Обозначим $H_i=(B_i\bar{B}_i)\cap(AA_n)=\Lambda^n_n A+\Lambda^i_i A_n$,

$$M_i=(A\bar{B}_i)\cap(A_nB_i)=\Lambda^n_i\Lambda^n_n A+\Lambda^i_i\Lambda^n_n A_i-\Lambda^n_i\Lambda^i_i A_n,$$

$$C_i=(A_iM_i)\cap(AA_n)=\Lambda^n_n A-\Lambda^i_i A_n.$$

Имеем следующие инварианты:

$$(AF^i, F^jF^k)=(A_nC_i,\ C_jC_k), \qquad (i,j,k\text{ -различны})$$

$$(A_nF^i, F^jF^k)=(AC_i,\ C_jC_k),$$

$$(AA_n, F^iC_i)=-(AA_n, F^iH_i).$$

Сеть σ двойных линий в области Ω проективного пространства P_n, состоящая из (п-I)-ткани двойных линий, принадлежащей гиперраспределению Δ, и двойной линии ω^n, имеет место одно семейство прямых линий (AA_n). Такое заключение можно сделать и относительно сети $\bar\sigma$ двойных линий в области $\bar\Omega$, состоящей из (п-I)-ткани двойных линий, принадлежащей гиперраспределению $\bar\Delta$, и двойной линии $f(\omega^n)$.

Пусть все фокусы прямой (AA_n) совпадают, т.е. $\Lambda^1_1=\Lambda^2_2=\ldots=\Lambda^{n-1}_{n-1}$ и точки A_i реперов $\mathcal{R}^A$ и $\bar{\mathcal{R}}^{A_n}$ -точки пересечения касательных двойной линии ω^i пары гиперраспределений $(\Delta, f_*(\Delta))$ и двойной линии θ^i пары гиперраспределений $(\bar\Delta, f^{-1}_*(\bar\Delta))$. Любая линия каждой пары гиперраспределений $(\Delta, f_*(\Delta))$, $(\bar\Delta, f^{-1}_*(\bar\Delta))$ становится двойной линией. При этом $C_1=C_2=\ldots=C_{n-1}$ и $H_1=H_2=\ldots=H_{n-1}$. Точки F^1, C_1 неподвижны при всех допустимых преобразованиях репера $\mathcal{R}^A$, $(AA_n, F^1C_1)=\frac{\Lambda^n_n}{(\Lambda^1_1)^2}$. Равенство $\Lambda^n_n=(\Lambda^1_1)^2$ означает, что прямые (A_iM_i) принадлежат связке прямых с центром в единственном фокусе F^1 прямой (AA_n), при этом $(AA_n, F^1H_1)=-1$.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства// Изв.вузов.Математика.I966.№2.С.9-I9.

2.Д у л а л а е в а Т.А. О некоторых свойствах двойных линий пары гиперраспределений//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,I984.Вып.I5.

3.Д у л а л а е в а Т.А. К геометрии двойных линий пары гиперраспределений//Тезисы докл.IX Всесоюз.геометр.конф.Кишинев.I988.С.I08.

УДК 514.76

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ И ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.И.Е г о р о в

(Пензенский педагогический институт)

В настоящей работе изучаются движения (изометрии) в метрических пространствах $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ линейных и гиперплоскостных элементов. Находятся все максимально подвижные $(r=\frac{n(n+1)}{2})$ пространства $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ при условии, что присоединенные (ассоциированные) соответствующие пространства положительно определенной метрики. Метрика в рассматриваемых метрических пространствах $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ задается в локальной системе координат невырожденным симметрическим тензором соответственно $g(g_{ij}(x,\bar u))$ типа (0,2) и $g(g^{je}(x,\underline{u}))$ типа (2,0), каждый из которых нулевой степени однородности относительно координат опорного объекта $\bar u(u^i)$, $\underline{u}(u_j)$ [I].

I.Пусть $g_{n,\bar u}$ метрическое пространство линейных элементов, определенное тензором $g(g_{je}(x,\bar u))$ (i,j,ℓ =I,2,...,п), где $\bar u(u^i)$ - псевдовектор, $g_{je}(x,\bar u)=g_{ej}(x,\bar u)$, $\det\|g_{je}(x,\bar u)\|\neq 0$, $x(x^j)$, $g_{je}(x,\lambda\bar u)=g_{je}(x,\bar u)$. В работе рассматриваются метрические пространства линейных элементов $g_{n,\bar u}$, для которых присоединенное (ассоциированное) пространство $F_{n,\bar u}$ с метрической функцией

$$F(x,\bar u)=g_{ij}(x,\bar u)u^iu^j, \tag{I}$$

является финслеровым, т.е.

$$F(x,\lambda\bar u)=\lambda^2F(x,\bar u),\quad \det\|F_{je}\|\neq 0,\quad F_{je}=\frac{\partial^2F}{\partial u^j\partial u^e}. \tag{2}$$

Финслерово пространство $F_{n,\bar u}$ будем всегда считать определенно положительной метрики. Отметим, что метрика рассматриваемых пространств $g_{n,\bar u}$ непотенциальна, т.е. в общем случае $g_{ij}(x,\bar u)\neq\frac{1}{2}F_{ij}$.

Любое движение метрического пространства линейных элементов $g_{n,\bar u}$ является в то же время движением ассоциированного финслерова пространства $F_{n,\bar u}$. Отсюда следует, что группа движений G_r метрического пространства $g_{n,\bar u}$ является подгруппой группы движений присоединенного финслерова пространства $F_{n,\bar u}$. Вангом доказано, что если финслерово пространство $F_{n,\bar u}$ определенно положительной метрики допускает группу движений G_r порядка $r>\frac{n(n-1)}{2}+1$, то оно есть собственно риманово пространство $V_n(x)$ постоянной кривизны. Таким образом, максимально подвижные метрические пространства линейных элементов $g_{n,\bar u}$ допускают группу движений G_r порядка $r=\frac{n(n+1)}{2}$ риманова пространства $V_n(x)$ постоянной кривизны определенно положительной метрики. Задача отыскания максимально подвижных пространств $g_{n,\bar u}$ сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathcal{D}g_{je}=0 \tag{3}$$

относительно компонент метрического тензора $g_{je}(x,\bar u)$. В системе (3) символ $\mathcal{D}$ обозначает производную Ли вдоль векторных полей операторов группы G_r, где $r=\frac{n(n+1)}{2}$. Операторы этой группы G_r в некоторой локальной системе координат можно всегда привести к виду

$$X^i_j = x^i p_j - x^j p_i \quad (i<j) \,, \tag{4}$$

$$X_i = \tfrac{1}{2} k x^i x^j p_j + \left(1 - \tfrac{1}{4} k\alpha\right) p_i \,, \tag{5}$$

где $\alpha = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2$, $\quad p_\ell = \dfrac{\partial}{\partial x^\ell}$, $k \in R$.

Общее решение системы (3) для операторов вращений (4) определяется равенствами

$$g_{ij} = a\delta_{ij} + x^i x^j A + (x^i u^j + x^j u^i) B + u^i u^j C, \tag{6}$$

где a, A, B, C -функции от переменных $\alpha, \bar\beta, \bar\gamma$, причем $\bar\beta = x^1 u^1 + x^2 u^2 + \ldots + x^n u^n$, $\bar\gamma = (u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^n)^2$. Обратимся теперь к операторам (5) и рассмотрим уравнения $\mathcal{D}_{\bar X_\ell} g_{ij} = 0$,где $\bar X_\ell$ -естественное продолжение оператора X_ℓ на переменные $\bar u\,(u^j)$. Из этих уравнений следует,что $A = 0$, $B = 0$,а функции a, C определяются формулами $a = \dfrac{c_1}{(1+\frac{1}{4}k\alpha)^2}$, $C = \dfrac{c_2}{\bar\gamma(1+\frac{1}{4}k\alpha)^2}$,где c_1, c_2 -постоянные. Общее решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (3) относительно операторов (4),(5) для составляющих $g_{ij}(x,\bar u)$ выражается формулой

$$g_{ij}(x,\bar u) = a\,\Phi_{ij} + b\,\Phi^{-1}\Phi_{\cdot i}\Phi_{\cdot j} \quad (a, b \in R,\ a+2b \neq 0,\ a \neq 0) \tag{7}$$

или,что то же самое , только в другом виде

$$g_{ij}(x,\bar u) = A\left(c_1\delta_{ij} + c_2\bar\gamma^{-1} u^i u^j\right), \tag{8}$$

$$A = \left(1+\tfrac{1}{4}k\alpha\right)^{-2}, \quad \Phi(x,\bar u) = A\bar\gamma, \quad 2a = c_1, \quad 4b = c_2.$$

2.Будем рассматривать также метрические пространства гиперплоскостных элементов $g_{n,\underline{u}}$,для которых ассоциированное пространство $H_{n,\underline{u}}$ с метрической функцией $H(x,\underline{u}) = g^{j\ell}(x,\underline{u})u_j u_\ell$, $\underline{u}\,(u_j)$ является гамильтоновым,т.е. $\det\|H^{\cdot j\cdot \ell}\| \neq 0$, $H^{\cdot j\cdot\ell} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial u_j \partial u_\ell}$, $H(x,\lambda\underline{u}) = \lambda^2 H(x,\underline{u})$.

В настоящей работе предполагается,что пространство $H_{n,\underline{u}}$ определенно положительной метрики.Метрика рассматриваемых пространств $g_{n,\underline{u}}$ в общем случае непотенциальна.Для метрических пространств гиперплоскостных элементов $g_{n,\underline{u}}$,задаваемых невырожденным симметрическим тензором $g^{ij}(x,\underline{u})$ типа (2,0), рассуждения,аналогичные предыдущим для операторов (4),(5),приводят к формуле

$$g^{j\ell}(x,\underline{u}) = cK^{\cdot j\cdot\ell} + dK^{-1}K^{\cdot j}K^{\cdot\ell}, \quad c, d \in R, \tag{9}$$

или,что то же самое,но в другом виде

$$g^{ij}(x,\underline{u}) = 2B\left[c\delta^{ij} + 2d\underline{\gamma}^{-1}u_i u_j\right], \tag{10}$$

$$B = \left(1+\tfrac{k}{4}\alpha\right)^2, \quad \underline{\gamma} = (u_1)^2 + (u_2)^2 + \ldots + (u_n)^2,$$

$$c \neq 0, \quad c+2d \neq 0, \quad K = B\left[(u_1)^2 + (u_2)^2 + \ldots + (u_n)^2\right].$$

Таким образом,мы приходим к следующему выводу.

Т е о р е м а . Максимальный порядок групп движений G_r в метрических пространствах $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ равен точно $\frac{n(n+1)}{2}$. Метрический тензор любого максимально подвижного пространства линейных,гиперплоскостных элементов $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ с ассоциированной положительно определенной метрикой за счет выбора локальной системы приводятся соответственно к виду (8),(10).Пространства $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\bar u}$ допускают группу движений G_r $\left(r = \frac{n(n+1)}{2}\right)$ максимального порядка тогда,когда метрические тензоры $g_{ij}(x,\bar u)$, $g^{ij}(x,\underline{u})$ имеют соответственно строения (7),(9) в любой системе координат.

Библиографический список

I.Е г о р о в И.П.,Егоров А.И. О некоторых проблемах автоморфизмов в обобщенных пространствах//Движения в обобщённых пространствах. Рязань,1982.С.41-52.

УДК 514.75

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ В ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.А.Ж а р и к о в а
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном эквиаффинном пространстве изучается подкласс $\pi(\ell)$ конгруэнции π парабол [1], для которого характеристическая точка плоскости параболы находится на диаметре параболы,проходящем через фокальную точку многообразия $\pi(\ell)$.

Отнесем конгруэнцию π к каноническому реперу $\mathcal{R} = \{A, \vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ [1], где точка A помещается в фокус,образующий неразвертывающуюся фокальную поверхность с неасимптотическими фокальными линиями.Вектор $\vec e_1$ направлен по касательной к параболе в точке A , $\vec e_2$ - по касательной к линии,сопряженной фокальной линии $\omega^2 = 0$ на поверхности (A) , $\vec e_3$ -по диаметру параболы,проходящему через точку A .Относительно этого репера уравнение параболы и система уравнений Пфаффа конгруэнции имеют вид:

$$(x^1)^2 - 2px^3 = 0, \quad x^2 = 0 \quad (p \neq 0); \tag{I}$$