ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

Б. А к м а т о в

О ДЕФОРМАЦИИ СВЯЗНОСТЕЙ В СТРУКТУРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ $\eta\,(f\xi\eta\rho)$ – СТРУКТУРЫ В $M_n(F)$

На многообразии почти комплексной структуры $M_n\,(n=2q)$ со структурным аффинором F ,оснащенном симметрической связностью Γ ,зададим распределение m-мерных линейных элементов Λ, определив его полем объекта Λ^J_i.

Индексы принимают следующие значения:

$J, K, L, \ldots = 1, \ldots, n$; $i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, m$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n$;

$a, b, c, \ldots = 1, \ldots, 2m-n$; $\sigma, \tau, \rho, \ldots = 2m-n+1, \ldots, m$; $\rho+\tau, \ldots = m+1, \ldots, n$,

где $p = n-m$.

Известно [1],что фундаментальным объектом первого порядка $\{\Lambda^J_i, \Lambda^J_{iK}\}$ распределения и объектом связности $\{\Gamma^J_{KL}\}$ можно охватить объект $\{N^J_\alpha\}$,определяющий на M_n распределение $(n-m)$-мерных линейных элементов N -нормально-оснащающее распределение $(\Lambda_x \cap N_x = T_x(M_n))$.При этом на распределении Λ возникает $(f\xi\eta\rho)$-структура.

В настоящей работе рассматриваются некоторые связности на распределении η $(f\xi\eta\rho)$ -структуры,в частности, φ-связность,полученная с помощью построенного тензора деформации $\hat{T}^a_{bc}$.Найдена также связь тензора деформации с тензором Нейенхейса N^a_{bc} аффинора f^a_b , индуцирующего на η почти комплексную структуру.

Используем следующую канонизацию репера:

$$\Lambda^J_i = \delta^J_i, \quad N^J_\alpha = \delta^J_\alpha; \qquad (1)$$

$$\Lambda^i_{jL} = 0, \quad N^\alpha_{\beta L} = 0.$$

Из дифференциальных уравнений компонент $\Lambda^J_i, N^J_\alpha, \Lambda^K_{iL}, N^\alpha_{\beta L}$, с учетом (1),получаем:

$$\omega^\alpha_k = \Lambda^\alpha_{kL}\,\omega^L, \quad \omega^i_\alpha = N^i_{\alpha L}\,\omega^L \qquad (2)$$

После такой канонизации репера значительно упрощаются охваты структурных объектов $(f\xi\eta\rho)$-структуры:

$$f^i_j = F^i_j, \quad \xi^i_\alpha = -F^i_\alpha, \quad \eta^\alpha_i = F^\alpha_i, \quad \rho^\alpha_\beta = F^\alpha_\beta. \qquad (3)$$

Объекты $\overset{0}{\gamma}{}^i_{jL}$ и $\overset{\star}{\gamma}{}^\alpha_{\beta L}$, определяющие связность на распределении Λ и N соответственно при осуществленной канонизации становятся подобъектами объекта Γ^J_{KL}:

$$\overset{0}{\gamma}{}^i_{jL} = \Gamma^i_{jL}, \quad \overset{\star}{\gamma}{}^\alpha_{\beta L} = \Gamma^\alpha_{\beta L} \qquad (4)$$

В работе [2] найдены объекты $\{H^i_a\}$, $\{\Xi^i_{p+\tau}\}$ определяющие соответственно Λ-виртуальные распределения η и ξ:

$$dH^i_a - H^i_b v^b_a + H^k_a\omega^i_k = H^i_{aL}\omega^L, \qquad (5)$$

$$d\Xi^i_{p+\sigma} - \Xi^i_{p+\tau}\omega^\tau_\sigma + \Xi^k_{p+\tau}\omega^i_k = \Xi^i_{p+\sigma L}\omega^L, \qquad (6)$$

где

$$v^b_a = \omega^b_a + H^\tau_a\omega^b_\tau,$$

$$\omega^\tau_\sigma = \omega^{p+\tau}_{p+\sigma} - \eta^{p+\tau}_b\omega^b_\sigma - \eta^{p+\tau}_{\sigma L}\omega^L$$

Проведем дальнейшую канонизацию репера

$$H^\sigma_a = 0, \quad \Xi^a_{p+\tau} = 0. \qquad (7)$$

Из дифференциальных уравнений (5),(6) с учетом (7), следует

$$\omega^\sigma_a = H^\sigma_{aL}\omega^L, \quad \omega^a_\sigma = \tilde\Xi^{p+\tau}_\sigma\,\Xi^a_{p+\tau L}\omega^L, \qquad (8)$$

где $\tilde\Xi^{p+\tau}_\sigma\,\Xi^\rho_{p+\tau} = \delta^\rho_\sigma$.

Такой канонический репер обозначим $R(H,\Xi)$. В работе [2] мы нашли охваты объектов $\overset{0}{\gamma}{}^a_{bL}$ и $\overset{\star}{\gamma}{}^\tau_{\sigma L}$, определяющих связность на распределении η и распределении ξ. Относительно репера $R(H,\Xi)$ компоненты f^a_b аффинора f^i_j образуют тензор

$$df^a_b - f^a_c\omega^c_b + f^c_b\omega^a_c = f^a_{bL}\omega^L, \qquad (9)$$

который на распределении η действует как аффинор почти комплексной структуры, т.е.

$$f^a_b f^b_c = -\delta^a_c. \qquad (10)$$

Пусть $\hat\gamma^a_{bL}$ некоторая линейная связность, определенная на распределении η. Тогда компоненты $\hat\gamma^a_{bL}$ могут быть определены равенствами

$$\hat\gamma^a_{bL} = \overset{0}{\gamma}{}^a_{bL} + T^a_{bL}, \qquad (11)$$

где T^a_{bL} -тензор деформации. Заметим, что компоненты T^a_{bc} в построенном каноническом репере также образуют тензор. Введем для них обозначения $\hat T^a_{bc}$:

$$\hat T^a_{bc} \overset{def}{=} T^a_{bc}. \qquad (12)$$

Продолжив дифференциальные уравнения (9), получим:

$$df^a_{bL} - f^a_{cL}\omega^c_b - f^a_{bK}\omega^K_L + f^c_{bL}\omega^a_c - f^a_c\omega^c_{bL} + f^c_b\omega^a_{cL} = f^a_{bLK}\omega^K. \qquad (13)$$

Из (13) следует, с учетом проведенной канонизации, что для f^a_{bc} выполняются следующие уравнения:

$$df^a_{bd} - f^a_{cd}\omega^c_b - f^a_{bc}\omega^c_d + f^c_{bd}\omega^a_c - f^a_c\omega^c_{bd} + f^c_b\omega^a_{cd} = f^a_{bdL}\omega^L. \qquad (14)$$

Ковариантная производная $\tilde f^a_{bL}$ объекта f^a_b в связности $\overset{0}{\gamma}{}^a_{bL}$ определяется формулой:

$$\overset{0}{\tilde f}{}^a_{bL} = f^a_{bL} + f^a_c\overset{0}{\gamma}{}^c_{bL} - f^c_b\overset{0}{\gamma}{}^a_{cL} \qquad (15)$$

Из (15), с учетом (11), имеем:

$$\overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bL} = \overset{0}{\tilde f}{}^a_{bL} + f^a_c T^c_{bL} - f^c_b T^a_{cL} \qquad (16)$$

Функции $\overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bL}$ образуют тензор, причем в построенном каноническом репере компоненты $\overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bc}$ образуют самостоятельный линейный однородный объект (тензор). Введем обозначение:

$$\varphi^a_{bd} \overset{def}{=} \overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bd}. \qquad (17)$$

Найдем такой охват компонент $\hat T^a_{bc}$, чтобы выполнялось условие:

$$\overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bc} = 0 \qquad (18)$$

Т е о р е м а 1. Если компоненты тензора $\hat T^a_{bc}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\hat{T}^a_{bc} = -(\varphi^d_{bc} + \varphi^d_{cb}) f^a_d + (\varphi^a_{db} - \varphi^a_{bd}) f^d_c, \qquad (19)$$

то выполняются равенства (I8). Справедливо и обратное утверждение.

Тензор $\hat{T}^a_{bc}$ можно использовать для преобразования компонент $\mathring{\gamma}^a_{bc}$ объекта связности $\mathring{\gamma}^a_{bL}$. Система величин $\hat{\gamma}^a_{bc} = \mathring{\gamma}^a_{bc} + \hat{T}^a_{bc}$, $\hat{\gamma}^a_{b\sigma} = \mathring{\gamma}^a_{b\sigma}$, $\hat{\gamma}^a_{b\,p+\tau} = \mathring{\gamma}^a_{b\,p+\tau}$ также будет определять связность в распределении η. Тензор $\hat{T}^a_{bc}$ мы будем называть тензором "слабой" деформации связности $\mathring{\gamma}^a_{bL}$. Выясним геометрический смысл осуществленной деформации. Относительно связности $\hat{\gamma}^a_{bL}$ поле (9) структурного объекта f^a_b, определяющего почти комплексную структуру в распределении η, записывается следующим образом

$$df^a_b - f^a_c \hat{\omega}^c_b + f^c_b \hat{\omega}^a_c = \overset{\hat{\gamma}}{f}{}^a_{bc}\,\omega^c + \overset{\mathring{\gamma}}{f}{}^a_{b\sigma}\,\omega^\sigma + \overset{\mathring{\gamma}}{f}{}^a_{b\,p+\sigma}\,\omega^{p+\sigma}. \qquad (20)$$

