ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ ОТОБРАЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Л.И.А л е к с е е в а
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В статье формулируется необходимое и достаточное условие для того,чтобы график V_3 отображения $f: E_3 \to \bar{E}_3$ был поверхностью нулевой скалярной кривизны для случая,когда основание отображения образовано характеристическими.Устанавливается, что вторая поляра точки $x \in V_3$ будет при этом конусом второго порядка.

1.Пусть V_3 -график гладкого обратимого отображения f области $\Omega \subset E_3$ на область $\bar{\Omega} \subset \bar{E}_3$. Присоединим к Ω и $\bar{\Omega}$ подвижные реперы $R^{x_1} = (x_1, \vec{e}_i)$ и $R^{x_2} = (x_2, \vec{e}_{3+i})$ соответственно, где $\vec{e}_{3+i} = f_{*x_1}(\vec{e}_i)$ $(i,j,k,\ell = 1,2,3)$. Тогда в точке x на V_3 возникает репер $R^x = (x, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_{3+i})$, где векторы $\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{3+i}$ принадлежат касательной плоскости $T_3(x)$, а векторы $\vec{\varepsilon}_{3+i} = \vec{e}_i - \gamma_{ik}\bar{\gamma}^{kj}\vec{e}_{3+j}$ образуют базис в $N_3(x)$ [1].Здесь γ_{ij}, $\bar{\gamma}_{ij}$ -компоненты метрических тензоров E_3 и $\bar{E}_3$, $\bar{\gamma}_{ik}\bar{\gamma}^{kj} = \delta_i^j$; g_{ij}, $\bar{g}_{ij}$ -компоненты метрических тензоров поверхности V_3 и нормальной плоскости $N_3(x)$, при этом $g_{ij} = \gamma_{ij} + \bar{\gamma}_{ij}$, $\bar{g}_{ij} = \gamma_{i\ell}\bar{\gamma}^{\ell k} g_{kj}$. Векторы $\vec{\varepsilon}_i$ выберем единичными: $g_{ii} = 1$. Тогда $\gamma_{ii} = 1 - \bar{\gamma}_{ii}$.

Деривационные формулы введенных реперов имеют вид:

$$\begin{cases} d\vec{x}_1 = \omega^i \vec{e}_i, & d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j; \\ d\vec{x}_2 = \bar{\omega}^i \vec{e}_{3+i}, & d\vec{e}_{3+i} = \bar{\omega}_i^j \vec{e}_{3+j}; \\ d\vec{x} = \theta^i \vec{\varepsilon}_i, & d\vec{\varepsilon}_i = \theta_i^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_i^{3+j} \vec{\varepsilon}_{3+j}; \\ & d\vec{\varepsilon}_{3+i} = \theta_{3+i}^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_{3+i}^{3+j} \vec{\varepsilon}_{3+j}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\omega^i = \bar{\omega}^i = \theta^i$ [1].

2.Пусть сеть $\sigma_3 \subset \Omega$ -основание отображения f [1].Векторы подвижного репера R^{x_1} направим по касательным к линиям основания σ_3. Тогда $\gamma_{ij} = \bar{\gamma}_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, а, значит, $g_{ij} = 0$ и $\bar{g}_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т.е. график V_3 отображения f отнесен к полуортонор-

мированному реперу $(g_{ij} = \delta_{ij}, \bar{g}_{ik} = 0, i \neq k)$, построенному на касательных к линиям сети σ_3^* (соответствующей сети σ_3),

Формы $\theta_i^j, \theta_i^{3+j}, \theta_{3+i}^j, \theta_{3+i}^{3+j}, \omega_i^j, \bar{\omega}_i^j$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \theta_i^{3+k} = b_{ij}^{3+k}\theta^j, \quad b_{ij}^{3+k} = b_{ji}^{3+k}, \\ \theta_i^i = 0, \quad \theta_i^j + \theta_j^i = 0 \quad (i \neq j), \\ \theta_{3+j}^i = -\bar{g}_{jj}\theta_i^{3+j}, \\ \omega_i^j = \theta_i^j + \theta_i^{3+j}, \quad \omega_i^j = \theta_{3+i}^j + \theta_{3+i}^{3+j}, \\ \bar{\omega}_i^j = \theta_i^j - \bar{g}_{jj}\theta^{3+j}, \\ \gamma_{ii}\omega_j^i + \gamma_{jj}\omega_i^j = 0, \quad \bar{\gamma}_{ii}\bar{\omega}_j^i + \bar{\gamma}_{jj}\bar{\omega}_i^j = 0 \ (i \neq j), \\ \gamma_{ii}\omega_i^i + \bar{\gamma}_{ii}\bar{\omega}_i^i = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Будем предполагать,что отображение f простое [1],т.е. $\bar{\gamma}_{ii} \neq \bar{\gamma}_{jj}$ $(i \neq j)$ в каждой точке $x_1 \in \Omega$.

Рассмотрим случай,когда графиком отображения f будет неминимальная поверхность нулевой скалярной кривизны (минимальная поверхность нулевой скалярной кривизны является плоскостью [2]). Скалярная кривизна поверхности V_3 есть инвариант

$$R = g^{ij} R_{ij}, \quad g^{kj} g_{ji} = \delta_i^k,$$

где R_{ij} -компоненты тензора Риччи.В силу инвариантности скалярного произведения тензор R_{ij} имеет вид [2]:

$$R_{ij} = R^k_{i \cdot jk} = g^{\ell k}(\vec{b}_{ij}\vec{b}_{\ell k} - \vec{b}_{ik}\vec{b}_{\ell j}),$$

где $R^\ell_{i \cdot jk}$-компоненты тензора Римана-Кристоффеля, $\vec{b}_{ij}$- вектор вынужденной кривизны направлений $\vec{\varepsilon}_i$, $\vec{\varepsilon}_j$ по отношению друг к другу.Следовательно,

$$R = g^{ij} g^{\ell k}(\vec{b}_{ij}\vec{b}_{\ell k} - \vec{b}_{ik}\vec{b}_{\ell j}), \qquad (3)$$

или

$$R = \sum_{i,j}(\vec{b}_{ii}\vec{b}_{jj} - \vec{b}_{ij}^{\,2}) \quad (g^{ij} = 0, \ g^{ii} = 1, \ i \neq j).$$

Характеристические направления отображения f определяются системой уравнений [3]:

$$b_{jk}^{3+i}\,\omega^j\omega^k = \lambda\bar{\gamma}_{ii}\,\omega^i.$$

Направление линии ω^i сети σ_3 является характеристическим в отображении f тогда и только тогда, когда [3]

$$b^{3+j}_{ii} = 0 \ (i \neq j) \quad \text{или} \quad \vec{b}_{ii} \parallel \vec{\varepsilon}_{3+i}\,. \tag{4}$$

где $\vec{b}_{ii}$ -вектор вынужденной кривизны линии θ^i на графике V_3. Можно доказать теорему, аналогичную доказанной для поверхности V_2 в E_4 нулевой скалярной кривизны [4].

Т е о р е м а I. Пусть линии основания отображения f являются характеристическими. Графиком V_3 будет поверхность нулевой скалярной кривизны тогда и только тогда, когда сеть σ_3^* на V_3 сопряженная.

В условиях теоремы, используя формулы (2), нетрудно показать, что

$$\theta^j_i = 0\,,\ \omega^j_i = 0\,,\ \overline{\omega}^j_i = 0 \quad (i \neq j) \tag{5}$$

(при продолжении приводят к тождествам),

$$\omega^i_i = b^{3+i}_{ii}\,\omega^i, \quad \overline{\omega}^i_i = -\overline{g}_{ii}\, b^{3+i}_{ii}\,\omega^i. \tag{6}$$

Тогда из (I) имеем:

$$d\vec{e}_i = b^{3+i}_{ii}\,\omega^i \vec{e}_i\,, \quad d\vec{e}_{3+i} = -\overline{g}_{ii}\, b^{3+i}_{ii}\,\omega^i \vec{e}_{3+i}\,.$$

Следовательно, если графиком V_3 отображения f является поверхность нулевой скалярной кривизны и основание σ_3 отображения образовано характеристическими, то они являются прямыми как в области $\Omega \subset E_3$, так и в области $\overline{\Omega} \subset \overline{E}_3$. Но тогда сеть σ_3^* на графике будет геодезической [1]. При этом из (I), (4), (5) и (6) получим, что

$$d\vec{\varepsilon}_i \parallel \vec{\varepsilon}_{3+i}\,, \quad d\vec{\varepsilon}_{3+i} \in (x, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_{3+i}),$$

значит, при перемещении точки x по линии θ^i плоскость $(x, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_{3+i})$ остается неподвижной, и линия θ^i сети σ_3^* является плоской геодезической.

3. Уравнение

$$\det \Big\| \sum_j \overline{g}_{jj}\, b^{3+j}_{ik}\, y^{3+j} - \delta^i_k \Big\| = 0 \tag{7}$$

определяет в пространстве $N_3(x)$ алгебраическую поверхность третьего порядка, не проходящую через точку x (фокусную поверхность) [6].

