УДК 514.75

М. А. Чешкова
Алтайский государственный университет, г. Барнаул

К геометрии бутылки Клейна и листа Мёбиуса

В евклидовом пространстве рассматривается бутылка Клейна и лист Мёбиуса. В процессе исследования используется система компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: бутылка Клейна, лист Мёбиуса, периодические функции.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным (независимо от выбора кривой), то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Впервые уравнение односторонней поверхности, открытой Мёбиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мёбиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В [3] указано разрезание бутылки Клейна на два листа Мёбиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Так как $\rho(v) = \rho(v + 4\pi)$, то функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho_1(v)),$$

где $\rho_1(v) = \rho(v + 2\pi)$ есть 2π-периодическая не равная нулю, а вектор-функция $l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho_1(v))$ есть 2π-антипериодическая не равная нулю.

Определим поверхность K уравнением

$$\begin{aligned} &r(u,v) = s(v) + \sin(u)l(v) \pm \sin(mu)(l(v+\pi) + f(v)e), \\ &u = -\pi...\pi, v = 0...2\pi, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $f = f(v)$ — 2π-антипериодическая функция, а вектор e есть постоянный. Вектор $f(v)e$ удобно выбрать так, чтобы векторы $l(v), l(v+\pi) + f(v)e$ были ортогональные.

Если m — четное число, то кривая $v = const$ есть кривая типа восьмерки с m секциями и поверхность замкнутая. Если m — нечетное число, то кривая $v = const$ есть незамкнутая кривая, а поверхность K есть поверхность с краем. Если $m = 1$, то это отрезок прямой и поверхность K есть прямолинейный лист Мёбиуса.

Исследуем вектор нормали вдоль замкнутой кривой $r(0,v) = s(v)$,

$$n(v) = [r_u, r_v] = [s'(v), l(v)] \pm m[s'(v), l(v+\pi) + f(v)e].$$

Так как $n(v) = -n(v + 2\pi)$, то поверхность K — односторонняя.

Будем исследовать поверхность (1), когда кривая $\rho = \rho(v)$ расположена на торе.

Рассмотрим тор

$$r(u,v) = ((a + b\cos(u))\cos(v), (a + b\cos(u))siv(v), b\sin(u)).$$

Зададим линию $u = \frac{kv}{2}$, где $k-$ нечетное число. Тогда вектор-функция

$$\rho(v)=((a+b\cos(\frac{kv}{2}))\cos(v),(a+b\cos(\frac{kv}{2}))\sin(v),b\sin(\frac{kv}{2}))$$

— 4π-периодическая, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической (обмотка тора).

Положим $a=2,b=1$ и построим обмотку тора, где $u=v/2,u=3v/2$ (рис. 1).

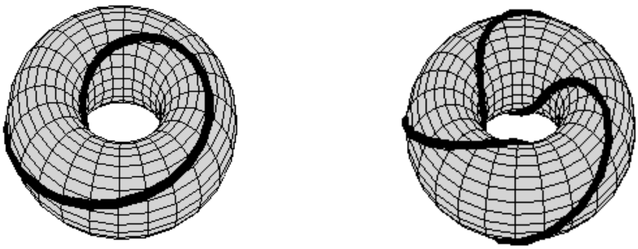

Рис. 1 Обмотка тора при u = v/2, u = 3v/2

Имеем $s(v)=(2\cos(v),2\sin(v),0)$,

$l(v)=(\cos(kv/2)\cos(v),\cos(kv/2)\sin(v),\sin(kv/2))$,

Определим $l(v+\pi)$ при $k=1,k=3$.

$l(v+\pi)=(\sin(v/2)\cos(v),\sin(v/2)\sin(v),\cos(v/2))$,

$l(v+\pi)=(-\sin(3v/2)\cos(v),-\sin(3v/2)\sin(v),-\cos(3v/2))$.

Построим окружность $s(v)=(2\cos(v),2\sin(v),0)$ и кривые $v=\pi/6$, где $m=3,m=2,m=1$ (рис. 2). Положим в (1) $m=2,k=1,f=-2\cos(v/2),e=(0,0,1)$.

