УДК 514.76

О.В. Сухова

(Пензенский государственный педагогический университет)

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАССОВ СТЕПАНОВА СТРУКТУР ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ

Получены инвариантные характеристики классов Степанова структур почти произведения [1] в случае, когда в качестве исходного многообразия выступает касательное расслоение, π -структура определена инфинитезимальной связностью, а линейная связность является связностью Леви-Чивита эрмитовой метрики структуры почти произведения.

1. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие; TM — касательное расслоение над M ; $x \to (x^i)$ — локальные координаты на M ; $z=(x,y) \to (x^A) = (x^i, x^{n+i} = y^i)$ — естественные локальные координаты на TM и ∇ — инфинитезимальная связность, определяющая горизонтальное распределение H_z и, следовательно, структуру почти произведения (π -структуру) на TM : $T_z(TM) = H_z \oplus V_z$, где V_z — вертикальное распределение, касающееся слоев. Локальный базис векторных полей, адаптированный к структуре почти произведения, имеет вид $\delta_A = (\delta_i, \dot{\partial}_i)$, где $\delta_i = \partial_i - N_i^k \dot{\partial}_k$, $\partial_i = \partial / \partial x^i$, $\dot{\partial}_i = \partial / \partial y^i$, а $N_i^k = N_i^k(x,y)$ — коэффициенты инфинитезимальной связности. Дуальный ему базис $\delta^B = (dx^k, \delta y^k)$ состоит из горизонтальных форм dx^i и вертикальных форм $\delta y^k = dy^k + N_p^k dx^p$, а структурные уравнения имеют вид

$$[\delta_i,\delta_j]=R_{ij}^k\dot{\partial}_k\,,\ [\delta_i,\dot{\partial}_j]=L_{ij}^k\dot{\partial}_k\,,\ [\dot{\partial}_i,\dot{\partial}_j]=0\,, \tag{1}$$

где $R_{ij}^k=\delta_j N_i^k-\delta_i N_j^k$, $L_{ij}^k=\dot{\partial}_j N_i^k$.

Пусть h и v — операторы проектирования на H и V соответственно: $h^2=h$, $v^2=v$, $hv=vh=0$. Тогда $P=v-h$ есть оператор структуры почти произведения: $P^2=id$, $P(hX)=-hX$, $P(vX)=vX$. Кроме того, на TM имеется каноническая почти комплексная структура I, $I^2=-id$, $I(hX)=vX$, $I(vX)=-hX$.

Риманову метрику G на TM назовем эрмитовой метрикой структуры почти произведения, если она эрмитова, $G(IX,IX)=G(X,Y)$, а метрика структуры почти произведения $G(PX,PY)=G(X,Y)$. Отсюда следует, что

$$G=g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j+g_{ij}(x,y)\delta y^i\otimes\delta y^j, \tag{2}$$

где $g=g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j$ определяет на M обобщенную лагранжеву метрику. Обозначим через $\overline{\nabla}$ финслерову связность обобщенного лагранжева пространства (M,g), согласованную с метрикой g и без кручения. Если (Γ_{ij}^k,C_{ij}^k) — коэффициенты этой связности, определяемые разложениями $\overline{\nabla}_{\delta_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k$, $\overline{\nabla}_{\dot{\partial}_i}\partial_j=C_{ij}^k\partial_k$, $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$, $C_{ij}^k=C_{ji}^k$, то

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{ks}(\delta_i g_{sj}+\delta_j g_{is}-\delta_s g_{ij}); \tag{3}$$

$$C_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{ks}(\dot{\partial}_i g_{sj}+\dot{\partial}_j g_{is}-\dot{\partial}_s g_{ij}). \tag{4}$$

Пусть $\widetilde{\Gamma}_{AB}^C$ — коэффициенты связности Леви-Чивита $\widetilde{\nabla}$ метрики G, определяемые разложением $\widetilde{\nabla}_{\delta_A}\delta_B=\widetilde{\Gamma}_{AB}^C\delta_C$. Тогда [2]

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}, \ \widetilde{\Gamma}_{ij}^{n+k} = -\frac{1}{2} g^{ks} (\dot{\partial}_s g_{ij} - g_{sp} R_{ij}^{p}),$$

$$\widetilde{\Gamma}_{i\ n+j}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks} (\dot{\partial}_j g_{si} + g_{jp} R_{si}^{p}), \ \widetilde{\Gamma}_{n+i\ j}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks} (\dot{\partial}_i g_{js} - g_{ip} R_{js}^{p}), \quad (5)$$

$$\widetilde{\Gamma}_{n+i\ j}^{n+k} = -\frac{1}{2} g^{ks} (g_{pi} B_{js}^{p} + g_{sp} B_{ji}^{p}), \ \widetilde{\Gamma}_{n+i\, n+j}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks} (g_{pj} B_{si}^{p} + g_{ip} B_{sj}^{p}),$$

$$\widetilde{\Gamma}_{i\, n+j}^{n+k} = \Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2} g^{ks} (g_{sp} B_{ij}^{p} - g_{jp} B_{is}^{p}), \ \widetilde{\Gamma}_{n+i\ n+j}^{n+k} = C_{ij}^{k},$$

где $B_{ij}^{k} = L_{ij}^{k} - \Gamma_{ij}^{k}$.

2. Целью данной работы является нахождение инвариантных характеристик тех классов структур почти произведения, которые выделены С.Е. Степановым в работе [1], в случае наличия на многообразии линейной связности без кручения. При этом в качестве исходного многообразия мы берем касательное расслоение TM, считая, что π-структура определена инфинитезимальной связностью ∇, а линейная связность без кручения является связностью Леви-Чивита $\widetilde{\nabla}$ метрики G.