Кривые, принадлежащие распределению η, в построенном каноническом репере, определяются системой:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^\sigma = 0, \quad \omega^a = \lambda^a \theta. \qquad (21)$$

Очевидно, что при смещении элемента распределения Λ по кривым, принадлежащим распределению η, объекты f^a_b ковариантно постоянны в связности $\hat{\gamma}^a_{bL}$.

Т е о р е м а 2. Связность $\hat{\gamma}^a_{bL}$, полученная деформацией связности $\mathring{\gamma}^a_{bL}$ при помощи тензора "слабой" деформации $\hat{T}^a_{bc}$, вдоль кривых, принадлежащих распределению η, является φ-связностью.

Тензор Нейенхейса аффинора

$$N^a_{bc} = \varphi_{bd} f^d_c - \varphi^a_{db} f^d_c - (\varphi^a_{cd} - \varphi^a_{dc}) f^d_b, \qquad (22)$$

и следовательно

$$N^a_{bc} = \hat{T}^a_{bc} - \hat{T}^a_{cb}. \qquad (23)$$

Список литературы

1. Акматов Б. Об инвариантном построении геометрии распределений m-мерных линейных элементов в дифференцируемом многообразии M_n. Рук. деп. ВИНИТИ. М., 1983, 35с. библ. 20 назв. 26 мая 1983. № 2874-83 Деп.
2. Акматов Б. О связностях в структурных распределениях индуцированной $(f^\xi, \gamma f)$-структуры в M_n почти комплексной структуры. Рук. деп. ВИНИТИ. М., 1984.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I6 1985

УДК 514.75

Г. П. Б о ч и л л о

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_m НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ n - МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА $(m > n)$

В работе продолжено изучение m-распределений на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства P_n. В смысле [1] Δ_m являются распределениями касательных элементов, порожденных m-мерными подмногообразиями гиперплоских элементов $\{A, \alpha\}$. Под гиперплоским элементом, как и в [2], понимается пара из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α пространства P_n. В данной работе рассмотрены распределения Δ_m на M_{2n-1} в случае $n < m < 2n-1$, $(m = n + m_0 - 1, 1 < m_0 < n)$. Доказана теорема, дающая геометрическую характеристику распределения Δ_m, построено его оснащение. Показано, что с Δ_m при $m > n$ ассоциируется инвариантное подраспределение $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$, причем $2n-m-1 < n$. Отсюда следует, что в случае $n < m < 2n-1$ могут быть использованы результаты из [3], [4]. В работе индексы принимают следующие значения: $\mathcal{I}, \mathcal{J} = 0, \overline{1,n}$; $i, j = \overline{1,n}$; $p, q, \tau = \overline{1,n-1}$; $a, b, c = \overline{1, m_0-1}$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \overline{m_0, n-1}$, $1 < m_0 < n$.

I. Распределения Δ_m на M_{2n-1} ($n < m < 2n-1$). Присоединим к каждому элементу $\{A, \alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R = \{A_\mathcal{I}\}$ и тангенциальные $\tau = \{\alpha^\mathcal{I}\}$ подвижные реперы, деривационные формулы которых имеют вид $dA_\mathcal{I} = \omega^\mathcal{J}_\mathcal{I} A_\mathcal{J}$, $d\alpha^\mathcal{I} = -\omega^\mathcal{I}_\mathcal{J} \alpha^\mathcal{J}$, причем 1-формы $\omega^\mathcal{J}_\mathcal{I}$ удовлетворяют условиям $d\omega^\mathcal{J}_\mathcal{I} = \omega^\mathcal{K}_\mathcal{I} \wedge \omega^\mathcal{J}_\mathcal{K}$, $\sum \omega^\mathcal{I}_\mathcal{I} = 0$. Положив $A = A_0$, $\alpha = \alpha^n$ перейдем к реперам $R_0(\tau^0)$ нулевого порядка со структурными формами $\omega^p_0, \omega^n_0, \omega^n_p$ многообразия M_{2n-1}. Распределение Δ_m на M_{2n-1} можно определить системой $(2n-m-1)$ линейно независимых уравнений Пфаффа: