ределяется с произволом семи функций одного аргумента. Конгруэнция $V_{4,2}$ определяется соотношениями (8_1) - (8_4), $a_2^1=0$, $c_2^1=0$ и имеет произвол существования две функции двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 5. Конгруэнцией $V_{3(2)}$ называется конгруэнция коник с тремя двукратными фокальными поверхностями.

Для исследования этого класса осуществим канонизацию репера следующим образом: вершины A_1, A_2, A_3 поместим в двукратные фокальные точки коники, а вершину A_0 - в точку пересечения касательных плоскостей к фокальным поверхностям $(A_1), (A_2), (A_3)$; предполагается, что фокальные поверхности не вырождаются. Уравнения коники C имеют вид:

$$x^0=0, \quad F \equiv x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3=0.$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции $V_{3(2)}$ записывается следующим образом:

$$\omega_3^0=a^k\omega_k, \quad \omega_1^2+\omega_1^3=0, \quad \omega_2^1+\omega_2^3=0, \quad \omega_3^1+\omega_3^2=0,$$
$$\omega_1^2=m^{1k}\omega_k, \quad \omega_2^1=m^{2k}\omega_k, \quad \omega_3^2=m^{3k}\omega_k,$$
$$\omega_3^3-\omega_j^j+2\omega_i^i+\omega_3^j-\omega_j^3=c^{ii}\omega_i, \quad \omega_0^a=n^{ak}\omega_k,$$

где $\quad c^{11}a^2-c^{22}a^1=0, \quad \omega_i \overset{def}{=} \omega_i^0.$

Конгруэнция $V_{3(2)}$ существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986. 72 с.

2. М а х о р к и н В.В. Некоторые типы конгруэнций коник в P_3 с плоскими фокальными поверхностями // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1970. Вып.1. С.72-77.

УДК 514.75

О НОРМАЛЯХ НОРДЕНА-ЧАКМАЗЯНА КАСАТЕЛЬНО (r,ℓ)-ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Ю.В о л к о в а

(Калининградское ВВМУ)

Продолжается изучение регулярной касательно (r,ℓ)-оснащенной гиперполосы проективного пространства [1] в дифференциальной окрестности 3-го порядка. Найдены поля основных и нормальных квазитензоров Λ-подрасслоения и L-подрасслоения касательно оснащающих плоскостей, ассоциированных с данной гиперполосой SH_m. Получены новые поля основных и нормальных квазитензоров гиперполосы SH_m. Введены двойственные нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна Λ-подрасслоения и L-подрасслоения касательно оснащающих плоскостей гиперполосы SH_m, а также самой гиперполосы SH_m.

Во всей работе придерживаемся следующей схемы индексов:

$\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},\ldots=\overline{1,n}$; $\quad \bar{\mathcal{J}},\bar{\mathcal{K}},\bar{\mathcal{L}},\ldots=\overline{0,n}$; $\quad p,q,s,t=\overline{1,r}$;

$i,j,k,\ell=\overline{r+1,m}$; $\quad \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}$; $\quad a,b,c,d=\overline{1,m}$.

Оператор дифференцирования ∇ действует по закону:

$$\nabla T_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}=dT_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}-T_{\mathcal{L}}^{\mathcal{K}}\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}}+T_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}}\omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{K}}.$$

Символ δ обозначает дифференцирование по вторичным параметрам, а значения форм $\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}$ при фиксированных главных параметрах обозначаются $\pi_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}$. В этом случае оператор ∇ обозначается символом ∇_δ.

Символ "$\equiv$" обозначает сравнение по модулю базисных форм $\{\omega^b\}$.

§ 1. Основные квазитензоры гиперполосы SH_m

1. Известно [1], что касательно (r,ℓ)-оснащенная гиперполоса SH_m в репере первого порядка R^1 задается уравнениями:

$$\begin{cases}\omega_p^n=\Lambda_{pq}\omega^q, \quad \omega_i^n=L_{ij}\omega^j, \quad \omega_p^\alpha=\Lambda_{pq}^\alpha\omega^q,\\ \omega_i^\alpha=L_{ij}^\alpha\omega^j, \quad \omega_\alpha^a=N_{\alpha b}^a\omega^b, \quad \omega_i^p=L_{ib}^p\omega^b,\\ \omega_p^i=\Lambda_{pb}^i\omega^b.\end{cases} \qquad (1.1)$$

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты фундаментального объекта 2-го порядка $\Gamma_2=\{\Lambda^{\hat\alpha}_{pq}, \mathcal{L}^{\hat\alpha}_{ij}, N^a_{\alpha b}, \mathcal{L}^p_{ib}, \Lambda^i_{pb}\}$, представим в следующем виде:

$$\nabla\Lambda_{pq} + \Lambda_{pq}(\omega^0_0+\omega^n_n) = \Lambda_{pqb}\,\omega^b, \qquad (I.2)$$

$$\nabla\Lambda_{ij} + \Lambda_{ij}(\omega^0_0+\omega^n_n) = \Lambda_{ijb}\,\omega^b, \qquad (I.3)$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{pq} + \Lambda^\alpha_{pq}\omega^0_0 + \Lambda^n_{pq}\,\omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{pqb}\,\omega^b, \qquad (I.4)$$

$$\nabla L^\alpha_{ij} + L^\alpha_{ij}\,\omega^0_0 + L^n_{ij}\,\omega^\alpha_n = L^\alpha_{ijb}\,\omega^b, \qquad (I.5)$$

$$\nabla N^a_{\alpha b} + N^a_{\alpha b}\,\omega^0_0 - \delta^a_b\,\omega^0_\alpha = N^a_{\alpha bc}\,\omega^c, \qquad (I.6)$$

$$\nabla L^p_{ia} + L^p_{ia}\,\omega^0_0 + \Lambda_{ij}\,\delta^j_a\,\omega^p_n - \delta^p_a\,\omega^0_i = L^p_{iab}\,\omega^b, \qquad (I.7)$$

$$\nabla\Lambda^i_{pa} + \Lambda^i_{pa}\,\omega^0_0 + \Lambda_{pq}\,\delta^q_a\,\omega^i_n - \delta^i_a\,\omega^0_p = \Lambda^i_{pab}\,\omega^b, \qquad (I.8)$$

где величины $\Lambda^{\hat\alpha}_{pqt}$, $\Lambda^{\hat\alpha}_{ijk}$ симметричны по всем нижним индексам, величины $\Lambda^{\hat\alpha}_{pqi}$, $L^{\hat\alpha}_{ijp}$ симметричны по первым двум индексам, а величины $N^c_{\alpha ab}$, L^p_{iab}, Λ^i_{pab} симметричны по индексам a и b.

Главный фундаментальный тензор $\{M_{ab}\}=\{\Lambda_{pq}, L_{ij}\}$ [2] гиперполосы SH_m невырожденный [1]:

$$\det\begin{Vmatrix}\Lambda_{pq} & 0\\ 0 & L_{ij}\end{Vmatrix}\neq 0,\quad \nabla M_{ab} = -M_{ab}(\omega^0_0+\omega^n_n)+M_{abc}\,\omega^c. \qquad (I.9)$$

Следовательно, можно ввести в рассмотрение обратный ему тензор $\{M^{ab}\}$, компоненты которого подчинены условиям:

$$M_{ab}M^{bc}=\delta^c_a,\quad \nabla M^{ab} = M^{ab}(\omega^n_n+\omega^0_0) - M^{abc}\,\omega^n_c. \qquad (I.10)$$

Тензоры $\{M_{ab}\}$, $\{M^{ab}\}$ симметричны и являются тензорами первого порядка [1]. В частности, из (I.10) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\Lambda_{pq}\Lambda^{qt}=\delta^t_p,\quad \nabla\Lambda^{pq}=\Lambda^{pq}(\omega^0_0+\omega^n_n)-\Lambda^{pqb}\,\omega^n_b,\\ &L_{ij}L^{jk}=\delta^k_i,\quad \nabla L^{ij}=L^{ij}(\omega^0_0+\omega^n_n)-L^{ijb}\,\omega^n_b,\end{aligned} \qquad (I.11)$$

т.е. совокупности величин $\{\Lambda^{pq}\}$, $\{L^{ij}\}$ образуют тензоры первого порядка.

Продолжая уравнения (I.2), (I.3), (I.9), (I.10), находим

$$\nabla\Lambda_{pqt}+\Lambda_{pqt}(2\omega^0_0+\omega^n_n)+\Lambda^n_{(pq}\,\omega^0_{t)}-\Lambda^n_{(pq}\Lambda^n_{t)s}\,\omega^s_n\equiv 0, \qquad (I.12)$$

$$\nabla\Lambda_{pqi}+\Lambda_{pqi}(2\omega^0_0+\omega^n_n)-\Lambda_{pq}L_{ki}\,\omega^k_n+\Lambda_{pq}\,\omega^0_i\equiv 0, \qquad (I.13)$$

$$\nabla L_{ijk}+L_{ijk}(2\omega^0_0+\omega^n_n)+L_{(ij}\,\omega^0_{k)}-L_{(ij}L_{k)\ell}\,\omega^\ell_n\equiv 0, \qquad (I.14)$$

$$\nabla L_{ijp}+L_{ijp}(2\omega^0_0+\omega^n_n)-L_{ij}\Lambda_{tp}\,\omega^t_n+L_{ij}\,\omega^0_p\equiv 0, \qquad (I.15)$$

$$\nabla M_{abc}+M_{abc}(2\omega^0_0+\omega^n_n)+M_{(ab}\,\omega^0_{c)}-M_{(ab}M_{c)d}\,\omega^d_n\equiv 0, \qquad (I.16)$$

$$\nabla M^{abc}-M^{abc}(\omega^0_0+2\omega^n_n)-M^{(ab}\,\omega^{c)}_n+M^{(ab}M^{c)d}\,\omega^0_d\equiv 0. \qquad (I.17)$$

$$\nabla\Lambda^{pqt}-\Lambda^{pqt}(\omega^0_0+2\omega^n_n)-\Lambda^{(pq}\,\omega^{t)}_n+\Lambda^{(pq}\Lambda^{t)s}\,\omega^0_s\equiv 0, \qquad (I.18)$$

$$\nabla\Lambda^{pqi}-\Lambda^{pqi}(\omega^0_0+2\omega^n_n)+\Lambda^{pq}L^{ki}\,\omega^0_k-\Lambda^{pq}\,\omega^i_n\equiv 0, \qquad (I.19)$$

$$\nabla L^{ijk}-L^{ijk}(\omega^0_0+2\omega^n_n)-L^{(ij}\,\omega^{k)}_n+L^{(ij}\Lambda^{k)\ell}\,\omega^0_\ell\equiv 0, \qquad (I.20)$$

$$\nabla L^{ijp}-L^{ijp}(\omega^0_0+2\omega^n_n)+L^{ij}\Lambda^{pt}\,\omega^0_t-L^{ij}\,\omega^p_n\equiv 0. \qquad (I.21)$$

Из уравнений (I.2), (I.3), (I.9)-(I.21) следует, что величины

$$\{\Lambda_{pq},\Lambda_{pqt}\},\ \{\Lambda_{pq}, L_{ki}, \Lambda_{pqi}\},\ \{L_{ij}, L_{ijk}\},\ \{L_{ij},\Lambda_{pt},\Lambda_{ijt}\},$$
$$\{M_{ab},M_{abc}\},\ \{\Lambda^{pq},\Lambda^{pqt}\},\ \{\Lambda^{pq},L^{ki},\Lambda^{pqi}\},\ \{L^{ij},L^{ijk}\},\ \{L^{ij},\Lambda^{pt},\Lambda^{pqt}\},$$
$$\{M^{ab},M^{abc}\}$$

образуют геометрические подобъекты фундаментального объекта 2-го порядка гиперполосы SH_m.

2. Введем в рассмотрение величины

$$\begin{cases} t_p=\frac{1}{r+2}\Lambda_{qtp}\Lambda^{qt},\quad t^p=\frac{1}{r+2}\Lambda^{tqp}\Lambda_{tq},\quad \ell_p=\frac{1}{\ell}L_{ijp}L^{ij},\\ \ell^p=\frac{1}{\ell}L^{ijp}L_{ij},\quad \ell^i=\frac{1}{\ell+2}L^{jki}L_{jk},\quad \ell_i=\frac{1}{\ell+2}L^n_{jki}L^{jk},\\ t_i=\frac{1}{r}\Lambda^n_{pqi}\Lambda^{pq},\quad t^i=\frac{1}{r}\Lambda^{pqi}\Lambda_{pq},\quad T_a=\frac{1}{m+2}M_{bca}M^{bc},\\ T^a=\frac{1}{m+2}M^{bca}M_{bc},\quad T_a=\{T_p,T_i\},\quad T^a=\{T^p,T^i\},\end{cases} \qquad (I.22)$$

связанные соотношениями

$$\begin{cases} t_i=L_{ij}t^j,\quad t_p=\Lambda_{pq}t^q,\quad t^i=L^{ij}t_j,\quad t^p=\Lambda^{pq}t_q,\\ \ell_i=L_{ij}\ell^j,\quad \ell_p=\Lambda_{pq}\ell^q,\quad \ell^i=L^{ij}\ell_j,\quad \ell^p=\Lambda^{pq}\ell_q,\end{cases} \qquad (I.23)$$

$$\begin{cases} T_a=M_{ab}T^b,\quad T^a=M^{ab}T_b,\\ T_p=\frac{1}{m+2}\left(\ell\cdot\ell_p+(r+2)t_p\right),\quad T_i=\frac{1}{m+2}\left((\ell+2)\ell_i+r\cdot t_i\right),\\ T^p=\frac{1}{m+2}\left((r+2)t^p+\ell\cdot\ell^p\right),\quad T^i=\frac{1}{m+2}\left(r\cdot t^i+(\ell+2)\ell^i\right)\end{cases} \qquad (I.24)$$

и удовлетворяющие, в силу (I.2), (I.3), (I.11), (I.12)-(I.21), соответственно уравнениям:

$$\nabla\nu_p=-\nu_p\,\omega^0_0+\Lambda_{pq}\,\omega^q_n-\omega^0_p+\nu_{pa}\,\omega^a,$$
$$\nabla\nu_i=-\nu_i\,\omega^0_0+L_{ik}\,\omega^k_n-\omega^0_i+\nu_{ia}\,\omega^a,$$
$$\nabla\nu_a=-\nu_a\,\omega^0_0+M_{ab}\,\omega^b_n-\omega^0_a+\nu_{ab}\,\omega^b,$$

$$\nabla y^p = y^p\omega_n^n - \Lambda^{pq}\omega_q^0 + \omega_n^p - y^{pa}\omega_a^n,$$
$$\nabla y^i = y^i\omega_n^n - L^{ik}\omega_k^0 + \omega_n^i - y^{ia}\omega_a^n, \tag{I.25}$$
$$\nabla y^a = y^a\omega_n^n - M^{ab}\omega_b^0 + \omega_n^a - y^{ab}\omega_b^n.$$

Системы функций

$$\{t_p, \Lambda_{pq}\},\ \{\ell_p, \Lambda_{pq}\},\ \{t^p, \Lambda^{pq}\},\ \{\ell^p, \Lambda^{pq}\}, \tag{I.26}$$
$$\{t_i, L_{ij}\},\ \{\ell_i, L_{ij}\},\ \{t^i, L^{ij}\},\ \{\ell^i, L^{ij}\}, \tag{I.27}$$
$$\{T_a, M_{ab}\},\ \{T^a, M^{ab}\}, \tag{I.28}$$

как следует из уравнений (I.2), (I.3), (I.9), (I.10), (I.11), (I.25), образуют квазитензоры второго порядка гиперполосы SH_m. При этом квазитензоры (I.26) ассоциированы с касательно оснащающим полем Λ-плоскостей (Λ-подрасслоением), а квазитензоры (I.27) ассоциированы с касательно оснащающим полем L-плоскостей (L-подрасслоением). Следуя работам [3], [4], назовем их основными квазитензорами второго порядка гиперполосы SH_m.

3. Рассмотрим тензоры 2-го порядка

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{pqr} = \Lambda_{pqr} - \Lambda_{(pq}t_{r)}, & \mathcal{D}^{pqt} = \Lambda^{pqt} - \Lambda^{(pq}t^{r)}, \\ \mathcal{L}_{pqt} = \Lambda_{pqt} - \Lambda_{(pq}\ell_{t)}, & \mathcal{L}^{pqt} = \Lambda^{pqt} - \Lambda^{(pq}\ell^{t)}, \end{cases} \tag{I.29}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{ijk} = L_{ijk} - L_{(ij}t_{k)}, & \mathcal{D}^{ijk} = L^{ijk} - \Lambda^{(ij}t^{k)}, \\ \mathcal{L}_{ijk} = L_{ijk} - L_{(ij}\ell_{k)}, & \mathcal{L}^{ijk} = L^{ijk} - L^{(ij}\ell^{k)}, \end{cases} \tag{I.30}$$

которые удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla\eta_{pqt} + \eta_{pqt}(2\omega_0^0 + \omega_n^n) \equiv 0, \quad \nabla\eta^{pqt} - \eta^{pqt}(\omega_0^0 + 2\omega_n^n) \equiv 0,$$
$$\nabla\eta_{ijk} + \eta_{ijk}(2\omega_0^0 + \omega_n^n) \equiv 0, \quad \nabla\eta^{ijk} - \eta^{ijk}(\omega_0^0 + 2\omega_n^n) \equiv 0. \tag{I.31}$$

Тензоры 2-го порядка (I.29), (I.30) назовем тензорами Дарбу [3], [4] гиперполосы SH_m соответственно I-го и 2-го рода, причем тензоры Дарбу (I.29) ассоциированы с касательным Λ-подрасслоением, а тензоры Дарбу (I.30) ассоциированы с касательным L-подрасслоением.

Тензоры Дарбу связаны соотношениями

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{pqt} = \Lambda^{ps}\Lambda^{qf}\Lambda^{tr}\mathcal{D}_{sfr}, & \mathcal{L}^{pqt} = \Lambda^{ps}\Lambda^{qf}\Lambda^{tr}\mathcal{L}_{sfr}, \\ \mathcal{D}^{ijk} = L^{il}L^{jm}L^{kn}\mathcal{D}_{lmn}, & \mathcal{L}^{ijk} = L^{il}L^{jm}L^{kn}\mathcal{L}_{lmn}, \end{cases} \tag{I.32}$$

и удовлетворяют условиям аполярности [4], [5]:

$$\begin{cases} \Lambda_{pq}\mathcal{D}^{pqt} = 0, & \Lambda^{pq}\mathcal{D}_{pqt} = 0, & \Lambda_{pq}\mathcal{L}^{pqt} = 0, & \Lambda^{pq}\mathcal{L}_{pqt} = 0, \\ L_{ij}\mathcal{D}^{ijk} = 0, & L^{ij}\mathcal{D}_{ijk} = 0, & L_{ij}\mathcal{L}^{ijk} = 0, & L^{ij}\mathcal{L}_{ijk} = 0. \end{cases} \tag{I.33}$$

4. Свернув тензоры (I.29) по индексам p, q, t , а тензоры (I.30) по индексам i, j, k , получим относительные инварианты 2-го порядка (в общем случае отличные от нуля):

$$\alpha_0 = \mathcal{D}_{pqt}\mathcal{D}^{pqt},\ \beta_0 = \mathcal{L}_{pqt}\mathcal{L}^{pqt},\ \gamma_0 = \mathcal{D}_{ijk}\mathcal{D}^{ijk},\ \eta_0 = \mathcal{L}_{ijk}\mathcal{L}^{ijk}, \tag{I.34}$$

которые удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{cases} d\ln\alpha_0 = \omega_n^n - \omega_0^0 + \alpha_b\omega^b, & d\ln\alpha_0 = \omega_n^n - \omega_0^0 - \alpha^b\omega_b^n; \\ d\ln\beta_0 = \omega_n^n - \omega_0^0 + \beta_b\omega^b, & d\ln\beta_0 = \omega_n^n - \omega_0^0 - \beta^b\omega_b^n; \\ d\ln\gamma_0 = \omega_n^n - \omega_0^0 + \gamma_b\omega^b, & d\ln\gamma_0 = \omega_n^n - \omega_0^0 - \gamma^b\omega_b^n; \\ d\ln\eta_0 = \omega_n^n - \omega_0^0 + \eta_b\omega^b, & d\ln\eta_0 = \omega_n^n - \omega_0^0 - \eta^b\omega_b^n; \\ \alpha^b = -M^{bc}\alpha_c,\quad \beta^b = -M^{bc}\beta_c, & \gamma^b = -M^{bc}\gamma_c,\quad \eta^b = -M^{bc}\gamma_c. \end{cases} \tag{I.35}$$

Следуя работам [3] , [4], назовем относительные инварианты $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \eta_0$ – основными инвариантами 2-го порядка гиперполосы $SH_m \subset P_n$. Дальнейшее построение проводим в предположении, что все инварианты $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \eta_0$ отличны от нуля.

Продолжая уравнения (I.35) и применяя лемму Картана, находим, что величины $\{\alpha_b\}, \{\beta_b\}, \{\gamma_b\}, \{\eta_b\}, \{\alpha^b\}, \{\beta^b\}, \{\gamma^b\}, \{\eta^b\}$ удовлетворяют соответственно сравнениям:

$$\begin{cases} \nabla\nu_b + \nu_b\omega_0^0 + \Lambda_{bc}\omega_n^c + \omega_b^0 \equiv 0, \\ \nabla\nu^b + \nu^b\omega_n^n - \Lambda^{bc}\omega_c^0 - \omega_n^b \equiv 0. \end{cases} \tag{I.36}$$

Отсюда, в частности, следует, что величины

$$\{\alpha_p\}, \{\beta_p\}, \{\gamma_p\}, \{\eta_p\}, \{\alpha_i\}, \{\beta_i\}, \{\gamma_i\}, \{\eta_i\},$$

$$\{\alpha^p\}, \{\beta^p\}, \{\gamma^p\}, \{\eta^p\}, \{\alpha^i\}, \{\beta^i\}, \{\gamma^i\}, \{\eta^i\}$$

удовлетворяют соответственно одному из уравнений

$$\begin{cases} \nabla\nu_p + \nu_p\omega_0^0 + \Lambda_{pt}\omega_n^t + \omega_p^0 \equiv 0, \\ \nabla\nu_i + \nu_i\omega_0^0 + \Lambda_{ik}\omega_n^k + \omega_i^0 \equiv 0, \\ \nabla\nu^p - \nu^p\omega_0^0 - \Lambda^{pt}\omega_t^n - \omega_n^p \equiv 0, \\ \nabla\nu^i - \nu^i\omega_0^0 - \Lambda^{ik}\omega_k^n - \omega_n^i \equiv 0. \end{cases} \tag{I.37}$$

Из уравнений (I.2), (I.3), (I.9), (I.10), (I.11), (I.36), (I.37) следует, что величины

$$\{\Lambda_{pq},\alpha_p\},\ \{\Lambda_{pq},\beta_p\},\ \{\Lambda_{pq},\gamma_p\},\ \{\Lambda_{pq},\eta_p\},\qquad (\mathrm{I}.38)$$
$$\{\Lambda^{pq},\alpha^p\},\ \{\Lambda^{pq},\beta^p\},\ \{\Lambda^{pq},\gamma^p\},\ \{\Lambda^{pq},\eta^p\};$$
$$\{L_{ij},\alpha_i\},\ \{L_{ij},\beta_i\},\ \{L_{ij},\gamma_i\},\ \{L_{ij},\eta_i\},\qquad (\mathrm{I}.39)$$
$$\{L^{ij},\alpha^i\},\ \{L^{ij},\beta^i\},\ \{L^{ij},\gamma^i\},\ \{L^{ij},\eta^i\};$$
$$\{M_{ab},\alpha_a\},\ \{M_{ab},\beta_a\},\ \{M_{ab},\gamma_a\},\ \{M_{ab},\eta_a\},\qquad (\mathrm{I}.40)$$
$$\{M^{ab},\alpha^a\},\ \{M^{ab},\beta^a\},\ \{M^{ab},\gamma^a\},\ \{M^{ab},\eta^a\}$$

являются квазитензорами 3-го порядка - основными квазитензорами 3-го порядка регулярной гиперполосы $SH_m \subset P_n$ [4]. Квазитензоры (I.38) порождаются касательным Λ-подрасслоением, а квазитензоры (I.39) - касательным L-подрасслоением.

§ 2. Нормализации Нордена-Чакмазяна, ассоциированные с гиперполосой $SH_m \subset P_n$

1. Основные квазитензоры 2-го порядка (I.26) и квазитензоры 3-го порядка (I.38), порожденные Λ-подрасслоением, позволяют найти нормальные квазитензоры [4] 3-го порядка, ассоциированные с Λ-подрасслоением:

$$\begin{cases} \lambda_p=\frac{1}{2}(t_p+\alpha_p),\ \lambda^p=\frac{1}{2}(t^p+\alpha^p),\ \mu_p=\frac{1}{2}(\ell_p+\alpha_p),\ \mu^p=\frac{1}{2}(\ell^p+\alpha^p),\\ \rho_p=\frac{1}{2}(t_p+\beta_p),\ \rho^p=\frac{1}{2}(t^p+\beta^p),\ \vartheta_p=\frac{1}{2}(\ell_p+\beta_p),\ \vartheta^p=\frac{1}{2}(\ell^p+\beta^p),\\ \varepsilon_p=\frac{1}{2}(t_p+\gamma_p),\ \varepsilon^p=\frac{1}{2}(t^p+\gamma^p),\ \xi_p=\frac{1}{2}(\ell_p+\gamma_p),\ \xi^p=\frac{1}{2}(\ell^p+\gamma^p),\\ \varphi_p=\frac{1}{2}(t_p+\eta_p),\ \varphi^p=\frac{1}{2}(t^p+\eta^p),\ \psi_p=\frac{1}{2}(\ell_p+\eta_p),\ \psi^p=\frac{1}{2}(\ell^p+\eta^p).\end{cases}\qquad (2.\mathrm{I})$$

Нормальные квазитензоры (I.41) удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla\nu_p=-\nu_p\omega_0^0-\omega_p^0+\nu_{pb}\omega^b,\quad \nabla\nu^p=\nu^p\omega_n^n+\omega_n^p-\nu^{pb}\omega_b^n.\qquad (2.2)$$

Следовательно, каждый из квазитензоров $\{\nu^p\}$ (2.1) (соответственно $\{\nu_p\}$ (2.I)) задает нормаль I-го рода (соответственно нормаль 2-го рода) оснащающей плоскости $\Lambda(A_0)$ в каждой точке базисной поверхности V_m гиперполосы SH_m в смысле Нордена-Чакмазяна [5], [6].

Т е о р е м а 1. В дифференциальной окрестности 3-го порядка регулярной гиперполосы $SH_m \subset P_n$ внутренним инвариантным образом присоединяются двойственные нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна касательного Λ-подрасслоения, порождаемые квазитензорами (2.I).

2. Аналогично находим, что основные квазитензоры 2-го порядка (I.27) и 3-го порядка (I.39), ассоциированные с L-подрасслоением, порождают нормальные квазитензоры 3-го порядка данного L-подрасслоения:

$$\begin{cases} \lambda_i=\frac{1}{2}(t_i+\alpha_i),\ \lambda^i=\frac{1}{2}(t^i+\alpha^i),\ \mu_i=\frac{1}{2}(\ell_i+\alpha_i),\ \mu^i=\frac{1}{2}(\ell^i+\alpha^i),\\ \rho_i=\frac{1}{2}(t_i+\beta_i),\ \rho^i=\frac{1}{2}(t^i+\beta^i),\ \vartheta_i=\frac{1}{2}(\ell_i+\beta_i),\ \vartheta^i=\frac{1}{2}(\ell^i+\beta^i),\\ \varepsilon_i=\frac{1}{2}(t_i+\gamma_i),\ \varepsilon^i=\frac{1}{2}(t^i+\gamma^i),\ \xi_i=\frac{1}{2}(\ell_i+\gamma_i),\ \xi^i=\frac{1}{2}(\ell^i+\gamma^i),\\ \varphi_i=\frac{1}{2}(t_i+\eta_i),\ \varphi^i=\frac{1}{2}(t^i+\eta^i),\ \psi_i=\frac{1}{2}(\ell_i+\eta_i),\ \psi^i=\frac{1}{2}(\ell^i+\eta^i),\end{cases}\qquad (2.3)$$

удовлетворяющие соответственно уравнениям:

$$\nabla\nu_i=-\nu_i\omega_0^0-\omega_i^0+\nu_{ia}\omega^a,\quad \nabla\nu^i=\nu^i\omega_n^n+\omega_n^i-\nu^{ia}\omega_a^n.\qquad (2.4)$$

В результате имеет место

Т е о р е м а 2. Двойственные нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна касательного L-подрасслоения, порождаемые квазитензорами (2.3), внутренним инвариантным образом присоединяются в дифференциальной окрестности 3-го порядка образующего элемента гиперполосы

3. С помощью основных квазитензоров 2-го порядка (I.28) и основных квазитензоров 3-го порядка (I.40) построим нормальные квазитензоры 3-го порядка регулярной гиперполосы SH_m [4]

$$\begin{cases} A_a=\frac{1}{2}(T_a+\alpha_a),\ A^a=\frac{1}{2}(T^a+\alpha^a),\ B_a=\frac{1}{2}(T_a+\beta_a),\ B^a=\frac{1}{2}(T^a+\beta^a),\\ \Gamma_a=\frac{1}{2}(T_a+\gamma_a),\ \Gamma^a=\frac{1}{2}(T^a+\gamma^a),\ \text{Б}_a=\frac{1}{2}(T_a+\eta_a),\ \text{Б}^a=\frac{1}{2}(T^a+\eta^a),\end{cases}\qquad (2.5)$$

которые удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\nabla\nu_a=-\nu_a\omega_0^0-\omega_a^0+\nu_{ab}\omega^b,\quad \nabla\nu^a=\nu^a\omega_n^n+\omega_n^a-\nu^{ab}\omega_b^n.\qquad (2.6)$$

Квазитензоры 3-го порядка (2.I), (2.3), ассоциированные соответственно с Λ-подрасслоением и L-подрасслоением, индуцируют квазитензоры 3-го порядка

$$\begin{cases} \lambda_a=\{\lambda_p,\lambda_i\},\ \mu_a=\{\mu_p,\mu_i\},\ \rho_a=\{\rho_p,\rho_i\},\ \vartheta_a=\{\vartheta_p,\vartheta_i\},\\ \varepsilon_a=\{\varepsilon_p,\varepsilon_i\},\ \xi_a=\{\xi_p,\xi_i\},\ \varphi_a=\{\varphi_p,\varphi_i\},\ \psi_a=\{\psi_p,\psi_i\},\end{cases}\qquad (2.7)$$

каждый из которых в точке $A_0 \in V_m$ задает нормаль 2-го рода гиперполосы SH_m, и квазитензоры 3-го порядка

$$\begin{cases} \lambda^a=\{\lambda^p,\lambda^i\},\ \mu^a=\{\mu^p,\mu^i\},\ \rho^a=\{\rho^p,\rho^i\},\ \vartheta^a=\{\vartheta^p,\vartheta^i\},\\ \varepsilon^a=\{\varepsilon^p,\varepsilon^i\},\ \xi^a=\{\xi^p,\xi^i\},\ \varphi^a=\{\varphi^p,\varphi^i\},\ \psi^a=\{\psi^p,\psi^i\},\end{cases}\qquad (2.8)$$

каждый из которых в текущей точке $A_0 \in V_m$ задает нормаль I-го рода гиперполосы SH_m.

Можно показать, что каждая пара из квазитензоров (2.7), (2.8) линейно независима.

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности 3-го порядка образующего элемента регулярной гиперполосы SH_m внутренним инвариантным образом присоединяются восемь пар двойственных друг другу нормалей I-го и 2-го рода гиперполосы SH_m в смысле Нордена-Чакмазяна, определяемые квазитензорами (2.7), (2.8).

Библиографический список

1. В о л к о в а С.Ю. Касательно (τ,ℓ)-оснащенные гиперполосы SH_m проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1994. Вып.25. С.28-37.

2. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. М., 1950. Вып.8. С.197-272.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. № 2. С.275-382.

4. П о п о в Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос. Калининград. 1983. 82 с.

5. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

6. Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация // Докл. АН Арм. ССР. 1959. Т.28. № 4. С.151-157.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ ТРЕХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

М.Ф.Г р е б е н ю к

(Киевский институт ВВС)

В данной работе введена в рассмотрение нормаль первого рода Q, являющаяся аналогом нормали Q, построенной Э.Д.Алшибая [1] для гиперплоскостного распределения аффинного пространства. Приведена ее геометрическая характеристика.

Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [2] - [4], обозначения и терминологию которых мы используем в дальнейшем.

1. В дифференциальной окрестности второго порядка образующего элемента $H(M(\Lambda))$-распределения построим величины

$$\bar{A}^p_q = L^p_q + L^u A^p_{uq} - L^\tau L^p \Lambda_{\tau q},$$
$$\bar{A}^p_{\hat{u}} = L^p_{\hat{u}} + L^v A^p_{v\hat{u}} - L^p(L^q \Lambda_{q\hat{u}} + L^j M_{j\hat{u}} + L^\alpha H_{\alpha\hat{u}}),$$
$$\bar{A}^i_q = L^i_q + L^p \Lambda^i_{pq} - L^i L^p \Lambda_{pq},$$
$$\bar{A}^i_{\hat{u}} = L^i_{\hat{u}} + L^p \Lambda^i_{p\hat{u}} - L^i(L^p \Lambda_{p\hat{u}} + L^k M_{k\hat{u}} + L^\alpha H_{\alpha\hat{u}}),$$
$$\bar{A}^\alpha_q = L^\alpha_q + L^p \Lambda^\alpha_{pq} + L^i M^\alpha_{iq} - L^\alpha L^p \Lambda_{pq},$$
$$\bar{A}^\alpha_{\hat{u}} = L^\alpha_{\hat{u}} + L^p \Lambda^\alpha_{p\hat{u}} + L^i M^\alpha_{i\hat{u}} - L^\alpha L^p \Lambda_{p\hat{u}} - L^\alpha L^i M_{i\hat{u}} - L^\alpha L^\beta H_{\beta\hat{u}}.$$

Дифференциальные уравнения этих величин имеют вид:

$$\nabla \bar{A}^p_q - \bar{A}^p_q \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^p_{qK} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^p_i - \bar{A}^p_i \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^p_{iK} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^p_\alpha - \bar{A}^p_\alpha \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^p_{\alpha K} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^p_{n+1} - 2\bar{A}^p_{n+1} \omega^{n+1}_{n+1} - \bar{A}^p_\sigma \omega^\sigma_{n+1} = \bar{A}^p_{n+1,K} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^i_q - \bar{A}^i_q \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^i_{qK} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^i_j - \bar{A}^i_j \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^i_{jK} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^i_\alpha - \bar{A}^i_\alpha \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^i_{\alpha K} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^i_{n+1} - \bar{A}^i_{n+1} \omega^{n+1}_{n+1} - \bar{A}^i_\sigma \omega^\sigma_{n+1} = \bar{A}^i_{n+1,K} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^\alpha_q - \bar{A}^\alpha_q \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^\alpha_{qK} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^\alpha_j - \bar{A}^\alpha_j \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^\alpha_{jK} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^\alpha_\gamma - \bar{A}^\alpha_\gamma \omega^{n+1}_{n+1} = \bar{A}^\alpha_{\gamma K} \omega^K,$$
$$\nabla \bar{A}^\alpha_{n+1} - \bar{A}^\alpha_{n+1} \omega^{n+1}_{n+1} - \bar{A}^\alpha_\sigma \omega^\sigma_{n+1} = \bar{A}^\alpha_{n+1,K} \omega^K.$$

Величины $\bar{A}^p_s$ образуют относительный тензор. Рассмотрим детерминант в дифференциальной окрестности второго порядка: $K = \det\|\bar{A}^p_s\|$ и след тензора $\{\bar{A}^p_s\}$:

$$H = -\frac{1}{\tau}\bar{A}^p_p = -\frac{1}{\tau}(L^p_p + L^u A^p_{up} - L^p L^q \Lambda_{qp}),$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$d\ln K - \tau\omega^{n+1}_{n+1} = K_K \omega^K, \quad d\ln H - \omega^{n+1}_{n+1} = H_K \omega^K.$$

Итак, H и K - относительные инварианты, определенные в дифференциальной окрестности второго порядка, а отношение

$$S = \frac{K}{H^\tau}, \text{ где } d\ln S = S_K \omega^K,$$