$$\bar{a}_{\beta+1} = \begin{vmatrix} \bar{r}'^2 & \bar{r}'\bar{r}'' & \dots & \bar{r}'\bar{r}^{(\beta+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{r}^{(\beta)}\bar{r}' & \bar{r}^{(\beta)}\bar{r}'' & \dots & \bar{r}^{(\beta)}\bar{r}^{(\beta+1)} \\ \bar{r}' & \bar{r}'' & \dots & \bar{r}^{(\beta+1)} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Формулы Френе кривой $\bar{r}=\bar{r}(s)$ примут вид:

$$\bar{r}'=\bar{e}_1,\ \bar{e}_1'=k_1\bar{e}_2,\ \bar{e}_{\beta+1}'=-\varepsilon_\beta\,\varepsilon_{\beta+1}k_\beta\bar{e}_\beta+k_{\beta+1}\bar{e}_{\beta+2},$$
$$\bar{e}_n'=-\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_n k_{n-1}\bar{e}_{n-1} \qquad (\varepsilon_i\equiv\bar{E}_i^2=\pm 1). \qquad (7)$$

Векторы сопровождающего репера запишутся в виде:

$$\bar{e}_1=\frac{\bar{r}'}{\sqrt{|d_1|}},\ \bar{e}_{\beta+1}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_\beta\,\bar{a}_{\beta+1}}{\sqrt{|d_\beta\,d_{\beta+1}|}},\ \bar{e}_n=\frac{[\bar{r}',\bar{r}'',\dots,\bar{r}^{(n-1)}]}{\sqrt{|d_{n-1}|}}. \qquad (8)$$

Кривизны кривой зададутся формулами:

$$k_\beta=\frac{\sqrt{|d_{\beta-1}\,d_{\beta+1}|}}{|d_\beta|}\ (\text{при } d_0\equiv 1),\ k_{n-1}=(-1)^m\cdot\frac{\sqrt{|d_{n-2}|}}{d_{n-1}}\{\bar{r}',\bar{r}'',\dots,\bar{r}^{(n)}\}. \qquad (9)$$

3°. П р и м е р ы.

I. <u>Пространство Лобачевского</u> ${}^1S_3$. Имеем (см. п.I): $n=$ $m=1,\ \ell=3,\ \varepsilon_0=-1,\ \bar{R}^2=1$. Формулы Френе (2) пространственноподоб ной кривой $\bar{R}=\bar{R}(s)$ запишутся в виде:

$$\frac{\bar{R}'}{\rho}=\bar{E}_0'=\frac{\bar{E}_1}{\rho},\ \bar{E}_1'=\frac{\bar{E}_0}{\rho}+k_1\bar{E}_2;\ \bar{E}_2'=-k_1\bar{E}_1+k_2\bar{E}_3,\ \bar{E}_3'=-k_2\bar{E}_2.$$

Векторы сопровождающего репера (3) и кривизны (4) будут име вид:

$$\bar{E}_0=\frac{\bar{R}}{\rho};\ \bar{E}_1=\bar{R}',\ \bar{E}_2=\frac{\frac{\bar{R}}{\rho^2}-\bar{R}''}{\sqrt{\bar{R}''^2+\frac{1}{\rho^2}}},\ \bar{E}_3=-\frac{[\bar{R},\bar{R}',\bar{R}'']}{\rho\sqrt{\bar{R}''^2+\frac{1}{\rho^2}}};$$

$$k_0=\frac{1}{\rho};\ k_1^2=\bar{R}''^2+\frac{1}{\rho^2},\quad k_1^2k_2=\frac{1}{\rho}\cdot\{\bar{R},\bar{R}',\bar{R}'',\bar{R}'''\}.$$

Осуществляя предельный переход $\rho\to\infty$, придем к класси ческим результатам для евклидова 3-пространства R_3.

2. <u>Пространство Минковского</u> ${}^3R_4$. Имеем (см. п.2°): $n=$ $m=3$. Формулы Френе (7) времениподобной кривой $\bar{r}=\bar{r}(s)$ ($\bar{r}'^2=$ примут вид:

$$\bar{r}'=\bar{e}_1,\ \bar{e}_1'=k_1\bar{e}_2,\ \bar{e}_2'=k_1\bar{e}_1+k_2\bar{e}_3,\ \bar{e}_3'=-k_2\bar{e}_2+k_3\bar{e}_4,\ \bar{e}_4'=-k_3\bar{e}_3.$$

Векторы сопровождающего репера (см.(6), (8)) запишутся сле дующим образом:

$$\bar{e}_1=\bar{r}',\ \bar{e}_2=\frac{\bar{r}''}{\sqrt{-d_2}},\ \bar{e}_3=\frac{1}{\sqrt{d_2d_3}}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & \bar{r}''^2\\ 0 & \bar{r}''^2 & \bar{r}''\bar{r}'''\\ \bar{r}' & \bar{r}'' & \bar{r}'''\end{vmatrix},$$

$$\bar{e}_4=\frac{[\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}''']}{\sqrt{-d_3}} \qquad \left(d_2=-\bar{r}''^2;\ d_3=-(\bar{r}''^2)^3-\bar{r}''^2\bar{r}'''^2+(\bar{r}''\bar{r}''')^2\right).$$

Вычислительные формулы (9) кривизн кривой:

$$k_1^2=\bar{r}''^2,\ k_2^2=k_1^2+\frac{\bar{r}'''^2}{k_1^2}-\frac{(\bar{r}''\bar{r}''')^2}{k_1^4},\ k_1^3k_2^2k_3=\{\bar{r}',\bar{r}'',\bar{r}''',\bar{r}^{IV}\}.$$

Таким образом, получаем полное согласие с известными результатами [2], [3].

Библиографический список

I. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.

2. Ф р а н к Х. Построение дифференциальной геометрии в пространстве Лобачевского методом внешних форм // Сибирск матем. ж. 1961. Т.II. № 4. С.600-622.

3. Т у т а е в Л.К. К дифференциальной геометрии линий и поверхностей в пространстве Минковского // Тр. I-ой респ. конф. матем. Белоруссии. Минск: Высш. школа, 1965. С.290-307.

УДК 514.75

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НЕИЗОТРОПНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В НЕВЫРОЖДЕННЫХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.Т.И в л е в

(Томский политехнический университет)

В данной статье проводится одна из возможных классификаций m-мерных поверхностей V_m в $(n+1)$-мерном невырожденном неевклидовом пространстве ${}^\ell S_{n+1}$, которое представляет собой $(n+1)$-мерное проективное пространство, в котором задана инвариантная невырожденная гиперквадрика Q (абсолют). При этом рассматривается случай неизотропной m-поверхности V_m, когда ее текущая точка $V\notin Q$.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в

[1] - [6].

1. Рассмотрим $(n+1)$-мерное невырожденное неевклидово пространство ${}^{l}S_{n+1}$, в котором абсолют Q в проективных координатах x^{J} определяется уравнением:

$$g_{JK}\,x^{J}x^{K}=0 \qquad (J,j,K,L=\overline{0,n+1}), \qquad (1)$$

причем l – число минусов в каноническом виде этой квадратичной формы.

Билинейная форма от координат точек $X(x^{J})$ и $Y(y^{K})$

$$(X,Y)=g_{JK}\,x^{J}y^{K},$$

полярная квадратичной форме (1), как известно [2], называется скалярным произведением этих точек. Точки X и Y, для которых $(X,Y)=0$, будут полярно сопряженными относительно абсолюта Q. Точка X на абсолюте Q:

$$(X,X)\equiv g_{JK}\,x^{J}x^{K}=0$$

называется изотропной точкой. Точка $X\notin Q$, т.е. $(X,X)\neq 0$, называется неизотропной точкой.

Репером R пространства ${}^{l}S_{n+1}$ служат $(n+2)$ линейно независимых точек A_J. В этом репере

$$(A_J,A_K)=g_{JK}. \qquad (2)$$

В дальнейшем репер R будем рассматривать как подвижной. Его деривационные формулы и уравнения структуры будем записывать в виде:

$$dA_J=\omega_J^K A_K, \quad D\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K, \quad \omega_J^J=0. \qquad (3)$$

Условия инвариантности [1] абсолюта Q в силу (1) и (3) приводят к C^2_{n+3} линейным соотношениям, которым удовлетворяют 1-формы ω_J^K:

$$dg_{JK}-g_{JL}\,\omega_K^L-g_{LK}\,\omega_J^L=0. \qquad (4)$$

Рассмотрим в пространстве ${}^{l}S_{n+1}$ поверхность m измерений (m-поверхность) V_m. Поместим вершину A_0 репера R в текущую точку $V\in V_m$, а точки $A_0, A_1,\dots,A_m$ расположим в касательной m-плоскости L_m к V_m в точке A_0, т.е.

$$V=A_0, \quad L_m=(A_0,A_1,\dots,A_m). \qquad (5)$$

Тогда относительно такого репера R система дифференциальных уравнений m-поверхности V_m в ${}^{l}S_{n+1}$ в силу (3) имеет вид:

$$\omega_0^{\hat\alpha}=0, \quad \omega_\alpha^{\hat\alpha}=A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\,\omega_0^{\beta}, \quad \nabla A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}+A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\,\omega_0^0=A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_0^{\gamma}. \qquad (6)$$

$$A^{\hat\alpha}_{[\alpha\beta]}=0, \quad A^{\hat\alpha}_{[\alpha\beta,\gamma]}=0 \quad (\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\tau=\overline{1,m};\ \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma,\hat\sigma,\hat\tau=\overline{m+1,n+1}).$$

2. В этом и следующих пунктах рассматривается случай неизотропной m-поверхности V_m в ${}^{l}S_{n+1}$, когда $A_0\notin Q$, т.е.

$$g_{00}\equiv(A_0,A_0)\neq 0.$$

В этом случае репер R выберем так, чтобы точки A_J были вершинами автополярного $(n+1)$-симплекса $A_0, A_1,\dots,A_{n+1}$ [2], а с помощью вещественной нормировки приведем скалярные квадраты вершин A_J к 1, если эта вершина лежит вне абсолюта, и к (-1), если она лежит внутри абсолюта. Тогда имеем

$$g_{JK}=(A_J,A_K)=\begin{cases}0, & J\neq K;\\ \varepsilon_J, & J=K,\end{cases} \qquad (7)$$

где $\varepsilon_J=\pm1$, и абсолют Q в силу (1) и (7) в этом автополярном нормированном репере определяется уравнением

$$\sum_{J=0}^{n+1}\varepsilon_J\,(x^J)^2=0, \qquad (8)$$

причем число отрицательных ε_J равно индексу l пространства ${}^{l}S_{n+1}$ [2].

Из (7) получаем, что соотношения (4) принимают в рассматриваемом репере следующий вид:

$$\varepsilon_K\,\omega_L^K+\varepsilon_L\,\omega_K^L=0 \qquad (\text{по } L \text{ и } K \text{ не суммировать}). \qquad (9)$$

Из (5) и (8) замечаем, что линейные подпространства

$$L_n=(A_1A_2\dots A_{n+1}), \quad P_{I0}=(A_{m+1},\dots A_{n+1}) \qquad (10)$$

полярно сопряжены точке A_0 и m-плоскости L_m относительно абсолюта Q, соответственно. Поэтому нормали первого P_I и второго рода P_{II} геометрически определяются следующим образом:

$$P_I=A_0\cup P_{I0}=(A_0A_{m+1}\dots A_{n+1}), \quad P_{II}=L_n\cap L_m=(A_1A_2\dots A_m). \qquad (11)$$

Следовательно, неизотропная m-поверхность V_m в ${}^{l}S_{n+1}$ оказывается внутренним образом оснащенной полем нормалей P_I. При этом точка A_{n+1} геометрически определяется так же, как и в ([4], (24)), роль гиперплоскости P_n ([4], (25)) играет теперь L_n в (10), а роль нормали P_{II} играет $(m-1)$-плоскость в (11). В соответствии с замечанием к § 1 в [3] нормаль Картана P_{I0} в (10) является характеристическим элементом или 1-характеристикой гиперплоскости L_n.

3. Из соотношений (9) и (6) вытекают следующие соотноше-

ния: $\omega^0_{\hat{\alpha}}=0$, $\omega^\alpha_{\hat{\alpha}}=A^\alpha_{\hat{\alpha}\beta}\omega^\beta_0$, $\omega^{n+1}_a=A^{n+1}_{a\alpha}\omega^\alpha_0$, $\omega^a_{n+1}=A^a_{n+1,\alpha}\omega^\alpha_0$,

$$\nabla A^\alpha_{\hat{\alpha}\beta}\wedge\omega^\beta_0=0,\quad \nabla A^{n+1}_{a\beta}\wedge\omega^\beta_0=0,\quad \nabla A^a_{n+1,\beta}\wedge\omega^\beta_0=0,$$

$$A^\alpha_{\hat{\alpha}\beta}=-\varepsilon_{\hat{\alpha}}\varepsilon_\alpha A^{\hat{\alpha}}_{\alpha\beta},\quad A^a_{n+1,\alpha}=-\varepsilon_a\varepsilon_\alpha A^{n+1}_{a\alpha}\quad (a,b,c=\overline{m+1,n}).$$

Отсюда с учетом ([4], (28)) следует

Т е о р е м а I. Неизотропная m - поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ является m - поверхностью класса S^1_m (S^2_m) тогда и только тогда, когда она является m - поверхностью класса S_m (S^3_m).

4. Из ([4], (31), (32)) с учетом (8) и (9) вытекает, что на неизотропной m - поверхности V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ класса $S_{m,\tau}$ выполняются следующие соотношения

$$\omega^{\hat{\alpha}}_{\alpha_2}=0,\quad \omega^{\hat{\alpha}}_{\alpha_1}=A^{\hat{\alpha}}_{\alpha_1\beta_1}\omega^{\beta_1}_0,\quad \omega^{\alpha_2}_{\hat{\alpha}}=0,\quad \omega^{\alpha_1}_{\hat{\alpha}}=A^{\alpha_1}_{\hat{\alpha}\beta_1}\omega^{\beta_1}_0,$$

$$A^{\alpha_1}_{\hat{\alpha}\beta_1}=-\varepsilon_{\alpha_1}\varepsilon_{\hat{\alpha}}A^{\hat{\alpha}}_{\alpha_1\beta_1}\quad (\alpha_1,\beta_1=\overline{1,\tau};\ \alpha_2,\beta_2=\overline{\tau+1,m}).$$

Отсюда с учетом (5) и (6) и результатов пункта 7 статьи [4] следует

Т е о р е м а 2. На неизотропной тангенциально-вырожденной ранга τ m - поверхности V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ (или класса $S_{m,\tau}$) только на ней многообразие линейных подпространств

$$\tilde{\Gamma}\cup P_\tau=(A_0\,A_1\dots A_\tau\,A_{m+1}\dots A_{n+1})$$

является τ-мерным. Здесь линейное подпространство $\tilde{\Gamma}\subset L_m$ полярно сопряжено подпространству $\Gamma_{m-\tau}$ относительно $L_m\cap Q$.

Заметим, что неизотропная m - поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ каждого из классов S^1_m, S^2_m и $S_{m,\tau}$ согласно теоремам I и 2 обладает теми же геометрическими свойствами, которые определяются соответствующими инвариантными связностями в [5].

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. моск. матем. об-ва. М., 1953. Т.2. С.275-382.

2. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955.

3. И в л е в Е.Т. Некоторые геометрические объекты многомерной поверхности в невырожденных неевклидовых пространствах // Известия вузов. Математика. 1968. № II. С.93-104.

4. И в л е в Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.49-56.

5. И в л е в Е.Т. Об инвариантных расслоениях и связностях в них на оснащенной поверхности проективного пространства // Там же. 1992. Вып.23. С.41-45.

УДК 514.75

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК, КАСАЮЩИХСЯ ДРУГ ДРУГА

Л.Г.К о р с а к о в а

(Калининградский государственный университет)

В пространстве P_3 рассматривается пара $\mathcal{L}$ конгруэнций коник C_1 и C_2, находящихся в различных плоскостях и касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей в одной точке A_1. Плоскости коник описывают двумерные многообразия. Для расслояемых пар $\mathcal{L}$ доказана классификационная теорема.

Пара $\mathcal{L}$ исследуется в репере $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4})$, где A_2 - точка, инцидентная прямой ℓ, точки A_3 и A_4 выбираются так, что треугольники $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$ являются автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно C_1 и C_2. Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами $dA_\alpha=\omega^\beta_\alpha A_\beta$, причем формы Пфаффа ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$ и условию $\omega^\alpha_\alpha=0$. Уравнения коник C_1 и C_2 и система пфаффовых уравнений пары $\mathcal{L}$ в репере R имеют вид:

$$(x^2)^2-2x^1x^4=0,\quad x^3=0;\quad (x^2)^2-2x^1x^3=0,\quad x^4=0; \tag{I}$$

$$\begin{cases}\omega^2_1=\Gamma^{2k}_1\omega_k,\quad \omega^3_i=\Gamma^{3k}_i\omega_k,\quad \omega^4_3=\Gamma^{4k}_3\omega_k,\quad \omega^3_4=\Gamma^{3k}_4\omega_k,\\ \omega^2_4-\omega^1_2=\lambda^k\omega_k,\quad \omega^2_3-\omega^1_2=\mu^k\omega_k,\quad \omega^1_4=\Gamma^{1k}_4\omega_k,\\ \omega^1_3=\Gamma^{1k}_3\omega_k,\quad \Omega_1=a^k\omega_k,\quad \Omega_2=b^k\omega_k,\end{cases} \tag{2}$$

где