ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I5 1984

УДК 514.75

В.Б. Ким

ИНВАРИАНТНАЯ СВЯЗНОСТЬ, ИНДУЦИРОВАННАЯ КОМПЛЕКСОМ КУБИК

В работе [1] рассмотрен комплекс (трехпараметрическое семейство) V_3 неособенных кубик пространства P_3, плоскости которых также образуют трехпараметрическое семейство. Такой комплекс, как показано в [1], можно задать системой дифференциальных уравнений

$$\nabla a_{ijk} = -a_{ijk}\omega^{\ell}_{\ell} + b^{\ell}_{ijk}\omega^{0}_{\ell} \quad (i,j,k,\ell = 1,2,3). \quad (1)$$

Задание комплекса V_3 эквивалентно заданию на грассмановом многообразии $Gr(2,3)$ поля симметрического тензора a_{ijk}.

Построен оснащающий объект $\{\nu^i\}$, удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla\nu^i - \omega^i_0 = \nu^i\omega^0_0 + \nu^{ij}\omega^0_j, \quad (2)$$

и тензоры

$$B^{\ell}_{ijk} = b^{\ell}_{ijk} + (a_{pij}\delta^{\ell}_k + a_{pjk}\delta^{\ell}_i + a_{pik}\delta^{\ell}_j - a_{ijk}\delta^{\ell}_p)\nu^p. \quad (3)$$
$$a^{ij} = \nu^{ij} - \nu^i\nu^j$$

Объект $\{\nu^i\}$ определяет в пространстве P_3 точку $M = A_0 + \nu^i A_i$, инвариантно присоединенную к плоскости кубики.

В настоящей работе изучается инвариантная связность H, индуцированная построенным оснащением.

1. Рассмотрим величины

$$H^{jk}_i = -\delta^k_i\nu^j. \quad (4)$$

Из (4) и (2) следует, что они удовлетворяют уравнениям

$$\nabla H^{jk}_i + \delta^k_i\omega^j_0 = H^{jk}_i\omega^0_0 + H^{jk\ell}_i\omega^0_\ell, \quad (5)$$

где $H^{jk\ell}_i = -\delta^k_i\nu^{j\ell}$. Введем теперь формы

$$\tilde\omega^j_i = \omega^j_i - H^{jk}_i\omega^0_k, \quad (6)$$

удовлетворяющие структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\tilde\omega^j_i = \tilde\omega^k_i \wedge \tilde\omega^j_k + R^{jk\ell}_i\omega^0_k\wedge\omega^0_\ell. \quad (7)$$

Здесь

$$R^{jk\ell}_i = -\delta^{[k}_i a^{|j|\ell]}. \quad (8)$$

Из (7) следует, что формы $\tilde\omega^j_i$ определяют на многообразии плоскостей кубик инвариантную связность, которую обозначим через H. Тензор кручения-кривизны $R^{jk\ell}_i$ связности H имеет вид (8).

Аналогичная связность на оснащенном семействе m-плоскостей в P_n рассматривалась Г.Ф.Лаптевым и Н.М. Остиану [2]. Она названа ими связностью, полученной проектированием на оснащающей $(n-m-1)$-плоскости.

Поэтому связность H естественно также назвать связностью, полученной проектированием из оснащающей точки M.

2. Заменяя в (I) формы ω^j_i формами связности $\tilde\omega^j_i$, получаем с учетом (3):

$$d a_{ijk} - a_{\ell jk}\tilde\omega^{\ell}_i - a_{i\ell k}\tilde\omega^{\ell}_j - a_{ij\ell}\tilde\omega^{\ell}_k + a_{ijk}\tilde\omega^{\ell}_{\ell} = B^{\ell}_{ijk}\omega^0_\ell.$$

Следовательно, ковариантный дифференциал $\nabla_H a_{ijk}$ тензорного поля $\{a_{ijk}\}$ относительно связности H имеет вид $\nabla_H a_{ijk} = B^{\ell}_{ijk}\omega^0_\ell$. Отсюда следует

Т е о р е м а 1. Тензор a_{ijk} ковариантно постоянен относительно связности H тогда и только тогда, когда тензор B^{ℓ}_{ijk} равен нулю.

Т е о р е м а 2. Связность H будет плоской тогда и только тогда, когда тензор a^{ij} равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условия $a^{ij} = 0$ очевидна в силу (8). Пусть, наоборот, связность H плоская, т.е. $R^{jk\ell}_i = 0$, что равносильно условию

$$\delta^k_i a^{j\ell} - \delta^{\ell}_i a^{jk} = 0. \quad (9)$$

Свернув (9) с δ^i_ℓ, получим $a^{jk}=0$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 3. Связность H будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда тензор a^{ij} симметричен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [3] показано, что связность является эквиаффинной тогда и только тогда, когда тензор Риччи симметричен. Для связности тензор Риччи имеет в силу (8) вид $R^{j\ell}=-2a^{j\ell}$. Следовательно, симметричность тензора Риччи эквивалентна симметричности тензора a^{ij}. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. Комплекс V_3 будет конконичным [1] тогда и только тогда, когда связность H плоская, а тензор a_{ijk} ковариантно постоянен относительно связности H.

Справедливость этой теоремы следует из теорем 1 и 2 и теоремы 2 работы [1].

Список литературы

1. Ким.В.Б. О некоторых классах комплексов кубик. Кемерово, 1982, 17с. (Деп. в ВИНИТИ 18.02.1982, № 734-82 деп.).

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I.– Тр. Геометрич. семинара ВИНИТИ, 1971, 3, с. 49-94.

3. Норден А.П. Пространства аффинной связности.–М.; Наука, 1976.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 15 1984

УДК 514.75

С.В. К и р е е в а

ГЕОМЕТРИЯ ОТОБРАЖЕНИЯ, КАЖДАЯ ЛИНИЯ КОТОРОГО – ДВОЙНАЯ

В данной работе в n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается геометрия отображения, в котором каждая линия будет двойной, причем касательные к этим двойным линиям пересекаются в точках, принадлежащих заданным гиперплоскостям.

п. I. В проективном пространстве P_n задано отображение f области Ω в область $\bar\Omega$: $A\to B=f(A)\neq A$. Области Ω, $\bar\Omega$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей $\Pi_{n-1}(A)=\Pi_{n-1}(B)$. При отображении f сеть $\Sigma_n\subset\Omega$ переходит в сеть $\bar\Sigma_n\subset\bar\Omega$. В области Ω задан репер $R^A=\{A,A_i\}$ ($i=1,2\dots,n$) , где (AA_i) -касательная к линии ω^i сети Σ_n, а A_i -нормальная точка направления (AA_i). Репер $R^B=\{B,B_i\}$ -образ репера R^A в отображении f ; (BB_i)-касательная к линии $\bar\omega^i=\omega^i$ сети $\bar\Sigma_n$, $B_i\in\Pi_{n-1}(A)$. Точки B, B_i в репере R^A имеют следующие представления:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i, \quad \vec{B}_i=\gamma^j_i\vec{A}_j. \tag{1}$$

В данной работе индексы $i,j,k,\ell,\dots$ принимают значения $1,2,\dots,n$, а индексы α,β,γ -значения $0,1,2,\dots n$.

Отображение f определяется уравнениями: $\bar\omega^i=\omega^i$.

В данной работе будет рассмотрен частный случай отображения f, когда произвольная линия ℓ области Ω будет переходить в такую линию $\bar\ell$, что касательные к ним пересекаются в точке, принадлежащей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$. Такое отображение в данной работе будем обозначать через