Уравнение второй поляры Q точки $x \in V_3$ относительно фокусной поверхности (7) в полуортонормированном репере имеет вид:

$$Q: \ a_{ij}\, y^{3+i} y^{3+j} + 2 a_{i0}\, y^{3+i} + 6 = 0\,,$$

где

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}\,\overline{g}_{ii}\,\overline{g}_{jj} \sum_{k,\ell} \left(b^{3+i}_{kk} b^{3+j}_{\ell\ell} + b^{3+i}_{\ell\ell} b^{3+j}_{kk} - 2 b^{3+i}_{k\ell} b^{3+j}_{k\ell} \right),$$

$$a_{i0} = -2\,\overline{g}_{ii} \sum_k b^{3+i}_{kk}\,.$$

В ортонормированном репере $a'_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\sqrt{\overline{g}_{ii}\,\overline{g}_{jj}}}$, тогда первый инвариант второй поляры точки x

$$\mathcal{J}_1 = \sum_i a'_{ii} = \sum_i \frac{1}{\overline{g}_{ii}}\, a_{ii} = \sum_{i,k,\ell} \overline{g}_{ii} \left(b^{3+i}_{\ell\ell} b^{3+i}_{kk} - (b^{3+i}_{k\ell})^2 \right) =$$

$$= \sum_{k,\ell} \left(\vec{b}_{kk} \vec{b}_{\ell\ell} - \vec{b}^{\,2}_{k\ell} \right) = R\,,$$

т.е. первый инвариант поляры Q равен скалярной кривизне R поверхности V_3.

Известно [5], что вторая поляра точки x поверхности V_p в E_{p+3} не может быть мнимым эллипсоидом, мнимым конусом, гиперболическим параболоидом, цилиндрической поверхностью. Если $R = 0$, то $\mathcal{J}_1 = 0$, и поляра Q точки $x \in V_3 \subset E_6$ не может быть эллипсоидом.

Легко проверить, что второй полуинвариант поляры Q будет $\mathcal{J}'' < 0$, а значит, поляра не может быть парой мнимых параллельных и парой совпадающих плоскостей.

В условиях теоремы I

$$a_{ii} = 0\,,\ a_{ij} = \overline{g}_{ii}\,\overline{g}_{jj}\, b^{3+i}_{ii}\, b^{3+j}_{jj}\,,\ a_{0i} = -2\,\overline{g}_{ii}\, b^{3+i}_{ii} \quad (i \neq j).$$

Перейдя к ортонормированному реперу, найдем инварианты поляры Q: $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_4 = 0$,

$$\mathcal{J}_3 = \begin{vmatrix} 0 & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & 0 & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & 0 \end{vmatrix} = 2 a'_{12} a'_{13} a'_{23} = 2\,\overline{g}_{11}\,\overline{g}_{22}\,\overline{g}_{33} \left(b^4_{11} b^5_{22} b^6_{33} \right)^2 \geqslant 0\,.$$

Нетрудно показать, что случай $\mathcal{J}_3 = 0$, $\mathcal{J}_4 = 0$ (а, значит, поляра Q - цилиндрическая поверхность) не имеет места.
Следовательно, $\mathcal{J}_3 > 0$, $\mathcal{J}_4 = 0$, т.е. поляра Q является конусом, причем, действительным, т.к. $\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_3 = 0$. Уравнение конуса в репере R^x имеет вид:

$$\sum_{i \neq j} \overline{g}_{ii}\,\overline{g}_{jj}\, b^{3+i}_{ii}\, b^{3+j}_{jj}\, y^{3+i} y^{3+j} - 4 \sum_i \overline{g}_{ii}\, b^{3+i}_{ii}\, y^{3+i} + 6 = 0\,.$$

Вершиной конуса служит точка

$$C\left(\frac{1}{\bar{g}_{11}b_{11}^{4}},\frac{1}{\bar{g}_{22}b_{22}^{5}},\frac{1}{\bar{g}_{33}b_{33}^{6}}\right).$$

Она лежит на средней нормали $(x,\vec{M})$ графика.

Теорема 2. Если основание σ_3 отображения образовано характеристическими и скалярная кривизна графика V_3 равна нулю в каждой точке $x\in V_3$, то второй полярой точки x служит конус с вершиной на средней нормали графика.

Библиографический список

1. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств// Учен.зап.МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1970.Т.1.№ 374.С.41-51.

2. Базылев В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства // Сибирский матем.журнал.1966.№3.С.499-511.

3. Грачева В.И. О некоторых случаях дифференцируемых отображений евклидовых пространств // Изв.вузов.Матем.1970. № 11.С.22-30.

4. Смекалова Н.П. О поверхностях V_2 в E_4 нулевой скалярной кривизны // Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии: Межвуз.темат.сб.науч.тр./ МГПИ им.В.И.Ленина, М.,1972.С.89-99.

5. Ефрос П.П. Об омбилических поверхностях $V_p\subset E_{p+3}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб. науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.17.С.26-29.

6. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем.сб./ АН Лит.ССР. Вильнюс,1966. Т.6.№ 4.С.475-490..