УДК 514.76

А.Я. Султанов

(Пензенский государственный педагогический университет)

О РАЗМЕРНОСТЯХ АЛГЕБР ЛИ ГОЛОМОРФНЫХ АФФИННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НАД АЛГЕБРОЙ

На **A**-гладком многообразии M_n задана линейная **A**-гладкая связность ∇. Пусть $T \neq 0$, где T — тензорное поле кручения связности ∇. Обозначим через $(g(M_n))^R$ алгебру Ли над **R** **A**-гладких аффинных векторных полей.

В работе доказаны следующие теоремы:

1. Если $T \neq I \otimes \omega - \omega \otimes I$, то $dim_{\mathbf{R}} (g(M_n))^{\mathbf{R}} \leq m(n^2+n)-r_0(3n-6)$.
2. Если $T = I \otimes \omega - \omega \otimes I$, то $dim_{\mathbf{R}} (g(M_n))^{\mathbf{R}} \leq m(n^2+n)-r_0 n$, где $m = dim_{\mathbf{R}}\mathbf{A}$, $r_0 = min\{rank\ a \mid a \in \mathbf{A}, a \neq 0\}$.

1. Основные понятия и факты,

Предположим, что **A** — коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей над полем **R**, имеющая конечный ранг m. Пусть a — произвольный элемент этой алгебры. Рангом элемента a будем называть ранг линейного оператора L_a, действующего на **A** по правилу $L_a(x)=ax$, для любого элемента $x \in \mathbf{A}$. Наименьший из рангов ненулевых элементов алгебры **A** будем называть сингулярным рангом этой алгебры.

Обозначим через M_n — **A**-гладкое многообразие размерности *n* и через ∇ – голоморфную линейную связность на M_n.

Известно, что на M_n существует естественная **R**-гладкая структура [1]. Голоморфное векторное поле *X* на M_n называется аффинным, если $L_X\nabla = 0$. Это соотношение равносильно тождеству

$$L_X\nabla_Y Z - \nabla_Y L_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = 0.$$

Следствиями этого тождества являются тождества

$$L_X\nabla^k T=0,\ L_X\nabla^k R=0\ (k=0, 1, 2, \ldots), \tag{1.1}$$

где T, R — тензорные поля кручения и кривизны соответственно. Выражения $\nabla^0 T$, $\nabla^0 R$ означают T и R соответственно.

Совокупность всевозможных голоморфных аффинных векторных полей относительно операции коммутирования образуют алгебру Ли над алгеброй **A**. Эта алгебра допускает структуру алгебры Ли над полем действительных чисел **R**, причем размерность этой алгебры не больше, чем $m(n^2+n)$. Эту алгебру обозначим через $(g(M_n))^R$.

2. Максимальная размерность алгебры для пространств (M_n,∇) с $T \neq 0$ $(g(M_n))^R$,

Зададим на M_n голоморфную линейную связность ∇ и обозначим через T тензорное поле кручения этой связности, а T_p — значение тензорного поля T в точке $p \in M_n$. Из условия, что $T \neq 0$, следует, что возможны только два случая: существует карта (U, x^i) на M_n такая, что $T^s_{tl}(p) \neq 0$ для некоторых t, l, s, попарно различных между собой, или $T^i_{jk}(p) = \delta^i_j\omega_k(p) - \delta^i_k\omega_j(p)$. Первое условие равносильно тому, что $T \neq I\otimes\omega - \omega\otimes I$, а второе – $T = I\otimes\omega - \omega\otimes I$.

Оценим размерность алгебры $(g(M_n))^{\mathbf{R}}$ в первом случае. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $T^1_{23}(p) \neq 0$.

Пусть X — аффинное векторное поле и $X = X^i \partial_i$ — его локальное представление в окрестности (U, x^i). В силу голоморфности векторного поля X имеем, что $\partial_j X^i = (\delta_\sigma \partial^\sigma_j X^i_\nu)\varepsilon^\nu$, где ε^ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ — базисные элементы алгебры **A**, δ_σ – составляющие главной единицы алгебры **A**. Учитывая это, подробнее рассмотрим соотношение, полученное из (1.1) при k = 0:

$$\partial_s T^i_{jk}(p) X^s(p) + T\begin{pmatrix} i \\ jk \end{pmatrix}\!\begin{vmatrix} l \\ s \end{vmatrix} X^s_l(p) = 0, \qquad (2.1)$$

где $T\begin{pmatrix} i \\ jk \end{pmatrix}\!\begin{vmatrix} l \\ s \end{vmatrix} = \delta^l_j T^i_{sk}(p) + \delta^l_k T^i_{js}(p) - \delta^i_s T^l_{jk}(p), \;\; X^s_l(p) = \partial_l X^s(p)$.

Используя голоморфность векторного поля X и тензорного поля T, из (2.1) получим

$$\delta_\sigma \partial^\sigma_s T^i_{\nu jk}(p) X^s_\alpha(p) \gamma^{\nu\alpha}_\tau + T\begin{pmatrix} i \\ \tau jk \end{pmatrix}\!\begin{vmatrix} l\alpha \\ s \end{vmatrix} X^s_{l\alpha}(p) = 0, \qquad (2.2)$$

где $\gamma^{\nu\alpha}_\tau$ — структурные постоянные алгебры **A** относительно базиса (ε^α).

Составим матрицу B из коэффициентов при $X^s_{1\alpha}(p)$ $(s > 1)$, $X^2_{k\alpha}(p)$, $X^3_{k\alpha}(p)$, $(k > 3)$, $X^1_{1\alpha}(p)$ $(\alpha = \overline{1, m})$ в уравнениях (2.2), соответствующих наборам индексов

$$\begin{pmatrix} i \\ \tau 23 \end{pmatrix} \; (i > 1), \; \begin{pmatrix} 1 \\ \tau l3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \tau 2l \end{pmatrix} \; (l > 3), \; \begin{pmatrix} 1 \\ \tau 23 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $T\begin{pmatrix} i \\ \tau jk \end{pmatrix}\!\begin{vmatrix} s\alpha \\ l \end{vmatrix}$ вычисляются по формулам

$$T\begin{pmatrix} i \\ \tau jk \end{pmatrix}\!\begin{vmatrix} s\alpha \\ l \end{vmatrix} = (\delta^s_j T^i_{\nu lk} + \delta^s_k T^i_{\nu jl} - \delta^i_l T^s_{\nu jk})(p)\gamma^{\nu\alpha}_\tau .$$

Для выделенных уравнений и переменных будем иметь:

$$T\begin{pmatrix} i \\ \tau 23 \end{pmatrix}\!\begin{vmatrix} 1\alpha \\ s \end{vmatrix} = -\delta^i_s T^1_{\nu 23}(p)\gamma^{\nu\alpha}_\tau = -\delta^i_s A^\alpha_\tau = -(I_{n-1} \otimes A)^{i\alpha}_{s\tau},$$

$$T\begin{pmatrix}1 & 1\alpha \\ \tau l3 & s\end{pmatrix}=0,\ T\begin{pmatrix}1 & k\alpha \\ \tau l3 & 2\end{pmatrix}=(I_{n-3}\otimes A)^{k\alpha}_{l\tau},$$
$$T\begin{pmatrix}1 & 1\alpha \\ \tau 2l & s\end{pmatrix}=0,\ T\begin{pmatrix}1 & k\alpha \\ \tau 2l & 2\end{pmatrix}=0,\ T\begin{pmatrix}1 & k\alpha \\ \tau 2l & 3\end{pmatrix}=(I_{n-3}\otimes A)^{k\alpha}_{l\tau},$$
$$T\begin{pmatrix}1 & 1\alpha \\ \tau 23 & s\end{pmatrix}=0,\ T\begin{pmatrix}1 & k\alpha \\ \tau 23 & 2\end{pmatrix}=0,\ T\begin{pmatrix}1 & k\alpha \\ \tau 23 & 3\end{pmatrix}=0,\ T\begin{pmatrix}1 & 1\alpha \\ \tau 23 & 1\end{pmatrix}=-A^{\alpha}_{\tau}.$$

Из этих соотношений следует, что матрица *B* имеет следующий вид:

$$B=\begin{pmatrix}-I_{n-1}\otimes A & * & * & * \\ 0 & I_{n-3}\otimes A & * & * \\ 0 & 0 & I_{n-3}\otimes A & * \\ 0 & 0 & 0 & -A\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что *rank* B=r(3n–6), где $r=\mathrm{rank}\ T^{1}_{23}(p)$, т.е. $r = rank\ ||T^{1}_{\nu 23}(p)\gamma^{\nu\alpha}_{\tau}||$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.1. *Если rank* $T^{1}_{23}(p) = r \neq 0$, *то*

$dim_{\mathbf{R}}(g(M_n))^R \leq m(n^2+n)-r(3n-6)$.

Предположим, что сингулярный ранг алгебры **A** равен r_0, тогда из теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2. *Если* $T \neq I\otimes\omega - \omega\otimes I$, *то*

$dim_{\mathbf{R}}(g(M_n))^R \leq m(n^2+n)-r_0(3n-6)$,

где r_0 – *сингулярный ранг алгебры* **A**.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$T^{i}_{jk}(p)=\delta^{i}_{j}\omega_k(p)-\delta^{i}_{k}\omega_j(p).$$

Из условия $L_X T = 0$ следует, что $L_X\omega = 0$. Последнее соотношение равносильно соотношениям

$$\delta_{\sigma}\partial^{\sigma}_{s}\varphi_{\nu j}(p)X^{s}_{\alpha}(p)\gamma^{\nu\alpha}_{\tau}-\varphi_{\nu s}(p)X^{s}_{j\alpha}(p)\gamma^{\nu\alpha}_{\tau}=0.$$

Ранг матрицы с элементами $\varphi_{\nu s}(p)\gamma_{\tau}^{\nu\alpha}\delta_{j}^{i}$, где тройка индексов $\binom{i\alpha}{s}$ соответствует столбцу матрицы, а пара индексов (τj) соответствует строке, не меньше, чем *nr*, где $r = rank\ \omega_s(p)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.3. *Если $T = I\otimes\omega - \omega\otimes I$ и $r = rank\ \omega(\partial_i|_p)$ для некоторого индекса i, то*

$$(1)\ dim_{\mathbf{R}}(g(M_n))^R \le m(n^2+n)-rn,$$

$$(2)\ dim_{\mathbf{R}}(g(M_n))^R \le m(n^2+n)-r_0 n,$$

где r_0 — сингулярный ранг алгебры **A**.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1985.

Sultanov

ON LIE ALGEBRAS DIMENSIONS OF HOLOMORPHIC AFFINE VECTOR FILDS OF AFFINE CONNECTION SPACES OVER ALGEBRA

On **A**-smooth manifold M_n linear **A**-smooth connection ∇ is given. Let $T\neq 0$, where T is tensor field of torsion of connection ∇. We denote algebra Lie over **R** of **A**-smooth affine vector fields by $(g(M_n))^R$.

In this paper the following theorems are proved:

1. If $T \neq I\otimes\omega - \omega\otimes I$, then $dim_{\mathbf{R}}(g(M_n))^R \le m(n^2+n)-r_0(3n-6)$.

2. If $T = I\otimes\omega - \omega\otimes I$, then $dim_{\mathbf{R}}(g(M_n))^R \le m(n^2+n)-r_0 n$, where $m = dim_{\mathbf{R}}\mathbf{A}$, $r_0 = min\{rank\ a \mid a \in \mathbf{A},\ a \neq 0\}$.