Тогда векторы $l(v),l(v+\pi)+f(v)e$ ортогональные и ортогональны окружности. Мы определяем классическую бутылку Клейна, заданную в виде восьмерки

$$r(u,v) = (2\cos(v) + \sin(u)\cos(v/2)\cos(v) -$$
$$\sin(2u)\sin(v/2)\cos(v), 2\sin(v) + \sin(u)\cos(v/2)\sin(v) -$$
$$\sin(2u)\sin(v/2)\sin(v), \sin(u)\sin(v/2) + \sin(2u)\cos(v/2),$$
$$u = -\pi,...,\pi, v = 0,...,2\pi.$$

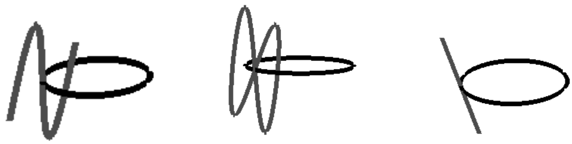

Рис. 2. Окружность и кривые $v = const$ при $m = 3, m = 2, m = 1$

Положим $m = 3$. Рассмотрим два криволинейных листа Мёбиуса (рис. 3). Уравнения их имеют вид

$$r(u,v) = (2\cos(v) + \sin(u)\cos(v/2)\cos(v) \pm \sin(3u)\sin(v/2)\cos(v),$$
$$2\sin(v) + \sin(u)\cos(v/2)\sin(v) \pm \sin(3u)\sin(v/2)\sin(v),$$
$$\sin(u)\sin(v/2) \mp \sin(3u)\cos(v/2), u = -\pi,...,\pi, v = 0,...,2\pi.$$

Соединим эти два листа, полагая $u = -\pi/3,...,\pi/3$. Получим бутылку Клейна (рис. 3).

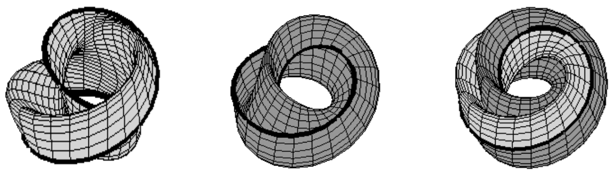

Рис. 3. Криволинейные листы Мёбиуса и бутылка Клейна

Если $m = 1$, то листы Мёбиуса будут прямолинейными. Построим их и соединим (рис. 4).

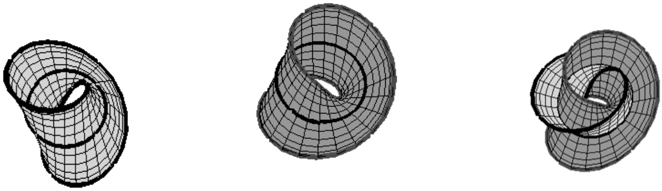

Рис. 4. Прямолинейные листы Мёбиуса и их соединение

Построим кривую и криволинейный лист Мёбиуса, полагая $m = 5$ (рис. 5).

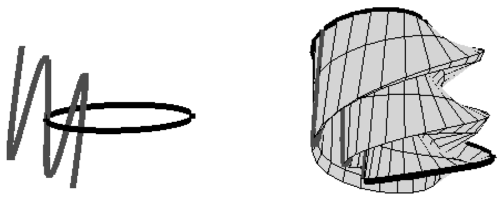

Рис. 5. Кривая $v = const$ криволинейный лист Мёбиуса, $m = 5$.

Если $k = 3$, то имеем перекрученные поверхности (рис. 6).

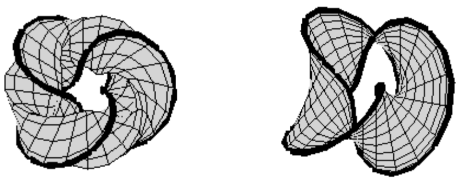

Рис. 6. Перекрученные листы Мёбиуса

Список литературы

1. *Mashke H.* Note on the unilateral surface of Moebius // Trans. Amer. Math. Sos. 1900. № 1.

2. *Сабитов И.Х.* Изометрические погружения и вложения плоского листа Мёбиуса в евклидовы пространства // Известия РАН. 2007. Т. 71, № 5. С. 197—224.

3. *Чешкова М.А*. О бутылке Клейна // Известия Алтайского университета. 2012. № 1/1. С. 130—133.

M. Cheshkova

To geometries of the Mobius band and the Klein bottle

We consider in the Euclidean space the Mebius band and the Klein bottle. The examples of these surfaces are constructed using the mathematical paskage Maple.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Классификация пространств проективной связности

В n-мерном пространстве проективной связности Картана $P_{n,n}$ из тензора проективной кривизны-кручения выделен тензор аффинной кривизны-кручения, содержащий тензор кручения. Доказано, что аналоги тождеств Риччи — Бьянки инвариантны лишь в пространстве с реальным кручением, когда тензор кручения выражается через одновалентный тензор. При продолжении структурных уравнений гладкого многообразия с помощью леммы Лаптева определены голономные и полуголономные многообразия. Тождества Риччи — Бьянки позволили показать полуголономность пространства проективной связности $P_{n,n}$, которая сохраняется в пространстве без кручения $P'_{n,n}$. Введен тензор неголономности пространства $P'_{n,n}$,