)
 \end{aligned}$$

The previous equation and (33) differ analytically in the last terms, from an economical point of view they describe equivalent optimization problems. The Lie group analysis of the previous equation was provided in [3]. We can use the same method and find the admitted Lie group for the equation (33) or use a substitution. Indeed if we take the substitutions

$$\tilde{l} = l - \frac{1 - \gamma}{ar}, \quad \tilde{h} = h, \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{V} = V + \frac{1 - \gamma}{\gamma} \int \bar{\Phi}(t) dt \quad (34)$$

then the HJB equation in [3] on the function $\tilde{V}(\tilde{l}, \tilde{h}, \tilde{t})$ will be replaced by the equation (33) on the value function $V(l, h, t)$.

We formulate the results of the Lie group analysis in the following theorem

Theorem 3. *The equation (33) admits the three-dimensional Lie algebra $L_3^{HARA_2}$ spanned by generators $L_3^{HARA_2} = \langle \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3 \rangle$, where*

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\partial}{\partial V}, \quad \mathbf{U}_2 = e^{rt} \frac{\partial}{\partial l}, \quad \mathbf{U}_3 = \left(l + \frac{1 - \gamma}{ar} \right) \frac{\partial}{\partial l} + h \frac{\partial}{\partial h} + \gamma V \frac{\partial}{\partial V}, \quad (35)$$



for any liquidation time distribution. Moreover, if and only if the liquidation time distribution has the exponential form, i.e. $\bar{\Phi}(t) = de^{-\kappa t}$, where d, κ are constants the studied equation admits a four-dimensional Lie algebra $L_4^{HARA_2}$ with an additional generator

$$\mathbf{U}_4 = \frac{\partial}{\partial t} - \kappa V \frac{\partial}{\partial V}, \tag{36}$$

i.e. $L_4^{HARA_2} = \langle \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4 \rangle$.

Except for the finite-dimensional Lie algebras (35) and (36) correspondingly equation (33) admits also an infinite-dimensional algebra $L_\infty = \langle \psi(h, t) \frac{\partial}{\partial V} \rangle$ where the function $\psi(h, t)$ is any solution of the linear PDE

$$\psi_t(h, t) + \frac{1}{2} \eta^2 h^2 \psi_{hh}(h, t) + (\mu - \delta) h \psi_h(h, t) = 0. \tag{37}$$

The Lie algebra $L_3^{HARA_2}$ has the following non-zero commutator relations

$$[\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_3] = \gamma \mathbf{U}_1, \quad [\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3] = \mathbf{U}_2. \tag{38}$$

The Lie algebra $L_4^{HARA_2}$ has the following non-zero commutator relations

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_3] &= \gamma \mathbf{U}_1, [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_4] = -\kappa \mathbf{U}_1, \\ [\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3] &= \mathbf{U}_2, [\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_4] = -r \mathbf{U}_2. \end{aligned} \tag{39}$$

We will not provide the proof of Theorem 3 because it is quite similar to the proof of the previous Theorem 3 for the equation (22).

It is easy to see that both algebras $L_3^{HARA_1}$ presented in [3] and $L_3^{HARA_2}$ have the same commutation relations (39) and are isomorph. We prove that the admitted Lie algebras are also similar because of the substitution (34). It means that the optimization problems with the utility functions U_1^{HARA} and with U_2^{HARA} are equivalent not only from an economical and an analytical but also from the Lie algebraic point of view.

Now we have a correct form of generators of the Lie algebra to study a limiting procedure by $\gamma \rightarrow \infty$. Indeed using the properties of the generators of the Lie algebra we obtain from (35)

$$\mathbf{U}_1^\infty = \frac{\partial}{\partial V}, \quad \mathbf{U}_2^\infty = e^{rt} \frac{\partial}{\partial l}, \quad \mathbf{U}_3^\infty = \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial l} - V \frac{\partial}{\partial V}. \tag{40}$$

Now we compare this Lie algebraic structure with the described in Theorem 2. First, we see that both three-dimensional PDEs have the same infinite-dimensional algebra $L_\infty = \langle \psi(h, t) \frac{\partial}{\partial V} \rangle$. Then we compare the finite –



dimensional algebra (40) with (25) and see that the finite-dimensional algebras in these cases are essentially different. In the case of the $U_2^{HARA}(c)$ utility function and a general liquidation time distribution, we have after limiting transition $\gamma \rightarrow \infty$ the three-dimensional algebra (40) and in the case of the EXP utility function, we got the four-dimensional algebra (25). These algebras do not connect with the limiting procedure by $\gamma \rightarrow \infty$ as well as both three-dimensional PDEs (33) and (22) are not connected with this limiting procedure. Also the HJB problems have different analytical structures. Other sides it is easy to see that all three generators (40) coincide with the three of the four generators (25). Lie algebra (25) is in some way extension of the Lie algebra (40). It means that using the exponential utility function makes the corresponding optimization problem smoother from the Lie algebraic point of view.

We see that by limiting procedure $\gamma \rightarrow \infty$ neither the analytic nor the Lie algebraic structure of the optimization problem will be preserved. If in the previous cases [3] of the HARA and LOG utility functions it was sufficient to study the case of the HARA utility and then just take a limit by $\gamma \rightarrow 0$ to obtain the corresponding results for the optimization problem with LOG utility function now we should study the optimization problem with the exponential utility function in own rights step-by-step independently from the case of the HARA utility function.

3.2. Relation between two optimization problems correspondingly one with the EXP and one with the EXPp utility function

The EXPp utility function (5) is very close to the EXP function (4), the functions are connected by an affine transformation. Analogously to the previous chapter we can formulate and prove the main theorem of the Lie group analysis for the HJB optimization problem with the positive exponential utility function. We skip this part because we are able to provide an analytical substitution which connect both problems. It is easy to see that if we make following transformations of the variables l, h, t, V in equation (22)

$$l = \tilde{l} + \frac{\ln a}{ar}, \quad h = \tilde{h}, \quad t = \tilde{t}, \quad (41)$$

$$V(l, h, t) = \tilde{V}(\tilde{l}, \tilde{h}, \tilde{t}) + \frac{1}{a} \int \bar{\Phi}(t) dt,$$

then the final equation in variables $\tilde{l}, \tilde{h}, \tilde{t}, \tilde{V}$ coincide with HJB equation with the EXPp utility function. Because of the substitution (41) is an invertible analytical one-to-one substitution we have to do with two identical optimization problems. The analytical and the Lie algebraic structures of the optimization problems with the EXP and EXPp utility functions are equivalent and it is enough to study one of these problems in detail.



4. Optimal system of subalgebras of L_4^{EXP} and related invariant reductions of the corresponding three-dimensional PDE

To find all reductions and in this way to find all classes of the nonequivalent group invariant solutions of a differential equation Ovsiannikov in [20] has introduced the idea of an optimal system of subalgebras for a given symmetry algebra of the differential equation. This idea is now widely used for PDEs and systems of ODEs arising in different areas of sciences [13; 14; 21].

Now we will study a complete set of possible reductions of the three-dimensional PDE (22) to two-dimensional PDEs. For this purpose, we need an optimal system of subalgebras of L_4^{EXP} . As before in [3] we use an optimal system developed in [22] for the real four-dimensional Lie algebras of this type. To make the comparison of the results transparent we introduce in this Section the same notations for the generators of L_4^{EXP} as in [3; 22].

On the basis (25) of L_4^{EXP} , there are only two non-zero commutation relations (26). If we introduce notations like in the paper [22], i.e. we denote $U_i = e_i$ where $i = 1, \dots, 4$ then we can rewrite the relations (26) as

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_4. \tag{42}$$

Now we can see that L_4^{EXP} corresponds to the algebras of the type $A_2 \oplus A_2$ in the classification of [22] where also optimal systems of subalgebras for all real three and four-dimensional solvable Lie algebras are provided. The corresponding system of optimal subalgebras of L_4^{EXP} is listed in Table.

The optimal system of one-, two- and three- dimensional subalgebras of L_4^{EXP} , where ω is a parameter such that $-\infty < \omega < \infty$

Dimension of the subalgebra	System of optimal subalgebras of algebra L_4^{EXP}
1	$h_1 = \langle e_2 \rangle, h_2 = \langle e_3 \rangle, h_3 = \langle e_4 \rangle,$ $h_4 = \langle e_1 + \omega e_3 \rangle, h_5 = \langle e_1 \pm e_4 \rangle,$ $h_6 = \langle e_2 \pm e_4 \rangle, h_7 = \langle e_2 \pm e_3 \rangle$
2	$h_8 = \langle e_1, e_3 \rangle, h_9 = \langle e_1, e_4 \rangle,$ $h_{10} = \langle e_2, e_3 \rangle, h_{11} = \langle e_2, e_4 \rangle,$ $h_{12} = \langle e_1 + \omega e_3, e_2 \rangle, h_{13} = \langle e_3 + \omega e_1, e_4 \rangle, h_{14} = \langle e_1 \pm e_4, e_2 \rangle,$ $h_{15} = \langle e_3 \pm e_2, e_4 \rangle, h_{16} = \langle e_1 + e_3, e_2 \pm e_4 \rangle$
3	$h_{17} = \langle e_1, e_3, e_2 \rangle, h_{18} = \langle e_1, e_4, e_2 \rangle,$ $h_{19} = \langle e_1, e_3, e_4 \rangle, h_{20} = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle,$ $h_{21} = \langle e_1 \pm e_3, e_2, e_4 \rangle, h_{22} = \langle e_1 + \omega e_3, e_2, e_4 \rangle$



Now we are going to study all possible invariant reductions of the main equation (22).

Let us first note that the subgroups H_1 , H_3 , and H_6 generated by subalgebras $h_1 = \langle \frac{\partial}{\partial V} \rangle$, $h_3 = \langle e^{rt} \frac{\partial}{\partial l} \rangle$ and $h_6 = \langle \frac{\partial}{\partial V} \pm e^{rt} \frac{\partial}{\partial l} \rangle$ correspondingly, do not give us any interesting reductions so we omit the detailed study of these cases here. We start with the first interesting and nontrivial case.

Case $H_2(h_2)$. The subalgebra h_2 is spanned by the generator e_3

$$h_2 = \langle e_3 \rangle = \left\langle -\frac{1}{ar} \left(e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) \right) \frac{\partial}{\partial l} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle. \quad (43)$$

To find all invariants of the subgroup H_2 we solve the related characteristic system of equations

$$\frac{dl}{-\frac{1}{ar} \left(e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) \right)} = \frac{dt}{\frac{1}{r}} = \frac{dV}{0} = \frac{dh}{0}, \quad (44)$$

where the last two equations of the system present a formal notation that shows that the independent variable h and the dependent variable V are now invariants under the action of the subgroup H_2 . We can obtain other independent invariants solving the system above. So we obtain a set of independent invariants

$$inv_1 = z = l + \frac{1}{ar} e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) - \frac{1}{ar} \ln \bar{\Phi}(t) - \frac{1}{ar} (1 + \ln a), \quad inv_2 = h, \quad (45)$$

$$inv_3 = W(z, h) = V(l, h, t). \quad (46)$$

The invariants (45) can be used as the new independent variables z, h and the invariant (46) as the new dependent variable $W(t, z)$ to reduce the three-dimensional PDE (22) to a two-dimensional one

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta^2 h^2 W_{hh} + (\mu - \delta) h W_h + (rz + \delta h) W_z + \frac{1}{a} W_z \ln W_z \\ & - \frac{(\alpha - r)^2 W_z^2 + 2(\alpha - r) \eta \rho h W_z W_{zh} + \eta^2 \rho^2 \sigma^2 h^2 W_{zh}^2}{2\sigma^2 W_{zz}} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

In (21) we describe the boundary condition and in Lemma 1 we formulate the main properties of the value function. Now we have to reformulate the boundary condition on the function $W(z, h)$ after the substitution (45). To make further remarks transparent we take first as an example the simplest form of the liquidation time distribution and suppose that $\bar{\Phi}(t) = e^{-\kappa t}$, i.e. we have to do with exponential liquidation time distribution. Then the new variable z will take the form

$$z = l + \frac{\kappa}{ar} t + \frac{1}{ar} \left(\frac{\kappa}{r} - 1 - \ln a \right). \quad (48)$$



It means that z is increasing if l and/or t are growing up. But it leads to contradiction between the properties of the function $W(z, h) = V(l, h, t)$. On one side the boundary condition demands that the value function tends to zero for $t \rightarrow \infty$, other sides that the same function is strictly increasing by $l \rightarrow \infty$. Because after the invariant substitution the new variable z is the sum of these two old variables l and t we are not able to solve this contradiction. A similar inconsistency problem arising if we use another form of the function $\bar{\Phi}(t)$. Following this reduction cannot be used to solve the optimization problem.

Case $H_4(h_4)$. Now we look for invariants of the subgroup H_4 . The corresponding subalgebra h_4 is spanned by the generator $e_1 + \omega e_3$, i.e.

$$h_4 = \left\langle \frac{1}{ar} \left(1 - \omega e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) \right) \frac{\partial}{\partial l} + \frac{\omega}{r} \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial V} \right\rangle. \tag{49}$$

We need to regard two special cases $\omega = 0$ and $\omega \neq 0$ here. If $\omega = 0$ then

$$h_4 = \left\langle e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial l} - V \frac{\partial}{\partial V} \right\rangle. \tag{50}$$

The invariants of the group H_4 are

$$inv_1 = h, \quad inv_2 = t, \quad inv_3 = W(h, t) = V(l, h, t) e^{ar l}.$$

From the last relation follows that in this case, the value function has the form $V(l, h, t) = e^{-ar l} W(h, t)$, and the complete dependence on l is described just by the factor $e^{-ar l}$. It means that we obtain a decreasing function $V(l, h, t)$ in the variable l in contradiction to the properties of a value function (see Lemma 1). It means that this reduction does not provide any meaningful solutions to our problem.

Now we can move according to a standard procedure to find the invariants of H_4 when $\omega \neq 0$. We obtain three independent invariants using a corresponding characteristic system

$$inv_1 = z = l + \frac{1}{ar} e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) - \frac{1}{ar} \ln \bar{\Phi}(t) - \frac{t}{a\omega}, \quad inv_2 = h, \tag{51}$$

$$inv_3 = W(z, h) = V(l, h, t) e^{\frac{r}{\omega} t}. \tag{52}$$

Analogously substituting expressions for the invariants z as the new independent variable and $W(z, h)$ as the new dependent variables into (22) we get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta^2 h^2 W_{hh} + (\mu - \delta) h W_h + (rz + \delta h) W_z + \frac{1}{a} w_z \ln W_z \\ & - \frac{(\alpha - r)^2 W_z^2 + 2(\alpha - r) \eta \rho h W_z W_{zh} + \eta^2 \rho^2 \sigma^2 h^2 W_{zh}^2}{2\sigma^2 W_{zz}} \\ & - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\omega} + (1 + \ln a) \right) W_z - \frac{r}{\omega} W = 0. \end{aligned} \tag{53}$$



We prove now a compatibility of the invariant substitutions (51) and the boundary condition (21). As before we look for the new invariant variables (51)–(52) in the case of exponential liquidation time with $\bar{\Phi}(t) = e^{-\kappa t}$ then these formulas take the form

$$z = l + \frac{\kappa\omega - r}{ar\omega}t + \frac{\kappa}{ar^2}, \quad inv_2 = h, \quad (54)$$

$$V(t, l, h) = W(z, h)e^{-\frac{r}{\omega}t}, \quad \omega \neq 0. \quad (55)$$

94

From (54) follows that if we chose an arbitrary parameter $\omega = r / \kappa$ then the variable z up to a constant shift coincides with the old variable l . The relation (55) shows that the boundary condition (21) is met with every solution to (53). We see also that for other positive values of the parameter ω the invariant variables (54)–(55) are compatible with the boundary condition (21).

Similar to the case of the exponential time distribution we can study other types of liquidation time distributions. For instance, we look at the frequently used Weibull distribution with $\bar{\Phi}(t) = e^{-(t/\lambda)^k}$ where the invariant variables will take the form

$$z = l + \frac{k}{ar^{k+1}\lambda^k} e^{rt}\Gamma(k, rt) + \frac{1}{ar\lambda^k} t^k - \frac{1}{a\omega}t, \quad inv_2 = h, \quad (56)$$

$$V(t, l, h) = W(z, h)e^{-\frac{r}{\omega}t}, \quad \omega \neq 0, \quad (57)$$

here $\Gamma(k, rt)$ is the upper incomplete gamma function.

For the studied optimization problem, the most interesting case appears if the liquidation time distribution has a local maximum as we expect it in the real world. The Weibull distribution has a local maximum for the parameter $k > 1$. Because of the asymptotic behavior of the expression $e^{rt}\Gamma(k, rt) \rightarrow r^{k-1}t^{k-1}$ as $t \rightarrow \infty$ we obtain that for $k > 1$ the variable $z \rightarrow l + \frac{1}{ar\lambda^k}t^k$ as $t \rightarrow \infty$. It means that also for the Weibull distribution we have compatibility of the invariant substitutions (56)–(57) with the boundary condition (21).

