УДК 514.75

Ю. И. Попов

ПУЧКИ ПРОЕКТИВНЫХ НОРМАЛЕЙ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Показано, что Н-распределение порождает для каждого из L-, Λ-, Н-подрасслоений в дифференциальной окрестности 2-го порядка по три однопараметрических семейства внутренних нормализаций Нордена.

Дано построение для Н-подрасслоения проективных нормалей Фубини и Вильчинского. Построены канонические пучки нормалей 1-го и 2-го рода каждого из Λ-, L-, Н-подрасслоений данного Н-распределения.

It is shown that the H -distribution for each L-, Λ-, H-subbundles generates three one-parametrical families of Norden internal normalizations in the 2nd order differential neighbourhood.

Construction H-subbundle of the Fubini and Wilczynski projective normals is given. Canonical bundles of 1st and 2nd kind normals are constructed for each L-, Λ-, H-subbundles of the H-distribution.

Ключевые слова: распределение, подрасслоение, квазитензор, внутренняя нормализация, проективитет Бомпьяни — Пантази, геометрический объект.

Keywords: distribution, subbundle, bundle, quasitensor, internal normalization, projectivity Bompiani — Pantazi, geometrical object.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$i, j, \ldots = \overline{2, m}, \ \alpha, \beta = \overline{\mathrm{m}+1, n-1}, \ a, b, c, d, e, f, h = \overline{1, n-1}, \ K = \overline{1, n}.$$

Знак $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^K.

1. Пучки проективных нормалей основных структурных подрасслоений данного $\mathcal{H}$-распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка

Следуя работам [1; 2], введем в рассмотрение в дифференциальной окрестности 2-го порядка проективные нормали 1-го рода для H-подрасслоения данного $\mathcal{H}$-распределения:

$$M_n^a = -\frac{1}{2(n+1)} \Lambda_n^{ab} M_b, \ \nabla M_n^a + \omega_n^a = M_{nK}^a \omega^K, \tag{1}$$

$$S_n^a = -\frac{1}{2(n+1)} \Lambda_n^{ab} S_b, \ \nabla S_n^a + \omega_n^a = S_{nK}^a \omega^K, \tag{2}$$

$$N_n^a = -N^{ad} a_n^{bl} a_n^{cf} N_{bcd}^n \lambda_{lf}, \ \nabla N_n^a + \omega_n^a = N_{nK}^a \omega^K, \tag{3}$$

где

$$M_b = \gamma_b + (n+1)\mathcal{A}_b, \ \nabla M_b \equiv 2(n+1)\Lambda^n_{bc}\omega^c_n,$$

$$S_b = h_b + (n+1)\mathcal{A}_b, \ \nabla S_b \equiv 2(n+1)\Lambda^n_{bc}\omega^c_n,$$

$$\lambda_{lf} = (n+1)\Lambda^n_{lfn} - \Lambda^n_{lf}a^{bd}_n\Lambda^n_{bdn} + S_f S^d_n \Lambda^n_{ld}, \ \nabla\lambda_{lf} \equiv N_{lfd}\omega^d_n,$$

$$N^n_{abc} = (n+1)\mathfrak{M}^n_{abc} - \Lambda^n_{ab}S_c - \Lambda^n_{ac}S_b + 2(n+1)a^n_{bc}S^d_n\Lambda^n_{ad}, \ \nabla N^n_{abc} \equiv 0,$$

$$N_{ab} = a^{cd}_n a^{hf}_n N^n_{cha}N^n_{dfb}, \ \nabla N_{ab} \equiv 0, \ N_{ab}N^{bc} = \delta^c_a,$$

$$\mathfrak{M}^n_{abc} = \Lambda^n_{abc} + \Lambda^n_{ac}\mathcal{A}_b + \Lambda^n_{ab}\mathcal{A}_c + \Lambda^n_{cb}\mathcal{A}_a,$$

$$\nabla M^n_{abc} \equiv 2(\Lambda^n_{ab}a^n_{cd} + \Lambda^n_{ad}a^n_{bc} + \Lambda^n_{ac}a^n_{bd})\omega^d_n.$$

Замечание. Охваты нормалей 1-го рода Нордена (1), (2) H-подрасслоения можно представить в виде

$$M^a_n = \frac{1}{2}(\gamma^a_n + \mathcal{A}^a_n), \ S^a_n = -\frac{1}{2}(\mathcal{A}_b + \frac{1}{n+1}h_b)a^{ab}_n. \qquad (4)$$

Нормаль M^a_n (4) совпадает с проективной нормалью, построенной Михайлеску [3] геометрическим путем для двумерных распределений. В работах Э.Д. Алшибая [1; 2] приведено доказательство этого утверждения для двумерных элементов (для двумерных распределений) в трехмерном проективном пространстве. В силу этого мы оставили за нормалью M^a_n (4) название нормали Михайлеску элемента H-подрасслоения (плоскости $H(A)$) в центре A $\mathcal{H}$-распределения.

Поскольку квазитензоры $\{M^a_n\}$ (1), $\{S^a_n\}$ (2), $\{N^a_n\}$ (3) функционально независимы, в каждом центре A $\mathcal{H}$-распределения имеем три однопараметрических семейства проективных нормалей 1-го рода элемента H-подрасслоения (плоскости $H(A)$):

$$\tilde{M}^a_n(\varepsilon) = M^a_n + \varepsilon(S^a_n - M^a_n), \ \tilde{N}^a_n(\eta) = N^a_n + \eta(M^a_n - N^a_n),$$

$$\tilde{S}^a_n(\zeta) = S^a_n + \zeta(N^a_n - S^a_n),$$

где $\varepsilon, \eta, \zeta \in [0;1]$.

Квазитензорам $\{M^a_n\}$ (1), $\{N^a_n\}$ (3), $\{S^a_n\}$ (2), согласно проективитету Бомпьяни — Пантази [4], поставим в соответствие тензоры $\{m_a\}$, $\{n_a\}$, $\{s_a\}$

$$\begin{aligned} m_a &= -\Lambda^n_{ab}M^b_n - \mathcal{A}_a, \ \nabla m_a = m_{aK}\omega^K, \\ n_a &= -\Lambda^n_{ab}N^b_n - \mathcal{A}_a, \ \nabla n_a = n_{aK}\omega^K, \\ s_a &= -\Lambda^n_{ab}S^b_n - \mathcal{A}_a, \ \nabla s_a = s_{aK}\omega^K, \end{aligned} \qquad (5)$$

поля которых (5) задают поля нормалей 2-го рода H-подрасслоения данного $\mathcal{H}$-распределения. Тензоры $\{m_a\}$, $\{n_a\}$, $\{s_a\}$ (5) функционально независимы. Следовательно, мы имеем три однопараметрических семейства нормалей 2-го рода плоскости $H(A)$ в каждом центре A $\mathcal{H}$-распределения:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_a(\varepsilon) &= m_a + \varepsilon(s_a - m_a), \\ \tilde{n}_a(\eta) &= n_a + \eta(m_a - n_a), \\ \tilde{s}_a(\zeta) &= s_a + \zeta(n_a - s_a). \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая, что нормализации (M_n^a, m_a), (N_n^a, n_a), (S_n^a, s_a) H-подрасслоения функционально независимы и, кроме того, каждый квазитензор вида $\{\nu_n^a\} \overset{\text{def}}{=} \{\nu_n^i, \nu_n^\alpha\}$ и каждый тензор вида $\{\nu_a\} \overset{\text{def}}{=} \{\nu_i, \nu_\alpha\}$ имеют подобъекты, приходим к выводу.

Теорема 1. *В каждом центре A $\mathcal{H}$-распределение порождает для каждого из L-, Λ-, H-подрасслоений в дифференциальной окрестности 2-го порядка по три однопараметрических семейства внутренних нормализаций Нордена.*

Замечание. Нормализации (M_n^i, m_i), (M_n^α, m_α), (M_n^a, m_a) являются нормалями Михайлеску соответственно L-, Λ-, H-подрасслоений данного $\mathcal{H}$-распределения аффинного пространства A_n.

2. Построение нормали Фубини *H*-подрасслоения

Будем исходить из того, что система функций $\{\omega^K, \omega_a^n\}$ вполне интегрируема:

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega_L^K, \quad d\omega_a^n = \omega_a^n \wedge \omega_n^n + \omega_a^b \wedge \omega_b^n.$$

Подрасслоение H-плоскостей данного гиперполосного $\mathcal{H}$-распределения запишется в виде

$$\omega_a^n = \Lambda_{aK}\omega^K. \tag{7}$$

Продолжение уравнений (7) задает систему дифференциальных уравнений объекта 1-го порядка H-подрасслоения $\Gamma_1 = \{\Lambda_{ab}, \Lambda_{an}\}$:

$$\begin{aligned} \nabla\Lambda_{ab} + \Lambda_{ab}\omega_n^n &= \Lambda_{abK}\omega^K, \\ \nabla\Lambda_{an} - \Lambda_{ac}\omega_n^c &= \Lambda_{anK}\omega^K. \end{aligned} \tag{8}$$

Из уравнения (8_1) системы (8) следует, что компоненты $\{\Lambda_{ab}\}$ образуют самостоятельный объект [5]. Этот объект назовем *фундаментальным подобъектом* 1-го порядка $\mathcal{H}$-распределения. В общем случае объект $\{\Lambda_{ab}\}$ несимметричен по индексам a, b.

Введем на H-плоскости (элемент H-подрасслоения) функции

$$\hat{g}_a = a^{cd}\Lambda_{cda}, \ \nabla\hat{g}_a - (n+1)(a_{da} + \frac{1}{3}r_{da})\omega_n^d = \hat{g}_{aK}\omega^K. \quad (9)$$

Используя (9), построим тензор

$$\begin{gathered} G_{abc} = (n+1)\Lambda_{(abc)} - a_{ab}\hat{g}_c - a_{bc}\hat{g}_a - a_{ca}\hat{g}_b, \\ \nabla G_{abc} + G_{abc}\omega_n^n = G_{abcK}\omega^K. \end{gathered} \quad (10)$$

Полученный тензор (10) симметричен по всем индексам и аполярен тензору a^{bc}:

$$a^{bc}G_{bca} = 0.$$

Замыкание свертки

$$\hat{G}_0 = a^{ad}b^{be}a^{cf}G_{abc}G_{def}$$

с учетом (10) приводит к уравнению

$$d\ln\hat{G}_0 - \omega_n^n = c_K\omega^K. \quad (11)$$

В свою очередь, при $K = a$ продолжение уравнения (11) дает в результате

$$\nabla c_a + \Lambda_{fa}\omega_n^f = c_{aK}\omega^K. \quad (12)$$

Заметим, что при продолжении определителя $a_0 = \det(\Lambda_{ab})$ возникает функция a_b, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla a_b - (n+1)\Lambda_{db}\omega_n^d = \tilde{a}_{bK}\omega^K. \quad (13)$$

В силу формул (12), (13) введем в рассмотрение абсолютный тензор

$$\hat{h}_b = \frac{1}{2}(c_b + \frac{1}{n+1}a_b), \ \nabla\hat{h}_b = \hat{h}_{bK}\omega^K.$$

В заключение, используя нормаль Бляшке b^a [6], построим геометрический объект

$$F^a = b^a + \hat{h}^a, \ \nabla F^a - F^a\omega_n^n + \omega_n^a = F_K^a\omega^K, \quad (14)$$

где

$$\begin{gathered} \nabla b^a = b^a\omega_n^n - \omega_n^a + b_K^a\omega^K, \\ \hat{h}^a = a^{ab}\hat{h}_b, \ \nabla\hat{h}^a = \hat{h}^a\omega_n^n + h_K^a\omega^K. \end{gathered} \quad (15)$$

Объект F^a (14) определяет в каждом центре A $\mathcal{H}$-распределения проективную нормаль — аналог нормали Фубини [7].

Замечание. Следует отметить, что уравнения

$$\hat{h}_b x^b - 1 = 0,\ \ x^n = 0$$

задают (n – 2)-мерную инвариантную плоскость, принадлежащую элементу H-подрасслоения и не проходящую через центр A $\mathcal{H}$-распределения.

3. Построение нормали Вильчинского на *H*-подрасслоении

Замыкание уравнения (15) для величин b^a вводит систему новых величин b^a_K 3-го порядка. Используя их, последовательно вычисляем

$$\hat{B}^a_b = b^a_b - b^a b^f \Lambda_{fb},\ \ \nabla\hat{B}^a_b - \hat{B}^a_b \omega^n_n = \hat{B}^a_{bK}\omega^K, \tag{16}$$

$$\underset{(b)}{\hat{H}} = -\frac{1}{n-1}\left(b^a_a - b^a b^f \Lambda_{fa}\right),\ \ \nabla \ln \underset{(b)}{\hat{H}} - \omega^n_n = \hat{H}_K \omega^K \tag{17}$$

и, кроме того, вводим свертку

$$h = a^{bc}\hat{h}_b\hat{h}_c,\ \ \nabla h = h\omega^n_n + h_K\omega^K. \tag{18}$$

При помощи относительных инвариантов (16)—(18) построим абсолютный тензор

$$\begin{gathered}\tilde{G}_{ah} = (n+1)[a_{ab}\hat{B}^b_h - \Lambda_{dh}(b^d - a^d)h_a + \frac{1}{2}(a_{ah} + \Lambda_{ah})\underset{(b)}{H} + \frac{1}{2}r_{ah}h],\\ \nabla\tilde{G}_{ah} = \tilde{G}_{ahK}\omega^K.\end{gathered} \tag{19}$$

Тензоры a^{cd} и G_{abc} (10) позволяют построить еще один абсолютный тензор

$$\tilde{g}_{ab} = a^{cd}a^{ef}G_{ace}G_{bdf},\ \ \nabla\tilde{g}_{ab} = 0. \tag{20}$$

В общем случае тензор $\tilde{g}_{ab}$ (20) невырожденный, то есть $\det(\tilde{g}_{ab}) \neq 0$.

Следовательно, можно ввести обратный ему тензор $\tilde{g}^{ab}$:

$$\tilde{g}^{ab}\tilde{g}_{bc} = \delta^a_c,\ \ \nabla\tilde{g}^{ab} = \tilde{g}^{ab}_K\omega^K. \tag{21}$$

Используя формулы (10), (19), (21), введем в рассмотрение тензор

$$\rho^a = \tilde{g}^{ba}G_{bcf}a^{ch}a^{fd}\tilde{G}_{dh},\ \ \nabla\rho^a - \rho^a\omega^n_n = \rho^a_K\omega^K. \tag{22}$$

В заключение по тензору ρ^a (22) и нормали Бляшке b^a (15) построим нормаль

$$W^a = b^a + \rho^a,\ \ \nabla W^a - W^a\omega^n_n + \omega^n_a = W^a_K\omega^K, \tag{23}$$

которая задает проективную нормаль 3-го порядка — аналог директрисы Вильчинского [8] для H-подрасслоения.

Геометрические объекты F^a (14) и W^a (23) определяют канонический пучок нормалей H-плоскости

$$\mathcal{N}^a(\varepsilon) = F^a + \varepsilon(W^a - F^a). \tag{24}$$

Плоскость, определенная пучком (24), пересекает гиперплоскостной элемент (H-плоскость) по прямой

$$x^a = \alpha(W^a - F^a), \ \ x^n = 0,$$

которая является аналогом канонической касательной [8].

Замечание. При помощи объекта

$$\rho_a = a_{ab}\rho^b, \ \ \nabla\rho_a = \rho_{aK}\omega^K$$

определяется $(n-2)$-мерная плоскость, лежащая в гиперплоскостном элементе (H-плоскости) и не проходящая через центр A $\mathcal{H}$-распределения:

$$\rho_a x^a - 1 = 0, \ \ x^n = 0.$$

4. Канонические пучки проективных нормалей $\mathcal{H}$-распределения аффинного пространства

Вернемся к терминологии $\mathcal{H}$-распределения. Пучок (24) примет вид

$$\mathcal{N}_n^a(\varepsilon) = F_n^a + \varepsilon(W_n^a - F_n^a). \tag{25}$$

Согласно проективитету Бомпьяни — Пантази, пучку (25) соответствует пучок канонических нормалей H-подрасслоения 2-го рода:

$$\mathcal{N}_a(\varepsilon) = -\Lambda_{ab}^n \mathcal{N}_n^b(\varepsilon) - \mathcal{A}_a, \ \ \nabla\mathcal{N}_a(\varepsilon) = \mathcal{N}_{aK}(\varepsilon)\omega^K. \tag{26}$$

Так как объекты $F_n^a \overset{\text{def}}{=} \{F_n^i, F_n^\alpha\}$ и $W_n^a \overset{\text{def}}{=} \{W_n^i, W_n^\alpha\}$ имеют подобъекты $\{F_n^i\}$, $\{F_n^\alpha\}$, то в Λ-подрасслоении и L-подрасслоении индуцируются, соответственно, пучки канонических нормалей 1-го рода:

$$\mathcal{N}_n^i(\eta) = F_n^i + \varepsilon(W_n^i - F_n^i), \tag{27}$$

$$\mathcal{N}_n^\alpha(\zeta) = F_n^\alpha + \varepsilon(W_n^\alpha - F_n^\alpha). \tag{28}$$

В силу проективитета Бомпьяни — Пантази пучкам (27), (28) соответствуют пучки канонических нормалей 2-го рода Λ-подрасслоения и, соответственно, L-подрасслоения:

$$\mathcal{N}_i(\eta) = -\Lambda_{ij}^n \mathcal{N}_n^j(\eta) - \widetilde{\mathcal{A}}_i, \ \ \nabla\mathcal{N}_i(\eta) = \mathcal{N}_{iK}(\eta)\omega^K, \tag{29}$$

$$\mathcal{N}_\alpha(\zeta) = -\Lambda_{\alpha\beta}^n \mathcal{N}_n^\beta(\zeta) - \mathcal{A}_\alpha, \ \ \nabla\mathcal{N}_\alpha(\zeta) = \mathcal{N}_{\alpha K}(\zeta)\omega^K. \tag{30}$$

Резюмируя, приходим к выводу.

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка $\mathcal{H}$-распределение порождает внутренним образом на каждом из* Λ-, L-, H-*подрасслоений пучки* ((27), (29)), ((28), (30)), ((25), (26)) *канонических нормалей 1-го и 2-го рода соответственно.*

Список литературы

1. *Алшибая Э.Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. геом. семинара. М., 1974. Т. 5. С. 169—193.

2. *Алшибая Э.Д.* Геометрия распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве : учеб. пособие. Тбилиси, 1999.

3. *Mihăilescu T.* Geometrie diferenţială proiectivă. Bucureşti Acad. RPR, 1958.

4. *Попов Ю.И.* Введение в теорию регулярного гиперполостного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 10. С. 49—56.

5. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Московского математического общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

6. *Попов Ю.И.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов 2-го порядка $\mathcal{H}$-распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. №2. С. 18—24.

7. *Кованцов Н.И.* К проективной теории комплекса прямых // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97. С. 716—776.

8. *Лаптев Г.Ф.* Гиперповерхности в пространстве проективной связности // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, №1. С. 41—44.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

The author

Dr Juriy I. Popov, Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru