УДК 514.75

М. А. Чешкова
Алтайский государственный университет, Барнаул
cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-9

Преобразование Бианки катушки Миндинга

Исследуется преобразование Бианки для поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга, катушка Миндинга, псевдосфера (поверхность Бельтрами). К поверхностям постоянной отрицательной гауссовой кривизны относятся также поверхность Куэна и поверхность Дини. Изучение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны (псевдосферических поверхностей) имеет большое значение для интерпретаций планиметрии Лобачевского. Установлена связь геометрических характеристик псевдосферических поверхностей с теорией сетей, теорией солитонов, нелинейными дифференциальными уравнениями и уравнениями синус-Гордона. Уравнение sin-Гордона играет важную роль в современной физике. Преобразования Бианки позволяют получить по данной псевдосферической поверхности новые псевдосферические поверхности.

С использованием математического пакета строятся катушка Миндинга и ее преобразования Бианки.

Ключевые слова: гауссова кривизна, поверхность вращения, катушка Миндинга, преобразование Бианки

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность вращения M, полученную вращением плоской кривой вокруг оси. Обозначим через $\mathrm{k} = (0, 0, 1)$ орт оси, а через $e(v) =$

Поступила в редакцию 12.02.2024 г.

$= (\cos(v)\,, \sin(v)\,, 0)$ — радиус-вектор единичной окружности, расположенной в плоскости, ортогональной оси. Тогда поверхность M можно задать в виде

$$r = ue(v) + f(u)k\,,$$

где f — дифференцируемая функция, u, v — параметры.

Обозначим через n орт нормали к поверхности M. Тогда

$$n = \frac{f'e - k}{\sqrt{(f')^2 + 1}}\,.$$

Главные кривизны k_1, k_2 поверхности M имеют вид

$$k_1 = -\frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}}, \qquad k_2 = -\frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2 + 1}\right)^3}\,.$$

Гауссова кривизна $K = k_1 k_2$ равна

$$K = \frac{f'}{u\sqrt{(f')^2 + 1}} \frac{f''}{\left(\sqrt{(f')^2 + 1}\right)^3}.$$

Требуем $K = const$, получим решение

$$f(u) = \pm \int \sqrt{\frac{Ku^2 - (c-1)}{c - Ku^2}}\,du,$$

где c — произвольная константа.

Поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны — это волчок Миндинга $0 < c < 1$, катушка Миндинга $c < 0$, псевдосфера $c = 0$ [1, с. 100], [2, с. 175].

Для $K = -1$, следуя Миндингу, для катушки

$$c = -a^2, \quad u = ach(t), \quad a = 1.$$

Имеем:

$$f(t) = \int \sqrt{1 - sh^2(t)}\,dt,$$

$$f(t) = 2\big(\mathrm{Elliptic}F(sh(t), i) - \mathrm{Elliptic}E(sh(t), i)\big) + C,$$

$$C = const,$$

где $\mathrm{Elliptic}F(sh(t), i)$, $\mathrm{Elliptic}E(sh(t), i)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

При С = 0 имеем

$$f(t) = 2(\text{Elliptic}F(sh(t), i) - \text{Elliptic}E(sh(t), i)).$$

Рассмотрим катушку Миндинга. Имеем

$$t \in \left[-\ln\left(1+\sqrt{2}\right), \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right], v \in [-\pi, \pi].$$

Положим $f = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ и определим еще две секции катушки Миндинга:

$$M1: r(t, v) = ch(t)e(v) + (f(t) + 2m)k,$$

$$M2: r(t, v) = ch(t)e(v) + (f(t) + 4m)k.$$

Построим три секции катушки Миндинга (рис. 1).

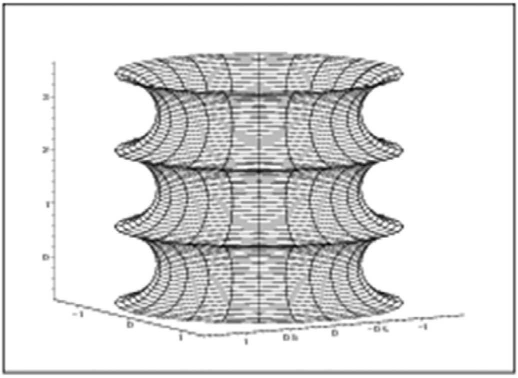

Рис. 1. Три секции катушки Миндинга

Определим метрический тензор g_{ij} и символы Кристоффеля Γ_{ij}^{k}.

Имеем

$$f(t) = \int \sqrt{1 - sh^2(t)}dt,$$

$$r = ch(t)e(v) + f(t)k, \; r_1 = sh(t)e(v) + \sqrt{1 - sh^2(t)}k,$$

$$r_2 = ch(t)\acute{e}(v), \; g_{11} = 1, \; g_{12} = 0, \; g_{22} = ch^2(t).$$

Рассмотрим две гладкие поверхности $M, \bar{M}$ и диффеоморфизм $f: M \to \bar{M}$. Касательные плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \bar{M}$ пересекаются по прямой $(p, f(p))$, образуя прямой двугранный угол, причем $\overrightarrow{pf(p)} = \rho V_p$, где V_p — орт, $\rho = const$. Обозначим через n орт нормали к поверхности M в точке $p \in M$. Тогда касательная плоскость к поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p) \in \bar{M}$ имеет вид $T_{f(o)}\bar{M} = \{f(p), n, V_p\}$. Теорема Бианки утверждает, что если поверхность M имеет гауссову кривизну $K = -\frac{1}{\rho^2}$, то и поверхность $\bar{M}$ имеет ту же кривизну.

Обозначим через r радиус-вектор поверхности M, а через R — радиус-вектор поверхности $\bar{M}$. Полагаем $K = -1$ и рассмотрим отображение $M \to \bar{M}$ [3, с. 489].

Имеем $R = r - V,\ V = V^s r_s$.

Из условия $< R_{i,}[n, v] >= 0$ получим

$$r_i - \partial_i V = \omega(r_i)V + \alpha(r_i)n.$$

Поскольку $< \mathrm{V}, \mathrm{V} >= 1, < \partial_i V, V >= 0$, то

$$\omega(r_i) =< r_i, V >,\ \ \nabla_i \mathrm{V} = r_i - \omega(r_i)V.$$

Имеем

$$\begin{gathered}\nabla_1 V^1 = 1 - g_{11}(V^1)^2, \quad \nabla_1 V^2 = -g_{11}V^1V^2, \\ \nabla_2 V^1 = -g_{22}V^1V^2, \quad \nabla_2 V^2 = 1 - g_{22}(V^2)^2.\end{gathered} \tag{1}$$

Система (1) имеет решение

$$V^1(t, v) = \frac{e^{2t}A1(v) + A2(v)}{e^{2t}A1(v) - A2(v)},$$

$$V^2(t, v) = 4\frac{e^{2v}C1 + C2}{(e^tA1(v) - e^{-t}A2(v))(e^t + e^{-t})},$$

$$A1(v) = 2e^v + e^{2v}C1 - C2,$$

$$A2(v) = 2e^{v} - e^{2v}C1 + C2,$$
$$C1, C2 - const.$$

Потребуем, чтобы $< V, V >= 1$. Тогда $C1C2 + 1 = 0$.
Введем обозначение $c_1 = {}^{1}/_{C1}$. Имеем

$$V^1(t,v) = \frac{e^{2t}(e^{v} + c_1)^2 - (e^{v} - c_1)^2}{e^{2t}(e^{v} + c_1)^2 + (e^{v} - c_1)^2},$$

$$V^2(t,v) = \frac{4(e^{2v} - c_1)}{(e^{2t}(e^{v} + c_1)^2 + (e^{v} - c_1)^2)(e^{t} + e^{-t})}.$$

Рассмотрим уравнение поверхности $\bar{M}$

$$R = \big(ch(t) - V1(t,v)sh(t)\big)e(v) - V2(t,v)ch(t)e\acute{}(v) + 2\big(\mathrm{Elliptic}F(sh(t),i) - \mathrm{Elliptic}E(sh(t),i)\big)k.$$

Построим эту поверхность, полагая $c_1 = e^2$ (рис. 2).

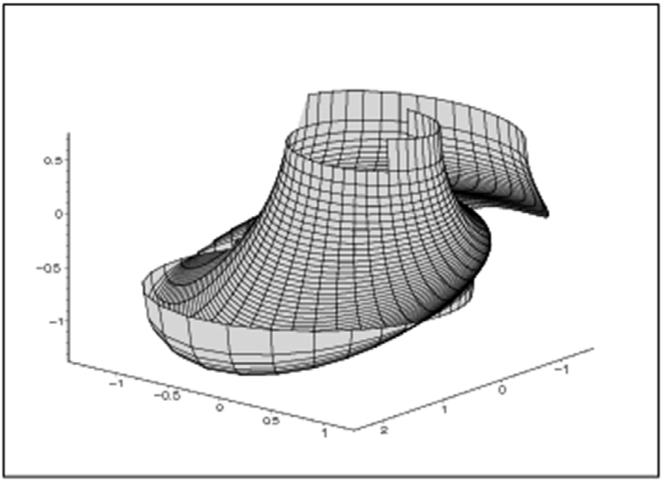

Рис. 2. Преобразование Бианки катушки, $c_1 = e^2$

Построим также поверхность, полагая $c_1 = e$ (рис. 3).

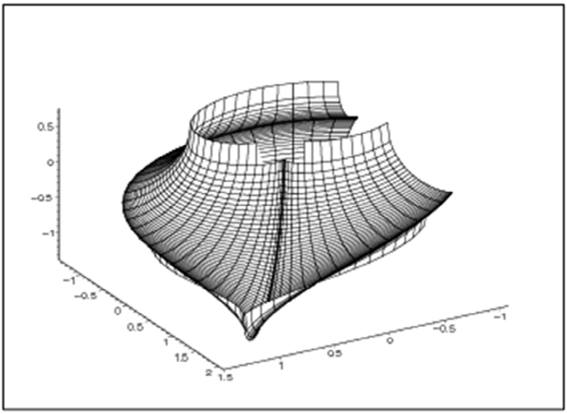

Рис. 3. Преобразование Бианки катушки, $c_1 = e$

Рассмотрим случай при $c_1 = 0$ и построим поверхность (рис. 4).

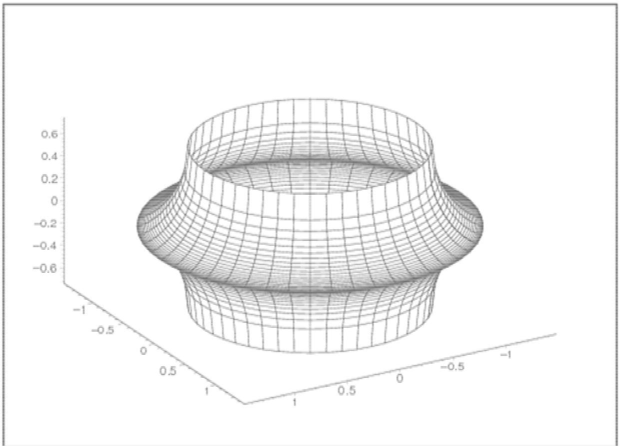

Рис. 4. Преобразование Бианки катушки, $c_1 = 0$

Замечаем, что для этого случая преобразование Бианки катушки есть катушка.

Список литературы

1. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. М. ; Л., 1948.
2. *Норден А.П.* Об основаниях геометрии. М., 1956.
3. *Шуликовский В.И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.

Для цитирования: *Чешкова М.А.* Преобразование Бианки катушки Миндинга // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 81—88. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-9.

MSC 2010: 53A05

M.A. Cheshkova
Altai State University
61 Pr. Lenina, Barnaul, 656049, Russia
cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-9

Bianchi transformation of the Minding coil

Submitted on February 12, 2024

The work is devoted to the study of the Bianchi transform for surfaces of constant negative Gaussian curvature. The surfaces of rotation of constant negative Gaussian curvature are the Mining top, the Minding coil, the pseudosphere (Beltrami surface). Surfaces of constant negative Gaussian curvature also include Kuens surface and the Dinis surface. The study of surfaces of constant negative Gaussian curvature (pseudospherical surfaces) is of great importance for the interpretation of Lobachevsky planimetry. The connection of the geometric characteristics of pseudospherical surfaces with the theory of networks, with the theory of solitons, with non-linear differential equations and sin-Gordon equations is established. The sin-Gordon equation plays an important role in modern physics. Bianchi transformations make it possible to obtain new pseudospherical surfaces from a given pseudospherical surface. The Bianchi transform for the Minding coil is constructed. Using a mathematical package, the Minding coil and its Bianchi transform are constructed.

Keywords: Gaussian curvature, surface of revolution, the Minding coil, Bianchi transform

References

1. *Kagan, V. F.:* Fundamentals of the theory of surfaces in the tensor exposition, 2. Moscow, Leningrad (1948).
2. *Norden, A. P.:* On the foundations of geometry. Moscow (1956).
3. *Shulikovsky, V. I.:* Classical differential geometry in tensor exposition. Moscow (1963).

For citation: Cheshkova, M. A. Bianchi transformation of the Minding coil. DGMF, 55 (1), 81—88 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-9.