We notice that the investment $\pi(z, h)$ and consumption $c(z, t, h)$ in the case H_4 look as

$$\pi(z, h) = \left(-\frac{\eta\rho\sigma h W_{zh} + (\alpha - r)W_z}{\sigma^2 W_{zz}} \right), \quad c(z, t, h) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\bar{\Phi}(t)}{aW_z} \right) + \frac{r}{a\omega}t, \quad \omega > 0,$$

where $W(z, h)$ is a solution of the equation (48).



Case $H_5(h_5)$. According to the first line of Table the subalgebra h_5 corresponding to the subgroup H_5 algebra is spanned by

$$h_5 = \langle e_1 \pm e_4 \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{ar} \pm e^{rt} \right) \frac{\partial}{\partial l} - V \frac{\partial}{\partial V} \right\rangle. \tag{58}$$

Using a standard procedure to determine the invariants of the subgroup H_5 we obtain three independent invariants as a solution of the characteristic system, they have a form

$$inv_1 = h, \quad inv_2 = t, \quad inv_3 = v(h, t) = e^{\frac{ar}{1 \pm are^{rt}} l} V(l, h, t). \tag{59}$$

It means also that the complete dependence of the value function $V(l, h, t)$ on the variable l is described just by the factor $e^{\frac{ar}{1 \pm are^{rt}} l}$. If $t > \frac{1}{r} \ln(ar)$ then the value function will be decreasing function in l by choosing the plus sign in the denominator of the fraction $-\frac{ar}{1 \pm are^{rt}} l$ and it will be increasing function in l if we choose the minus sign in the denominator of the fraction.

Because the value function for the optimization problem should be increasing function in l so we need to study just this one case. Therefore we choose as a new dependent variable the function $v(h, t) = e^{\frac{ar}{1 - are^{rt}} l} V(l, h, t)$. Substituting the new dependent variable $v(h, t)$ into (22) we get a two-dimensional PDE

$$v_t + \frac{1}{2} \eta^2 h^2 v_{hh} + (\mu - \delta) h v_h + \frac{r}{are^{rt} - 1} \left(a\delta h - 1 + \ln \left(\frac{r\bar{\Phi}(t)}{are^{rt} - 1} \right) \right) v + v \ln v - \frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2} v - \frac{(\alpha - r)\eta\rho h}{\sigma^2} v_h - \frac{(are^{rt} - 1)^2 \eta^2 \rho^2 h^2}{2a^2 r^2} \frac{v_h^2}{v} = 0, \quad v(h, t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

After Lemma 1 the value function $V(l, h, t)$ cannot have exponential growth in l as we obtain it now. It means that the invariant substitution (59) is inconsistent with the posed optimization problem.

Case $H_7(h_7)$. The last one-dimensional subalgebra in the list of the optimal system of subalgebras in Table is spanned by $e_2 \pm e_3$

$$h_7 = \langle e_2 \pm e_3 \rangle = \left\langle \pm \left(-\frac{1}{ar} \left(e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) \right) \frac{\partial}{\partial l} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial V} \right\rangle. \tag{60}$$

According to a standard procedure, we obtain following invariants of the subgroup H_7

$$inv_1 = z = l + \frac{1}{ar} e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) - \frac{1}{ar} \ln \bar{\Phi}(t), \quad inv_2 = h, \tag{61}$$



$$inv_3 = W(z, h) = V(t, l, h) \mp rt. \quad (62)$$

Using these invariants (61), (62) as the new variables $z, h, W(z, h)$ and substituting them into (22) we obtain a two-dimensional PDE on $W(z, h)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta^2 h^2 W_{hh} + (\mu - \delta) h W_h + (rz + \delta h) W_z + \frac{1}{a} W_z \ln W_z \pm r \\ & - \frac{(\alpha - r)^2 W_z^2 + 2(\alpha - r) \eta \rho h W_z W_{zh} + \eta^2 \rho^2 \sigma^2 h^2 W_{zh}^2}{2\sigma^2 W_{zz}} + \frac{1}{a} (1 + \ln a) W_z = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

96

In this case, we see the inconsistency between the boundary condition (21) which demands that $V(t, l, h) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ and the invariant substitutions (61), (62) which say that the expression $V(t, l, h) \mp rt$ depends just on z, h and not from the variable t .

There are a total of four meaningful reductions of the three-dimensional PDE (22) for the case of the EXP utility function and the general liquidation time distribution $\bar{\Phi}(t)$ by using one-dimensional subalgebras of the algebra L_4^{EXP} . Just one of these reductions which correspond to the case H_4 with $\omega \neq 0$, i.e. the substitutions (51), (52) are consistent with the boundary condition (21) and the two-dimensional PDE (53) is a corresponding reduction. This equation can be studied further with numerical methods.

In Table are listed also two and three-dimensional subalgebras of L_4^{EXP} . Using these subalgebras maybe we can find the deeper reductions of the PDE (22) for instance to ordinary differential equations.

Case $H_8(h_8)$. We take the first two-dimensional subalgebra listed in Table, i.e. the subalgebra $h_8 = \langle e_1, e_3 \rangle$. We rewrite the characteristic systems to the first generator e_1 in terms of the invariants of e_3 (45), (46) then e_1 takes the form $e_1 = \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial z} - W \frac{\partial}{\partial W}$. Solving a corresponding characteristic system we obtain a new invariant

$$inv_{e_1} = v(h) = W(z, h) e^{arz}, \quad (64)$$

which we use now as a new dependent variable to reduce the equation (47) to an ODE

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta^2 h^2 v'' - \frac{\eta^2 \rho^2}{2} h^2 \frac{(v')^2}{v} + \left(\frac{(\mu - \delta) \sigma^2 - (\alpha - r) \eta \rho}{\sigma^2} \right) h v' \\ & - \left(ar \delta h + \frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2} \right) v - rv \ln(-arv) = 0. \end{aligned} \quad (65)$$



In terms of original variables l, h, t , and $V(l, h, t)$ the substitution looks as follows

$$V(l, h, t) = v(h)e^{-arz}, \tag{66}$$

$$z = l + \frac{1}{ar} e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) - \frac{1}{ar} \ln \bar{\Phi}(t) - \frac{1}{ar} (1 + \ln a).$$

Now we obtain a reduction of the three-dimensional PDE (22) to an ODE. But we cannot use this reduction, because it is inconsistent with the properties of the value function $V(l, h, t)$ listed in the Lemma 1. The value function is an increasing function in variable l and $V(l, h, t) > 0$, it means also $v(h)$ should be a positive function. From the first expression in (66) follows that $V(l, h, t)$ is decreasing in z and following in the variable l and from the equation (65) follows that the expression $\ln(-arv)$ is well defined just for negative functions $v(h)$.

Case $H_{12}(h_{12})$. Similar to the previous case we study now the case of $h_{12} = \langle (e_1 + \omega e_3), e_2 \rangle$ and after the substitution

$$V(t, l, h) = v(h) \exp\left(-arl - e^{rt} \int e^{-rt} d \ln \bar{\Phi}(t) + \ln \bar{\Phi}(t)\right) \tag{67}$$

we obtain an ODE on the function $v(h)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \eta^2 h^2 v'' - \frac{\eta^2 \rho^2}{2} h^2 \frac{(v')^2}{v} + \left(\frac{(\mu - \delta) \sigma^2 - (\alpha - r) \eta \rho}{\sigma^2} \right) h v' \\ & - \left(ar \delta h + \frac{(\alpha - r)^2}{2 \sigma^2} \right) v + r(1 + \ln a)v - rv \ln(-arv) = 0. \end{aligned} \tag{68}$$

If we can find a positive solution to this equation then we get the solution to the original optimization problem. It is easy to see that the last term in the equation (68) will be complex-valued if the function $v(h) > 0$. It means that it is not possible to find a positive solution to this equation. This reduction is not compatible with the conditions possessed on the optimization problem. Like in the previous case we see that also other properties of the value function listed in Lemma 1 cannot be satisfied if the value function takes the form (67).

All other two – and three – dimensional subalgebras listed in Table do not give any meaningful reductions of the original equation (22), so we will not regard them in detail.

We studied the complete set of all possible reductions of the original three-dimensional PDE (22) to simpler differential equations. We see that not all of the reductions are reasonable for the optimization problem. Just one of them represented by the two-dimensional PDE satisfies all conditions. It is the main result of this Section and we formulate this result as a theorem



Theorem 4. *The main three-dimensional HJB equation (22) admits the unique symmetry reduction to the two-dimensional PDE (53) after the substitutions (51) – (52) which satisfies all conditions of the posed optimization problem. The corresponding investment – consumption strategies are given in (58).*

5. Conclusion

In this paper, we study a portfolio optimization problem for a basket consisting of a risk-free liquid, risky liquid, and risky illiquid assets where the investor prefers to use an exponential utility function. The illiquid asset is sold in a random moment T with a known distribution of the liquidation time. It is a distribution with a survival function $\bar{\Phi}(t)$, satisfying very general conditions (8). Typically one suppose that the liquidation time distribution is an exponential one, i.e. $\bar{\Phi}(t) = e^{-\kappa t}$, $t \geq 0, \kappa > 0$, or of the Weibull type with $\bar{\Phi}(t) = e^{-(t/\lambda)^k}$, with $t \geq 0, k > 0, \lambda > 0$. The Weibull distribution turns to the exponential distribution by $k = 1$ and one can understand it as a generalization of the exponential distribution. Based on the economical motivation we choose $k > 1$ because of in this case the Weibull probability density function has a local maximum.

Before in papers [3; 5] we studied similar portfolio optimization problems where the investor used the HARA and LOG utility functions correspondingly instead of the exponential utility function as in this paper.

Both the HARA utility function as well as the LOG utility function were widely used before in optimization problems with a random income and for different settings of the portfolio optimization problems. Usually, it was going on the optimization problems with a portfolio that includes an illiquid asset that was sold in a deterministic moment, i.e. on a portfolio optimization problem with a finite time horizon. Other authors supposed that the illiquid asset is not sold at all, i.e. they studied a portfolio optimization problem with the infinite time horizon. In previous papers [3], [5] we demonstrated the connection between these two problems. We also showed that for $\gamma \rightarrow 0$ we obtain $U_1^{HARA} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} U^{LOG}$, as well as formally a three-dimensional HJB equation (18) corresponding to the HARA utility function transforms into the HJB equation with the LOG utility function. Then we proved independently from the form of the survival function $\bar{\Phi}(t)$ that the Lie algebraic structure of the PDE with Lie logarithmic utility can be seen as a limit of the algebraic structure of the PDE with the HARA utility function as $\gamma \rightarrow 0$.

Now we provided a complete Lie group symmetry analysis for the optimization problem with an exponential utility function, i.e. for the three-dimensional PDE (22) which contains an arbitrary function $\bar{\Phi}(t)$. The results are formulated in Theorem 2. We obtained that this PDE admits the four-dimensional Lie algebras L_4^{EXP} . We prove also that the optimization problems with different forms of exponential utility functions are equivalent



up to the one-to-one analytical substitution. In other words, the optimization problems are identical from any point of view: an economical, analytical or Lie algebraic one.

We also investigated a connection between the optimization problem with the HARA utility function (3) and with the EXP utility function in Section 3.1. Even though the HARA utility function is connected to the EXP utility function by $\gamma \rightarrow \infty$ as we mentioned in (4) we do not get the expected connection between the corresponding optimization problems. Instead of that, we obtain quite different structures of the invariant variables by the study of the symmetry reductions of the main equation (22). In the case of the HARA utility function, typical invariant variables were the fraction $\frac{l}{h}$ and time t . It means that in the case of the HARA or LOG utility function the value function depends in the first place from the relation between the values of the liquid and illiquid assets. It is completely independent of the absolute value of his liquid part or from the absolute value of his illiquid part of wealth, but it depends on $\frac{l}{h}$. For instance, the investor in the HARA case, as we proved it before, should increase his consumption rapidly if the relation $\frac{l}{h}$ falls, independently how many millions of dollars the investor has as liquid part at the moment.

Here in the case of the exponential utility function, the situation is quite different. As follows from equation (46), the behavior of the investor depends now on two variables, on the value of the illiquid asset h and on the combined variable z which contains the liquid part of wealth and an economically modulated time. As a consequence, the absolute value of the illiquid part of wealth plays a large role. The variable z tells us that the influence of a large amount of a liquid asset plays the same role as the possibility to wait a long time. By the way, this difference in the behavior of the invariant variables and the radical change of the investment-consumption strategies is to explain by the fact that the risk tolerance in the case of the HARA utility function is a linear function of the consumption c and in the case of the exponential utility the risk tolerance is just a constant $R(c) = \frac{1}{a}$.

A further difference between the optimization problems with the HARA and an exponential utility function is related to the structure of the admitted Lie algebras. In the cases of the HARA and LOG utility functions, the corresponding three-dimensional PDEs have admitted three-dimensional main Lie algebras. Just by the special choice of a liquidation time distribution, i.e. only for the exponential function $\bar{\Phi}(t) = e^{-kt}$ we got an extension of these Lie algebras to the four-dimensional ones. Here in the case of the exponential utility function, we obtain from the beginning the four-dimensional Lie algebra as the symmetry algebras of the corresponding PDE. It is remarkable that in this case the four-dimensional Lie algebras do



not allow any extension independently from the form of $\bar{\Phi}(t)$. It can be seen by the solving of the system of equation (31) in the proof of Theorem 2.

In the previous paper [3] we proved that the algebra L_4^{LOG} can be obtained as a limit case of L_4^{HARA} by $\gamma \rightarrow 0$. Here we see that $L_3^{HARA_2}$ (or correspondingly $L_4^{HARA_2}$) and L_4^{EXP} are quite different and they do not connect by $\gamma \rightarrow \infty$ as well as they do not have any connections between analytical structures of their generators independently on the form of the liquidation time distribution.

In our paper, we pay attention to the internal structure of the admitted algebra L_4^{EXP} to obtain convenient and useful reductions of the main equation (22). Further on we use the system of optimal subalgebras provided in [22] and get corresponding nonequivalent invariant reductions of the three-dimensional PDEs (22) to two-dimensional PDEs. They describe the complete set of solutions that can not be transformed into each other with the help of the transformations of the admitted symmetry group. We show that the three-dimensional PDE can be reduced to corresponding two-dimensional ones in Section 4. The low-dimensional PDEs are much more convenient for further analytical or numerical studies. We also provide the formulas for the optimal investment-consumption policies in invariant variables using solutions of the reduced equation. We demonstrate that between meaningful reductions there exists one (53) which is consistent with the boundary condition (21) and with the expected properties of the value function.

We remark also a different level of influence of the parameters on the HJB equation and the admitted Lie algebraic structure. The HJB equation contains seven parameters $r, \alpha, \sigma, \mu, \delta, \eta, \rho$ which define the behavior of the liquid and illiquid asset, and one parameter a which is fixed by the exponential utility function. There are also some parameters which define the liquidation time distribution, for instance, it is the parameter κ if we take the exponential distribution with $\bar{\Phi}(t) = e^{-\kappa t}$ or two parameters λ and k if we take the Weibull distribution with $\bar{\Phi}(t) = e^{-(t/\lambda)^k}$. If we look at the structure of the Lie algebra provided in Theorem 2 we see that the generators of the Lie algebra depend on the parameters r, a , and parameters of the liquidation time distribution only. The algebra changes their structure if one or some of these parameters vanishing. Roughly said the most influence on the form of the solution of this optimization problem has interest rate r , the type of the investor's utility function, and a marked defined liquidation time distribution for the illiquid asset. These parameters define the invariant variables and the analytical structure of the solutions.

Summing up, we carry a complete Lie group analysis for the optimization problem with the exponential utility function and for a general liquidation time distribution. We determine the reduced equation and corresponding optimal policies as it formulates in the Theorem 4.

The author is thankful to prof. L. Vostrikova-Jacod for interesting discussions and for organizing a very successful conference «Advanced Methods in Mathematical Finance» (Angers, France, 2018), where the author got the idea to write this paper.



References

1. Bordag L.A. Geometrical properties of differential equations. Applications of Lie group analysis in Financial Mathematics. Singapore, 2015.
2. Bordag L.A., Yamshchikov I.P. Lie group analysis of nonlinear Black-Scholes models // Ehrhardt M., Günther M., ter Maten E.J.W. (eds.). Novel Methods in Computational Finance. Springer, 2017. P. 109–128.
3. Bordag L.A., Yamshchikov I.P. Optimization problem for a portfolio with an illiquid asset: Lie group analysis // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2017. Vol. 453. P. 668–699.
4. Bordag L.A., Yamshchikov I.P., Zhelezov D. Portfolio optimization in the case of an asset with a given liquidation time distribution // International Journal of Engineering and Mathematical Modelling. 2015. Vol. 2 (2). P. 31–50.
5. L. Bordag L.A., Yamshchikov I.P., Zhelezov D. Optimal allocation-consumption problem for a portfolio with an illiquid asset // International Journal of Computer Mathematics. 2016. Vol. 93 (5). P. 749–760. doi: 10.1080/00207160.2013.877584.
6. Bordag L.A. Optimization problem for a portfolio with an illiquid asset in the case of an exponential utility function // Theory of Probability and its Applications. 2020. Vol. 65 (1). P. 155–157. doi: 10.4213/tvp5367.
7. Bouchard B., Pham H. Wealth-path dependent utility maximization in incomplete markets // Finance and Stochastics. 2004. Vol. 8 (4). P. 579–603.
8. Duffie D., Fleming W., Soner H.M., Zariphopoulou T. Hedging in incomplete markets with HARA utility // Journal of Economic Dynamics and Control. 1997. Vol. 21. P. 753–782.
9. Diaz A., Esparcia C. Assessing risk aversion from the investor's point of view // Frontiers in Psychology. 2019. 02 July. doi: 10.3389/fpsyg.2019.01490.
10. Karoui N. El, Blanchet-Scalliet C., Jeanblanc M., Martinelli L. Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain // Journal of Mathematical Economics. 2008. Vol. 44 (11). P. 1100–1113.
11. Ibragimov N.H. Lie group analysis of differential equations. CRS Press, 1994.
12. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; Vol. 288). Springer, 2002.
13. Meleshko S.V. Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, 2005.
14. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 338 (1). P. 448–466.
15. Merton R. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case // The Review of Economics and Statistics. 1969. Vol. 51 (3). P. 247–257.
16. Merton R. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model // Journal of Economic Theory. 1971. Vol. 3. P. 373–413.
17. Monin P. Hedging market risk in optimal liquidation // SSRN Electronic Journal. 2014. Vol. 01.
18. Monin P., Zariphopoulou T. On the optimal wealth process in a log-normal market: Applications to risk management // International Journal of Financial Engineering. 2014. Vol. 01 (02). 1450013.
19. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. Springer Science & Business Media, 2000.
20. Ovsiannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations. Academic Press, 1982.



21. *Ovsyannikov L.V.* The «podmodeli» program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. Vol. 58 (4). P. 601–627.

22. *Patera J., Winternitz P.* Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // Journal of Mathematical Physics. 1977. Vol. 18 (7). P. 1449–1455.

23. *Schied A., Schöneborn T.* Risk aversion and the dynamics of optimal liquidation strategies in illiquid markets // Finance and Stochastics. 2009. Vol. 13 (2). P. 181–204.

24. *Tartakovsky D.M., Dentz M.* Diffusion in Porous Media: Phenomena and Mechanisms // Transp. Porous Med. 2019. Vol. 130 (1). P. 105-127. doi: 10.1007/s11242-019-01262-6.

25. *Vazquez J.L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Clarendon Press ; Oxford University Press, 2006.

26. *Vazquez J.L.* Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations // Equations of Porous Medium Type. (Oxford lecture series in mathematics and its applications ; Vol. 33). Oxford University Press, 2006.

102

The author

Prof. Ljudmila A. Bordag, University of Applied Sciences Zittau/Görlitz, Germany.

E-mail: ljudmila@bordag.com

Об авторе

Людмила Алексеевна Бордаг – проф., Университет прикладных наук Циттау/Гёрлиц, Германия.

E-mail: ljudmila@bordag.com

**В. Е. Пониматкин, С. Г. Шпилевая
В. А. Гоглев, В. И. Бурмистров**

ПЕРЕДАЮЩАЯ АНТЕННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ РАДИОЧАСТОТНЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЕЩЕСТВА

103

Рассматривается конструкция передающей антенной системы, предназначенной для использования в технике радиочастотных методов исследования вещества, обосновываются ее преимущества. Устройство целесообразно использовать при исследовании объектов, находящихся за пределами приемно-передающих контуров. При этом рабочие частоты, на которые оно рассчитано, занимают широкий спектр, включающий диапазоны от мириаметровых до декаметровых волн, что предполагает высокую равномерность излучаемой мощности. Использование предлагаемой конструкции позволит повысить результативность методик, применяемых для бесконтактного поиска соединений определенного вида.

The paper considers the design of the transmitting antenna system intended for use in the technique of radio-frequency methods of substance research and justifies its advantages. It is advisable to use the device when studying objects located outside the receiving and transmitting circuits. At the same time, the operating frequencies for which it is designed, occupy a wide spectrum, covering the ranges from myriameter to decameter waves, which implies a high uniformity of the radiated power. The use of the proposed design will improve the methods used for contactless search for connections of a certain type.

Ключевые слова: передающая антенная система, нормально поляризованная волна, граница раздела сред, радиочастотное облучение, ядерный квадрупольный резонанс, бесконтактные методы исследования

Keywords: transmitting antenna system, normally polarized wave, media interface, radio frequency irradiation, nuclear quadrupole resonance, contactless research methods

Радиочастотные методики исследования вещества, в том числе использующие разновидности ядерного квадрупольного резонанса в поликристаллических соединениях, применяемые для решения различных прикладных задач [1; 2], предусматривают регистрацию электромагнитных сигналов, наводимых в исследуемых объектах, расположенных за пределами радиочастотных приемно-передающих контуров. В данном случае для получения приемлемой чувствительности метода необходимо обеспечить подведение достаточной электромагнитной мощности к элементу возбуждения, находящемуся в среде с неопределенными магнитными и диэлектрическими свойствами. Электромагнитная волна, излучаемая системой накачки, должна пройти границу раздела воздух – среда, что в реальных условиях сопровождается явлениями отражения и преломления. Наряду с преломленными волнами, за счет которых энергия падающей волны из воздуха частично переходит через границу раздела во вторую среду, существуют и волны отра-



женные, рассеивающие поток падающего излучения. Поскольку преломление в нашем случае не является полным, для снижения потерь и повышения эффективности используемых методик практическую важность имеет определение пространственной ориентации, амплитуды и фазы векторов облучающего поля, а также условий формирования излучателем отраженной и преломленной волн.

В большинстве случаев границы раздела сред с достаточной точностью можно считать плоскими. При этом задача решается относительно просто, с использованием законов Снеллиуса [3]:

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_0; \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\xi_{a1} \cdot \mu_{a1}}{\xi_{a2} \cdot \mu_{a2}}}.$$

В общем случае диэлектрическая и магнитная проницаемости изучаемой среды определяются комплексными величинами

$$\xi_{ак} = \xi_a - i \frac{\sigma}{\omega} \quad \text{или} \quad \xi_{к} = \xi - i \frac{\sigma}{\omega \xi_0} = \xi \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \xi_a} \right),$$

$$\mu_{ак} = \mu_a - i \frac{\sigma_M}{\omega} \quad \text{или} \quad \mu_{к} = \mu - i \frac{\sigma_M}{\omega \mu_0} = \mu \left(1 - i \frac{\sigma_M}{\omega \mu_a} \right),$$

где мнимые части выражений характеризуют соответственно электрические и магнитные потери, вносимые средой. Исходя из этого, второй закон Снеллиуса можно записать в виде

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \sqrt{\frac{\xi_{ак1} \cdot \mu_{ак1}}{\xi_{ак2} \cdot \mu_{ак2}}} = \sqrt{\frac{\xi_{к1} \xi_0 \cdot \mu_{к1} \mu_0}{\xi_{к2} \xi_0 \cdot \mu_{к2} \mu_0}} = \sqrt{\frac{\xi_{к1} \cdot \mu_{к1}}{\xi_{к2} \cdot \mu_{к2}}}.$$

Откуда значение косинуса угла преломления θ_2 выражается через синус угла падения и параметры вещества:

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \frac{\xi_{к1} \cdot \mu_{к1}}{\xi_{к2} \cdot \mu_{к2}} \sin^2 \theta_0}. \quad (1)$$

Напряженности поля падающей и преломленной волн связаны коэффициентами Френеля [3], имеющими различное значение для случаев *вертикальной* (параллельной) поляризации ($P_{\parallel}, N_{\parallel}$), когда вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости распространения, и *горизонтальной* (нормальной) поляризации (P_{\perp}, N_{\perp}), когда вектор напряженности электрического поля перпендикулярен плоскости распространения волны:

$$P_{\parallel} = \frac{E_{omp}}{E_{над}} = \frac{z_1 \cos \theta_0 - z_2 \cos \theta_2}{z_1 \cos \theta_0 + z_2 \cos \theta_2}; \quad N_{\parallel} = \frac{E_{np}}{E_{над}} = \frac{2z_2 \cos \theta_0}{z_1 \cos \theta_0 + z_2 \cos \theta_2};$$

$$P_{\perp} = \frac{E_{omp}}{E_{над}} = \frac{z_2 \cos \theta_0 - z_1 \cos \theta_2}{z_2 \cos \theta_0 + z_1 \cos \theta_2}; \quad N_{\perp} = \frac{E_{np}}{E_{над}} = \frac{2z_2 \cos \theta_0}{z_2 \cos \theta_0 + z_1 \cos \theta_2}.$$



Учитывая, что $z = \sqrt{\mu_{ак} / \xi_{ак}}$, преобразуем коэффициенты преломления Френеля к следующему виду:

$$P_{\parallel} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{ак1}}{\xi_{ак1}} \cos \theta_0 - \sqrt{\frac{\mu_{ак2}}{\xi_{ак2}} \cos \theta_2}}{\sqrt{\frac{\mu_{ак1}}{\xi_{ак1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_{ак2}}{\xi_{ак2}} \cos \theta_2}}}; \quad N_{\parallel} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_{ак2}}{\xi_{ак2}} \cos \theta_0}}{\sqrt{\frac{\mu_{ак1}}{\xi_{ак1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_{ак2}}{\xi_{ак2}} \cos \theta_2}}};$$

$$P_{\perp} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{ак2}}{\xi_{ак2}} \cos \theta_0 - \sqrt{\frac{\mu_{ак1}}{\xi_{ак1}} \cos \theta_2}}{\sqrt{\frac{\mu_{ак2}}{\xi_{ак2}} \cos \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_{ак1}}{\xi_{ак1}} \cos \theta_2}}}; \quad N_{\perp} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_{ак2}}{\xi_{ак2}} \cos \theta_0}}{\sqrt{\frac{\mu_{ак2}}{\xi_{ак2}} \cos \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_{ак1}}{\xi_{ак1}} \cos \theta_2}}}.$$

Разделив почленно числитель и знаменатель каждого из выражений на $\sqrt{\mu_0 / \xi_0}$, с учетом (1) и выполнив ряд несложных преобразований, получим:

$$P_{\parallel} = \frac{\sqrt{\xi_{к2} \mu_{к1}} \cos \theta_0 - \sqrt{\xi_{к1} \mu_{к2}} \sqrt{1 - \frac{\xi_{к1} \cdot \mu_{к1}}{\xi_{к2} \cdot \mu_{к2}} \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\xi_{к2} \mu_{к1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\xi_{к1} \mu_{к2}} \sqrt{1 - \frac{\xi_{к1} \cdot \mu_{к1}}{\xi_{к2} \cdot \mu_{к2}} \sin^2 \theta_0}}; \quad (2)$$

$$N_{\parallel} = \frac{2\sqrt{\xi_{к1} \mu_{к2}} \cos \theta_0}{\sqrt{\xi_{к2} \mu_{к1}} \cos \theta_0 + \sqrt{\xi_{к1} \mu_{к2}} \sqrt{1 - \frac{\xi_{к1} \cdot \mu_{к1}}{\xi_{к2} \cdot \mu_{к2}} \sin^2 \theta_0}}; \quad (3)$$

$$P_{\perp} = \frac{\sqrt{\xi_{к1} \mu_{к2}} \cos \theta_0 - \sqrt{\xi_{к2} \mu_{к1}} \sqrt{1 - \frac{\xi_{к1} \cdot \mu_{к1}}{\xi_{к2} \cdot \mu_{к2}} \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\xi_{к1} \mu_{к2}} \cos \theta_0 + \sqrt{\xi_{к2} \mu_{к1}} \sqrt{1 - \frac{\xi_{к1} \cdot \mu_{к1}}{\xi_{к2} \cdot \mu_{к2}} \sin^2 \theta_0}}; \quad (4)$$

$$N_{\perp} = \frac{2\sqrt{\xi_{к1} \mu_{к2}} \cos \theta_0}{\sqrt{\xi_{к1} \mu_{к2}} \cos \theta_0 + \sqrt{\xi_{к2} \mu_{к1}} \sqrt{1 - \frac{\xi_{к1} \cdot \mu_{к1}}{\xi_{к2} \cdot \mu_{к2}} \sin^2 \theta_0}}. \quad (5)$$

Теперь следует рассмотреть случай, когда вторая среда обладает магнитными свойствами, сохраняя при этом свои диэлектрические свойства, то есть $\xi_{к1} = 1$, $\xi_{к2} = \xi_2$, $\mu_{к1} = 1$, $\mu_{к2} = \mu_2$. Данная ситуация представляет особый интерес, поскольку имеет прямое отношение к решаемой задаче [1; 2; 4]. Коэффициенты Френеля (2)–(5) в этом случае примут вид

$$P_{\parallel} = \frac{\sqrt{\xi_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\mu_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2} \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\xi_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\mu_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2} \sin^2 \theta_0}}; \quad (6)$$



$$N_{\parallel} = \frac{2\sqrt{\mu_2} \cos \theta_0}{\sqrt{\xi_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\mu_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2} \sin^2 \theta_0}}; \quad (7)$$

$$P_{\perp} = \frac{\sqrt{\mu_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\xi_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2} \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\mu_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\xi_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2} \sin^2 \theta_0}}; \quad (8)$$

$$N_{\perp} = \frac{2\sqrt{\mu_2} \cos \theta_0}{\sqrt{\mu_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\xi_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2} \sin^2 \theta_0}}. \quad (9)$$

На основании выражений (6)–(9) можно сделать вывод, что с наименьшими потерями в поликристаллическую среду будет проникать *нормально поляризованная* электромагнитная волна, следовательно, радиочастотное облучение образца целесообразно производить электромагнитным полем преимущественно такой поляризации.

На рисунке 1, *а* представлены графики зависимости коэффициента P_{\parallel} отражения *параллельно поляризованной* электромагнитной волны при ее падении из воздуха на среду с магнитными свойствами, а на рисунке 1, *б* – графики зависимости коэффициента P_{\perp} отражения *нормально поляризованной* электромагнитной волны от угла падения для сред с различной магнитной проницаемостью.

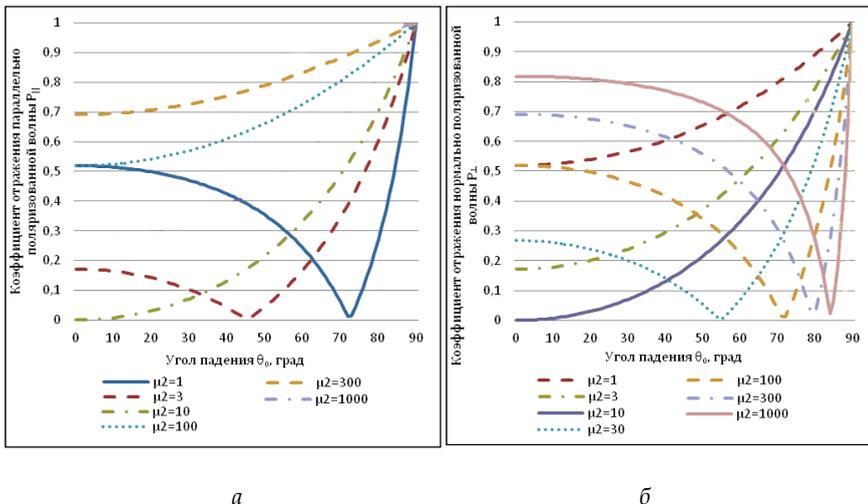


Рис. 1. Графики зависимости коэффициента отражения волны от величины угла падения на границу раздела:
а – параллельно поляризованной электромагнитной волны;
б – нормально поляризованной электромагнитной волны



Из рисунков становится очевидным, что для параллельно поляризованной волны наблюдается практически полное отражение волны от границы раздела сред воздух/вещество, а для нормально поляризованной — практически полное преломление волны во вторую среду. При $\mu_2 > \xi_2$ коэффициент отражения параллельно поляризованной волны теряет угол Брюстера [3] и асимптотически стремится к прямой $P_{\parallel} = 1$. Для нормально поляризованной волны, наоборот, угол Брюстера появляется только в том случае, когда $\mu_2 > \xi_2$, и по мере роста μ_2 он стремится к 90° .

Рассмотрим случай, когда вторая среда, обладая магнитными свойствами, вносит магнитные потери, то есть $\xi_{\kappa 1} = 1$, $\xi_{\kappa 2} = \xi_2$, $\mu_{\kappa 1} = 1$, $\mu_{\kappa 2} = \mu_2 - i\sigma_{m2} / \omega\mu_0$. Тогда коэффициенты преломления Френеля примут вид

$$P_{\parallel} = \frac{\sqrt{\xi_2} \cos \theta_0 - \sqrt{\mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\xi_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sin^2 \theta_0}}; \quad (10)$$

$$N_{\parallel} = \frac{2\sqrt{\mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \cos \theta_0}{\sqrt{\xi_2} \cos \theta_0 + \sqrt{\mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sin^2 \theta_0}}; \quad (11)$$

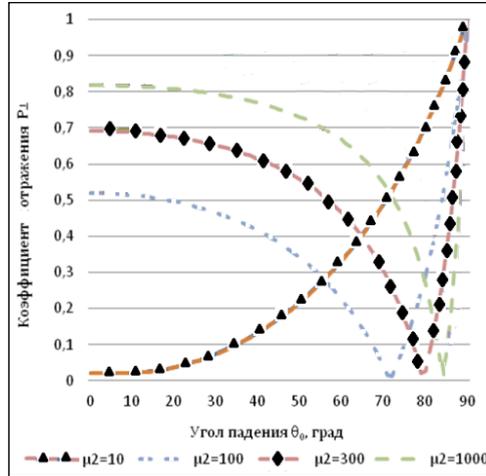
$$P_{\perp} = \frac{\sqrt{\mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \cos \theta_0 - \sqrt{\xi_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \cos \theta_0 + \sqrt{\xi_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sin^2 \theta_0}}; \quad (12)$$

$$N_{\perp} = \frac{2\sqrt{\mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \cos \theta_0}{\sqrt{\mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \cos \theta_0 + \sqrt{\xi_2} \sqrt{1 - \frac{1}{\xi_2 \cdot \mu_2 \left(1 - i \frac{\sigma_{m2}}{\omega\mu_{a2}}\right)} \sin^2 \theta_0}}. \quad (13)$$

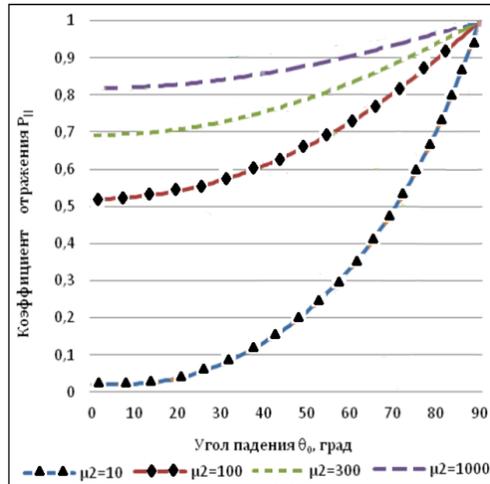
Результаты расчетов, выполненных на основе последних выражений (10)–(13) представлены на графиках (рис. 2), полученных при частоте электромагнитного возбуждения 10 МГц, $\xi_2 = 10$ и $\sigma_{m2} = 10$, а



также различных показателях μ_2 , что дает магнитные потери в области значений $10^{-4} \dots 10^{-3}$, соответствующих свойствам магнитопроводов из феррита.



а



б

Рис. 2. Графики зависимости коэффициентов P_{\perp} (а) и P_{\parallel} (б) при падении волны из воздуха в среду, обладающую магнитными свойствами

Так же, как и в случае с комплексной диэлектрической проницаемостью, наличие $\sigma_{,m2}$ вызывает изменение фазы вектора электрической напряженности электромагнитной волны, однако при малых магнитных потерях изменения фазы незначительны.



Полученные расчеты для сред, обладающих магнитными свойствами, показывают, что отражения падающей волны минимальны при равенстве относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей, даже если по отдельности данные коэффициенты имеют довольно высокое значение. В рассмотренном случае, при $\mu_2 = \xi_2 = 10$, нормально поляризованная волна практически не отражается. Аналогичный результат наблюдается и при других значениях $\mu_2 = \xi_2$.

Ниже рассматривается конструкция, позволяющая реализовать обоснованные преимущества методики. Облучающая система (рис. 3) излучает преимущественно нормально поляризованные электромагнитные волны с равномерным распределением энергии в заданном диапазоне частот (0,01 – 10) МГц [5 – 7].

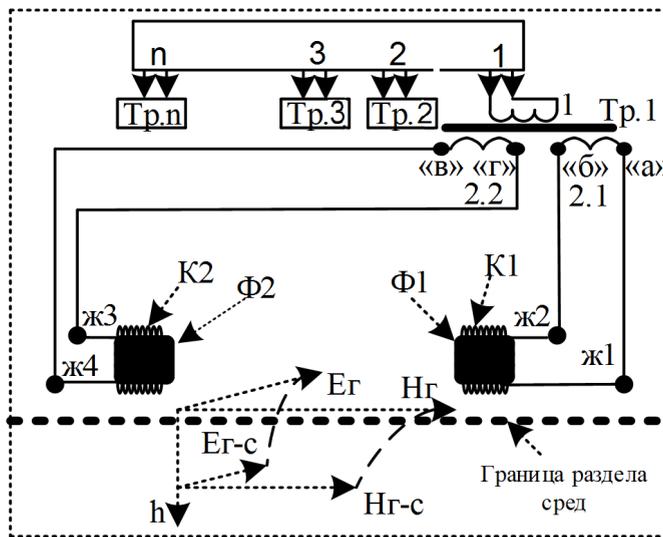


Рис. 3. Структурная схема предлагаемого варианта облучающей системы

На рисунке 3 представлена структурная схема передающей антенной системы, поясняющая принцип функционирования излучателя. Устройство возбуждает нормально поляризованную электромагнитную волну, характеризуемую векторами E_{Γ} и H_{Γ} вблизи границы раздела воздух – исследуемая среда (как с обычными, так и с магнитными свойствами). Система содержит ферритовые магнитопроводы $\Phi 1$ и $\Phi 2$ цилиндрической формы, расположенные горизонтально и образующие единый излучатель нормально поляризованной волны; две рамочные передающие антенны $K1$ и $K2$ с равномерными частотными свойствами входного сопротивления в указанном диапазоне частот [7], размещенные на ферритовых сердечниках $\Phi 1$ и $\Phi 2$; согласующие трансформаторы $Tr.1$ – $Tr.n$ идентичной конструкции с одной первичной (1) и двумя вторичными (2.1 и 2.2) обмотками; согласующее устройство передающей системы. Согласующий трансформатор $Tr.1$ первичной обмоткой соединен с одним из выходов согласующего устройства передающей системы (вверху рис. 3).

Вторичная обмотка трансформатора Тр.1 выполнена двухсекционной: первая секция 2.1 соединена клеммой «а» с клеммой ж1 первой рамочной передающей антенны К1, а клеммой «б» — с клеммой ж2 первой рамочной передающей антенны К1; вторая секция 2.2 трансформатора Тр.1 соединена клеммой «г» с клеммой ж3 второй рамочной передающей антенны К2, а клеммой «в» — с клеммой ж4 второй рамочной передающей антенны К2.

Структура излучателя Ф1 (Ф2) как одного из элементов в составе каждого из n излучателей представлена на рисунке 4. Излучатель содержит три ферритовых сердечника [8] каждый диаметром $d=4$ мм, выполненных по технологии из трехкомпонентной структуры с магнитной проницаемостью $\mu=1000$, $\mu=100$ и $\mu=10$. Поверх сердечников размещаются витки проводников обмоток Об.1, Об.2 и Об.3 рамочной антенны с сечением проводников 0,5 мм. На каждом сердечнике длиной $l=3$ см располагается по 35 витков провода, причем все три рамочные антенны включены последовательно и образуют единую цепь с пространственно однонаправленным током i , протекающим между клеммами ж1 и ж2.

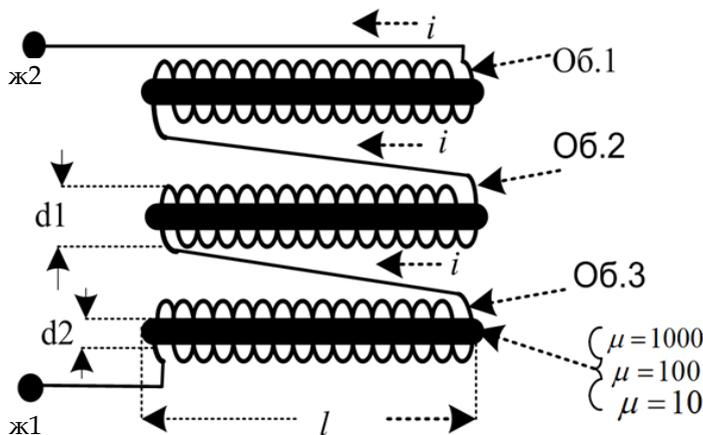


Рис. 4. Структура индуктивной части одного из излучателей Ф1 (Ф2)

Предлагаемое устройство позволит формировать переменное электромагнитное поле, характеризуемое максимальной глубиной проникновения в исследуемую среду, что достигается приданием нужных свойств облучающей системе, построенной с использованием электромагнитных контуров специальной конфигурации. Описанная конструкция облучателей, обеспечивающая создание преимущественно нормально поляризованной волны, представляет перспективу для эффективного возбуждения ядерного квадрупольного резонанса в удаленном режиме [8; 9], что дает возможность использовать метод в решении практически значимых задач в области бесконтактного исследования вещества.



Список литературы

1. Miller J.B., Barrall G.A. Explosives Detection with Nuclear Quadrupole Resonance // American Scientist. 2005. Vol. 93. P. 50 – 57.
2. Синявский Н.Я., Шpileвой А.А. Особенности косвенной регистрации сигналов ядерного квадрупольного резонанса взрывчатых веществ // Радиотехника. 2009. №2. С. 131 – 134.
3. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 2002.
4. Гомонов А.Н., Духан Е.И., Звездинский С.С. и др. Магнитометрические средства обнаружения. Теория и практика построения. М., 2013.
5. Устройство обнаружения сигналов ядерного квадрупольного резонанса : пат. 2697023 Рос. Федерация. №2018142728 ; заявл. 08.08.2019.
6. Устройство исследования электромагнитного поля вторичных излучателей : пат. 2538318 Рос. Федерация. №2013114517 ; заявл. 19.11.2014.
7. Устройство контроля электромагнитного поля вторичных излучателей : пат. 2527315 Рос. Федерация. №2013108753 ; заявл. 08.07.2014.
8. Белый Ю.И., Поцения О.А., Семин Г.К. Аппаратура для борьбы с терроризмом на основе эффекта ЯКР // Специальная техника. 2002. №2. С. 22 – 31.
9. Грецишкин В.С., Шpileвой А.А., Бурмистров В.И. О возможности применения ЯКР для обнаружения взрывчатых веществ на теле человека // Специальная техника. 2004. №5. С. 29 – 35.

Об авторах

Виктор Ефимович Пониматкин — канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Светлана Геннадьевна Шpileвая — канд. пед. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

Владислав Алексеевич Гоглев — студ., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Валерий Иванович Бурмистров — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: VBurmistrov@kantiana.ru

The authors

Dr Viktor E. Ponimatkin, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Dr Svetlana G. Shpilevaya, Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: SSHpilevaya@kantiana.ru

Vladislav A. Goglev, Student, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VPonimatkin@kantiana.ru

Valery I. Burmistrov, Assistant Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: VBurmistrov@kantiana.ru

ТРЕБОВАНИЯ И УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ В ВЕСТНИКЕ БФУ ИМ. И. КАНТА

Правила публикации статей в журнале

1. Представляемая для публикации статья должна быть актуальной, обладать новизной, содержать постановку задач (проблем), описание основных результатов исследования, полученных автором, выводы, а также соответствовать правилам оформления.

2. Материал, предлагаемый для публикации, должен быть оригинальным, не публиковавшимся ранее в других печатных изданиях. При отправке рукописи в редакцию журнала автор автоматически принимает на себя обязательство не публиковать ее ни полностью, ни частично без согласия редакции.

3. Рекомендованный объем статьи для докторантов и докторов наук — 20–30 тыс. знаков с пробелами, для доцентов, преподавателей и аспирантов — не более 20 тыс. знаков.

4. Список литературы должен составлять от 15 до 30 источников, не менее 50 % которых должны представлять современные (не старше 10 лет) публикации в изданиях, рецензируемых ВАК и (или) международных изданиях. Оптимальный уровень самоцитирования автора — не выше 10 % от списка использованных источников.

5. Все присланные в редакцию работы проходят *внутреннее и внешнее рецензирование*, а также проверку системой «Антиплагиат», по результатам которых принимается решение о возможности включения статьи в журнал.

6. Статья на рассмотрение редакционной коллегией направляется ответственному редактору по e-mail. Контакты ответственных редакторов: http://journals.kantiana.ru/vestnik/contact_editorial/

7. Статьи на рассмотрение принимаются в режиме онлайн. Для этого авторам нужно зарегистрироваться на портале Единой редакции научных журналов БФУ им. И. Канта http://journals.kantiana.ru/submit_an_article и следовать подсказкам в разделе «Подать статью онлайн».

9. Решение о публикации (или отклонении) статьи принимается редакционной коллегией журнала после ее рецензирования и обсуждения.

10. Автор имеет право публиковаться в одном выпуске «Вестника Балтийского федерального университета им. И. Канта» один раз; второй раз в соавторстве — в исключительном случае, только по решению редакционной коллегии.

Комплектность и форма представления авторских материалов

1. Статья должна содержать следующие элементы:

1) индекс УДК — должен достаточно подробно отражать тематику статьи (основные правила индексирования по УДК см.: <http://www.naukapro.ru/metod.htm>);

2) название статьи строчными буквами на русском и английском языках (до 12 слов);

3) аннотацию на русском и английском языках (150–250 слов, то есть 500 печатных знаков). Располагается перед ключевыми словами после заглавия;

4) ключевые слова на русском и английском языках (4–8 слов). Располагаются перед текстом после аннотации;

5) список литературы (примерно 25 источников) оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5. — 2008;

7) сведения об авторах на русском и английском языках (Ф. И. О. полностью, ученые степени, звания, должность, место работы, e-mail, контактный телефон);

8) сведения о языке текста, с которого переведен публикуемый материал.

2. Ссылки на литературу в тексте статей даются только в квадратных скобках с указанием номера источника из списка литературы, приведенного в конце статьи: первая цифра — номер источника, вторая — номер страницы (например: [12, с. 4]).

3. Рукописи, не отвечающие требованиям, изложенным в пункте 1, в печать не принимаются, не редактируются и не рецензируются.

Общие правила оформления текста

Авторские материалы должны быть подготовлены *в электронной форме* в формате листа А4 (210 × 297 мм).

Все текстовые авторские материалы принимаются исключительно в формате *doc* и *docx* (Microsoft Office).

Подробная информация о правилах оформления текста, в том числе таблиц, рисунков, ссылок и списка литературы, размещена на сайте Единой редакции научных журналов БФУ им. И. Канта: <http://journals.kantiana.ru/vestnik/monograph/>.

Рекомендуем авторам ознакомиться с информационно-методическим комплексом «Как написать научную статью»: <http://journals.kantiana.ru/authors/imk/>.

Порядок рецензирования рукописей статей

1. Все научные статьи, поступившие в редколлегию Вестника БФУ им. И. Канта, подлежат обязательному рецензированию. Отзыв научного руководителя или консультанта не может заменить рецензии.

2. Ответственный редактор серии определяет соответствие статьи профилю журнала, требованиям к оформлению и направляет ее на рецензирование специалисту, доктору или кандидату наук, имеющему наиболее близкую к теме статьи научную специализацию.

3. Сроки рецензирования в каждом отдельном случае определяются ответственным редактором серии с учетом создания условий для максимально оперативной публикации статьи.

4. В рецензии освещаются следующие вопросы:

а) соответствует ли содержание статьи заявленной в названии теме;

б) насколько статья соответствует современным достижениям научно-теоретической мысли;

в) доступна ли статья читателям, на которых она рассчитана, с точки зрения языка, стиля, расположения материала, наглядности таблиц, диаграмм, рисунков и формул;

г) целесообразна ли публикация статьи с учетом ранее выпущенной по данному вопросу литературы;

д) в чем конкретно заключаются положительные стороны, а также недостатки статьи, какие исправления и дополнения должны быть внесены автором;

е) рекомендуется (с учетом исправления отмеченных рецензентом недостатков) или не рекомендуется статья к публикации в журнале, входящем в Перечень ведущих периодических изданий ВАК.

5. Рецензирование проводится конфиденциально. Автор рецензируемой статьи может ознакомиться с текстом рецензии. Нарушение конфиденциальности допускается только в случае заявления рецензента о недостоверности или фальсификации материалов, изложенных в статье.

6. Если в рецензии содержатся рекомендации по исправлению и доработке статьи, ответственный редактор серии направляет автору текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование.

7. Статья, не рекомендованная рецензентом к публикации, к повторному рассмотрению не принимается. Текст отрицательной рецензии направляется автору по электронной почте, факсом или обычной почтой.

8. Наличие положительной рецензии не является достаточным основанием для публикации статьи. Окончательное решение о целесообразности публикации принимается редколлегией серии.

9. После принятия редколлегией серии решения о допуске статьи к публикации ответственный секретарь серии информирует об этом автора и указывает сроки публикации.

Текст рецензии направляется автору по электронной почте, факсом или обычным почтовым отправлением.

10. Оригиналы рецензий хранятся в редколлегии серии и редакции «Вестника Балтийского федерального университета им. И. Канта» в течение пяти лет.

Научное издание

ВЕСТНИК
БАЛТИЙСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. И. КАНТА

Серия

Физико-математические и технические науки

2021

№ 1

Редактор *Д. А. Малеваная*. Корректор *С. В. Ильина*
Компьютерная верстка *Г. И. Винокуровой*

Подписано в печать 15.06.2021 г.
Формат 70×108 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 10,0
Тираж 1000 экз. (1-й завод 41 экз.). Цена свободная. Заказ 62

Издательство Балтийского федерального университета им. Иммануила Канта
236001, г. Калининград, ул. Гайдара, 6