УДК 514.76

Е. Р. Шамардина
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
katerina.r2805@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-13

Нахождение симметрий для задачи о волнах на воде с поверхностным натяжением

В статье Т. Брук Бенджамина и П. Дж. Олвера 1982 года исследуется вопрос о поведении гамильтоновых систем с бесконечным фазовым пространством. Частным случаем данной задачи является задача о волнах на воде по модели идеальной жидкости в R^2 и R^3 как с учетом поверхностного натяжения, так и без. Здесь мы рассматриваем случай данной задачи в R^2 с учетом поверхностного натяжения и находим для него симметрии, что не было подробно разобрано в указанной статье.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, симметрии, гамильтонова структура, задача о волнах

1. Постановка задачи. Пусть (x, y, z) — фиксированная декартова система координат, где y — вертикальная координата. Считается, что несжимаемая невязкая жидкость, имеющая единичную плотность, занимает область D_η. Верхняя граница D_η — движущаяся свободная поверхность S: $y = \eta(x, y, t)$. Здесь $\eta(x, y, t)$ — однозначная функция. Рассмотрим систему уравнений

Поступила в редакцию 21.05.2022 г.

$$\Lambda: \begin{cases} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \\ \eta_t = \Phi_{(y)} - \Phi_{(x)}\eta_x, \\ \Phi_{(t)} + (\Phi_{(x)}^2 + \Phi_{(y)}^2)/2 + g\eta - \sigma\eta_{xx}/(1+\eta_x^2)^{3/2} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\Phi_{(x)} = (\varphi_x)_S$, $\Phi_{(y)} = (\varphi_y)_S$, $\Phi_{(t)} = (\varphi_t)_S$.

Инфинитезимальные симметрии будем искать в виде

$$X = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \tau\partial_t + \gamma\partial_\varphi,$$

где коэффициенты α, β, τ и γ — функции от переменных x, y и t.

Первое и второе продолжения, сужаемые на поверхность S, имеют вид

$$X_{(1)S} = \alpha_S\partial_x + \beta_S\partial_y + \tau_S\partial_t + \gamma_S\partial_\varphi + (\delta\varphi_x)_S \frac{\partial}{\partial\Phi_{(x)}} +$$

$$+ (\delta\varphi_y)_S \frac{\partial}{\partial\Phi_{(y)}} + (\delta\varphi_t)_S \frac{\partial}{\partial\Phi_{(t)}} + \delta\eta_x \frac{\partial}{\partial\eta_x} + \delta\eta_t \frac{\partial}{\partial\eta_t},$$

$$X_{(2)} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \tau\partial_t + \gamma\partial_\varphi + \delta\varphi_x \frac{\partial}{\partial\varphi_x} + \delta\varphi_y \frac{\partial}{\partial\varphi_y} + \delta\varphi_t \frac{\partial}{\partial\varphi_t} +$$

$$+ \delta\varphi_{xx} \frac{\partial}{\partial\varphi_{xx}} + \delta\varphi_{yy} \frac{\partial}{\partial\varphi_{yy}} + \delta\varphi_{tt} \frac{\partial}{\partial\varphi_{tt}} + \delta\varphi_{xy} \frac{\partial}{\partial\varphi_{xy}} +$$

$$+\delta\varphi_{xt} \frac{\partial}{\partial\varphi_{xt}} + \delta\varphi_{yt} \frac{\partial}{\partial\varphi_{yt}} + \delta\eta_x \frac{\partial}{\partial\eta_x} + \delta\eta_{xx} \frac{\partial}{\partial\eta_{xx}},$$

здесь

$$\delta\varphi_x = D_x\gamma - \varphi_x D_x\alpha - \varphi_y D_x\beta - \varphi_t D_x\tau, \qquad (2)$$

$$\delta\varphi_y = D_y\gamma - \varphi_x D_y\alpha - \varphi_y D_y\beta - \varphi_t D_y\tau, \qquad (3)$$

$$\delta\varphi_t = D_t\gamma - \varphi_x D_t\alpha - \varphi_y D_t\beta - \varphi_t D_t\tau, \qquad (4)$$

$$\delta\varphi_{xx} = D_x\delta\varphi_x - \varphi_{xx}D_x\alpha - \varphi_{xy}D_x\beta - \varphi_{xt}D_x\tau, \tag{5}$$

$$\delta\varphi_{yy} = D_y\delta\varphi_y - \varphi_{xy}D_y\alpha - \varphi_{yy}D_y\beta - \varphi_{yt}D_y\tau, \tag{6}$$

$$\delta\eta_x = D_x(\beta_S) - \eta_x D_x(\alpha_S) - \eta_t D_x(\tau_S), \tag{7}$$

$$\delta\eta_t = D_t(\beta_S) - \eta_x D_t(\alpha_S) - \eta_t D_t(\tau_S), \tag{8}$$

$$\delta\eta_{xx} = D_x(\delta\eta_x) - \eta_{xx}D_x(\alpha_S) - \eta_{tx}D_x(\tau_S). \tag{9}$$

Слагаемое $D_x(\beta_S)$ имеет вид

$$D_x(\beta_S) = (D_x\beta)_S + (\beta_y)_S\eta_x, \tag{10}$$

аналогично для $D_x(\alpha_S)$ и $D_x(\tau_S)$.

$$D_x(\delta\eta_x) = D_{xx}(\beta_S) - \eta_{xx}D_x(\alpha_S) - \eta_x D_{xx}(\alpha_S) -$$

$$-\eta_{tx}D_x(\tau_S) - \eta_t D_{xx}(\tau_S). \tag{11}$$

Введем определяющие уравнения системы:

$$X_{(2)}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})\Big|_{\Lambda} = 0, \tag{12}$$

$$X_{(1)S}(\eta_t - \Phi_{(y)} + \Phi_{(x)}\eta_x)\Big|_{\Lambda} = 0, \tag{13}$$

$$X_{(2)S}\left(\Phi_{(t)} + (\Phi_{(x)}^2 + \Phi_{(y)}^2)/2 + g\eta - \sigma\eta_{xx}/(1+\eta_x^2)^{3/2}\right)\Big|_{\Lambda} = 0. \tag{14}$$

Найдем общий вид коэффициентов α, β, τ и γ инфинитезимальной симметрии X.

2. Первое определяющее уравнение. Рассмотрим определяющее уравнение (12), которое после подстановки первого продолжения примет вид

$$(\delta\varphi_{xx} + \delta\varphi_{yy})\Big|_{\Lambda} = 0. \tag{15}$$

Распишем слагаемые левой части, воспользовавшись выражениями (2, 3, 5, 6), приняв во внимание, что $\varphi_{yy} = -\varphi_{xx}$:

$$\delta\varphi_{xx} = D_x\delta\varphi_x - \varphi_{xx}D_x\alpha - \varphi_{xy}D_x\beta - \varphi_{xt}D_x\tau = \gamma_{xx} + 2\gamma_{x\varphi}\varphi_x + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 +$$

$$+\gamma_\varphi\varphi_{xx} - \varphi_{xx}(\alpha_x + \alpha_\varphi\varphi_x) - \varphi_x(\alpha_{xx} + 2\alpha_{x\varphi}\varphi_x + \alpha_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + \alpha_\varphi\varphi_{xx}) -$$

$$-\varphi_{xy}(\beta_x + \beta_\varphi\varphi_x) - \varphi_y(\beta_{xx} + 2\beta_{x\varphi}\varphi_x + \beta_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + \beta_\varphi\varphi_{xx}) - \varphi_{xt}(\tau_x +$$

$$+\tau_\varphi\varphi_x) - \varphi_t(\tau_{xx} + 2\tau_{x\varphi}\varphi_x + \tau_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + \tau_\varphi\varphi_{xx}) - \varphi_{xx}(\alpha_x + \alpha_\varphi\varphi_x) -$$

$$-\varphi_{xy}(\beta_x + \beta_\varphi\varphi_x) - \varphi_{xt}(\tau_x + \tau_\varphi\varphi_x),$$

$$\delta\varphi_{yy} = D_y\delta\varphi_y - \varphi_{xy}D_y\alpha - \varphi_{yy}D_y\beta - \varphi_{yt}D_y\tau = \gamma_{yy} + 2\gamma_{y\varphi}\varphi_y +$$

