рдена поверхности $X_{k+r}$ полями плоскостей $P_{n-m}$, $P_{m-1}=P_{k-1}+P_{m-k-1}$.

З а м е ч а н и я: 8) нормализация А.П.Нордена плоскостной поверхности $X_{k+r}$ недостаточна для задания связности в расслоении $H(X_{k+r})$ ; 9) если тензор $\Lambda^{\alpha}_{ai}=0$ , то уравнения (26) совпадают с уравнениями тангенциально вырожденной поверхности [12] , в которые не входят формы $\omega^{a}$ , т.е. образующая $L_k$ перестает быть центрированной.

Библиографический список


1. К о б а я с и Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986. 224 с.

2. Б л и з н и к а с В.И. Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.43-110.

3. Г е й д е л ь м а н Р.М., К р у г л я к о в Л.З. О плоскостных поверхностях // Доклады АН СССР. 1974. Т.219. № 1. С.19-22.

4. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. 248 с.

5. Л у м и с т е Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Уч. зап. / Тартуск. ун-т. Тарту, 1965. Вып.177. С.6-41.

6. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1978. Вып.9. С.124-133.

7. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства // Там же, 1977. Вып.8. С.135-150.

8. К р у г л я к о в Л.З., Щ е р б а к о в Н.Р. Некоторые связности, ассоциированные с семейством плоскостей в проективном пространстве // Геометрич. сб. Томск, 1980. № 21. С.14-20.

9. Ш е в ч е н к о Ю.И. Структура оснащения многообразия линейных фигур // Тезисы докл. VI Прибалт. геометр. конф. Таллин, 1984. С.137-138.

10. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1969. Т.2. С.179-206.

11. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976. 432 с.

12. Ш е в ч е н к о Ю.И. Связности в главных расслоениях, ассоциированных с тангенциально вырожденными поверхностями в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.139-146.




УДК 514.75

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С НЕРАСПАДАЮЩЕЙСЯ ФОКАЛЬНОЙ КОНИКОЙ


С.В.Ш м е л е в а

(Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота)


В трехмерном проективном пространстве $P_3$ рассматривается конгруэнция $\Pi_0$ линейчатых невырожденных квадрик $Q$ с фокальной нераспадающейся коникой $C$ [1], определяемая вполне интегрируемой системой Пфаффа. Основное внимание обращается на изучение поверхностей $(A_0)$ и $(A_3)$, описанных фокальными точками квадрики $Q$ , не инцидентными конике $C$ . Доказано, что асимптотические линии на поверхностях $(A_0)$ и $(A_3)$ соответствуют и огибаются прямолинейными образующими квадрики $Q$ . Прямолинейная конгруэнция $(A_0A_3)$ вырождается в связку прямых.

Отнесем конгруэнцию $\Pi_0$ к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где $A_1, A_2$ - точки пересечения прямолинейных образующих квадрики $Q\in\Pi_0$ , проходящих через фокальные точки $A_0$ и $A_3$ . При надлежащей нормировке вершин репера уравнение квадрики $Q$ приводится к виду:

$$\mathcal{F}\equiv x^1x^2-x^0x^3=0. \qquad (1)$$

Произвольная конгруэнция $K$ линейчатых квадрик в репере, построенном на двух фокальных точках $A_0$ и $A_3$ квадрики указанным выше способом, определяется следующей системой уравнений Пфаффа [2, с.119] :

$$
\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a^j_{ik}\,\omega_0^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik}\,\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik}\,\omega^k, \quad \omega_3^i = b^i_k\,\omega^k, \quad \Omega = h_k\,\omega^k, \end{cases} \tag{2}
$$

где
$$
\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i, \quad \Omega = \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3, \quad i,j,k = 1,2;
$$

и по индексам $i$ и $j$ суммирование не производится.

Конгруэнция $\Pi_0$ выделяется из конгруэнции $K$ следующей специализацией компонент геометрических объектов:

$$
\begin{cases} a^j_{ii} = 0, \quad a^j_{ij} = -h_i, \quad c_{ii} = 0, \quad c_{12} = c_{21} = c_0, \\ b^j_i = 0, \quad b^1_1 = b^2_2 = b, \quad \lambda_{ii} = 0, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21} = h_1 h_2 - b. \end{cases} \tag{3}
$$

Продолжая два раза систему уравнений Пфаффа:

$$
\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j + h_i\,\omega^j = 0, \quad \omega_i^3 = (1+c_0)\,\omega^j, \\ \omega_i^0 = h_1 h_2\,\omega^j, \quad \omega_3^i = b\,\omega^i, \quad \Omega = h_k\,\omega^k, \end{cases} \tag{4}
$$

приходим к вполне интегрируемой системе, состоящей из уравнений (4) и уравнений

$$
\begin{cases} dc_0 = (1+c_0)\Omega, \quad db = b\,(\omega_3^3 - \omega_0^0), \\ dh_i = h_i\,(\omega_3^3 - \omega_j^j) + h_0\,\omega^j, \quad dh_0 = h_0\,\Omega, \end{cases} \tag{5}
$$

причем выполняется неравенство

$$
h_1 h_2\, c_0\, b\,(1 - c_0^2) \neq 0. \tag{6}
$$

Используя уравнения (I), (4), (5), убеждаемся, что фокальное многообразие квадрики $Q \in \Pi_0$ состоит из точек $A_0$ и $A_3$ и нераспадающейся коники

$$
x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \quad c_0 x^0 + h_k x^k + (h_1 h_2 - b)\,x^3 = 0. \tag{7}
$$

Т е о р е м а 1. Асимптотические линии на фокальных поверхностях $(A_0)$ и $(A_3)$ конгруэнции $\Pi_0$ соответствуют и огибаются прямолинейными образующими квадрики $Q \in \Pi_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения

$$
(d^2 A_0\; A_0 A_1 A_2) = 0, \qquad (d^2 A_3\; A_3 A_1 A_2) = 0
$$

асимптотических линий приводятся, в силу неравенства (6), к одному и тому же виду:

$$
\omega^1 \omega^2 = 0. \tag{8}
$$

Так как

$$
dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^k A_k, \quad dA_3 = \omega_3^3 A_3 + b\,\omega^k A_k, \tag{9}
$$

то прямые $A_0 A_i$ и $A_3 A_i$ являются асимптотическими касательными поверхностей $(A_0)$ и $(A_3)$.



Т е о р е м а 2. Прямолинейная конгруэнция $(A_0 A_3)$, ассоциированная с конгруэнцией $\Pi_0$, вырождается в связку прямых с центром в точке

$$
B = bA_0 - A_3. \tag{10}
$$

Действительно, дифференцируя (5), получим:

$$
dB = \omega_3^3 B. \tag{11}
$$

Т е о р е м а 3. Поверхности $(A_1)$ и $(A_2)$, ассоциированные с конгруэнцией $\Pi_0$, вырождаются в линии, касательные к которым пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$
dA_i = \omega_i^i A_i + \omega^j\,(h_1 h_2 A_0 - h_i A_j + (1+c_0) A_3). \tag{12}
$$

Следовательно, $(A_i)$ – линии с касательными

$$
[A_i,\; h_1 h_2 A_0 - h_i A_j + (1+c_0) A_3],
$$

пересекающимися в точке

$$
M = h_1 h_2 A_0 - h_1 A_2 - h_2 A_1 + (1+c_0) A_3. \tag{13}
$$

Найдем квадрики Ли фокальных поверхностей $(A_0)$ и $(A_3)$. Дифференцируя два раза равенства

$$
A_0 * A_0 = 0, \quad A_0 * A_1 = 0, \quad A_1 * A_1 = 0
$$

при $\omega^1 = 0$, где для точки $M = x^\alpha A_\alpha$ $(\alpha, \beta = 0,1,2,3)$ обозначено $M * M = a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$, получим:

$$
A_2 * A_0 = 0, \quad A_2 * A_1 + (1+c_0) A_0 * A_3 = 0, \quad -h_1 A_2 * A_1 + (1+c_0) A_3 * A_1 = 0,
$$

$$
A_2 * A_2 = 0, \quad A_2 * A_3 + h_2 A_0 * A_3 = 0, \quad (1+c_0) A_3 * A_3 + (h_0 - b(1+c_0) + 2 h_1 h_2) A_0 * A_3 = 0.
$$

Следовательно, уравнение квадрики Ли поверхности $(A_0)$ имеет вид:

$$
(1+c_0) x^1 x^2 - x^0 x^3 + x^3 h_k x^k + \frac{h_0 + 2 h_1 h_2 - b(1+c_0)}{1+c_0}\,(x^3)^2 = 0. \tag{14}
$$

Проводя аналогичные рассуждения для поверхности $(A_3)$, найдем уравнение ее квадрики Ли в виде:

$$
h_1 h_2 x^1 x^2 + h_k x^0 x^k - b x^0 x^3 + \left(h_2 + \frac{b(1+c_0)}{h_1 h_2}\right)(x^0)^2 = 0. \tag{15}
$$

## Библиографический список


I. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.54-60.

2. Ш м е л е в а  С.В. Об одном классе конгруэнций линейчатых квадрик с трехкратной фокальной поверхностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.118-123.

УДК 514.75

## ВЫРОЖДЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ, ИНЦИДЕНТНОЙ КВАДРИКЕ

Т.П.Ф у н т и к о в а

(Калинингадский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются вырожденные комплексы $(QP^*)_{3,1}$, порожденные квадрикой $Q$ и точкой $P^*$ [1]. Многообразие квадрик $Q$ – трехмерное, а точек $P^*$ – одномерное. Изучен класс вырожденных комплексов $(QP^*)_{3,1}$, для которых касательные к линиям $(P^*)$ и $\Gamma_{P^*}$ параллельны в соответствующих точках.

Отнесем комплекс $(QP^*)_{3,1}$ к реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, в котором точка $A$ совмещена с центром $P$ квадрики $Q$, вектор $\vec{e}_2$ направлен по касательной к линии $\Gamma_{P^*}$ в точке $P$, а вектор $\vec{e}_1$ – по касательной к асимптотической линии поверхности $(P)$, конец вектора $\vec{e}_3$ (точка $A_3$) совмещен с точкой $P^*$, концы векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ (точки $A_1, A_2$) инцидентны квадрике $Q$. Квадрика $Q$ в репере $R$ задается уравнением

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-2\alpha x^1x^2-2\gamma x^2x^3-2\beta x^1x^3-1=0 . \qquad (1)$$

Учитывая, что многообразие квадрик $Q$ – трехмерное, а точек $P^*$ – одномерное, выберем $\omega^1, \omega^2, \omega^2_2$ в качестве базисных форм комплекса, обозначив их соответственно $\theta^1, \theta^2, \theta^3$. Система уравнений Пфаффа комплекса $(QP^*)_{3,1}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^3=0, \ \omega^3_3=0, \ \omega^1_3=-\theta^1, \ \omega^2_3=\Gamma^2_{31}\theta^1-\theta^2, \ \omega^1_2=\Gamma^1_{21}\theta^1, \ \omega^3_i=C\theta^j, \\ \omega^2_1=\Gamma^2_{1i}\theta^i, \ \omega^1_1=\Gamma^1_{1a}\theta^a, \ d\alpha=\alpha_a\theta^a, \ d\beta=\beta_a\theta^a, \ d\gamma=\gamma_a\theta^a, \\ d\ln C=(\Gamma_{ii}-2\Gamma^j_{ij})\theta^i+(\Gamma^1_{13}+1)\theta^3 \ \ (\Gamma^2_{31}\neq 0, \ i,j=1,2; \ i\neq j; \ a=1,2,3). \end{cases} \qquad (2)$$



Вырожденные комплексы $(QP^*)_{3,1}$ существуют и определяются с произволом четырех функций трех аргументов.

Получены следующие результаты: 1) линии $\Gamma_{P^*}$ на поверхности $(P)$, соответствующие точкам $P^*$, являются прямыми, а поверхность $(P)$ – линейчатой; 2) прямолинейные конгруэнции $(AA_1)$, $(AA_3)$ – параболические, точки $P$, $P^*$ являются соответственно сдвоенными фокальными точками их лучей, торсы высекают на поверхности $(P)$ сеть асимптотических линий, прямолинейная конгруэнция $(AA_2)$ – цилиндрическая; 3) существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(AA_3)$ к семейству плоскостей $(A,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$; 4) аффинные нормали к поверхности $(P)$ параллельны соприкасающейся плоскости линии $(P^*)$ в соответствующих точках; 5) линия $(P^*)$ является прямой тогда и только тогда, когда существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(AA_1)$ к семейству плоскостей $(A,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, поверхность $(P)$ в этом случае является плоскостью; 6) линия $(P^*)$ является плоской тогда и только тогда, когда существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(AA_1)$ к семейству соприкасающихся плоскостей линии $(P^*)$; 7) если характеристика плоскости $(A,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ совпадает с касательной к линии $(P^*)$ в соответствующей точке $P^*$, то прямая $\Gamma_{P^*}$ и аффинная нормаль к поверхности $(P)$ в точке $P$ принадлежат соприкасающейся плоскости линии $(P^*)$ в точке $P^*$; 8) в силу поставленной задачи точка $P^*$ является фокальной точкой комплекса квадрик $Q$ и конгруэнции квадрик $Q_{P^*}$, соответствующих точке $P^*$.

Каждой точке $P^*$ линии $(P^*)$ соответствуют конгруэнции коник $(C_a)$, полученных при пересечении квадрики $Q$ координатными плоскостями $x^a=0$. Коники имеют следующие уравнения:

$$C_1: \ (x^2)^2+(x^3)^2-2\beta x^2x^3-1=0, \quad x^1=0, \qquad (3)$$

$$C_2: \ (x^1)^2+(x^3)^2-2\gamma x^1x^3-1=0, \quad x^2=0, \qquad (4)$$

$$C_3: \ (x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha x^1x^2-1=0, \quad x^3=0. \qquad (5)$$

Конгруэнции $(C_a)$ определяются системой уравнений (2) и условием $\theta^1=0$.

Т е о р е м а. Конгруэнции $(C_a)$ обладают свойствами: