УДК 514. 76

Н.Д. Никитин

(Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского)

О проективных движениях в общих пространствах путей

Установлено, что алгебра Ли подгруппы G с одномерными орбитами максимального порядка группы G_r проективных движений в общих непроективно плоских пространствах путей является идеалом алгебры Ли группы G_r.

Ключевые слова: общее пространство путей, проективная связность, алгебра Ли.

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие, $T(M)$ его касательное расслоение, $\pi : T(M) \to M$ — каноническая проекция.

Общее пространство путей [1] есть пара (M, H), где H — дифференциально-геометрический объект, заданный на касательном расслоении $T(M)$. Пусть (x^i), где $i = \overline{1,n}$, — система координат окрестности $U \subset M$. В окрестности $\pi^{-1}(U)$ относительно координат (x^i, y^j), где $i, j = \overline{1,n}$, объект H имеет компоненты $H^i(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$, однородные второй степени относительно слоевых координат $y^1, \cdots, y^n$. На базисном многообразии общего пространства путей посредством объекта H задаются линии (пути), которые в окрестности U определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^i}{dt} = H^i(x^1, \ldots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}).$$

Геометрические объекты $H, \overline{H}$ на касательном расслоении $T(M)$ определяют на базе одни и те же пути [2] тогда и только тогда, когда они проективно связаны:

$$\overline{H}^i(x, y) = H^i(x, y) + y^i \Phi(x, y),$$

где $\Phi(x, y)$ скалярная функция, однородная первого измерения относительно $y^1, \ldots, y^n$. Построим геометрический объект $P(P^i)$, не зависящий от проективного преобразования объекта H, компоненты которого

$$P^i = H^i(x, y) - \frac{y^i}{n+1} H^{\sigma}_{\cdot\sigma},$$

где $H^{\sigma}_{\cdot\sigma}$ частная производная H^{σ} по y^{σ}. $\text{Ï}^{\,i}_{jk} = \frac{1}{2} \text{Đ}^{i}_{\cdot j.k}$ — компоненты объекта проективной связности Π общего пространства путей.

Важную характеристику пространствам путей дают тензор Вейля $W(W^i_{jkl})$ и тензор $\overline{\Pi}(\Pi^i_{jk\cdot l})$. Пространство путей (M, H) является проективно плоским тогда и только тогда, когда $W = 0, \overline{\Pi} = 0$.

Векторное поле $X \in F^1(U), X = \xi^i(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = \overline{1, n})$ является инфинитезимальным проективным движением в пространстве (M, H) тогда и только тогда, когда

$$L_{X^c} P^i = 0, \qquad (1)$$

где X^c полный лифт векторного поля X. Условие (1) равносильно условию $L_{X^c}\Pi = 0$, которое в координатах (x^i, y^j) окрестности $\pi^{-1}(U)$ запишется в виде

$$\partial^2_{jk}\xi^i - \partial_m \xi^i \Pi^m_{jk} + \partial_j \xi^m \Pi^i_{mk} + \partial_k \xi^m \Pi^i_{jm} + \xi^m \partial_m \Pi^i_{jk} +$$

$$+ \partial_m \xi^l y^m \Pi^i_{jk.l} - \frac{1}{n+1}[\delta^i_j \partial^2_{mk} \xi^m + \delta^i_k \partial^2_{jm} \xi^m] = 0. \qquad (2)$$

Теорема 1. *Максимальная размерность алгебры Ли* L_r *группы проективных движений* G_r *с одномерными орбитами в непроективно плоских общих пространствах путей равна* n.

Доказательство. В работе [3] показано, что алгебра L_r либо абелева, либо имеет структуру

$$(X_k, X_2) = X_k, (X_\mu, X_\tau) = 0, (\kappa, \mu, \tau = 1,3,4,\cdots,r). \qquad (3)$$

Найдем все представления абелевой алгебры L_r и алгебры $\overline{L}_r$ со структурой (3) в виде алгебры Ли инфинитезимальных преобразований $X_\alpha = \xi_\alpha{}^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = \overline{1,n};\ \alpha = \overline{1,r})$ координатной окрестности U, когда $rang(\xi^i_\alpha(x)) = 1$.

1. Существует система координат (x^i) окрестности U, в которой инфинитезимальное преобразование X_1 абелевой алгебры L_r имеет вид $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ [4]. В этой системе координат $X_\mu = \varphi_\mu(x^2,\cdots,x^n)\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ $(\mu = \overline{2,r})$. В основу дальнейшего нахождения представлений положим число функционально независимых составляющих φ_μ:

а) все составляющие φ_μ функционально независимы. В этом случае $r \le n$ и посредством преобразований координат

$$\bar{x}^1 = x^1, \bar{x}^2 = \varphi_2(x^2,\cdots,x^n),\cdots,\bar{x}^r = \varphi_r(x^2,\cdots,x^n), \bar{x}^{r+1} = x^{r+1},\cdots,\bar{x}^n = x^n$$

инфинитезимальные преобразования $X_1,\cdots,X_r$, являющиеся базисом абелевой алгебры L_r, приводятся к виду

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x^1}, X_2=x^2\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots, X_r=x^r\frac{\partial}{\partial x^1}\quad (r\le n)\,. \tag{4}$$

(оставлены старые обозначения для новой системы координат);

б) число функционально независимых составляющих φ_μ равно $l, l\le n-1,\quad l<r$. В этом случае существует система координат окрестности U, в которой

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x^1}, X_2=x^2\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots, X_l=x^l\frac{\partial}{\partial x^1},\; X_{l+1}=\varphi_{l+1}(x^2,\cdots,x^l)\frac{\partial}{\partial x^1},$$
$$\cdots, X_r=\varphi_r(x^2,\cdots,x^l)\frac{\partial}{\partial x^1}\,. \tag{5}$$

2. Аналогично тому, как были определены представления абелевой алгебры L_r, можно показать, что алгебра $\overline{L_r}$ со структурой (3) имеет следующие представления, когда $rang(\xi_\alpha^i)=1$:

$$\begin{gathered} X_1=\frac{\partial}{\partial x^1},\quad X_2=x^1\frac{\partial}{\partial x^1}, \\ X_3=x^2\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\; X_r=x^{r-1}\frac{\partial}{\partial x^1}, \end{gathered} \tag{6}$$

где $r\le n+1$;

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x^1}, X_2=x^1\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots, X_l=x^{l-1}\frac{\partial}{\partial x^1}, X_{l+1}=$$
$$=\varphi_{l+1}(x^2,\cdots,x^{l-1})\frac{\partial}{\partial x^1},\;\cdots, X_r=\varphi_r(x^2,\cdots,x^{l-1})\frac{\partial}{\partial x^1}, l\le n+1. \tag{7}$$

Найдем компоненты объекта P общего пространства путей, допускающего алгебру Ли L_r инфинитезимальных проективных движений (4) при $r=n$. Для этого запишем для каждого векторного поля из преобразований (4) уравнения инфинитезимальных проективных движений (1):

$$\begin{cases} -\delta_1^i P^\alpha + P^i_{.1} y^\alpha = 0, \\ \partial_{x^1} P^i = 0, \alpha = \overline{2,n}; i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{8}$$

Из уравнений (8) получим, что $P^1 = A(x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n) y^1 + B(x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n)$, $P^\alpha = A(x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n) y^\alpha$. Здесь A однородная функция первой степени относительно $y^2, \cdots, y^n$. Составляющие объекта $P(P^i)$ должны удовлетворять условию $P^\sigma_{.\sigma} = 0$: $nA + A_{.\sigma} y^\sigma = 0$. Из этого равенства с учетом того, что $A_{.\sigma} y^\sigma = A$, получим, что $A = 0$. Итак, геометрический объект P имеет компоненты $P^i = \delta_1^i B(x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n)$. Таким образом, абелева группа G_n с алгеброй Ли (4) является абелевой группой проективных движений в общих пространствах путей с объектом проективной связности

$$\Pi(\Pi^i_{jk}), \quad \Pi^i_{jk} = \delta_1^i B_{jk}(x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n),$$

$$B_{jk} = \frac{1}{2} B_{.j.k}.$$

Покажем, что пространства (M, H) не допускают в качестве группы проективных движений группу G_r с алгеброй Ли (5). Предположим, что группа G_r является группой проективных движений в общих пространствах путей. Запишем уравнения инфинитезимальных проективных движений для алгебры L_r (5):

$$\begin{cases} \delta_1^i P^\alpha + P^i_{.1} y^\alpha = 0, \partial_{x^1} P^i = 0, & (9) \\ \delta_1^i \dfrac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} y^\sigma y^\rho - \delta_1^i \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x^\sigma} P^\sigma + P^i_{.1} \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial x^\rho} y^\rho = 0, & (10) \end{cases}$$

где $\sigma, \rho, \alpha = \overline{2,l}$; $i = \overline{1,n}$; $s = \overline{l+1, r}$.

Из уравнений (9) следует, что $P^1 = A(x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n) y^1 + B(x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n)$, $P^\alpha = A(x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n) y^\alpha$. Тогда из выражения (10) при $i = 1$ находим, что $\varphi_s = a_{s\rho} x^\rho + a_s$. Так как $X_s = \sum_{\rho=2}^{l} a_{s\rho} X_\rho + a_s X_1$, то пришли к противоречию с условием. По условию векторные поля (5) линейно независимы.

Найдем теперь составляющие объекта проективной связности общего пространства путей, допускающего алгебру Ли инфинитезимальных проективных движений $\overline{L}_{n+1}$ (6). Так как алгебра L_n (5) является подалгеброй алгебры $\overline{L}_{n+1}$ (6), то составляющие объекта проективной связности пространства (M, H), допускающего алгебру Ли инфинитезимальных проективных движений $\overline{L}_{n+1}$ (6), определим из уравнений

$$L_{X^c} \Pi^i_{jk} = 0, \tag{11}$$

где $\Pi^i_{jk} = \delta^i_1 B_{jk}(x^2, \cdots x^n, y^2, \cdots, y^n)$; X^c — полный лифт векторного поля $X = x^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1}$. Из уравнений (11) получим, что $\Pi^i_{jk} = 0$. Пространство путей (M, H) является проективно плоским.

Не существует пространств путей, допускающих алгебру Ли $\overline{L}_r$ инфинитезимальных преобразований (7) в качестве алгебры Ли проективных движений. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G_r локальная группа проективных движений в непроективно плоских общих пространствах путей, G_n — абелева подгруппа с одномерными орбитами группы G_r. Тогда алгебра Ли L_n подгруппы G_n является идеалом алгебры Ли L_r группы G_r.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что векторные поля $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, X_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, X_n = x^n \frac{\partial}{\partial x^1}$ выступают базисом алгебры Ли L_n подгруппы G_n проективных движений в пространствах путей (M, H), составляющие объекта проективной связности которого $\Pi^i_{jk} = \delta^i_1 B_{jk}(x^2, \cdots x^n, y^2, \cdots, y^n)$.

Компоненты тензора Вейля W пространства путей, допускающего абелеву группу G_n проективных движений с одномерными орбитами, $W^\alpha_{jkl} = W^1_{1kl} = W^1_{jll} = W^1_{jl1} = 0,\ W^1_{s\nu\rho}, (s, \nu, \rho = \overline{2, n},\ \nu \neq \rho)$ зависят от переменных $x^2, \cdots, x^n, y^2, \cdots, y^n$, а компоненты тензора $\overline{\Pi} : \Pi^i_{jkl} = \delta^i_1 B_{jk.l}$.

Пусть $X \in L_r$, $X = \xi^i(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Запишем уравнения проективных движений для векторного поля X:

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^1} B_{jk} + \delta^i_1 \Big(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^j} B_{\sigma\kappa} + \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\kappa} B_{j\sigma} + B_{jk.\sigma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^s} y^s +$$

$$+ \xi^\sigma \frac{\partial B_{jk}}{\partial x^\sigma} \Big) - \frac{1}{n+1} \Big(\delta^i_k \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\sigma \partial x^j} + \delta^i_j \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\sigma \partial x^k} \Big) = 0. \qquad (12)$$

Из уравнений (12) при $i = \overline{2, n},\ j = k = 1$ получим, что $\xi^\alpha = x^1 \varphi^\alpha(x^2, \cdots, x^n) + \psi^\alpha(x^2, \cdots, x^n)$, $\alpha = \overline{2, n}$. Из первой серии условий интегрируемости дифференциальных уравнений (12)

$$L_{X^c} \Pi^i_{jkl} = 0,\ L_{X^c} W^i_{jkl} = 0,$$

где X^c — полный лифт векторного поля X, следует, что

$$\varphi^\alpha W^1_{s\nu\rho} = 0, \varphi^\alpha B_{jk.l} = 0. \qquad (13)$$

Так как пространства (M, H) являются непроективно плоскими, то из (13) имеем, что $\varphi^\alpha = 0$. Из уравнений (12) с учетом того, что $\xi^{\alpha}=\psi^{\alpha}(x^2,\cdots,x^n)$, получим $\xi^1=x^1\eta(x^2,\cdots,x^n)+\theta(x^2,\cdots,x^n)$. Найдем коммутаторы векторного поля $X=(x^1\eta+\theta)\dfrac{\partial}{\partial x^1}+\psi^{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ и векторных полей базиса алгебры L_n:

$$Y_{\lambda}=(X_{\lambda},X)=(x^{\lambda}\eta-\psi^{\lambda})\frac{\partial}{\partial x^1},\ Y_1=(X_1,X)=\eta\frac{\partial}{\partial x^1},\ \lambda=\overline{2,n}. \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что векторные поля $Y_i, i=\overline{1,n},$ алгебры L_r должны раскладываться по векторным полям базиса алгебры L_n. В противном случае получим противоречие с теоремой 1. Следовательно, подалгебра L_n является идеалом алгебры Ли L_r.

Список литературы

1. *Douglas J.* The general geometry of paths // Ann. Math. 1928. Vol. 29. — P. 143—168.
2. *Levine J.* Collinations in generalized spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 2. P. 447—455.
3. *Никитин Н.Д.* О Группах движений с одномерными орбитами в общих пространствах путей проективной связности // Движения в обобщенных пространствах : межвуз. сб. Рязань, 1985. С. 104—108.
4. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М., 1947.

N. Nikitin

On projective motions in general path spaces

It is established that Lie algebra of subgroup G with one-dimensional orbits of maximal order of group G_r of projective motions in general nonprojective flat path spaces is an ideal of Lie algebra of group G_r.