$$+\gamma_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 - \gamma_\varphi\varphi_{xx} - \varphi_{xy}(\alpha_y + \alpha_\varphi\varphi_y) - \varphi_x(\alpha_{yy} + 2\alpha_{y\varphi}\varphi_y + \alpha_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 -$$

$$-\alpha_\varphi\varphi_{xx}) + \varphi_{xx}(\beta_y + \beta_\varphi\varphi_y) - \varphi_y(\beta_{yy} + 2\beta_{y\varphi}\varphi_y + \beta_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 - \beta_\varphi\varphi_{xx}) -$$

$$-\varphi_{yt}(\tau_y + \tau_\varphi\varphi_y) - \varphi_t(\tau_{yy} + 2\tau_{y\varphi}\varphi_y + \tau_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 - \tau_\varphi\varphi_{xx}) - \varphi_{xy}(\alpha_y +$$

$$+\alpha_\varphi\varphi_y) + \varphi_{xx}(\beta_y + \beta_\varphi\varphi_y) - \varphi_{yt}(\tau_y + \tau_\varphi\varphi_y).$$

Приняв левую часть уравнения (15) как полином от переменных φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{xt}, φ_{yt}, имеем:

$$\varphi_{xx}:\ -2(\alpha_x + \alpha_\varphi\varphi_x) + 2(\beta_y + \beta_\varphi\varphi_y) = 0, \tag{16}$$

$$\varphi_{xy}:\quad 2(\alpha_y + \alpha_\varphi\varphi_y) + 2(\beta_x + \beta_\varphi\varphi_x) = 0, \tag{17}$$

$$\varphi_{xt}:\quad \tau_x + \tau_\varphi\varphi_x = 0, \tag{18}$$

$$\varphi_{yt}:\quad \tau_y + \tau_\varphi\varphi_y = 0, \tag{19}$$

$$1:\quad \gamma_{xx} + 2\gamma_{x\varphi}\varphi_x + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 - \varphi_x(\alpha_{xx} + 2\alpha_{x\varphi}\varphi_x +$$

$$+\alpha_{\varphi\varphi}\varphi_x^2) - \varphi_y(\beta_{xx} + 2\beta_{x\varphi}\varphi_x + \beta_{\varphi\varphi}\varphi_x^2) - \varphi_t(\tau_{xx} +$$

$$+2\tau_{x\varphi}\varphi_x + \tau_{\varphi\varphi}\varphi_x^2) + \gamma_{yy} + 2\gamma_{y\varphi}\varphi_y + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 -$$

$$-\varphi_x(\alpha_{yy} + 2\alpha_{y\varphi}\varphi_y + \alpha_{\varphi\varphi}\varphi_y^2) - \varphi_y(\beta_{yy} + 2\beta_{y\varphi}\varphi_y +$$

$$+\beta_{\varphi\varphi}\varphi_y^2) - \varphi_t(\tau_{yy} + 2\tau_{y\varphi}\varphi_y + \tau_{\varphi\varphi}\varphi_y^2) = 0. \tag{20}$$

Из уравнений (16—19) получим

$$\alpha_x = \beta_y,\ \alpha_y = -\beta_x,\ \alpha_\varphi = \beta_\varphi = 0,\ \tau_x = \tau_y = \tau_\varphi = 0.$$

Тогда $\alpha = \alpha(x,y,t)$, $\beta = \beta(x,y,t)$ и $\tau = \tau(t)$. Перепишем выражения (2—4):

$$\delta\varphi_x = D_x\gamma - \varphi_x\alpha_x - \varphi_y\beta_x, \tag{2*}$$

$$\delta\varphi_y = D_y\gamma - \varphi_x\alpha_y - \varphi_y\beta_y, \tag{3*}$$

$$\delta\varphi_t = D_t\gamma - \varphi_x\alpha_t - \varphi_y\beta_t - \varphi_t\tau_t. \tag{4*}$$

Уравнение (20) примет вид

$$\begin{gathered}\gamma_{xx} + 2\gamma_{x\varphi}\varphi_x + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 - \varphi_x\alpha_{xx} - \varphi_y\beta_{xx} + \gamma_{yy} + \\ + 2\gamma_{y\varphi}\varphi_y + \gamma_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 - \varphi_x\alpha_{yy} - \varphi_y\beta_{yy} = 0.\end{gathered} \tag{20*}$$

3. Второе определяющее уравнение. После подстановки первого продолжения во второе определяющее уравнение (13) получим

$$\left[(\delta\eta_t)_S - (\delta\varphi_y)_S + (\delta\varphi_x)_S\eta_x + (\varphi_x)_S\delta\eta_x\right]\Big|_\Lambda = 0. \tag{21}$$

Распишем слагаемые $\delta\eta_x$ и $\delta\eta_t$, приняв во внимание $\tau = \tau(t)$ и $\eta_t = \varphi_y - \varphi_x\eta_x$:

$$\begin{gathered}\Big[\beta_t + \beta_y(\varphi_y - \varphi_x\eta_x) - \alpha_t\eta_x - \alpha_y\eta_x(\varphi_y - \varphi_x\eta_x) - \tau_t(\varphi_y - \varphi_x\eta_x) - \\ -\gamma_y - \gamma_\varphi\varphi_y + \alpha_y\varphi_x + \beta_y\varphi_y + (\gamma_x + \gamma_\varphi\varphi_x - \alpha_x\varphi_x - \beta_x\varphi_y)\eta_x + \\ +(\beta_x + \beta_y\eta_x - \alpha_x\eta_x - \alpha_y\eta_x^2)\varphi_x\Big]\Big|_\Lambda = 0.\end{gathered}$$

Рассмотрим левую часть как полином от переменных η_x^2 и η_x:

$$\eta_x^2:\ \ \alpha_y\varphi_x - \alpha_y\varphi_x = 0,$$

$$\eta_x: \quad -\alpha_t - \alpha_y \varphi_y + \tau_t \varphi_x + \gamma_x + \gamma_\varphi \varphi_x - 2\alpha_x \varphi_x - \beta_x \varphi_y = 0,$$

$$1: \quad \beta_t + 2\beta_y \varphi_y - \tau_t \varphi_y - \gamma_y - \gamma_\varphi \varphi_y + \alpha_y \varphi_x + \beta_x \varphi_x = 0.$$

Второе равенство равносильно системе уравнений на коэффициенты по степеням φ_x и φ_y:

$$\varphi_x: \quad \tau_t + \gamma_\varphi - 2\alpha_x = 0, \quad \varphi_y: \quad -\alpha_y - \beta_x = 0, \quad 1: \quad -\alpha_t + \gamma_x = 0,$$

что сводится к

$$\tau_t + \gamma_\varphi = 2\alpha_x, \tag{22}$$

$$\alpha_y = -\beta_x, \tag{23}$$

$$\alpha_t = \gamma_x. \tag{24}$$

Аналогично из третьего выражения следует:

$$\tau_t + \gamma_\varphi = 2\beta_y, \tag{25}$$

$$\beta_t = \gamma_y. \tag{26}$$

4. Третье определяющее уравнение. Перейдем к рассмотрению третьего определяющего уравнения (14):

$$\Big[(\delta\varphi_t)_S + \varphi_x(\delta\varphi_x)_S + \varphi_y(\delta\varphi_y)_S + g(\delta\eta)_S +$$
$$+3\sigma\eta_x\eta_{xx}\delta\eta_x(1+\eta_x^2)^{-5/2} - \sigma\delta\eta_{xx}(1+\eta_x^2)^{-3/2}\Big]\Big|_\Lambda = 0.$$

С учетом, что $\eta = y$ и $\delta\eta = \beta$, подставим выражения для $\delta\varphi_t$, $\delta\varphi_x$, $\delta\varphi_y$, $\delta\eta_x$ и $\delta\eta_{xx}$:

$$\Big[(D_t\gamma - \varphi_x D_t\alpha - \varphi_y D_t\beta - \varphi_t D_t\tau)_S + \varphi_x(D_x\gamma - \varphi_x D_x\alpha - \varphi_y D_x\beta)_S +$$
$$+\varphi_y(D_y\gamma - \varphi_x D_y\alpha - \varphi_y D_y\beta)_S + g(\beta)_S + 3\sigma\eta_x\eta_{xx}(D_x(\beta_S) -$$
$$-\eta_x D_x(\alpha_S) - \eta_t D_x(\tau_S))(1+\eta_x^2)^{-5/2} - \sigma(D_x(\delta\eta_x) - \eta_{xx}D_x(\alpha_S) -$$
$$-\eta_{tx}D_x(\tau_S))(1+\eta_x^2)^{-3/2}\Big]\Big|_\Lambda = 0.$$

Теперь подставим выражения для слагаемых $D_x(\alpha_S)$, $D_x(\beta_S)$, $D_x(\tau_S)$ и $D_x(\delta\eta_x)$, приняв во внимание, что $\tau=\tau(t)$:

$$\big[(\gamma_t+\gamma_\varphi\varphi_t-\varphi_x\alpha_t-\varphi_y\beta_t-\varphi_t\tau_t)_S+\varphi_x(\gamma_x+\gamma_\varphi\varphi_x-\varphi_x\alpha_x-\varphi_y\beta_x)_S+$$
$$+\varphi_y(\gamma_y+\gamma_\varphi\varphi_y-\varphi_x\alpha_y-\varphi_y\beta_y)_S+g(\beta)_S+3\sigma\eta_x\eta_{xx}((\beta_x)_S+$$
$$+(\beta_y)_S\eta_x-(\alpha_x)_S\eta_x-(\alpha_y)_S\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma(D_{xx}(\beta_S)-$$
$$-2(\alpha_x)_S\eta_{xx}-2(\alpha_y)_S\eta_x\eta_{xx}-D_{xx}(\alpha_S)\eta_x)(1+\eta_x^2)^{-3/2}\big]\Big|_\Lambda=0.$$

Запишем выражения для $D_{xx}(\alpha_S)$ и $D_{xx}(\beta_S)$:

$$D_{xx}(\alpha_S)=(\alpha_{xx})_S+2(\alpha_{xy})_S\eta_x+(\alpha_{yy})_S\eta_x^2+(\alpha_y)_S\eta_{xx},$$
$$D_{xx}(\beta_S)=(\beta_{xx})_S+2(\beta_{xy})_S\eta_x+(\beta_{yy})_S\eta_x^2+(\beta_y)_S\eta_{xx},$$

и подставим их в уравнение выше:

$$\big[(\gamma_t+\gamma_\varphi\varphi_t-\varphi_x\alpha_t-\varphi_y\beta_t-\varphi_t\tau_t)_S+\varphi_x(\gamma_x+\gamma_\varphi\varphi_x-\varphi_x\alpha_x-\varphi_y\beta_x)_S+$$
$$+\varphi_y(\gamma_y+\gamma_\varphi\varphi_y-\varphi_x\alpha_y-\varphi_y\beta_y)_S+g(\beta)_S+3\sigma\eta_x\eta_{xx}((\beta_x)_S+$$
$$+(\beta_y)_S\eta_x-(\alpha_x)_S\eta_x-(\alpha_y)_S\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma((\beta_{xx})_S+2(\beta_{xy})_S\eta_x+$$
$$+(\beta_{yy})_S\eta_x^2+(\beta_y)_S\eta_{xx}-(\alpha_{xx})_S\eta_x-2(\alpha_{xy})_S\eta_x^2-(\alpha_{yy})_S\eta_x^3-$$
$$-3(\alpha_y)_S\eta_x\eta_{xx}-2(\alpha_x)_S\eta_{xx})(1+\eta_x^2)^{-3/2}\big]\Big|_\Lambda=0.$$

Выполним подстановку:

$$\varphi_t=-(\varphi_x^2+\varphi_y^2)/2-gy+\sigma\eta_{xx}(1+\eta_x^2)^{-3/2}$$

и опустим S:

$$\big[\gamma_t-(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\gamma_\varphi/2-gy\gamma_\varphi+\sigma\eta_{xx}\gamma_\varphi(1+\eta_x^2)^{-3/2}-\varphi_x\alpha_t-\varphi_y\beta_t+$$
$$+(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\tau_t/2+gy\tau_t-\sigma\eta_{xx}\tau_t(1+\eta_x^2)^{-3/2}+\varphi_x(\gamma_x+\gamma_\varphi\varphi_x-$$
$$-\varphi_x\alpha_x-\varphi_y\beta_x)+\varphi_y(\gamma_y+\gamma_\varphi\varphi_y-\varphi_x\alpha_y-\varphi_y\beta_y)+g\beta+3\sigma\eta_x\eta_{xx}(\beta_x+$$

$$+\beta_y\eta_x-\alpha_x\eta_x-\alpha_y\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma(\beta_{xx}+2\beta_{xy}\eta_x+\beta_{yy}\eta_x^2+$$
$$+\beta_y\eta_{xx}-2\alpha_x\eta_{xx}-3\alpha_y\eta_x\eta_{xx}-\alpha_{xx}\eta_x-2\alpha_{xy}\eta_x^2-\alpha_{yy}\eta_x^3)\cdot$$
$$\cdot(1+\eta_x^2)^{-3/2}\Big]\Big|_\Lambda=0.$$

Рассмотрим левую часть как полином от φ_x и φ_x^2:

$$\varphi_x^2:\;\;\gamma_\varphi/2+\tau_t/2-\alpha_x=0,\;\;\varphi_x:\;\;-\alpha_t+\gamma_x-\varphi_y\beta_x-\varphi_y\alpha_y=0,$$
$$1:\;\;\gamma_t-\varphi_y^2\gamma_\varphi/2-gy\gamma_\varphi+\sigma\eta_{xx}\gamma_\varphi(1+\eta_x^2)^{-3/2}-\varphi_y\beta_t+\varphi_y^2\tau_t/2+$$
$$+gy\tau_t-\sigma\eta_{xx}\tau_t(1+\eta_x^2)^{-3/2}+\varphi_y(\gamma_y+\gamma_\varphi\varphi_y-\varphi_y\beta_y)+g\beta+$$
$$+3\sigma\eta_x\eta_{xx}(\beta_x+\beta_y\eta_x-\beta_y\eta_x-\beta_x\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma(\beta_{xx}+$$
$$+2\beta_{xy}\eta_x-\beta_{xx}\eta_x^2+\beta_y\eta_{xx}-2\beta_y\eta_{xx}+3\beta_x\eta_x\eta_{xx}-\beta_{xy}\eta_x+$$
$$+2\beta_{xx}\eta_x^2+\beta_{xy}\eta_x^3)(1+\eta_x^2)^{-3/2}=0.$$

Из первого выражения получим выведенное ранее тождество: $\gamma_\varphi+\tau_t=2\alpha_x$. Рассмотрим второе выражение как полином от φ_y:

$$\varphi_y:\;\;\beta_x=-\alpha_y,\qquad\qquad 1:\;\;\alpha_t=\gamma_x.$$

Аналогично, рассмотрев третье, получим

$$\varphi_y^2:\;\;\gamma_\varphi+\tau_t=2\beta_y,\qquad\qquad\varphi_y:\;\;\beta_t=\gamma_y,$$
$$1:\;\;\gamma_t-gy\gamma_\varphi+\sigma\eta_{xx}\gamma_\varphi(1+\eta_x^2)^{-3/2}+gy\tau_t-\sigma\eta_{xx}\tau_t(1+\eta_x^2)^{-3/2}+$$
$$+g\beta+3\sigma\eta_x\eta_{xx}(\beta_x-\beta_x\eta_x^2)(1+\eta_x^2)^{-5/2}-\sigma(\beta_{xx}+\beta_{xy}\eta_x-\beta_y\eta_{xx}+$$
$$+3\beta_x\eta_x\eta_{xx}+\beta_{xx}\eta_x^2+\beta_{xy}\eta_x^3)(1+\eta_x^2)^{-3/2}=0.$$

Из последнего выражения получим

$$\alpha_{xx}=\alpha_{yy}=\alpha_{xy}=\beta_{xx}=\beta_{yy}=\beta_{xy}=0,$$
$$\tau_t-\gamma_\varphi=\beta_y=\alpha_x,\quad\gamma_t=-g\beta-gy\beta_y.$$

5. Общий вид коэффициентов α**,** β**,** τ **и** γ**.** Рассмотрим коэффициент γ. Так как

$$\gamma_\varphi + \tau_t = 2\alpha_x = 2\beta_y, \quad \tau_t - \gamma_\varphi = \beta_y = \alpha_x,$$

значит,

$$\gamma_\varphi = \alpha_x / 2 = \beta_y / 2, \;\; \tau_t = 3\alpha_x / 2 = 3\beta_y / 2 = 3\gamma_\varphi.$$

Очевидно, что γ_φ не зависит от переменной φ, тогда

$$\gamma = c_0(x,y,t)\varphi + \chi(x,y,t).$$

Найдем вид c_0. Продифференцируем коэффициент γ по переменным x, y, t:

$$\gamma_x = \alpha_t \equiv (c_0)_x\varphi + \chi_x, \qquad \gamma_y = \beta_t \equiv (c_0)_y\varphi + \chi_y,$$
$$\gamma_t = -g\beta - gy\beta_y \equiv (c_0)_t\varphi + \chi_t. \tag{27}$$

Откуда $(c_0)_x = (c_0)_y = (c_0)_t = 0$, а значит $c_0 = const$:

$$\gamma = c_0\varphi + \chi(x,y,t).$$

Найдем вид α и β. С учетом, что $\alpha_x = 2\gamma_\varphi = 2c_0$, где правая часть зависит только от переменной t, α примет вид

$$\alpha = c_0 x + \sigma(y,t).$$

Аналогично для коэффициента β:

$$\beta = c_0 y + \tilde{\sigma}(x,t).$$

Приняв во внимание вид α и β, перепишем систему (27):

$$\gamma_x = \chi_x = \alpha_t \equiv \sigma_t,$$

$$\gamma_y = \chi_y = \beta_t \equiv \tilde{\sigma}_t,$$

$$\gamma_t = \chi_t \equiv -4c_0 gy - g\tilde{\sigma}.$$

Рассмотрим формулу

$$\chi = \int_{(0,0,0)}^{(0,0,t)} \chi_t dt + \int_{(0,0,t)}^{(x,0,t)} \chi_x dx + \int_{(x,0,t)}^{(x,y,t)} \chi_y dy + const. \qquad (28)$$

Распишем правую часть:

$$\int_{(0,0,0)}^{(0,0,t)} \chi_t dt + const = \phi(t),$$

$$\int_{(0,0,t)}^{(x,0,t)} \chi_x dx = \int_{(0,0,t)}^{(x,0,t)} \sigma_t dx = x\sigma_t,$$

$$\int_{(x,0,t)}^{(x,y,t)} \chi_y dy = \int_{(x,0,t)}^{(x,y,t)} \widetilde{\sigma}_t dy = y\widetilde{\sigma}_t.$$

Тогда формула (28) примет вид

$$\chi = \phi + x\sigma_t + y\widetilde{\sigma}_t. \qquad (29)$$

Найдем вид коэффициентов τ, σ и $\widetilde{\sigma}$. Продифференцируем по переменной t выражение (29):

$$\chi_t = \phi_t + x\sigma_{tt} + y\widetilde{\sigma}_{tt} \equiv -4c_0 gy - g\widetilde{\sigma}.$$

Рассмотрим данное выражение как полином по переменным x и y:

$$x:\ \sigma_{tt} = 0, \qquad y:\ \widetilde{\sigma}_{tt} = -4c_0 g, \qquad 1: \phi_t = -g\widetilde{\sigma}.$$

Так как $\tau = \tau(t)$ и $\tau_t = 3\gamma_\varphi$, то $\tau = 3c_0 t + c_1$. Тогда с учетом вида коэффициента τ σ и $\widetilde{\sigma}$ примут вид

$$\widetilde{\sigma} = -2c_0 g t^2 + c_2 t + c_3,$$

$$\sigma = c_4 t + c_5.$$

Рассмотрим коэффициент ϕ_t:

$$\phi_t = -g\widetilde{\sigma} = 2c_0 g^2 t^2 - c_2 g t - c_3 g.$$

Значит

$$\phi = 2c_0 g^2 t^3 / 3 - c_2 g t^2 / 2 - c_3 g t + c_6.$$

Тем самым коэффициенты α, β, γ и τ приняли вид

$$\tau = 3c_0 t + c_1, \quad \alpha = 2c_0 x + c_4 t + c_5,$$

$$\beta = 2c_0 y - 2c_0 g t^2 + c_2 t + c_3,$$

$$\gamma = c_0\varphi + 2c_0 g^2 t^3 / 3 - c_2 g t^2 / 2 - c_3 g t + c_6 + c_4 x - 4c_0 g y t + c_2 y.$$

Подставив коэффициенты α, β, γ и τ в выражение (20), получим тождество.

6. Инфинитезимальные симметрии. Подставим найденные коэффициенты α, β, γ и τ в выражение для инфинитезимальной симметрии:

$$X = (2c_0 x + c_4 t + c_5)\partial x + (2c_0 y - 2c_0 g t^2 + c_2 t + c_3)\partial y +$$
$$+(3c_0 t + c_1)\partial t + (c_0\varphi + 2c_0 g^2 t^3 / 3 - c_2 g t^2 / 2 -$$
$$-c_3 g t + c_6 + c_4 x - 4c_0 g y t + c_2 y)\partial\varphi.$$

Группируя по константам c, получим

$$X = c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4 + c_5 X_5 + c_6 X_6,$$

где

$$X_0 = 2x\partial x + (2y - 2gt^2)\partial y + 3t\partial t + (\varphi + 2g^2 t^3 / 3 - 4gyt)\partial\varphi,$$
$$X_1 = \partial t, \qquad X_2 = t\partial y + (y - gt^2 / 2)\partial\varphi,$$
$$X_3 = \partial y - gt\partial\varphi, \qquad X_4 = t\partial x + x\partial\varphi,$$
$$X_5 = \partial x, \qquad X_6 = \partial\varphi.$$

Список литературы

1. *Адлер В.Э., Хабибуллин И.Т., Черданцев И.Ю.* Приложения групп Ли в математической физике : учеб. пособие. Уфа, 2013.
2. *Ибрагимов Н.Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности / пер. с англ. И.С. Емельяновой. Издательство Нижегородского госуниверситета. Н. Новгород, 2007.
3. *Brooke Benjamin T., Olver P.J.* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves // Journal of Fluid Mechanics. 1982. Vol. 125. P. 137—185.
4. *Oliveri F.* ReLie: A Reduce Program for Lie Group Analysis of Differential Equations // Symmetry. 2021. Vol. 13, №10. Art. №1826.
5. *Olver P.J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. Mathematical Institute, University of Oxford, 1980.
6. *Ovsiannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. N. Y., 1982.

MSC 2010: 76M60, 58J70

E.R. Shamardina[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
katerina.r2805@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-13

Finding symmetries for the problem of water waves with surface tension

Submitted on May 21, 2022

T. Brooke Benjamin and P.J. Olver “Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves” study the behavior of Hamiltonian systems with an infinite-dimensional phase space. The methods of variational problems and infinite-dimensional differential geometry are applicable to this problem. A special case of the problem is an abstract problem of hydrodynamics for an ideal fluid. Its configuration space is the group of volume-preserving diffeomorphisms of some manifold in R^2 or R^3 filled with fluid. Even more special is the problem of waves on water. Its non-standard nature is due to the presence of boundary conditions on the free surface. These boundary conditions can be interpreted in terms of the functional derivatives of the energy integral, which plays the role of the Hamiltonian. Here we consider in detail the case of this problem in R^2, taking into account surface tension, and find symmetries for it, which was not considered in detail in the article. Finding symmetries can be achieved without recourse to the Hamiltonian structure of the given problem.

Keywords: differential equations, symmetries, Hamiltonian structure, wave problem

References

1. *Adler, V.E., Khabibullin, I.T., Cherdantsev, I. Yu.:* Applications of the Lie Group in Mathematical Physics. Ufa (2013).

2. *Ibragimov, N.H.:* A practical course in differential equations and mathematical modeling. Classical and new methods nonlinear mathematical models symmetry and invariance principles. Nizhny Novgorod (2007).

3. *Brooke Benjamin, T., Olver, P.J.:* Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves. Journal of Fluid Mechanics, 125, 137—185 (1982).

4. *Oliveri, F.:* ReLie: A Reduce Program for Lie Group Analysis of Differential Equations. Symmetry, **13**:10, 1826 (2021).

5. *Olver, P.J.:* Applications of Lie Groups to Differential Equations. Mathematical Institute, University of Oxford (1980).

6. *Ovsiannikov, L. V.:* Group Analysis of Differential Equations. New York (1982).