УДК 681.3.07

С. И. Алешников, Ю. Ф. Болтнев, З. Език, С. А. Ишанов, В. Куих

ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ И АВТОМАТЫ VI: ω-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ТРАНСДУКТОРЫ

Это шестая статья в серии, дающей обзор некоторых разделов теории формальных языков и автоматов с использованием полуколец, формальных степенных рядов, матриц и теории неподвижных точек.

Рассмотрены основные результаты теории ω-алгебраических систем над квемикольцами, которые обобщают классические контекстно-свободные грамматики, порождающие языки над конечными и бесконечными словами. Представление этих результатов базируется на парах непрерывное полукольцо со звездой — омега-полумодуль.

Определены ω-алгебраические системы и охарактеризованы их решения порядка k через поведение конечных алгебраических автоматов. Эти решения поставлены в соответствие с ω-контекстно-свободными языками. Затем вводятся рациональные и алгебраические трансдукторы и абстрактные ω-семейства степенных рядов над квемикольцами и доказывается, что рациональные и алгебраические степенные ряды конечных и бесконечных слов образуют такие абстрактные ω-семейства степенных рядов.

This is the sixth paper of a series of papers that will give a survey on several topics on formal languages and automata by using semirings, formal power series, matrices and fixed point theory.

The sixth paper of this series deals with the basic results in the theory of ω-algebraic systems over quemirings generalizing the classical context-free grammars generating languages over finite and infinite words. The presentation of these results is based on continuous starsemiring-omegasemimodule pairs.

We define ω-algebraic systems and characterize their solutions of order k by behaviors of algebraic finite automata. These solutions are then set in correspondence to ω-context-free languages. Then we introduce rational and algebraic transducers, and abstract ω-families of power series over quemirings and prove that rational and algebraic power series of finite and infinite words constitute such abstract ω-families of power series.

Ключевые слова: формальный язык, автомат, полукольцо, формальный степенной ряд, матрица, неподвижная точка, ω-алгебраическая система, ω-алгебраические степенные ряды, ω-контекстно-свободная грамматика, ω-контекстно-свободный язык, трансдуктор, рациональный трансдуктор, алгебраический трансдуктор, трансдукция над парой полукольцо со звездой — омега-полумодуль.

Key words: formal languages, automata, semiring, formal power series, matrix, fixed point, ω-algebraic system, ω-algebraic power series, ω-context-free grammar, ω-context-free language, transducer, rational transducer, algebraic transducer, transductions over starsemiring–omegasemimodule pair.

1. Введение

Это шестая статья в серии, дающей обзор некоторых разделов теории формальных языков и автоматов, в ней сообщается об обобщении некоторых классических результатов о формальных языках, формальных языках над деревьями, языках с конечными и бесконечными словами, автоматах, автоматах над деревьями и др. Предполагается, что читатель знаком с частями I—V [1—5] нашей серии.

В данной статье мы рассмотрим ω-алгебраические системы, рациональные и алгебраические трансдукторы и абстрактные ω-семейства степенных рядов над квемикольцами. Как и в части V [5], нашими базовыми алгебраическими структурами будут пары полукольцо-полумодуль, в особенности непрерывные пары полукольцо-полумодуль. Эти пары полукольцо-полумодуль были введены в главе 2 части V [5], предполагается, что читатель знаком с этой главой. Настоящая статья состоит из этой и трех последующих глав.

В главе 2 рассматриваются ω-алгебраические системы и ω-алгебраические степенные ряды. Решения порядка k этих ω-алгебраических систем характеризуются поведением алгебраических конечных автоматов.

Затем в главе 3 ω-алгебраические системы и ω-алгебраические степенные ряды ставятся в соответствие с ω-контекстно-свободными грамматиками и ω-контекстно-свободными языками соответственно.

В главе 4 мы рассмотрим морфизмы пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль и их расширения до матриц. Мы введем рациональные и алгебраические трансдукторы и трансдукции над парами полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Мы докажем, что рациональная (соответственно алгебраическая) трансдукция рационального (соответственно алгебраического) замыкания снова является рациональным (соответственно алгебраическим) замыканием. Затем мы конкретизируем наши результаты на примере рациональных и алгебраических трансдукторов в классическом смысле и определим абстрактные ω-семейства языков.

Изложение в настоящей статье следует работам Езика и Куиха [14; 17].

2. ω-алгебраические системы

В главах 2 и 3 T — квемикольцо, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ является множеством переменных (квемикольца), $T¶ = A$ и $T0 = V$. *Терм-произведение* t имеет вид $t(y_1, \ldots, y_n) = s_0 y_{i_1} s_1 \ldots s_{k-1} y_{i_k} s_k$, $k \geqslant 0$, где $s_j \in A - \{0\}$, $0 \leqslant j < k$, $s_k \in A$, и $y_{i_j} \in Y$. Элементы s_j называют *коэффициентами* терма-произведения. Если $k \geqslant 1$, мы не будем выписывать коэффициенты, равные 1.

Терм-сумма произведений p — сумма термов-произведений t_j, то есть

$$p(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} t_j(y_1, \ldots, y_n).$$

Коэфициенты всех термов-прозведений t_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, называют *коэффициентами* терма-суммы произведений p. Заметим, что каждая терм-сумма произведений представляет собой многочлен из *квемикольца многочленов над квемикольцом* T *от множества переменных* Y в смысле Лауша и Нёбауера [19, гл. 1.4]. Для подмножества $A' \subseteq A$, обозначим набор всех термов-сумм произведений с коэффициентами в A' через $A'(Y)$. Заметим, что термы-суммы произведений из $A(Y)$ в точности представляют собой многочлены из подквемикольца квемикольца многочленов, порожденных множеством $A \cup Y$.

Нас будут интересовать только отображения, порождаемые термами-суммами произведений. Эти отображения являются *полиномиальными функциями на* T в смысле Лауша и Нёбауера [19, гл. 1.6].

Каждый терм-произведение t (соответственно терм-сумма произведений p) от переменных $y_1, \ldots, y_n$ индуцирует отображение $\bar{t}$ (соответствнно $\bar{p}$) из T^n в T. Для терма-произведения t, представленного выше, отображение $\bar{t}$ определяется посредством

$$\bar{t}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = s_0 \tau_{i_1} s_1 \ldots s_{k-1} \tau_{i_k} s_k\,,$$

а для терма-суммы произведений p, представленного конечной суммой термов-произведений t_j, как указано выше, отображение $\bar{p}$ определяется посредством

$$\bar{p}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \bar{t_j}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

для всех $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T^n$.

Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль и пусть $A \times V$ — квемикольцо, ею определяемое. Пусть $A' \subseteq A$. *A'-алгебраическая система (относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$) над квемикольцом $A \times V$* есть система уравнений

$$y_i = p_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\,,$$

где каждый p_i есть терм-сумма произведений в $A'(Y)$. *Решение* этой A'-алгебраической системы определяется как $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T^n$ такое, что $\tau_i = \bar{p}_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Часто удобно записывать A'-алгебраическую систему $y_i = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в матричной системе обозначений. Определив два вектор-столбца

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

мы можем записать $y_i = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в матричной форме

$$y = p(y) \quad \text{или} \quad y = p\,.$$

Решение системы $y = p(y)$ определяется теперь как такое $\tau \in T^n$, что $\tau = \bar{p}(\tau)$, где $\bar{p} = (\bar{p}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Рассмотрим терм-произведение $t(y_1, \ldots, y_n) = s_0 y_{i_1} s_1 \ldots s_{k-1} y_{i_k} s_k$ и пусть $\tau_i = (\sigma_i,\, \omega_i) \in A \times V$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда

$$\begin{aligned} &\bar{t}(\tau_1,\, \ldots,\, \tau_n) = s_0(\sigma_{i_1},\, \omega_{i_1}) s_1 \ldots s_{k-1}(\sigma_{i_k},\, \omega_{i_k}) s_k = \\ &= (s_0 \sigma_{i_1} s_1 \ldots s_{k-1} \sigma_{i_k} s_k,\; s_0 \omega_{i_1} + s_0 \sigma_{i_1} s_1 \omega_{i_2} + \ldots + \\ &+ s_0 \sigma_{i_1} s_1 \ldots s_{k-2} \sigma_{i_{k-1}} s_{k-1} \omega_{i_k})\,. \end{aligned}$$

Согласно определению для $\sigma = (\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_n) \in A^n$

$$t_\sigma(z_1,\, \ldots,\, z_n) = s_0 z_{i_1} + s_0 \sigma_{i_1} s_1 z_{i_2} + \ldots + s_0 \sigma_{i_1} s_1 \ldots s_{k-2} \sigma_{i_{k-1}} s_{k-1} z_{i_k}$$

и, если $p(y_1,\, \ldots,\, y_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} t_j(y_1,\, \ldots,\, y_n)$, то

$$p_\sigma(z_1,\, \ldots,\, z_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} (t_j)_\sigma(z_1,\, \ldots,\, z_n)\,.$$

Здесь $z_1,\, \ldots,\, z_n$ — переменные над полумодулем V. Получим теперь

$$\bar{t}(\tau_1,\, \ldots,\, \tau_n) = \bar{t}(\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_n) + \bar{t}_\sigma(\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n)$$

и

$$\bar{p}(\tau_1,\, \ldots,\, \tau_n) = \bar{p}(\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_n) + \bar{p}_\sigma(\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n)\,.$$

Кроме того,

$$\bar{p}(\tau_1,\, \ldots,\, \tau_n)\P = \bar{p}(\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_n) \text{ и } \bar{p}(\tau_1,\, \ldots,\, \tau_n).0 = \bar{p}_\sigma(\omega_1,\, \ldots,\, \omega_n)\,.$$

В следующей теореме y (соответственно x и z) обозначает вектор-столбец $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ (соответственно $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$), где y_i (соответственно x_i и z_i) — переменные над $A \times V$ (соответственно A и V).

В дальнейшем A' будет всегда обозначать подмножество A, содержащее 0 и 1.

Теорема 2.1. *Пусть $A \times V$ — квемикольцо и пусть $y = p(y)$ — A'-алгебраическая система над $A \times V$. Тогда $(\sigma, \omega) \in (A \times V)^n$ является решением системы $y = p(y)$ тогда и только тогда, когда σ — решение A'-алгебраической системы $x = p(x)$ над A и ω — решение $\mathfrak{Alg}(A')$-линейной системы $z = p_\sigma(z)$ над V.*

Доказательство. Пусть $\tau = (\sigma, \omega)$ — решение $\Leftrightarrow \tau = \bar{p}(\tau) = \bar{p}(\sigma) + \bar{p}_\sigma(\omega) \Leftrightarrow \sigma = \bar{p}(\sigma)$ и $\omega = \bar{p}_\sigma(\omega)$. □

Рассмотрим A'-алгебраическую систему $y = p(y)$ над непрерывным квемикольцом $A \times V$. Тогда существует наименьшее решение A'-алгебраической системы $x = p(x)$ над A, скажем σ. Кроме того, запишем $\mathfrak{Alg}(A')$-линейную систему $z = p_\sigma(z)$ над V в виде $z = Mz$, где M — $n \times n$-матрица. Тогда по теореме 5.5 части V [5] M^{ω_k} для $0 \leqslant k \leqslant n$ является решением системы $z = p_\sigma(z)$. Следовательно, по теореме 2.1 (σ, M^{ω_k}), $0 \leqslant k \leqslant n$, является решением системы $y = p(y)$. Для данного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ назовем это решение *решением порядка k системы $y = p(y)$*. Через ω-$\mathfrak{Alg}(A')$ обозначим совокупность всех компонент решений всех порядков k для A'-алгебраической системы над $A \times V$.

Рассмотрим теперь омега-полукольцо со звездой A , где полукольцо A является вдобавок коммутативным и непрерывным, и алфавит Σ. По теореме 5.5 части V [5] $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ — непрерывная пара полукольцо-полумодуль.

Пусть $A\Sigma^* = \{sw \mid s \in A,\ w \in \Sigma^*\}$. Тогда ω-$\mathfrak{Alg}(A\Sigma^*)$ равно совокупности компонент решений порядка k для $A\Sigma^*$-алгебраической системы над $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$ $y_i = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где p_i — многочлен из $A\langle(\Sigma \cup Y)^*\rangle$. Вследствие коммутативности A любая полиномиальная функция, которая порождается термом-суммой произведений из $A\Sigma^*(Y)$, порождается также многочленом из $A\langle(\Sigma \cup Y)^*\rangle$, и обратно. Обозначим ω-$\mathfrak{Alg}(A\Sigma^*)$ через $A^{\omega\text{-alg}}\langle\langle\Sigma^*, \Sigma^\omega\rangle\rangle$. $A\Sigma^*$-алгебраические системы называются *ω-алгебраическими системами (над A и Σ)*, а степенные ряды из $A^{\omega\text{-alg}}\langle\langle\Sigma^*, \Sigma^\omega\rangle\rangle$ — *ω-алгебраическими степенными рядами (над A и Σ)*.

Рассмотрим теперь терм-произведение из $A\langle(\Sigma \cup Y)^*\rangle$

$$t(y_1, \ldots, y_n) = sw_0 y_{i_1} w_1 \ldots w_{k-1} y_{i_k} w_k,$$

где $s \in A$ и $w_i \in \Sigma^*$, $1 \leqslant i \leqslant k$. По определению для $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ $t_x(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n) = sw_0 z_{i_1} + sw_0 x_{i_1} w_1 z_{i_2} + \ldots + sw_0 x_{i_1} w_1 \ldots\ w_{k-2} x_{i_{k-1}} w_{k-1} z_{i_k}$ и в случае, если $p(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} t_j(y_1, \ldots, y_n)$,

$$p_x(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} (t_j)_x(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n)\,.$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно $z_1, \ldots, z_n$) — переменные над A (соответственно V). Заметим, что для $\sigma \in (A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle)^n$ получим $p_x(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, z_1, \ldots, z_n) = p_\sigma(z_1, \ldots, z_n)$.

Пусть дана ω-алгебраическая система $y = p(y)$ над $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times \times A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$. Назовем $x = p(x)$, $z = p_x(x, z)$ *смешанной* ω*-алгебраической системой над* $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$, *порожденной системой* $y = p(y)$.

Запишем $z = p_x(x, z)$ в виде $z = M(x)z$, где $M(x)$ — $n \times n$-матрица. Тогда $(\sigma, M(\sigma)^{\omega_k})$ для $0 \leqslant k \leqslant n$ является решением системы $x = p(x)$, $z = p_x(x, z)$. Кроме того, оно является решением порядка k системы $y = p(y)$.

3. ω-контекстно-свободные грамматики

Смешанная ω*-контекстно-свободная грамматика*

$$G = (n, \Sigma, P, j, k)$$

определяется через:

(i) алфавит $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *переменных для конечных выводов* и алфавит $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ *переменных для бесконечных выводов*, $n \geqslant 1$, $X \cap Z = \emptyset$;

(ii) алфавит Σ *терминальных символов*, $\Sigma \cap (X \cup Z) = \emptyset$;

(iii) конечное множество *продукций* вида $x \to \alpha$, $x \in X$, $\alpha \in (X \cup \Sigma)^*$ или $z \to \alpha z'$, $z, z' \in Z$, $\alpha \in (X \cup \Sigma)^*$;

(iv) *стартовую переменную* x_j (соответственно z_j) для конечных (соответственно бесконечных) выводов, $1 \leqslant i \leqslant n$;

(v) множество *повторяющихся переменных для бесконечных выводов* $\{z_1, \ldots, z_k\}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Конечный левосторонний вывод (относительно G) $\alpha \Rightarrow_L^* w$, $\alpha \in (X \cup \Sigma)^*$, $w \in \Sigma^*$ определяется обычным образом. *Бесконечный левосторонний вывод* (относительно G) $\pi : z \Rightarrow_L^\omega w$, $z \in Z$, $w \in \Sigma^\omega$ определяется следующим образом:

$$\pi : z \Rightarrow_L \alpha_1 z_{i_1} \Rightarrow_L^* w_1 z_{i_1} \Rightarrow_L w_1 \alpha_2 z_{i_2} \Rightarrow_L^* w_1 w_2 z_{i_2} \Rightarrow_L \ldots \Rightarrow_L^*$$
$$\Rightarrow_L^* w_1 w_2 \ldots w_m z_{i_m} \Rightarrow_L w_1 w_2 \ldots w_m \alpha_{m+1} z_{i_{m+1}} \Rightarrow_L^* \ldots ,$$

где $z \to \alpha_1 z_{i_1}, z_{i_1} \to \alpha_2 z_{i_2}, \ldots, z_{i_m} \to \alpha_{m+1} z_{i_{m+1}}, \ldots \in P$, $w_1, w_2, \ldots, w_m, \ldots \in \Sigma^*$ и $w = w_1 w_2 \ldots w_m \ldots$.

Пусть $\mathrm{INV}(\pi) = \{z \in Z \mid z$ бесконечно часто записано в $\pi\}$. Тогда имеем $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid x_j \Rightarrow_L^* w\} \cup \{w \in \Sigma^\omega \mid \pi : z_j \Rightarrow_L^\omega w$, $\mathrm{INV}(\pi) \cap \{z_1, \ldots, z_k\} \neq \emptyset\}$.

Обсудим теперь связь между смешанными ω-алгебраическими системами над $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$, где A есть $\mathbb{B}$ или $\mathbb{N}^\infty$, и смешанными ω-контекстно-свободными грамматиками (см. также часть II [2, перед теоремой 3.8]). Поставим в соответствие данной смешаноой ω-контекстно-свободной грамматике $G_{j,k} = (n, \Sigma, P, j, k)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$ смешанную ω-алгебраическую систему

$x_i = p_i(x_1, \ldots, x_n)$, $z_i = q_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ над $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ посредством

$$(p_i, \alpha) = 1, \text{ если } x_i \to \alpha \in P, \quad (p_i, \alpha) = 0 \text{ — в противном случае},$$
$$(q_i, \alpha) = 1, \text{ если } z_i \to \alpha \in P, \quad (q_i, \alpha) = 0 \text{ — в противном случае}.$$

Обратно, поставим в соответствие смешанной ω-алгебраической системе $x_i = p_i(x_1, \ldots, x_n)$, $z_i = q_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, смешанную ω-контекстно-свободную грамматику $G_{j,k} = (n, \Sigma, P, j, k)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$ посредством $x_i \to \alpha \in P$, если $(p_i, \alpha) \neq 0$, и $z_i \to \alpha \in P$, если $(z_i, \alpha) \neq 0$. Всякий раз, говоря о смешанной ω-контекстно-свободной грамматике, ассоциированной со смешанной ω-алгебраической системой или наоборот, будем понимать под этим соответствие в смысле приведенного выше определения.

В следующей теореме мы используем изоморфизм между $\mathbb{B}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times \mathbb{B}\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$ и $2^{\Sigma^*} \times 2^{\Sigma^\omega}$.

Теорема 3.1. *Пусть $G_{j,k} = (n, \Sigma, P, j, k)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$ — смешанная ω-контекстно-свободная грамматика и $x_i = p_i(x_1, \ldots, x_n)$, $z_i = q_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ — соответствующая ей смешанная ω-алгебраическая система над $(\mathbb{B}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, \mathbb{B}\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$. Пусть (σ, τ) — решение порядка k, $0 \leqslant k \leqslant n$, системы $x_i = p_i$, $z_i = q_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $L(G_{j,k}) = \sigma_j + \tau_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant i \leqslant k$.*

Доказательство. По теореме 3.6 части II [2] получим $\sigma_j = \{w \in \Sigma^* \mid x_j \Rightarrow_L^* w\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, а по теореме 5.9 части V [5], примененной к $A = \mathbb{B}$, получим $\tau_j = \{w \in \Sigma^\omega \mid \pi : z_j \Rightarrow_L^* w, \mathrm{INV}(\pi) \cap \{z_1, \ldots, z_k\} \neq \emptyset\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$. □

Если нашим базовым квемикольцом является $\mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times \mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$, то мы можем вывести более сильные следствия.

Теорема 3.2. *Пусть $G_{j,k} = (n, \Sigma, P, j, k)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$ — смешанная ω-контекстно-свободная грамматика и $x_i = p_i(x_1, \ldots, x_n)$, $z_i = q_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ — соответствующая ей смешанная ω-алгебраическая система над $(\mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, \mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$. Пусть (σ, τ) — решение порядка k, $0 \leqslant k \leqslant n$ системы $x_i = p_i$, $z_i = q_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим через $d_j(w)$, $w \in \Sigma^*$ (соответственно $w \in \Sigma^\omega$) число (возможно ∞) различных конечных левосторонних выводов (соответственно бесконечных левосторонних выводов π, где $INV(\pi) \cap \{z_1, \ldots, z_k\} \neq \emptyset$) из переменной x_j (соответственно z_j), $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда*

$$\sigma_j = \sum_{w \in \Sigma^*} d_j(w) w \quad \textit{и} \quad \tau_j = \sum_{w \in \Sigma^\omega} d_j(w) w, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Доказательство. По теореме 3.8 части II [2] и по теореме 5.9 части V [5], примененной к $A = \mathbb{N}^\infty$. □

ω-контекстно-свободная грамматика (*с повторяющимися переменными*) $G = (\Phi, \Sigma, P, A, F)$ есть обычная контекстно-свободная грамматика (Φ, Σ, P, A), дополненная *множеством* $F \subseteq \Phi$ *повторяющихся переменных* (см. также [9]).

Бесконечный левосторонний вывод π *относительно* G, начинающийся с некоторой строки α, определяется посредством

$$\pi : \alpha \Rightarrow_L \alpha_1 \Rightarrow_L \alpha_2 \Rightarrow_L \ldots ,$$

где α, $\alpha_i \in (\Phi \cup \Sigma)^*$ и $\Rightarrow_L$ определены как обычно. Этот бесконечный левосторонний вывод π может быть единственным образом записан в виде

$$\alpha = \beta_0 B_0 \gamma_0 \Rightarrow_L^* v_0 B_0 \gamma_0 \Rightarrow_L v_0 \beta_1 B_1 \gamma_1 \gamma_0 \Rightarrow_L^*$$
$$\Rightarrow_L^* v_0 v_1 B_1 \gamma_1 \gamma_0 \Rightarrow_L v_0 v_1 \beta_2 B_2 \gamma_2 \gamma_1 \gamma_0 \Rightarrow_L^* \ldots ,$$

где $v_i \in \Sigma^*$; $\beta_i, \gamma_i \in (\Phi \cup \Sigma)^*$; $B_i \to \beta_{i+1} B_{i+1} \gamma_{i+1} \in P$; $\beta_i \Rightarrow_L^* v_i$; особое вхождение переменной B_i не переписывается в подвыводе $\beta_i B_i \gamma_i \Rightarrow_L^* v_i B_i \gamma_i$, а переменные в γ_i никогда не переписываются в бесконечном левостороннем выводе π. Это вхождение переменной B_i называется *i-й значимой переменной* вывода π. (Заметим, что дерево бесконечного вывода π имеет единственный бесконечный путь, определяющий переменные B_i.) Мы будем также записывать для такого бесконечного левостороннего вывода $\pi : \alpha \Rightarrow_L^\omega w$ для $w = w_0 w_1 \ldots w_n \ldots$. По определению $\mathrm{INV}(\pi) = \{\Sigma \in \Phi \mid \Sigma$ бесконечно часто переписывается в $\pi\}$. *ω-язык* $L(G)$, *порожденный ω-контекстно-свободной грамматикой* G, определяется как

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid A \Rightarrow_L^* w\} \cup \{w \in \Sigma^\omega \mid \pi : A \Rightarrow_L^\omega w,\ \mathrm{INV}(\pi) \cap F \neq \emptyset\} .$$

ω-язык L называется *ω-контекстно-свободным*, если он порождается ω-контекстно-свободной грамматикой. (Обычно ω-язык является подмножеством Σ^ω. Здесь он — подмножество $\Sigma^* \cup \Sigma^\omega$.)

Соответствие между ω-алгебраической системой над $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times \times A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$ и ω-контекстно-свободной грамматикой такое же, как обычно (см. также часть II [2, перед теоремой 3.8]). Поставим в соответствие данной ω-контекстно-свободной грамматике $G_j = (\{y_1, \ldots, y_n\}, \Sigma, P, y_j, \{y_1, \ldots, y_k\})$ ω-алгебраическую систему $y_i = p_i(y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ над $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$ посредством $(p_i, \alpha) = 1$, если $y_i \to \alpha \in P$, и $(p_i, \alpha) = 0$ — в противном случае. Обратно, поставим в соответствие ω-алгебраической системе $y_i = p_i(y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ω-контекстно-свободную грамматику $G_{j,k} = (\{y_1, \ldots, y_n\}, \Sigma, P, y_j, \{y_1, \ldots, y_k\})$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$ посредством $y_i \to \alpha$, если $(p_i, \alpha) \neq 0$.

Любая ω-контекстно-свободная грамматика G *индуцирует* смешанную ω-контекстно-свободную грамматику G' следующим образом. Пусть $G = (\Phi, \Sigma, P, A, F)$, где без потери общности $\Phi = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $A = y_j$ и $F = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Тогда $G' = = (n, \Sigma, P', j, k)$, где P' определено следующим образом. Пусть $y_i \to \alpha = w_0 y_{i_1} w_1 \ldots w_{t-1} y_{i_t} w_t \in P$, где $y_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_t} \in \Phi$ и

$w_0, w_1, \ldots, w_t \in \Sigma^*$. Тогда определим следующее множество продукций

$$U_{y_i \to \alpha} = \{x_i \to w_0 x_{i_1} w_1 \ldots w_{t-1} x_{i_t} w_t\} \cup$$
$$\cup \left\{z_i \to w_0 z_{i_1},\ z_i \to w_0 x_{i_1} w_1 z_{i_2},\ \ldots,\ z_i \to w_0 x_{i_1} w_1 x_{i_2} \ldots w_{t-1} z_{i_t}\right\},$$

и, кроме того,

$$P' = \bigcup_{y_i \to \alpha \in P} U_{y_i \to \alpha}\,.$$

Очевидно, что для бесконечного левостороннего вывода $y_i \Rightarrow_L^* w$, $w \in \Sigma^*$ в G, существует конечный левосторонний вывод $x_i \Rightarrow_L^* w$ в G', использующий только x-продукции. Кроме того, для каждого бесконечного левостороннего вывода в G

$$y_i \Rightarrow_L \beta_1 y_{i_1} \gamma_1 \Rightarrow_L^* w_1 y_{i_1} \gamma_1 \Rightarrow_L w_1 \beta_2 y_{i_2} \gamma_2 \gamma_1 \Rightarrow_L^*$$
$$\Rightarrow_L^* w_1 w_2 y_{i_2} \gamma_2 \gamma_1 \Rightarrow_L w_1 w_2 \beta_3 y_{i_3} \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 \Rightarrow_L^* \ldots,$$

где y_i есть 0-я, а y_{i_j} — j-я значимая переменная, существует следующий бесконечный левосторонний вывод в G':

$$z_i \Rightarrow_L \bar\beta_1 z_{i_1} \Rightarrow_L^* w_1 z_{i_1} \Rightarrow_L w_1 \bar\beta_2 z_{i_2} \Rightarrow_L^* w_1 w_2 z_{i_2} \Rightarrow_L w_1 w_2 \bar\beta_3 z_{i_3} \Rightarrow_L^* \ldots,$$

при этом, если в β_i переменные y заменить на x, то получим $\bar\beta_i$. Здесь $z_i \to \bar\beta_1 z_{i_1} \in U_{y_i \to \beta_1 y_{i_1} \gamma_1}$ и $z_{i_j} \to \bar\beta_{j+1} z_{i_{j+1}} \in U_{y_{i_j} \to \beta_{j+1} y_{i_{j+1}} \gamma_{j+1}}$. Оба бесконечных левосторонних вывода порождают $w_1 w_2 w_3 \ldots \in \Sigma^\omega$.

Обратно, для каждого бесконечного левостороннего вывода $z_i \Rightarrow_L^\omega w$ в G' аналогичным образом существует конечный левосторонний вывод в G $y_i \Rightarrow_L^\omega w$, $w \in \Sigma^\omega$. Более того, если P' является несвязным объединением $U_{y_i \to \alpha}$ для всех $y_i \to \alpha \in P$, то соответствие между бесконечными левосторонними выводами в G и в G' взаимно однозначно.

Для бесконечного левостороннего вывода π в ω-контекстно-свободной грамматике G определим $\mathrm{INSV}(\pi) = \{y_i \in \Phi \mid y_i$ встречается бесконечно часто как значимая переменная в $\pi\}$. Ясно, что если для всех бесконечных левосторонних выводов π в ω-контекстно-свободной грамматике $G = (\Phi, \Sigma, P, A, F)$ имеем $\mathrm{INV}(\pi) \cap F \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{INSV}(\pi) \cap F \neq \emptyset$, то $L(G') = L(G)$, где G' — смешанная ω-контекстно-свободная грамматика, индуцированная грамматикой G.

Теорема 3.3. *Пусть $G_{j,k} = (\{y_1, \ldots, y_n\}, \Sigma, P, y_j, \{y_1, \ldots, y_k\})$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$ — ω-контекстно-свободная грамматика и $y_i = p_i(y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ — соответствующая ей ω-алгебраическая система над $\mathbb{B}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times \mathbb{B}\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$. Предположим, что для каждого бесконечного левостороннего вывода π имеем $INV(\pi) \cap \{y_1, \ldots, y_k\} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $INSV(\pi) \cap \{y_1, \ldots, y_k\} \neq \emptyset$. Пусть (σ, τ) — решение порядка k, $0 \leqslant k \leqslant n$ ω-алгебраической системы над $(\mathbb{B}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, \mathbb{B}\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$, индуцированной системой $y_i = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда $L(G_{j,k}) = \sigma_j + \tau_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant i \leqslant k$.*

Теорема 3.4. *Пусть* $G_{j,k} = (\{y_1, \ldots, y_n\}, \Sigma, P, y_j, \{y_1, \ldots, y_k\})$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$ — *ω-контекстно-свободная грамматика и* $y_i = p_i(y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ — *соответствующая ей ω-алгебраическая система над* $\mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times \mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$. *Предположим, что для каждого бесконечного левостороннего вывода* π *имеем* $INV(\pi) \cap \{y_1, \ldots, y_k\} \neq \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $INSV(\pi) \cap \cap \{y_1, \ldots, y_k\} \neq \emptyset$. *Обозначим через* $d_j(w)$, $w \in \Sigma^*$ *(соответственно* $w \in \Sigma^\omega$*) число (возможно* ∞*) различных конечных левосторонних выводов (соответственно бесконечных левосторонних выводов* π *таких, что* $INSV(\pi) \cap \{y_1, \ldots, y_k\} \neq \emptyset$*) из переменной* y_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. *Тогда*

$$\sigma_j = \sum_{w \in \Sigma^*} d_j(w) w \quad \text{и} \quad \tau_j = \sum_{w \in \Sigma^\omega} d_j(w) w\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n\,.$$

Заметим, что если $k = n$ или $n = 1$, то $\mathrm{INV}(\pi) \cap \{y_1, \ldots, y_k\} \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{INSV}(\pi) \cap \{y_1, \ldots, y_k\} \neq \emptyset$ для всех π.

Пример 3.1 (см. также [9, пример 3.1.6]). Рассмотрим ω-алгебраическую систему над $\mathbb{B}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times \mathbb{B}\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$, где $\Sigma = \{a, b\}$: $y_1 = ay_1b + ab$, $y_2 = y_1y_2$. Она индуцирует смешанную ω-алгебраическую систему над $(\mathbb{B}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, \mathbb{B}\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ $x_1 = ax_1b + ab$, $x_2 = x_1x_2$, $z_1 = az_1$, $z_2 = z_1 + x_1z_2$. Наименьшее решение системы $x_1 = ax_1b + ab$, $x_2 = x_1x_2$ определяется как $\sigma = \left(\sum_{n \geqslant 1} a^n b^n, 0\right)^T$. z-уравнения могут быть записаны в виде $z = Mz$, где $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \varepsilon & x_1 \end{pmatrix}$. Получим $M^{\omega_1} = \begin{pmatrix} a^\omega \\ x_1^* a^\omega \end{pmatrix}$ и $M^{\omega_2} = \begin{pmatrix} a^\omega \\ x_1^\omega + x_1^* a^\omega \end{pmatrix}$.

ω-контекстно-свободная грамматика G, соответствующая ω-алгебраической системе, имеет продукции $y_1 \to ay_1b$, $y_1 \to ab$, $y_2 \to y_1y_2$. Бесконечные левосторонние выводы:

(i) $y_1 \Rightarrow_L ay_1b \Rightarrow_L aay_1bb \Rightarrow_L \ldots \Rightarrow_L a^n y_1 b^n \Rightarrow_L \ldots$, то есть $y_1 \Rightarrow_L^\omega a^\omega$ с повторяющейся переменной y_1;

(ii) $y_2 \Rightarrow_L y_1y_2 \Rightarrow_L^* a^{n_1}b^{n_1}y_2 \Rightarrow_L a^{n_1}b^{n_1}y_1y_2 \Rightarrow_L^* a^{n_1}b^{n_1} \ldots \ldots a^{n_t}b^{n_t}y_2 \Rightarrow_L \ldots$, то есть $y_1 \Rightarrow_L^\omega a^{n_1}b^{n_1} \ldots a^{n_t}b^{n_t} \ldots$ с повторяющимися переменными y_1, y_2;

(iii) $y_2 \Rightarrow_L^* a^{n_1}b^{n_1} \ldots a^{n_t}b^{n_t}y_2 \Rightarrow_L a^{n_1}b^{n_1} \ldots a^{n_t}b^{n_t}y_1y_2 \Rightarrow_L^\omega \Rightarrow_L^\omega a^{n_1}b^{n_1} \ldots a^{n_t}b^{n_t}a^\omega$, то есть $y_2 \Rightarrow_L^\omega a^{n_1}b^{n_1} \ldots a^{n_t}b^{n_t}a^\omega$, $t \geqslant 0$ с повторяющейся переменной y_1.

Если y_1 — единственная повторяющаяся переменная, y_1 или y_2 — стартовая переменная, то $L(G_{1,1}) = \sum_{n \geqslant 1} a^n b^n + a^\omega$ или $L(G_{2,1}) = \left(\sum_{n \geqslant 1} a^n b^n\right)^\omega \cup \left(\sum_{n \geqslant 1} a^n b^n\right)^* a^\omega$ соответственно. Если повторяющиеся переменные — y_1 и y_2, а y_1 или y_2 — стартовая переменная, то снова получим $L(G_{1,2}) = \sum_{n \geqslant 1} a^n b^n + a^\omega$ или $L(G_{2,2}) = \left(\sum_{n \geqslant 1} a^n b^n\right)^\omega \cup \left(\sum_{n \geqslant 1} a^n b^n\right)^* a^\omega$ соответственно. Сравним это с решениями порядка 1 или 2 ω-алгебраической системы $y_1 = ay_1b + ab$, $y_2 = y_1y_2$: $\left(\sum_{n\geqslant 1} a^nb^n, 0\right)^T + \left(a^\omega, \left(\sum_{n\geqslant 1} a^nb^n\right)^\omega a^\omega\right)^T$ или $\left(\sum_{n\geqslant 1} a^nb^n, 0\right)^T + \left(a^\omega, \left(\sum_{n\geqslant 1} a^nb^n\right)^\omega + \left(\sum_{n\geqslant 1} a^nb^n\right)^* a^\omega\right)^T$ соответственно. Если y_1 — единственная повторяющаяся переменная и y_2 — стартовая переменная, то член $\left(\sum_{n\geqslant 1} a^nb^n\right)^\omega$ отсутствует. Это связано с тем, что в выводах (ii) каждая y_1 выводит конечное слово $a^{n_j}b^{n_j}$ посредством конечного левостороннего подвывода $y_1 \Rightarrow_L^* a^{n_j}b^{n_j}$ и нигде не является значимой переменной.

Если все переменные — повторяющиеся, то это не имеет значения: каждый бесконечный левосторонний вывод приводит к порождаемому языку. Следовательно, если повторяющимися переменными являются y_1 и y_2, а y_1 или y_2 — стартовая переменная, то бесконечные части решений порядка 1 или 2 соответствуют порождаемым языкам по теореме 3.3. □

В следующем примере существует только одна переменная. Следовательно, мы можем применить теоремы 3.3 и 3.4.

Пример 3.2. Рассмотрим ω-алгебраическую систему $y_1 = ay_1y_1 + b$ над $\mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times \mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$, где $\Sigma = \{a, b\}$. Наименьшее решение алгебраической системы $x_1 = ax_1x_1 + b$ над $\mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ определяется как $\sigma = D^*b$, где D — характеристический ряд ограниченного языка Дика (см. Berstel [6]). Смешанная ω-алгебраическая система над $(\mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, \mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ $x_1 = ax_1x_1 + b$, $z_1 = az_1 + ax_1z_1$ имеет решение порядка 1 $(D^*b, (a + ax_1)^\omega(D^*b)) = (D^*b, (a + aD^*b)^\omega) = (D^*b, (a + D)^\omega)$, так как $aD^*b = D$.

ω-контекстно-свободная грамматика, соответствующая системе $y_1 = ay_1y_1 + b$, имеет продукции $y_1 \to ay_1y_1$, $y_1 \to b$ и порождает язык $D^*b + (a + D)^\omega = D^*b + (a^*D)^\omega + (a^*D)^*a^\omega$.

Поскольку каждое слово в $(a^*D)^*$ и в $(a^*D)^\omega$ имеет единственную факторизацию на слова в a^*D, то все коэффициенты в $D^*b+(a+D)^\omega$ равны 0 или 1, то есть ω-контекстно-свободная грамматика с продукциями $y_1 \to ay_1y_1$, $y_1 \to b$ является «однозначной» ω-контекстно-свободной грамматикой. □

Пусть (A, V) — непрерывная пара полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Проверим решения порядка k: если (σ, ω) — решение порядка k A'-алгебраической системы над $A \times V$, то $\sigma \in \mathfrak{Alg}(A')$ и ω — k-е теоретико-автоматное решение конечной $\mathfrak{Alg}(A')$-линейной системы. Следовательно, по теореме 4.9 части V [5] ω имеет вид $\omega = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} s_jt_j^\omega$, где s_j, $t_j \in \mathfrak{Rat}(\mathfrak{Alg}(A')) = \mathfrak{Alg}(A')$. Следовательно, опять по теореме 4.9 части V [5] получаем следующий результат.

Теорема 3.5. *Пусть (A, V) — непрерывная пара полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Тогда следующие утверждения эквивалентны для $(s, v) \in A \times V$:*

(i) $(s, v) = ||\mathfrak{A}||$, где $\mathfrak{A}$ — конечный $\mathfrak{Alg}(A')$-автомат;

(ii) $(s, v) \in \omega$-$\mathfrak{Alg}(A')$;

(iii) $s \in \mathfrak{Alg}(A')$ и $v = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} s_kt_k^\omega$, где s_k, $t_k \in \mathfrak{Alg}(A')$.

Теорема 3.6. *Пусть (A, V) — непрерывная пара полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Тогда ω-$\mathfrak{Alg}(A')$ — обобщенное квемикольцо со звездой.*

Доказательство. Поскольку по предположению $0,\ 1 \in A'$, то мы заключаем, что $0,\ 1 \in \omega$-$\mathfrak{Alg}(A')$. Предположим теперь, что $(\sigma_1,\, \omega_1)$ и $(\sigma_2,\, \omega_2)$ лежат в ω-$\mathfrak{Alg}(A')$. Тогда по теореме 3.5 $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathfrak{Alg}(A')$ и $\omega_1 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m_1} s_k^1 {t_k^1}^{\omega}$, $\omega_2 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m_2} s_k^2 {t_k^2}^{\omega}$ для некоторых $s_k^1,\ s_k^2,\ t_k^1,\ t_k^2 \in \mathfrak{Alg}(A')$. Получим

$$(\sigma_1,\, \omega_1) + (\sigma_2,\, \omega_2) = (\sigma_1 + \sigma_2,\, \sum_{1 \leqslant k \leqslant m_1} s_k^1 {t_k^1}^{\omega} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m_2} s_k^2 {t_k^2}^{\omega})$$

и

$$(\sigma_1,\, \omega_1) \cdot (\sigma_2,\, \omega_2) = (\sigma_1 \sigma_2,\, \sum_{1 \leqslant k \leqslant m_1} s_k^1 {t_k^1}^{\omega} + \sigma_1 \cdot \sum_{1 \leqslant k \leqslant m_2} s_k^2 {t_k^2}^{\omega})\,.$$

Следовательно, $(\sigma_1,\, \omega_1) + (\sigma_2,\, \omega_2)$ и $(\sigma_1,\, \omega_1) \cdot (\sigma_2,\, \omega_2)$ снова лежат в ω-$\mathfrak{Alg}(A')$.

Кроме того,

$$(\sigma_1,\, \omega_1)\P = (\sigma_1,\, 0)$$

и

$$(\sigma_1,\, \omega_1)^{\otimes} = (\sigma_1^*,\, \sigma_1^{\omega} + \sigma_1^* \cdot \sum_{1 \leqslant k \leqslant m_1} s_k^1 {t_k^1}^{\omega})\,.$$

Следовательно, $(\sigma_1,\, \omega_1)\P$ и $(\sigma_1,\, \omega_1)^{\otimes}$ снова лежат в ω-$\mathfrak{Alg}(A')$ и ω-$\mathfrak{Alg}(A')$ рационально замкнуто. □

Замечание 3.1.5, определение 2.2.1 и теорема 4.1.8(a) из работы [9] и теорема 3.5(iii) дают следующий результат.

Теорема 3.7. *$CFL_{\omega} = \{L0 \subseteq \Sigma^{\omega} \mid L0 \in \mathbb{B}^{\omega\text{-}alg}\langle\langle \Sigma^*, \Sigma^{\omega} \rangle\rangle,\ \Sigma$ — алфавит$\}$.*

Пусть $t \in \mathbb{B}^{\mathrm{alg}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$. Тогда t есть x_2-компонента наименьшего решения алгебраической системы $x_i = p_i(x_2,\, \ldots,\, x_n)$, $2 \leqslant i \leqslant n$, над $\mathbb{B}^{\mathrm{alg}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$. Рассмотрим ω-алгебраическую систему над $\mathbb{B}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle \times \mathbb{B}\langle\langle \Sigma^{\omega} \rangle\rangle$

$$y_1 = y_2 y_1\,, \qquad y_i = p_i(y_2,\, \ldots,\, y_n),\ 2 \leqslant i \leqslant n$$

и индуцированную смешанную ω-алгебраическую систему над $(\mathbb{B}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle,\, \mathbb{B}\langle\langle \Sigma^{\omega} \rangle\rangle)$

$$\begin{aligned} &z_1 = z_2 + x_2 z_1\,, \quad && z_i = (p_i)_x(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, z_1,\, \ldots,\, z_n),\ 2 \leqslant i \leqslant n\,,\\ &x_1 = x_2 x_1\,, && x_i = p_i(x_2,\, \ldots,\, x_n),\ 2 \leqslant i \leqslant n\,. \end{aligned}$$

Первая компонента наименьшего решения системы $x_1 = x_2 x_1$, $x_i = p_i(x_2,\, \ldots,\, x_n)$, $2 \leqslant i \leqslant n$, равна 0. Вычислим теперь решение порядка 1 системы $z_1 = z_2 + x_2 z_1$, $z_i = (p_i)_x(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, z_1,\, \ldots,\, z_n)$,

$2 \leqslant i \leqslant n$. Запишем систему в виде $z = Mz$, тогда получим $M = \left(\begin{array}{c|c} x_2 & \varepsilon\ 0\ \ldots\ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & M' \\ 0 & \end{array} \right)$. Следовательно, первая компонента матрицы M^{ω_1} равна x_2^{ω}, а первая компонента решения порядка 1 определяется как $(0,\, t^{\omega})$.

Рассмотрим теперь ω-контекстно-свободную грамматику G, соответствующую системе $y_1 = y_2 y_1$, $y_i = p_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$, со множеством повторяющихся переменных $\{y_1\}$ и стартовой переменной y_1. Единственный бесконечный левосторонний вывод π, где y_1 встречается бесконечно часто, имеет вид

$$\pi : y_1 \Rightarrow_L y_2 y_1 \Rightarrow_L^* w_1 y_1 \Rightarrow_L w_1 y_2 y_1 \Rightarrow_L^* w_1 w_2 y_1 \Rightarrow_L \ldots$$

Единственная значимая переменная такого вывода π есть y_1, то есть $\mathrm{INSV}(\pi) = \{y_1\}$, и $\mathrm{INSV}(\pi) \cap \{y_1\} \neq \emptyset$, если $\mathrm{INV}(\pi) \cap \{y_1\} \neq \emptyset$. Следовательно, $L(G_{1,1}) = t^{\omega}$ по теореме 3.3.

Обычные построения дают тогда для $s + v$, где $v = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} s_k t_k^{\omega}$, $s,\, s_k,\, t_k \in \mathbb{B}^{\mathrm{alg}}\langle\langle \Sigma^* \rangle\rangle$, ω-контекстно-свободную грамматику G' такую, что $L(G') = s + v$.

Следовательно, мы дали построение, снова доказывающее теорему 3.7. Но вдобавок к этому G' имеет то приятное свойство, что для любого бесконечного левостороннего вывода π получим $\mathrm{INSV}(\pi) \cap F \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{INV}(\pi) \cap F \neq \emptyset$, где F — множество повторяющихся переменных в G'.

4. Трансдукции и абстрактные ω-семейства степенных рядов

В дальнейшем $(A,\, V)$ и $(\hat{A},\, \hat{V})$ будут обозначать пары полукольцо-полумодуль, а Q и J (соответственно I), возможно снабженные индексами, будут обозначать конечные (соответственно произвольные) множества индексов. *Отображение* $(h_A,\, h_V)$ *пар полукольцо-полумодуль (из* $(\hat{A},\, \hat{V})$ *в* $(A,\, V)$*)* определяется отображениями $h_A : \hat{A} \to A$ и $h_V : \hat{V} \to V$. Пусть $(\hat{A},\, \hat{V})$ и $(A,\, V)$ — пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Тогда такое отображение $(h_A,\, h_V)$ называется *морфизмом пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль (из* $(\hat{A},\, \hat{V})$ *в* $(A,\, V)$*)*, если $h_A : \hat{A} \to A$ — морфизм полуколец, $h_V : \hat{V} \to V$ — морфизм моноидов, и следующие условия выполняются для всех $s \in \hat{A}, v \in \hat{V}$:

(i) $h_A(s) h_V(v) = h_V(sv)$;

(ii) $h_A(s)^* = h_A(s^*)$;

(iii) $h_A(s)^{\omega} = h_V(s^{\omega})$.

Пусть теперь $(\hat{A},\, \hat{V})$ и (A, V) — полные пары полукольцо-полумодуль. Тогда отображение $(h_A,\, h_V)$ пар полукольцо-полумодуль (из

$(\hat{A}, \hat{V})$ в (A, V)) называется *морфизмом полных пар полукольцо-полумодуль* (*из* $(\hat{A}, \hat{V})$ *в* (A, V)), если $h_A : \hat{A} \to A$ — морфизм полуколец, $h_V : \hat{V} \to V$ — морфизм моноидов и следующие условия выполняются для всех s, $s_i \in \hat{A}$, $v \in \hat{V}$:

(i) $h_A(s)h_V(v) = h_V(sv)$;

(ii) $\sum_{i\in I} h_A(s_i) = h_A(\sum_{i\in I} s_i)$;

(iii) $\prod_{i\geqslant 1} h_A(s_i) = h_V(\prod_{i\geqslant 1} s_i)$.

Отображение (h_A, h_V), где $h_A : \hat{A} \to A^{Q_1'\times Q_2'}$ и $h_V : \hat{V} \to \to V^{Q'}$, продолжим до (h'_A, h'_V), где $h'_A : \hat{A}^{Q_1\times Q_2} \to A^{(Q_1\times Q_1')\times(Q_2\times Q_2')}$ и $h'_V : \hat{V}^Q \to V^{Q\times Q'}$, посредством $h'_A(M)_{(q_1,\, q_1'),(q_2,\, q_2')} = h_A(M_{q_1,\, q_2})_{q_1',\, q_2'}$ и $h'_V(P)_{(q,q')} = h_V(P_q)_{q'}$ для $M \in \hat{\Sigma}^{Q_1\times Q_2}$, $P \in \hat{V}^Q$, $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $q_1' \in Q_1'$, $q_2' \in Q_2'$, $q \in Q$, $q' \in Q'$.

Пусть $Q_1 = \bigcup_{j_1\in J_1} Q^1_{j_1}$, $Q^1_{j_1} \cap Q^1_{j_1'} = \emptyset$ для $j_1 \neq j_1'$, $Q_2 = \bigcup_{j_2\in J_2} Q^2_{j_2}$, $Q^2_{j_2} \cap Q^2_{j_2'} = \emptyset$ для $j_2 \neq j_2'$, и произведем разбиение матрицы $M \in \in \hat{\Sigma}^{Q_1\times Q_2}$ в соответствии с разбиениями Q_1 и Q_2 на блоки $M(Q^1_{j_1}, Q^2_{j_2})$, то есть запишем $M = (M(Q^1_{j_1}, Q^2_{j_2}))_{j_1\in J_1, j_2\in J_2}$. Тогда легко показать, что $h'_A(M) = (h'_A(M(Q^1_{j_1}, Q^2_{j_2})))_{j_1\in J_1, j_2\in J_2}$. Если $P \in \hat{\Sigma}^Q$ разбит на блоки $P(Q^1_{j_1})$, то есть $P = (P(Q^1_{j_1}))_{j_1\in J_1}$, то $h'_V(P) = (h'_V(P(Q^1_{j_1})))_{j_1\in J_1}$.

В дальнейшем мы будем использовать одинаковые обозначения для отображений (h_A, h_V) и (h'_A, h'_V).

Теорема 4.1. *Пусть* (A, V) *и* $(\hat{A}, \hat{V})$ *— пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль и пусть* (h_A, h_V)*, где* $h_A : \hat{A} \to A^{n'\times n'}$ *и* $h_V : \hat{V} \to V^{n'}$*, — морфизм пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Тогда продолжение отображения* (h_A, h_V)*, где* $h_A : \hat{A}^{n\times n} \to A^{(n\times n')\times(n\times n')}$ *и* $h_V : \hat{V}^n \to V^{(n\times n')}$*, — снова морфизм пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль.*

Доказательство. Легко устанавливается, что $h_A : \hat{A}^{n\times n} \to \to A^{(n\times n')\times(n\times n')}$ — морфизм полуколец и $h_V : \hat{V}^n \to V^{n\times n'}$ — морфизм моноидов. Пункт (i) условий в определении морфизма пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль также легко доказывается. Докажем только пункты (ii) и (iii) индукцией по n.

Для $n = 0,\ 1$ теорема очевидна. Если $n > 1$, разобьем $M \in \hat{A}^{n\times n}$ согласно (1). Получим

$$h_A(M)^* = \begin{pmatrix} h_A(a) & h_A(b) \\ h_A(c) & h_A(d) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = h_A(\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}) =$$

$$= h_A(M^*)\,,$$

где

$$\begin{array}{ll} \alpha = (h_A(a) + h_A(b)h_A(d)^* h_A(c))^* = h_A(\alpha'); & \alpha' = a + bd^*c; \\ \delta = (h_A(d) + h_A(c)h_A(a)^* h_A(b))^* = h_A(\delta'); & \delta' = d + ca^*b; \\ \beta = h_A(a)^* h_A(b)\delta = h_A(\beta'); & \beta' = a^*b\delta'; \\ \gamma = h_A(d)^* h_A(c)\alpha = h_A(\gamma'); & \gamma' = d^*c\alpha', \end{array}$$

и

$$h_A(M)^\omega = \begin{pmatrix} h_A(a) & h_A(b) \\ h_A(c) & h_A(d) \end{pmatrix}^\omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = h_V(\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}) = h_V(M^\omega),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha = {} & (h_A(a) + h_A(b)h_A(d)^* h_A(c))^\omega + \\ & + (h_A(a) + h_A(b)h_A(d)^* h_A(c))^* h_A(b) h_A(d)^\omega = \\ = {} & h_A(\alpha')^\omega + h_A(\alpha'')h_A(d)^\omega = h_V(\alpha'^\omega) + \\ & + h_A(\alpha'')h_V(d^\omega) = h_V(\alpha'^\omega) + h_V(\alpha'' d^\omega) = h_V(\alpha'^\omega + \alpha'' d^\omega); \\ \alpha' = {} & a + bd^*c; \qquad \alpha'' = (a + bd^*c)^* b; \\ \beta = {} & (h_A(d) + h_A(c)h_A(a)^* h_A(b))^\omega + \\ & + (h_A(d) + h_A(c)h_A(a)^* h_A(b))^* h_A(c) h_A(a)^\omega = \\ = {} & h_A(\beta')^\omega + h_A(\beta'')h_A(a)^\omega = h_V(\beta'^\omega) + h_A(\beta'')h_V(a^\omega) = \\ = {} & h_V(\beta'^\omega) + h_V(\beta'' a^\omega) = h_V(\beta'^\omega + \beta'' a^\omega); \\ \beta' = {} & (d + ca^*b)^\omega; \qquad \beta'' = (d + ca^*b)^* c. \end{aligned}$$

□

Следствие 4.2. *Пусть (A, V) и $(\hat{A}, \hat{V})$ — пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль и пусть (h_A, h_V), где $h_A : \hat{A} \to A$ и $h_V : \hat{V} \to V$, — морфизм пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Тогда продолжение отображения (h_A, h_V), где $h_A : \hat{A}^{n\times n} \to A^{n\times n}$ и $h_V : \hat{V}^n \to V^n$, — снова морфизм пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль.*

Доказательство. Положим $n' = 1$ в теореме 4.1. □

В следующей теореме рассмотрим матрицу $M'^{\omega_{kn'}}$ для $M' \in A^{(n\times n')\times(n\times n')}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Эта матрица определена следующим образом (в соответствии с (1)): разобьем M' на блоки $M' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где a есть $(k\times n')\times(k\times n')$ и содержит элементы матрицы M' с индексами $(1, 1), \ldots, (1, n'), \ldots, (k, 1), \ldots, (k, n')$; а d есть $(n-k, n')\times(n-k, n')$ и содержит элементы матрицы M' с индексами $(k+1, 1), \ldots, (k+1, n'), \ldots, (n, 1), \ldots, (n, n')$. Тогда

$$M'^{\omega_{kn'}} = \begin{pmatrix} (a + bd^*c)^\omega \\ d^*c(a + bd^*c)^\omega \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.3. *Пусть (A, V) и $(\hat{A}, \hat{V})$ — пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль и пусть (h_A, h_V), где $h_A : \hat{A} \to A^{n'\times n'}$ и $h_V : \hat{V} \to V^{n'}$, — морфизм пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Тогда $h_A(M)^{\omega_{kn'}} = h_V(M^{\omega_k})$ для $M \in \hat{A}^{n\times n}$.*

Доказательство. Разобьем $M \in \hat{A}^{n\times n}$ на блоки: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где a есть $k \times k$ и d есть $(n-k)\times(n-k)$. Получим тогда

$$h_A(M) = \begin{pmatrix} h_A(a) & h_A(b) \\ h_A(c) & h_A(d) \end{pmatrix} \in A^{(n\times n')\times(n\times n')}$$

и

$$h_A(M)^{\omega_{kn'}} = \begin{pmatrix} (h_A(a)+h_A(b)h_A(d)^*h_A(c))^\omega \\ h_A(d)^*h_A(c)(h_A(a)+h_A(b)h_A(d)^*h_A(c))^\omega \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} h_A(a+bd^*c)^\omega \\ h_A(d^*c)h_A(a+bd^*c)^\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_V((a+bd^*c)^\omega) \\ h_A(d^*c)h_V((a+bd^*c)^\omega) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} h_V((a+bd^*c)^\omega) \\ h_V(d^*c(a+bd^*c)^\omega) \end{pmatrix} = h_V(\begin{pmatrix} (a+bd^*c)^\omega \\ d^*c(a+bd^*c)^\omega \end{pmatrix}) = h_V(M^{\omega_k})\,.$$

□

Далее $(A,\, V)$ и $(\hat{A},\, \hat{V})$ обозначают пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль, а A', $\hat{A}'$ обозначают подмножества в A и $\hat{A}$.

Морфизм $(h_A,\, h_V)$ пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль называется $(\hat{A}',\, A')$-*рациональным* ($(\hat{A}', A')$-*алгебраическим*), если для всех $s \in \hat{A}'$, $h_A(s) \in \mathfrak{Rat}(A')^{Q\times Q}$ ($h_A(s) \in \mathfrak{Alg}(A')^{Q\times Q}$). Если $\hat{A} = A$, $\hat{V} = V$ и $\hat{A}' = A'$, то этот морфизм называется A'-*рациональным* (A'-*алгебраическим*).

Теперь можно ввести понятие рационального и алгебраического трансдуктора над парами полукольцо со звездой-омега-полумодуль.

$(\hat{A}',\, A')$-*рациональный трансдуктор* (*над парами полукольцо со звездой-омега-полумодуль* $(\hat{A},\, \hat{V})$ *и* $(A,\, V)$)

$$\mathfrak{T} = (n',\ I',\ (h_A,\, h_V),\ P')$$

определяется через:

(i) конечное *множество состояний* $\{1, \ldots, n'\}$, $n' \geqslant 1$;

(ii) $(\hat{A}',\, A')$-рациональный морфизм $(h_A,\, h_V)$ пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль, где $h_A : \hat{A} \to A^{n'\times n'}$ и $h_V : \hat{V} \to V^{n'}$;

(iii) $I' \in \mathfrak{Rat}(A')^{1\times n'}$ — *вектор начальных состояний*;

(iv) $P' \in \mathfrak{Rat}(A')^{n'\times 1}$ — *вектор конечных состояний*.

Отображение $||\mathfrak{T}|| : \hat{A}\times\hat{V} \to A\times V$ из квемикольца $\hat{A}\times\hat{V}$ в квемикольцо $A\times V$, *реализуемое* $(\hat{A}', A')$-рациональным трансдуктором $\mathfrak{T} = (n', I', (h_A, h_V), P')$, определяется посредством

$$||\mathfrak{T}||((s,v)) = (I'h_A(s)P',\ I'h_V(v)), s \in \hat{A}, v \in \hat{V}.$$

Мы будем также использовать обозначение

$$||\mathfrak{T}||(s+v) = I'h_A(s)P' + I'h_V(v)\,.$$

Заметим, что $||\mathfrak{T}||(s,\,0) = (I'h_A(s)P',\,0)$ и $||\mathfrak{T}||(0,\,v) = (0,\,I'h_V(v))$. Следовательно, $||\mathfrak{T}||(s+v) = ||\mathfrak{T}||(s) + ||\mathfrak{T}||(v)$.

Отображение $\tau : \hat{A}\times\hat{V} \to A\times V$ называется $(\hat{A}',\,A')$-*рациональной трансдукцией*, если существует $(\hat{A}',\,A')$-рациональный трансдуктор $\mathfrak{T}$ такой, что $\tau((s,\,v)) = ||\mathfrak{T}||((s,\,v))$ для всех $s \in \hat{A}$, $v \in \hat{V}$. В этом случае говорят, что τ *реализовано* посредством $\mathfrak{T}$. $(A',\,A')$-рациональный трансдуктор (в случае $\hat{A} = A$ и $\hat{A}' = A$) называется A'-*рациональным трансдуктором* и $(A',\,A')$-рациональная трансдукция называется A'-*рациональной трансдукцией*.

$(\hat{A}',\,A')$-*алгебраический трансдуктор* $\mathfrak{T} = (n', I', (h_A, h_V), P')$ определяется точно так же, как $(\hat{A}',\,A')$-рациональный трансдуктор, за исключением того, что $(h_A,\,h_V)$ является теперь $(\hat{A}',\,A')$-алгебраическим морфизмом пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль, и элементы из I' и P' лежат в $\mathfrak{Alg}(A')$. Определения понятий $(\hat{A}',\,A')$-*алгебраической трансдукции*, A'-*алгебраического трансдуктора* и A'-*алгебраической трансдукции* должны быть ясны.

Покажем теперь, что $(\hat{A}',\,A')$-рациональные трансдукции отображают ω-$\mathfrak{Rat}(\hat{A}')$ в ω-$\mathfrak{Rat}(A')$.

Теорема 4.4. *Пусть $(\hat{A},\,\hat{V})$ и $(A,\,V)$ — пары полукольцо-полумодуль Конвея. Предположим, что $\mathfrak{T}$ является $(\hat{A}', A')$-рациональным трансдуктором и что $(s,\,v) \in \omega$-$\mathfrak{Rat}(\hat{A}')$. Тогда $||\mathfrak{T}||((s,\,v)) \in \omega$-$\mathfrak{Rat}(A')$.*

Доказательство. Пусть $(s,\,v)$ — поведение конечного $\hat{A}'$-автомата $\mathfrak{A} = (n,\,I,\,M,\,P,\,k)$. Предположим, что $\mathfrak{T} = (n',\,I',\,(h_A,\,h_V),\,P')$. Рассмотрим теперь конечный A-автомат $\mathfrak{A}' = (n\times n',\,I'h_A(I),\,h_A(M),\,h_A(P)P',\,k\times n')$. Поскольку элементы $h_A(s)$ лежат в $\mathfrak{Rat}(A')$ для $s \in \hat{A}'$, то $\mathfrak{A}'$ фактически является конечным $\mathfrak{Rat}(A')$-автоматом. Следовательно, по пункту (iii) теоремы 4.9 части V [5], существуют $s,\,t_k,\,s_k \in \mathfrak{Rat}(\mathfrak{Rat}(A')) = \mathfrak{Rat}(A')$ такие, что $||\mathfrak{A}|| = s+\sum_{1\leqslant k\leqslant m} s_k t_k^{\omega}$. Это влечет $||\mathfrak{A}'|| \in \omega$-$\mathfrak{Rat}(A')$. Получаем

$$\begin{aligned}
||\mathfrak{A}'|| &= I'h_A(I)h_A(M)^*h_A(P)P' + I'h_A(I)h_A(M)^{\omega_{kn'}} = \\
&= I'h_A(I)h_A(M^*)h_A(P)P' + I'h_A(I)h_V(M^{\omega_k}) = \\
&= I'h_A(IM^*P)P' + I'h_V(IM^{\omega_k}) = ||\mathfrak{T}||(||\mathfrak{A}||)\,.
\end{aligned}$$

Справедливость второго равенства здесь следует из теоремы 4.1, а третьего равенства — по теоремам 4.1 и 4.3. Следовательно, $||\mathfrak{T}||(||\mathfrak{A}||) \in \mathfrak{Rat}(A')$. □

Рассмотрим теперь функциональную композицию A'-рациональных трансдукций.

Теорема 4.5. *Пусть (A, V) — пара полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Тогда семейство A'-рациональных трансдукций замкнуто относительно функциональной композиции.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{T}' = (n',\ I',\ (h'_A, h'_V),\ P')$ и $\mathfrak{T}'' = (n'',\ I'',\ (h''_A, h''_V),\ P'')$ — два A'-рациональных трансдуктора. Мы хотим показать, что отображение $\tau : A \times V \to A \times V$, определенное посредством $\tau((s, v)) = ||\mathfrak{T}''||(||\mathfrak{T}'||((s, v)))$, $s \in A$, $v \in V$, снова является A'-рациональной трансдукцией.

Рассмотрим $\mathfrak{T} = (n' \times n'',\ I''h''_A(I'),\ (h''_A \circ h'_A,\ h''_V \circ h'_V),\ h''_A(P')P'')$. По теореме 2.3 части IV [4] и по теореме 4.3 отображение $(h''_A \circ h'_A, h''_V \circ h'_V)$ — A'-рациональный морфизм пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Кроме того, элементы из $I''h''_A(I')$ и $h''_A(P')P''$ лежат в $\mathfrak{Rat}(A')$. Следовательно, $\mathfrak{T}$ есть A'-рациональный трансдуктор над парами полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Получим для $s \in A$, $v \in V$

$$\begin{aligned}||\mathfrak{T}||(s+v) &= I''h''_A(I')h''_A(h'_A(s))h''_A(P')P'' + I''h''_A(I')h''_V(h'_V(v)) = \\ &= I''h''_A(I'h'_A(s)P')P'' + I''h''_V(I'h'_V(v)) = \\ &= I''h''_A(||\mathfrak{T}'||(s))P'' + I''h''_V(||\mathfrak{T}'||(v)) = ||\mathfrak{T}''||(||\mathfrak{T}'||(s+v))\,.\end{aligned}$$

Следовательно, наша теорема доказана. □

Предположим, что (A_i, V_i) — пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль и $A'_i \subseteq A_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда по аналогии с доказательством теоремы 4.5 получим следующий результат: *если τ_1 — (A'_1, A'_2)-рациональная трансдукция и τ_2 — (A'_2, A'_3)-рациональная трансдукция, то композиция τ_1 и τ_2 является (A'_1, A'_3)-рациональной трансдукцией.*

Покажем теперь, что $(\hat{A}', A')$-алгебраические трансдукции отображают ω-$\mathfrak{Alg}(\hat{A}')$ в ω-$\mathfrak{Alg}(\hat{A}')$. Доказательство аналогично приведенному в теореме 4.4.

Теорема 4.6. *Пусть $(\hat{A}, \hat{V})$ и (A, V) — непрерывные пары полукольцо-полумодуль, $\mathfrak{T}$ — $(\hat{A}', A')$-алгебраический трансдуктор и $(s, v) \in \omega$-$\mathfrak{Alg}(\hat{A}')$. Тогда $||\mathfrak{T}||((s, v)) \in \omega$-$\mathfrak{Alg}(A')$.*

Доказательство. Пусть (s, v) — поведение конечного $\hat{A}'$-автомата $\mathfrak{A} = (n, I, M, P, k)$. Предположим, что $\mathfrak{T} = (n', I', (h_A, h_V), P')$. Рассмотрим теперь конечный A-автомат $\mathfrak{A}' = (n \times n',\ I'h_A(I),\ h_A(M),\ h_A(P)P',\ k \times n')$. Поскольку элементы $h_A(s)$ лежат в $\mathfrak{Alg}(A')$ для $s \in \hat{A}'$, то $\mathfrak{A}'$ является фактически конечным $\mathfrak{Alg}(A')$-автоматом. Следовательно, по пункту (iii) теоремы 3.5 существуют s, t_k, $s_k \in \mathfrak{Alg}(\mathfrak{Alg}(A')) = \mathfrak{Alg}(A')$ такие, что $||\mathfrak{A}|| = s + \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} s_k t_k^{\omega}$. Это влечет $||\mathfrak{A}'|| \in \omega$-$\mathfrak{Alg}(A')$. Получим $||\mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{T}||(||\mathfrak{A}||)$, как в доказательстве теоремы 4.4. Следовательно, $||\mathfrak{T}||(||\mathfrak{A}||) \in \mathfrak{Alg}(A')$. □

Рассмотрим теперь функциональную композицию A'-алгебраических трансдукций. Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 4.5.

Теорема 4.7. *Пусть (A, V) — непрерывная пара полукольцо-полумодуль. Тогда семейство A'-алгебраических трандукций замкнуто относительно функциональной композиции.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{T}' = (n', I', (h'_A, h'_V), P')$ и $\mathfrak{T}'' = (n'', I'', (h''_A, h''_V), P'')$ — два A'-алгебраических трансдуктора. Мы хотим показать, что отображение $\tau : A \times V \to A \times V$, определенное посредством $\tau((s, v)) = ||\mathfrak{T}''||(||\mathfrak{T}'||((s, v)))$, $s \in A$, $v \in V$, снова является A'-алгебраической трансдукцией.

Рассмотрим $\mathfrak{T} = (n' \times n'', I''h''_A(I'), (h''_A \circ h'_A, h''_V \circ h'_V), h''_A(P')P'')$. По теореме 2.6 части IV [4] и теореме 4.3 отображение $(h''_A \circ h'_A, h''_V \circ h'_V)$ — A'-алгебраический морфизм пар полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Кроме того, элементы $I''h''_A(I')$ и $h''_A(P')P''$ лежат в $\mathfrak{Alg}(A')$. Следовательно, $\mathfrak{T}$ — алгебраический A'-трансдуктор над парами полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Имеем для $s \in A$, $v \in V$ $||\mathfrak{T}||(s + v) = ||\mathfrak{T}''||(||\mathfrak{T}'||(s + v))$, как в доказательстве теоремы 4.5. $\square$

Пусть (A_i, V_i) — непрерывные пары полукольцо-полумодуль и $A'_i \subseteq A_i$, $i = 1, 2, 3$. По аналогии с доказательством теоремы 4.7 получаем: *если τ_1 — (A'_1, A'_2)-алгебраическая трансдукция и τ_2 — (A'_2, A'_3)-алгебраическая трансдукция, то композиция τ_1 и τ_2 — (A'_1, A'_3)-алгебраическая трансдукция.*

До конца этой главы A является *полным* звезда-омега-полукольцом, Σ_∞ — *бесконечный* алфавит и $\Sigma \subsetneq \Sigma_\infty$ — *конечный подалфавит* в Σ. Все элементы могут быть индексированы. Следовательно, по теореме 5.5 части V [5] $(A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega_\infty\rangle\rangle)$ до конца этой главы будет *полной* парой полукольцо-полумодуль.

Определим

$$A\{\{\Sigma^*_\infty\}\} \quad = \quad \{s \in A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle \mid \text{существует конечный алфавит } \Sigma \subset \Sigma_\infty \text{ такой, что } \operatorname{supp}(s) \subseteq \Sigma^*\}$$

и

$$A\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\} \quad = \quad \{v \in A\langle\langle\Sigma^\omega_\infty\rangle\rangle \mid \text{существует конечный алфавит } \Sigma \subset \Sigma_\infty \text{ такой, что } \operatorname{supp}(v) \subseteq \Sigma^\omega\}\,.$$

Тогда $(A\{\{\Sigma^*_\infty\}\}, A\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\})$ — пара полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Пусть $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \subset A\{\{\Sigma^*_\infty\}\}$ и $A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle \subset A\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\}$.

До конца этой статьи A будет обозначать *коммутативное* полное звезда-омега-полукольцо. Определим теперь в дополнение к подобным определениям в части IV [4]

$$\begin{aligned}
A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\} &= \{v \in A\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\} \mid \text{есть конечный алфавит } \Sigma \subset \Sigma_\infty \\
&\quad \text{и } s_k, t_k \in A^{\mathrm{alg}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \text{ такие, что } v = \textstyle\sum_{1\leqslant k\leqslant m} s_k t_k^\omega\}\,,\\
A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\} &= \{v \in A\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\} \mid \text{есть конечный алфавит } \Sigma \subset \Sigma_\infty \\
&\quad \text{и } s_k, t_k \in A^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \text{ такие, что } v = \textstyle\sum_{1\leqslant k\leqslant m} s_k t_k^\omega\}\,,\\
A\{\Sigma^\omega_\infty\} &= \{s \in A\langle\Sigma^\omega\rangle \mid \Sigma \subset \Sigma_\infty \text{ конечно}\}\,.
\end{aligned}$$

Пара (h_A, h_V) отображений $h_A : \Sigma_\infty^* \to (A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle)^{n'\times n'}$ и $h_V : \Sigma_\infty^\omega \to (A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle)^{n'}$ называется *представлением*, если удовлетворяются следующие условия:

(i) отображение h_A — такой мультипликативный морфизм моноидов, что существует конечное $\Sigma \subset \Sigma_\infty$ такое, что $h_A(x) = 0$ для $x \in \Sigma_\infty - \Sigma$;

(ii) $h_A(w)h_V(u) = h_V(wu)$ для всех $w \in \Sigma_\infty^*$, $u \in \Sigma_\infty^\omega$;

(iii) $\prod_{i\geqslant 0} h_A(w_i) = h_V(\prod_{i\geqslant 0} w_i)$ для всех $w_i \in \Sigma_\infty^*$, $i \geqslant 0$.

Заметим, что если (h_A, h_V) — представление, то существует лишь конечное число элементов $h_A(x)_{i,j} \neq 0$, $x \in \Sigma_\infty$. Следовательно, существует конечное $\Sigma' \subset \Sigma_\infty$ такое, что $h_A(w)_{i,j} \in A\langle\langle\Sigma'^*\rangle\rangle$ для всех $w \in \Sigma_\infty^*$. Представление (h_A, h_V) называется *рациональным* (*алгебраическим*), если $h_A : \Sigma_\infty^* \to (A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{n'\times n'}$ ($h_A : \Sigma_\infty^* \to$ $\to (A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{n'\times n'}$).

Представление (h_A, h_V) может быть *продолжено* до отображения (μ_A, μ_V), где $\mu_A : A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle \to (A\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{n'\times n'}$ и $\mu_V : A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle \to$ $\to (A\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\})^{n'}$ согласно определениям:

$$\mu_A(s) = \mu_A(\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(s,w)w) = \sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(s,w)\otimes h_A(w), \qquad s \in A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle,$$

$$\mu_V(v) = \mu_V(\sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(v,u)u) = \sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(v,u)\otimes h_V(u), \qquad v \in A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle\,.$$

Здесь $\otimes$ обозначает произведение Кронекера (см. Kuich, Salomaa [18]). Если (h_A, h_V) — представление, то его продолжение обозначается уже через (μ_A, μ_V). Это применимо также к индексированным символам h и μ.

Заметим, что в следующей теореме $((A\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{n'\times n'}, (A\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\})^{n'})$ — полная пара полукольцо-полумодуль по теореме 5.6 части V [5].

Теорема 4.8. *Пусть A — коммутативное полное звезда-омега-полукольцо. Если (h_A, h_V) — представление, то (μ_A, μ_V) — морфизм полной пары полукольцо-полумодуль из $(A\{\{\Sigma_\infty^*\}\}, A\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\})$ в $((A\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{n'\times n'}, (A\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\})^{n'})$.*

Доказательство. Легко показать, что μ_A — морфизм полуколец и μ_V — морфизм моноидов. Кроме того, получим для всех s, $s_i \in$ $\in A\{\{\Sigma_\infty^*\}\}$ и $v \in A\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$:

(i) $\mu_A(s)\mu_V(v) =$
$= (\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(s,\, w)\otimes h_A(w))(\sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(v,\, u)\otimes h_V(u)) =$
$= \sum_{w\in\Sigma_\infty^*}\sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(s,\, w)(v,\, u)\otimes h_A(w)h_V(u) =$
$= \sum_{w\in\Sigma_\infty^*}\sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(s,\, w)(v,\, u)\otimes h_V(wu)\,.$

Здесь мы применили теорему 4.33 из [18] во втором равенстве, и

$$\begin{aligned}\mu_V(sv) &= \mu_V((\textstyle\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(s,\,w)w)(\sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(v,\,u)u)) = \\ &= \mu_V(\textstyle\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}\sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(s,\,w)(v,\,u)wu) = \\ &= \textstyle\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}\sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(s,\,w)(v,\,u)\otimes h_V(wu)\,,\end{aligned}$$

то есть $\mu_A(s)\mu_V(v) = \mu_V(sv)$;

(ii) $$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i\in I}\mu_A(s_i) = \\ &= \textstyle\sum_{i\in I}\mu_A(\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(s_i,\,w)w) = \\ &= \textstyle\sum_{i\in I}\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(s_i,\,w)\otimes h_A(w) = \\ &= \textstyle\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(\sum_{i\in I}(s_i,\,w))\otimes h_A(w) = \\ &= \mu_A(\textstyle\sum_{i\in I}s_i)\,;\end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned}&\textstyle\prod_{i\geqslant 1}\mu_A(s_i) = \\ &= \textstyle\prod_{i\geqslant 1}\sum_{w_i\in\Sigma_\infty^*}((s_i,\,w_i)\otimes h_A(w_i)) = \\ &= \textstyle\sum_{(w_1,\,w_2,\ldots)\in\Sigma_\infty^*\times\Sigma_\infty^*\times\ldots}\prod_{i\geqslant 1}((s_i,\,w_i)\otimes h_A(w_i)) = \\ &= \textstyle\sum_{(w_1,\,w_2,\ldots)\in\Sigma_\infty^*\times\Sigma_\infty^*\times\ldots}\prod_{i\geqslant 1}(s_i,\,w_i)\otimes\prod_{i\geqslant 1}h_A(w_i)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\mu_V(\textstyle\prod_{i\geqslant 1}s_i) = \\ &= \mu_V(\textstyle\prod_{i\geqslant 1}\sum_{w_i\in\Sigma_\infty^*}(s_i,\,w_i)w_i) = \\ &= \mu_V(\textstyle\sum_{(w_1,\,w_2,\,\ldots)\in\Sigma_\infty^*\times\Sigma_\infty^*\times\ldots}\prod_{i\geqslant 1}((s_i,\,w_i)w_i)) = \\ &= \mu_V(\textstyle\sum_{(w_1,\,w_2,\ldots)\in\Sigma_\infty^*\times\Sigma_\infty^*\times\ldots}\prod_{i\geqslant 1}(s_i,\,w_i)\prod_{i\geqslant 1}w_i) = \\ &= \textstyle\sum_{(w_1,\,w_2,\ldots)\in\Sigma_\infty^*\times\Sigma_\infty^*\times\ldots}\prod_{i\geqslant 1}(s_i,\,w_i)\otimes h_V(\prod_{i\geqslant 1}w_i)\,,\end{aligned}$$

то есть

$$\prod_{i\geqslant 1}\mu_A(s_i) = \mu_V(\prod_{i\geqslant 1}s_i)\,.$$

$\square$

Конкретизируем теперь понятия A'-рационального и A'-алгебраического трансдукторов для фиксированнного полукольца A и фиксированного алфавита Σ_∞. *Рациональный трансдуктор*

$$\mathfrak{T} = (n',\ I',\ (h_A,\,h_V),\ P')$$

определяется через

(i) конечное *множество состояний* $\{1,\,\ldots,\,n'\}$, $n'\geqslant 1$;

(ii) *рациональное представление* $(h_A,\,h_V)$;

(iii) $I'\in(A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{1\times n'}$ — *вектор начальных состояний*;

(iv) $P'\in(A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{n'\times 1}$ — *вектор конечных состояний*.

Отображение $||\mathfrak{T}|| : A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle\times A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle\to A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle\times A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle$, *реализуемое* трансдуктором $\mathfrak{T}$, задается посредством

$$\begin{aligned}&||\mathfrak{T}||(s+v) = I'\mu_A(s)P' + I'\mu_V(v) = \\ &= I'\textstyle\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}((s,\,w)\otimes h_A(w))P' + I'\sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(v,\,u)\otimes h_V(u) = \\ &= \textstyle\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(s,\,w)I'h_A(w)P' + \sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(v,\,u)I'h_V(u) = \\ &= \textstyle\sum_{w\in\Sigma_\infty^*}(s,\,w)||\mathfrak{T}||(w) + \sum_{u\in\Sigma_\infty^\omega}(v,\,u)||\mathfrak{T}||(u)\,.\end{aligned}$$

Заметим, что существует конечное $\Sigma \subset \Sigma_\infty$ такое, что $h_A(x) = 0$ для $x \in \Sigma_\infty - \Sigma$; $h_A(x) \in (A^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle)^{n' \times n'}$ для $x \in \Sigma$; $I' \in (A^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle)^{1 \times n'}$ и $P' \in (A^{\mathrm{rat}}\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle)^{n' \times 1}$. Следовательно, фактически $||\mathfrak{T}||$ является отображением $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle \to A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$. *Алгебраические трансдукторы* с алгебраическим представлением (h_A, h_V) и $I' \in (A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{1 \times n'}$, $P' \in (A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\})^{n' \times 1}$ определяются таким же образом.

Рациональный или алгебраический трансдуктор $\mathfrak{T}$, описанный выше, может рассматриваться как конечный автомат, оборудованный устройством вывода. При переходе из состояния i в состояние j трансдуктор $\mathfrak{T}$ читает букву $x \in \Sigma$ и выводит рациональный или алгебраический степенной ряд $h_A(x)_{i,j}$. Конечная или бесконечная последовательность переходов дает на выходе произведение степенных рядов отдельных переходов.

Все конечные последовательности, состоящие из n переходов из состояния i в состояние j при чтении слова $w \in \Sigma^*$, $|w| = n$ дают на выходе степенной ряд $h_A(w)_{i,j}$. Этот выход перемножается с подходящими компонентами векторов начальных и конечных состояний, и $I'_i h_A(w)_{i,j} P'_j$ называют *трансляцией слова w посредством конечных последовательностей переходов из i в j*. Суммируя, для всех $i, j \in \{1, \ldots, n'\}$ $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n'} I'_i h_A(w)_{i,j} P'_j = I' h_A(w) P' = ||\mathfrak{T}||(w)$ называют *трансляцией слова w посредством $\mathfrak{T}$*. Степенной ряд $s \in A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle$ тогда *транслируется посредством $\mathfrak{T}$* в $\sum_{w \in \Sigma^*} (s, w) I' h_A(w) P' = I' \mu_A(s) P' = ||\mathfrak{T}||(s)$.

Все бесконечные последовательности переходов, начинающихся в состоянии i и читающих слово $u \in \Sigma^\omega$, дают на выходе степенной ряд $h_V(u)_i$. Этот выход перемножается с подходящей компонентой вектора начальных состояний, и $I' h_V(u)_i$ называют *трансляцией слова u посредством бесконечных последовательностей переходов, начинающихся в i*. Суммируя, для всех $i \in \{1, \ldots, n'\}$ $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n'} I'_i h_V(u)_i = I' h_V(u) = ||\mathfrak{T}||(u)$ называют *трансляцией слова u посредством $\mathfrak{T}$*. Заметим здесь, что если $u = \prod_{i \geqslant 0} x_i$, $x_i \in \Sigma_\infty$, то $I' h_V(u) = I' \prod_{i \geqslant 0} h_A(x_i)$. Степенной ряд $v \in A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle$ тогда *транслируется посредством $\mathfrak{T}$* в $\sum_{u \in \Sigma} (v, u) I' h_V(u) = I' \mu_V(v) = ||\mathfrak{T}||(v)$.

Пара степенных рядов $s + v$ из квемикольца $A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle \times A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle$ тогда *транслируется посредством $\mathfrak{T}$* в сумму трансляций рядов s и v посредством $\mathfrak{T}$, то есть в $||\mathfrak{T}||(s) + ||\mathfrak{T}||(v) = ||\mathfrak{T}||(s + v)$.

Конкретизация теорем 4.4 и 4.6 дает следующий результат.

Теорема 4.9. *Пусть A — коммутативное полное (непрерывное) звезда-омега-полукольцо. Предположим, что $\mathfrak{T}$ — рациональный (алгебраический) трансдуктор и что $s \in A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\}$, $v \in A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$ ($s \in A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\}$, $v \in A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$). Тогда $||\mathfrak{T}||((s, v)) \in A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\} \times A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$ ($||\mathfrak{T}||((s, v)) \in A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\} \times A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$).*

Заметим, что если $A = \mathbb{B}$, то теорема 4.9 является утверждением о формальных языках.

Теорема 4.10. *Пусть A — коммутативное полное звезда-омега-полукольцо. Пусть (h'_A, h'_V) и (h''_A, h''_V) — рациональные представления с продолжениями (μ'_A, μ'_V) и (μ''_A, μ''_V) соответственно. Тогда $(h_A, h_V) = (\mu''_A \circ h'_A, \mu''_V \circ h'_V)$ снова является рациональным представлением и его продолжения (μ_A, μ_V) удовлетворяют равенствам $\mu_A(s) = \mu''_A(\mu'_A(s))$, $s \in A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle$ и $\mu_V(v) = \mu''_V(\mu'_V(v))$, $v \in A\langle\langle\Sigma^\omega_\infty\rangle\rangle$ соответственно.*

Доказательство. Покажем, что все три условия в определении рационального представления удовлетворяются для (h_A, h_V).

(i) Получим $h_A(\varepsilon) = \mu''_A(h'_A(\varepsilon)) = \mu''_A(E) = E'$, где E и E' — матричные единицы подходящих размерностей и для $w_1, w_2 \in \Sigma^*_\infty$ $h_A(w_1 w_2) = \mu''_A(h'_A(w_1 w_2)) = \mu''_A(h'_A(w_1) h'_A(w_2)) = \mu''_A(h'_A(w_1))\mu''_A(h'_A(w_2)) = h_A(w_1) h_A(w_2)$. Кроме того, существует $\Sigma \subset \Sigma_\infty$ такое, что $h_A(x) = 0$ для $x \in \Sigma_\infty - \Sigma$. В итоге, поскольку элементы $h'_A(x)$ — рациональные степенные ряды, по теореме 4.4 заключаем, что элементы в $h_A(x) = \mu''_A(h'_A(x))$, $x \in \Sigma_\infty$ снова являются рациональными степенными рядами.

(ii) Для $w \in \Sigma^*_\infty$ и $u \in \Sigma^\omega_\infty$ получим $h_A(w) h_V(u) = \mu''_A(h'_A(w))\mu''_V(h'_V(u)) = \mu''_V(h'_A(w) h'_V(u)) = \mu''_V(h'_V(wu)) = h_V(wu)$.

(iii) Для $w_i \in \Sigma^*_\infty$, $i \geqslant 0$ получим $\prod_{i\geqslant 0} h_A(w_i) = \prod_{i \geqslant 0} \mu''_A(h'_A(w_i)) = \mu''_V(\prod_{i\geqslant 0} h'_A(w_i)) = \mu''_V(h'_V(\prod_{i\geqslant 0} w_i)) = h_V(\prod_{i \geqslant 0} w_i)$.

Докажем теперь последнюю часть нашей теоремы: для $s \in A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle$ и $v \in A\langle\langle\Sigma^\omega_\infty\rangle\rangle$ получим $\mu''_A(\mu'_A(s)) = \mu''_A(\sum_{w \in \Sigma^*_\infty}(s, w) \otimes h'_A(w)) = \sum_{w\in\Sigma^*_\infty}(s, w) \otimes \mu''_A(h'_A(w)) = \mu_A(s)$ и $\mu''_V(\mu'_V(v)) = \mu''_V(\sum_{u \in \Sigma^\omega_\infty}(v, u) \otimes h'_V(u)) = \sum_{u \in \Sigma^\omega_\infty}(v, u) \otimes \mu''_V(h'_V(u)) = \mu_V(u)$. □

Следствие 4.11. *Пусть A — коммутативное полное звезда-омега-полукольцо и пусть $\mathfrak{T}'$ и $\mathfrak{T}''$ — рациональные трансдукторы. Тогда существует рациональный трансдуктор $\mathfrak{T}$ такой, что для каждого $s + v \in A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle \times A\langle\langle\Sigma^\omega_\infty\rangle\rangle$, $||\mathfrak{T}||(s+v) = ||\mathfrak{T}''||(||\mathfrak{T}'||(s+v))$.*

Введем теперь понятие абстрактного ω-семейства степенных рядов. Перед этим необходимо ввести некоторые дополнительные определения. Любое подмножество $\mathfrak{L}$ квемикольца $A\{\{\Sigma^*_\infty\}\} \times A\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\}$ называется *ω-семейством степенных рядов*. Пусть теперь $\mathfrak{T}$ — рациональный трансдуктор. Тогда для каждого $s + v \in A\{\{\Sigma^*_\infty\}\} \times A\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\}$ получим $||\mathfrak{T}||(s+v) \in A\{\{\Sigma^*_\infty\}\} \times A\{\{\Sigma^\omega_\infty\}\}$. Следовательно, для ω-семейства $\mathfrak{L}$ степенных рядов

$$\hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{L}) = \{||\mathfrak{T}||(s+v) \mid s+v \in \mathfrak{L},\ \mathfrak{T} \text{ — рациональный трансдуктор}\}$$

снова является ω-семейством степенных рядов. По теореме 4.10 получим $\hat{\mathfrak{M}}(\hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{L})) = \hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{L})$. Поэтому, если $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{L})$, то говорят, что ω-семейство $\mathfrak{L}$ степенных рядов *замкнуто относительно рациональных трансдукций* и называют его *полным конусом*. Теорема 4.9 немедленно дает следующий результат.

Теорема 4.12. *Пусть A — коммутативное полное (непрерывное) звезда-омега-полукольцо. Тогда квемикольцо $A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\} \times \times A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$ ($A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\} \times A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$) является полным конусом.*

Пусть $(A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle)$ — полная пара полукольцо-полумодуль. Для заданного ω-семейства $\mathfrak{L}$ степенных рядов обозначение $\hat{\hat{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{L})$ будет использоваться для *наименьшего ω-рационального замкнутого квемикольца, которое также замкнуто относительно рациональных трансдукций и содержит* $\mathfrak{L}$. Очевидно, что $\hat{\hat{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{L})$ снова является ω-семейством степенных рядов. ω-семейство $\mathfrak{L}$ степенных рядов называется *полным абстрактным ω-семейством степенных рядов*, если $\mathfrak{L} = \hat{\hat{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{L})$. Это определение приводит к последнему результату этой статьи. Из теорем 4.12, 4.9 части V [5] и 3.6 данной части оно влечет следующую теорему.

Теорема 4.13. *Пусть A — коммутативное полное (непрерывное) звезда-омега-полукольцо. Тогда квемикольцо $A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\} \times \times A^{\mathrm{rat}}\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$ ($A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^*\}\} \times A^{\mathrm{alg}}\{\{\Sigma_\infty^\omega\}\}$) есть полное абстрактное ω-семейство степенных рядов.*

Исследование частично поддержано акцией Австро-Венгерского научно-педагогического сотрудничества, проект 53OeU1.

Supported by Aktion Österreich-Ungarn, Wissenschafts- und Erziehungskooperation, Projekt 53OeU1.

Список литературы

1. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы I: полукольца Конвея и конечные автоматы // Вестник Калининградского государственного университета. Вып. 3. Калининград, 2003. С. 7—38.

2. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы II: непрерывные полукольца и алгебраические системы // Там же. Вып. 1—2. Калининград, 2005. С. 19—45.

3. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы III: магазинные автоматы и формальные степенные ряды // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Вып. 10. Калининград, 2006. С. 8—27.

4. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы IV: трансдукторы и абстрактные семейства // Там же. Калининград, 2008. С. 6—23.

5. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы V: пары полукольцо-полумодуль Конвея и конечные автоматы // Там же. Калининград, 2009. С. 6—41.

6. *Berstel J.* Transductions and Context-Free Languages.

7. *Bloom St. L., Ésik Z.* Iteration Theories. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer, 1993.

8. *Býchi J. R.* On a decision method in restricted second order arithmetic // Proc. Int. Congr. Logic, Methodology and Philosophy of Science, 1960. Stanford University Press, 1962. P. 1–11.

9. *Cohen R. S., Gold A. Y.* Theory of ω-languages I: Characterizations of ω-context-free languages // JCSS. 15(1977). P. 169–184.
10. *Conway J. H.* Regular Algebra and Finite Machines. Chapman & Hall, 1971.
11. *Droste M., Kuske D.* Skew and infinitary formal power series. ICALP 2003, LNCS. 2719(2003). P. 426–438.
12. *Elgot C.* Matricial theories // J. Algebra. 42(1976). P. 391–422.
13. *Ésik Z., Kuich W.* Inductive *-semirings // Theoretical Computer Science. 324(2004). P. 3-33.
14. *Ésik Z., Kuich W.* A semiring-semimodule generalization of ω-context-free languages // LNCS. 3113(2004). P. 68–80.
15. *Ésik Z., Kuich W.* On iteration semiring-semimodule pairs // Semigroup Forum. 75(2007). P. 129–159.
16. *Ésik Z., Kuich W.* A semiring-semimodule generalization of ω-regular languages II // Journal of Automata, Languages and Combinatorics. 10(2005). P. 243–264.
17. *Ésik Z., Kuich W.* A semiring-semimodule generalization of transducers and abstract ω-families of power series // Ibid. 12(2007). P. 435–454.
18. *Kuich W., Salomaa A.* Semirings, Automata, Languages // EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Vol. 5. Springer, 1986.
19. *Lausch H., Nöbauer W.* Algebra of Polynomials. North-Holland, 1973.
20. *Perrin D., Pin J.-E.* Infinite Words. Elsevier, 2004.

Об авторах

Сергей Иванович Алешников — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта, e-mail: elliptec@mail.ru.

Юрий Федорович Болтнев — ст. преп., РГУ им. И. Канта, e-mail: boltnev59@list.ru.

Золтан Език — д-р, Сегедский ун-т, Венгрия.

Сергей Александрович Ишанов — канд. физ.-мат. наук, проф., РГУ им. И. Канта, e-mail: sergey.ishanov@ya.ru.

Вернер Куих — д-р, Венский техн. ун-т, Австрия, e-mail: kuich@tuwien.ac.at.

Authors

Dr Sergey Aleshnikov – assistant professor, IKSUR, e-mail: elliptec@mail.ru.

Yuriy Boltnev – high instructor, IKSUR, e-mail: boltnev59@list.ru.

Dr Zoltán Ésik – University of Szeged, Hungary.

Dr Sergey Ishanov – professor, IKSUR, e-mail: sergey.ishanov@ya.ru.

Dr Werner Kuich – Technische Universitдt Wien, Austria, e-mail: kuich@tuwien.ac.at.