В упомянутой выше работе выделены восемь классов структур почти произведения: интегрируемые и полуинтегрируемые, плоские и полуплоские, чебышевские и получебышевские, геодезические и полугеодезические.

Необходимым и достаточным условием интегрируемости структуры почти произведения является обращение в нуль тензора Нейенхейса: $N(X,Y) = 8(F^h(X,Y) + F^v(X,Y))$, где $F^h = \frac{1}{2} v[hX, hY]$ и $F^v = \frac{1}{2} h[vX, vY]$ — тензоры интегрируемости распределений H и V соответственно. Из уравнений (1) следует, что $F^h = 0$ тогда и только тогда, когда $R_{ij}^{k} = 0$, а $F^v \equiv 0$. Таким образом, имеет место

Утверждение 1. *Структура почти произведения P на TM является интегрируемой тогда и только тогда, когда* $R_{ij}^{k} = 0$. *Если* $R_{ij}^{k} \neq 0$, *то структура полуинтегрируема.*

Распределение H называется плоским, или вполне геодезическим, если для любой точки $z \in TM$ и любого вектора $\xi \in H_x$ геодезическая γ, определяемая начальными условиями $z = \gamma(t_0)$ и $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \xi$, является интегральной кривой распределения H. Структура почти произведения называется плоской, если оба ее распределения являются вполне геодезическими, и полуплоской, если вполне геодезическим является одно из двух распределений. Критерием плоской структуры является обращение в нуль тензора Йордена:

$$J(X,Y) = \{X,Y\} + \{PX,PY\} - P\{PX,Y\} - P\{X,PY\},$$

где $\{X,Y\} = \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_Y X)$ — скобка Йордена. Имеет место равенство $J(X,Y) = 8(Q^h(X,Y) + Q^v(X,Y))$, где $Q^h(X,Y) = v\{hX,hY\}$, $Q^v(X,Y) = h\{vX,vY\}$ — вторые фундаментальные формы распределений H и V соответственно. Если $Q^h = 0$, то распределение H является плоским. Вычисляя Q^h и Q^v, убеждаемся, что справедливо

Утверждение 2. *Для того чтобы структура почти произведения P на TM была плоской, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\dot{\partial}_k g_{ij} - g_{kp} R^p_{ij} = 0\,; \tag{6}$$

$$g_{pj} B^p_{ki} + g_{ip} B^p_{kj} = 0\,. \tag{7}$$

Если выполняется только условия (6), то структура полупоская, в этом случае распределение H вполне геодезическое. Если выполняются только условия (7), то структура полуплоская, а распределение V является вполне геодезическим.

Структура почти произведения называется чебышевской, если каждое распределение параллельно вдоль интегральных кривых другого распределения. Если одно из распределений параллельно вдоль интегральных кривых другого распределения, то структура называется получебышевской. Обращение в нуль тензора $K_{HV}(X,Y) = -2v(\widetilde{\nabla}_{vX} hY)$ означает, что распределение H параллельно вдоль интегральных кривых распределения V, а обращение в нуль тензора $K_{VH}(X,Y) = 2h(\widetilde{\nabla}_{hX} vY)$ означает, что распределение V параллельно вдоль интегральных кривых распределения H. Проводя необходимые вычисления, убеждаемся, что $K_{HV} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$g_{pi} B^p_{jk} + g_{kp} B^p_{ji} = 0, \tag{8}$$

а $K_{VH} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\dot{\partial}_j g_{ki} + g_{jp} R^p_{ki} = 0. \tag{9}$$

Следовательно, справедливо

Утверждение 3. *Для того чтобы структура почти произведения P на TM была чебышевской, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (8) и (9). Если выполняется одно из условий, то структура получебышевская.*

Структура почти произведения является полугеодезической, если $Q^h = F^h = 0$ (или $Q^v = F^v = 0$), т.е. распределение H (или V) параллельно вдоль своих интегральных кривых. Если $Q^h = F^h = Q^v = F^v = 0$, то структура геодезическая. Анализ этих условий для структуры *P* на *TM* позволяет сделать следующий вывод:

Утверждение 4. *Для того чтобы структура почти произведения P на TM была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\dot{\partial}_k g_{ij} = 0, \; R^k_{ij} = 0; \tag{10}$$

$$g_{pj} B^p_{ki} + g_{ip} B^p_{kj} = 0. \tag{11}$$

Если выполняется одно из условий — (10) или (11), то структура полугеодезическая.

Список литературы

1. *Степанов С.Е.* О классификации структур почти произведения на многообразии с линейной связностью // Изв. вузов. Сер. Математика. 1999. №1 (440). С. 61—68.
2. *Паньженский В.И.* Инвариантные характеристики некоторых классов почти эрмитовых структур // Тр. геом. семинара. Вып. 23. Казань, 1997. С. 77—83.

O. Suhova

THE INVARIANT CHARACTERISTICS STEPANOV'S CLASSES OF ALMOST-PRODUCT STRUCTURES ON THE TANGENT BUNDLE

The invariant characteristics Stepanov's classes of almost-product structures are obtained for the case, when the original manifold is the tangent bundle, π-structure is defined by infinitesimal connection and the linear connection is the Levi-Civita connection of Hermitian metric of the almost-product structure.

УДК 514.754

А.В. Чакмазян

(Армянский государственный педагогический университет)

О ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Методом внешних форм Картана исследуются свойства такой оснащенной гиперповерхности M_m аффинного пространства A_{n+1}, которая относительно индуцированной связности является полусимметрическим подмногообразием.