2. *Кулешов А.В.* Об одном проективном инварианте семейства гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров // Там же. 2013. Вып. 44. С. 69—77.

3. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. T. 7, №2. С. 231—240.

A. Kuleshov

About intrinsic clothing of some family of hyperplane elements

In multidimensional projective space a family $B_{p,q}$ of hyperplane elements is considered. The problem of construction of intrinsic clothing of such a family is set. This problem is solved in a special case. The solution is based on the method of moving frames and calculation of exterior differential forms of E. Cartan.

УДК 574.76

В.С. Малаховский
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Поля геометрических объектов n-параметрического семейства a_n оснащенных центроаффинных преобразований

Исследуются поля геометрических объектов [1] n-параметрического семейства a_n аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства a_n, каждое из которых сохраняет пару точек {A, B} и однозначно характеризуется заданием этих точек. Установлено существование последовательности p-ковариантных симметрических тензоров [2], порожденных семейством a_n и последовательности n-мерных многообразий гиперконусов порядка p ($p \in N$).

Ключевые слова: геометрический объект, аффинное преобразование, вектор, p-ковариантный тензор, гиперконус.

1. Система уравнений Пфаффа семейства A_n

Отнесем пространство A_n к реперу $\{A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, в котором $\vec{e}_n = A\vec{B}$. Преобразование φ: $A_n \to A_n$, $\varphi \in A_n$ является центроаффинным, сохраняющим точку B, причем $\vec{B} = \vec{A} + \vec{e}_n$. Учитывая это, запишем формулы преобразования φ в виде:

$$\begin{cases} x^i = M^i_k X^k \\ x^n = M^n_k X^k + X^n \end{cases}, \ \det(M^i_k) \neq 0. \qquad (1.1)$$

Из (1.1) следует, что φ преобразование — центроаффинное с центром A. Оно сохраняет точку B(0, 0, …, 0, 1).

Условимся обозначать через π^J, π^K_J значения деривационных формул [3]:

$$d\vec{A} = \omega^I \vec{e}_I, \ d\vec{e}_I = \omega^K_I e_K \ (I, J, K = \overline{1, n}),$$

при фиксации отображения φ, т. е.

$$\pi^I = 0, \ \pi^K_I \overset{\det}{=} \omega^K_I.$$

Имеем [3]

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J, \ d\omega^K_I = \omega^J_I \wedge \omega^K_J \qquad (1.2)$$

$$\delta X^I = -X^K \pi^I_K, \ \delta x^I = -x^K \pi^I_K,$$

где «δ» — символ дифференцирования по вторичным параметрам.

Дифференцируя (1.1), находим

$$\delta M^i_k - M^i_j \pi^j_k + M^j_k \pi^i_j = 0;$$

$$\delta M^n_i - M^n_j \pi^j_i + M^j_i \pi^n_j - \pi^n_i = 0.$$

Так как точка В сохраняется при фиксации преобразования φ, то

$$\pi_n^i = 0,\ \pi_n^n = 0 .$$

Система уравнений Пфаффа [2] семейства a_n принимает следующий вид

$$\nabla M_k^i = M_{kK}^i \omega^K ,$$
$$\nabla M_i^n + M_i^j \pi_j^n - \pi_i^n = M_{iK}^n \omega^K ,$$

$$\omega_n^i = \mu_K^i \omega^K , \qquad \omega_n^n = \mu_K^n \omega^K . \tag{1.3}$$

Здесь ∇ — символ ковариантного дифференцирования.

2. Поля геометрических объектов на семействе a_n

Продолжая систему (1.3), получим

$$\nabla M_{jI}^i + M_k^i \mu_I^k \omega_j^n - M_j^k \mu_I^i \omega_k^n = M_{j\{IJ\}}^i \omega^J ,$$

$$\nabla M_{iI}^n + \mu_I^n \omega_i^n - M_i^j \mu_I^n \omega_j^n + M_j^n \mu_I^j \omega_i^n = M_{i\{IJ\}}^n \omega^J , \tag{2.1}$$

$$\nabla \mu_I^i + \mu_I^n \mu_J^i \omega^J = \mu_{\{IJ\}}^i \omega^J ,\ \nabla \mu_J^n + \mu_J^i \omega_i^n = M_{\{IJ\}}^n \omega^J .$$

Здесь и в дальнейшем фигурные скобки означают симметричность заключенных в них индексов.

Из выражений (2.1) следует, что системы величин $\{M_k^i\}$, $\{\mu_I^i\}$ образуются тензоры; системы величин $\{\mu_j^i, \mu_j^n\}$ образуют линейный однородный объект. Функция $M = M_i^i$ является абсолютным инвариантом

$$dM = M_K \omega^K ,\ M_K \overset{\det}{=} M_{iK}^i . \tag{2.2}$$

Из первого уравнения системы (2.1) при $I = k$ находим

$$dM_I = M^i_{kI}\omega^k_i + M_I\omega^J_I - M^k_i\omega^i_k +$$
$$+ M^i_k\mu^k_I\omega^n_i - M^k_i\mu^i_I\omega^n_k = M^i_{i\{IJ\}}\omega^J,$$

т. е. $dM_I - M_J\omega^J_I = M^i_{i\{IJ\}}\omega^J$.

Следовательно, система величин $\{M_I\}$ — ковариантный вектор. Он порождает тензоры

$$\mathrm{M}^i_j = M^i_j \cdot M_I, \ \overline{\mu}^i_{JK} = \mu^i_J \cdot M_K.$$

3. Последовательность ковариантных симметрических тензоров

Обозначим $M_{\{I_1 I_2 \ldots I_p\}} \overset{\text{det}}{=} M^i_{i\{I_1 I_2 \ldots I_p\}}, p \in N$.

Доказано, что системы величин $M_{\{I_1 I_2\}}$, $M_{\{I_1 I_2 I_3\}}, \ldots$, $M_{\{I_1 I_2 \ldots I_p\}}$, $(p \in N)$ являются симметрическими ковариантными тензорами, т. е.

$$\nabla M_{\{I_1 I_2\}} = M_{\{I_1 I_2 I_3\}}\omega^{I_3}, \ \nabla M_{\{I_1 I_2 I_3\}} = M_{\{I_1 I_2 I_3 I_4\}}\omega^{I_4}, \ldots,$$
$$\ldots, \nabla M_{\{I_1 I_2 \ldots I_p\}} = M_{\{I_1 I_2 \ldots I_p I_{p+1}\}}\omega^{I_{p+1}}.$$

Например, для $p = 2$ имеем

$$\nabla M^i_{j\{I_1 I_2\}} - M^i_{j\{I_2 I_3\}}\omega_{I_1}{}^{I_3} - M^i_{j\{I_1 I_3\}}\omega^{I_3}_{I_2} -$$
$$- M^i_{k\{I_1 I_2\}}\omega^k_j - \mu^i_{I_1} M^k_{jI_2}\omega^n_k - M^k_j\mu^i_{\{I_1 I_2\}}\omega^n_k -$$
$$- M^k_{jI_1}\mu^i_{I_2}\omega^n_k + M^k_{j\{I_1 I_2\}}\omega^i_k + M^k_j\mu^n_{I_1}\mu^i_{I_2}\omega^n_k +$$
$$+ M^k_j\mu^i_{I_1}\mu^n_{I_2}\omega^n_k + \mu^k_{I_2}M^i_{kI_1}\omega^n_j + \mu^k_{I_1}M^i_{kI_2}\omega^n_j + M^i_k\mu^k_{\{I_1 I_2\}}\omega^n_j -$$
$$- \mu^k_{I_1}M^i_k\mu^n_{I_2}\omega^n_j - M^i_k\mu^n_{I_1}\mu^k_{I_2}\omega^n_j = M^i_{j\{I_1 I_2 I_3\}}\omega^{I_3}.$$

Заменяя в этом уравнении индекс j на индекс i, убеждаемся, что после взаимного уничтожения одинаковых слагаемых с противоположными знаками получим

$$\nabla M_{\{I_1 I_2\}} = M_{\{I_1 I_2 I_3\}} \omega^3 .$$

Последовательность симметрических ковариантных тензоров

$$\{M_{I_1 I_2}\},\ \{M_{I_1 I_2 I_3}\}, \ldots,\ \{M_{I_1 I_2 \ldots I_p}\},\ (p \in N)$$

порождает последовательность конгруэнций гиперконусов, так как

$$F_p \overset{\det}{=} M_{I_1 I_2 \ldots I_3} X^{I_1} X^{I_2} \ldots X^{I_p} = 0,\ (p \in N)$$

$$\delta F_p = 0.$$

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
2. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978. Ч. 1.
3. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1980. Ч. 2.

V. Malakhovsky

Fields of geometrical objects of n-parametric family of equipped centroaffine mappings

Fields of geometrical objects of n-parametric family a_n of affine mappings of n-dimensional affine space a_n, each of them conserves the pair of points $\{A, B\}$ and uniquely is defined by these points, is investigated. The sequence of p — covariant symmetric tensors generated by family a_n and the sequence of n-dimensional manifolds of hypercones of the order p $(p \in N)$ is established.