УДК 514.76

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
arturkuleshov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6856-4126
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-4

О скалярных компонентах канонической формы на расслоениях реперов высших порядков

Произведен подробный вывод выражений для скалярных компонент канонической формы на расслоениях реперов высших порядков над гладким многообразием. Каноническая форма на расслоении реперов порядка $p+1$ над n-мерным гладким многообразием является векторнозначной дифференциальной 1-формой, принимающей значения в касательном пространстве к расслоению реперов порядка p над n-мерным арифметическим пространством, в единице дифференциальной группы. Ее скалярные компоненты являются дифференциальными 1-формами и представляют собой коэффициенты ее разложения по натуральному базису данного касательного пространства. Поскольку каждый репер представляется некоторым полиномиальным отображением в заданной локальной карте на гладком многообразии, то касательный вектор к расслоению реперов представляется разложением однопараметрического семейства полиномиальных отображений по формуле Маклорена первого порядка относительно параметра. Искомые формулы получаются приравниванием коэффициентов двух разложений для одного и того же касательного вектора.

Ключевые слова: гладкое многообразие, струя, расслоение реперов, каноническая форма

Поступила в редакцию 05.06.2024 г.

1. Введение. В статье [4] нами дано подробное доказательство корректности построения канонической формы Θ на расслоении реперов p-го порядка, где $p \in \mathbb{N}$. Цель настоящей работы — произвести настолько же подробный вывод выражений для ее скалярных компонент в локальных координатах. Необходимость в такой работе вызвана тем, что в имеющейся литературе (см., напр., [1; 2; 5—9]) таковой вывод, по всей видимости, отсутствует. Так, например, в статье [1] лишь указано, что искомые выражения получаются из формулы, имеющей в наших обозначениях вид (20), однако последняя приведена без обоснования. Наша работа призвана восполнить подобные пробелы.

2. Список обозначений [4]:

M — гладкое многообразие, $\dim M = n$;

$j_0^p\varphi$ — p-струя гладкого отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$ с началом $0 \in \mathbb{R}^n$ (φ — отображение, представляющее репер θ);

D_n^p — дифференциальная группа порядка p с единицей e и алгеброй Ли $\mathfrak{g}_n^p$;

$H^p(M)$ — расслоение p-реперов («p-й этаж») над гладким многообразием M со структурной группой $D_n^p \subset H^p(\mathbb{R}^n)$ и канонической проекцией $\pi^p\colon H^p(M) \to M$;

$\pi_q^p\colon H^p(M) \to H^q(M)$ — проекция p-го этажа на q-й;

$T_\theta H^p(M)$ — касательное пространство к расслоению $H^p(M)$ в точке $\theta \in H^p(M)$;

$TH^p(M)$ — касательное расслоение к $H^p(M)$;

$\varphi^p\colon H^p(\mathbb{R}^n) \to H^p(M)$ — p-е продолжение отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$, действующее по правилу $j_0^p\psi \mapsto j_0^p(\varphi \circ \psi)$, где $j_0^p\psi \in H^p(\mathbb{R}^n)$;

$\Phi_\theta = d_e\varphi^p\colon T_eH^p(\mathbb{R}^n) \to T_\theta H^p(M)$ — дифференциал отображенияφ^p в точке $e \in H^p(\mathbb{R}^n)$;

$x = (x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты на многообразии M;

$(x^i, x^i_j, x^i_{jk}, \dots, x^i_{j_1 \dots j_p})$ — соответствующие локальные координаты на расслоении $H^p(M)$, симметричные по всем нижним индексам, пробегающим значения от 1 до n;

$t = (t^1, \dots, t^n)$ — стандартные координаты на $\mathbb{R}^n$;

$(u^i, u^i_j, u^i_{jk}, \dots, u^i_{j_1 \dots j_p})$ — соответствующие глобальные координаты на расслоении $H^p(\mathbb{R}^n)$, симметричные по всем нижним индексам;

$a_{(i_1 \dots i_p)} := \frac{1}{p!} \sum_\sigma a_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)}$ — симметрирование по индексам $i_1, \dots, i_p$ (здесь суммирование производится по всевозможным перестановкам σ данных индексов);

$a_i b^i := \sum_i a_i b^i$ — суммирование по повторяющемуся индексу.

3. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Напомним [7], что каноническая форма Θ на расслоении $H^{p+1}(M)$ — это векторнозначная дифференциальная 1-форма

$$\Theta: TH^{p+1}(M) \to T_e H^p(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^p_n,$$

определенная следующим образом.

Пусть $X \in T_\theta H^{p+1}(M)$, где $\theta = j_0^{p+1}\varphi \in H^{p+1}(M)$, и пусть $\underline{X} := d\pi_p^{p+1}(X) \in T_{\underline{\theta}} H^p(M)$, где $\underline{\theta} = \pi_p^{p+1}(\theta)$. Тогда по определению полагают

$$\Theta(X) := \Phi_{\underline{\theta}}^{-1}(\underline{X}). \tag{1}$$

Обозначим через $\overline{x}^i$, $\overline{x}^i_j$, …, $\overline{x}^i_{j_1 \dots j_{p+1}}$ локальные координаты репера θ, т. е. положим

$$\overline{x}^i := x^i(\theta), \quad \overline{x}^i_j := x^i_j(\theta), \dots, \overline{x}^i_{j_1 \dots j_{p+1}} := x^i_{j_1 \dots j_{p+1}}(\theta). \tag{2}$$

Разложим вектор X по натуральному базису касательного пространства $T_\theta H^{p+1}(M)$:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_\theta + \xi^i_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}\bigg|_\theta + \xi^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i_{jk}}\bigg|_\theta + \dots + \xi^i_{j_1 \dots j_{p+1}} \frac{\partial}{\partial x^i_{j_1 \dots j_{p+1}}}\bigg|_\theta,$$

где

$$\xi^i := dx^i(X),\ \xi^i_j := dx^i_j(X),\ \dots,\ \xi^i_{j_1 \dots j_{p+1}} := dx^i_{j_1 \dots j_{p+1}}(X). \quad (3)$$

Тогда

$$\underline{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\underline{\theta}} + \xi^i_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}\bigg|_{\underline{\theta}} + \dots + \xi^i_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial}{\partial x^i_{j_1 \dots j_p}}\bigg|_{\underline{\theta}}. \quad (4)$$

Разложим форму Θ по скалярным компонентам $\omega^i,\ \omega^i_j,\ \dots,\ \omega^i_{j_1 \dots j_p}$ относительно натурального базиса касательного пространства $T_e H^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\Theta = \omega^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^i}\bigg|_e + \omega^i_j \otimes \frac{\partial}{\partial u^i_j}\bigg|_e + \dots + \omega^i_{j_1 \dots j_p} \otimes \frac{\partial}{\partial u^i_{j_1 \dots j_p}}\bigg|_e,$$

где

$$\omega^i,\ \omega^i_j,\ \dots,\ \omega^i_{j_1 \dots j_p} \colon TH^{p+1}(M) \to \mathbb{R}.$$

Обозначим вектор $V := \Theta(X)$, тогда V имеет следующее разложение по данному базису:

$$V = v^i \frac{\partial}{\partial u^i}\bigg|_e + v^i_j \frac{\partial}{\partial u^i_j}\bigg|_e + \dots + v^i_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial}{\partial u^i_{j_1 \dots j_p}}\bigg|_e, \quad (5)$$

где

$$v^i := \omega^i(X),\ v^i_j := \omega^i_j(X),\ \dots,\ v^i_{j_1 \dots j_p} := \omega^i_{j_1 \dots j_p}(X). \quad (6)$$

При этом равенство (1) можно представить в виде

$$\underline{X} = \Phi_\theta(V). \quad (7)$$

Дальнейший ход действий следующий: используя (7), мы получим соотношения, связывающие коэффициенты (3) и (6). Эти соотношения определят в неявной форме искомые выражения для скалярных компонент $\omega^i,\ \omega^i_j,\ \dots,\ \omega^i_{j_1 \dots j_p}$ канонической формы Θ.

4. Разложим гладкое отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to M$, представляющее репер θ, по формуле Маклорена порядка $p+1$ в локальных координатах на M. Коэффициентами такого разложения являются координаты данного репера:

$$\varphi^i(t) = \overline{x}^i + \overline{x}^i_j t^j + \frac{1}{2!}\overline{x}^i_{jk} t^j t^k + \cdots +$$

$$+\tfrac{1}{p!}\overline{x}^i_{j_1\dots j_p} t^{j_1} \dots t^{j_p} + \tfrac{1}{(p+1)!}\overline{x}^i_{j_1\dots j_{p+1}} t^{j_1} \dots t^{j_{p+1}} + o(\rho^{p+1}), \quad (8)$$

где

$$\rho = \sqrt{(t^1)^2 + \cdots + (t^n)^2}.$$

Очевидно, что полиномы

$$P^i_\theta(t) := \overline{x}^i + \overline{x}^i_j t + \frac{1}{2!}\overline{x}^i_{jk} t^j t^k + \cdots + \frac{1}{(p+1)!}\overline{x}^i_{j_1\dots j_{p+1}} t^{j_1} \dots t^{j_{p+1}},$$

фигурирующие в правой части (8), зависят лишь от репера θ, но не от выбора его представителя φ. Рассматривая их с точностью до $o(\rho^p)$, получим

$$P^i_\theta(t) = P^i_{\underline{\theta}}(t) + o(\rho^p),$$

где

$$P^i_{\underline{\theta}}(t) := \overline{x}^i + \overline{x}^i_j t + \tfrac{1}{2!}\overline{x}^i_{jk} t^j t^k + \cdots + \tfrac{1}{p!}\overline{x}^i_{j_1\dots j_p} t^{j_1} \dots t^{j_p}. \quad (9)$$

Действие p-го продолжения φ^p можно выразить следующим образом. Пусть $\eta = j^p_0\psi \in H^p(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\psi^i(t) = P^i_\eta(t) + o(\rho^p),$$

где $P^i_\eta(t)$ — многочлены от $t^1, \ \dots, \ t^n$ степени не выше p каждый. Тогда образ репера η при отображении φ^p есть p-струя композиции $\varphi \circ \psi$ с началом $0 \in \mathbb{R}^n$, координатное представление которой имеет вид

$$(\varphi \circ \psi)^i(t) = P^i_\theta\left(P^1_\eta(t), \ \dots, \ P^n_\eta(t)\right) + o(\rho^p). \quad (10)$$

5. Как известно (см., напр., [3; 7]), всякий касательный вектор к гладкому многообразию есть вектор скорости некоторого пути на этом многообразии. Тогда вектор $V \in T_e H^p(\mathbb{R}^n)$ можно описать следующим образом. Пусть

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to H^p(\mathbb{R}^n),\ \varepsilon \mapsto \gamma(\varepsilon)$$

— путь на $H^p(\mathbb{R}^n)$ такой, что V — его вектор скорости при $\varepsilon = 0$. Пусть уравнения пути γ в глобальной карте на $H^p(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$u^i = u^i(\varepsilon),\ u^i_j = u^i_j(\varepsilon),\ \ldots,\ u^i_{j_1\ldots j_p} = u^i_{j_1\ldots j_p}(\varepsilon). \tag{11}$$

Заметим, что, поскольку $V \in T_e H^p(\mathbb{R}^n)$, то $\gamma(0) = e$. Единица e имеет координаты $u^i(e) = 0$, $u^i_j(e) = \delta^i_j$, $u^i_{jk}(e) = 0$, …, $u^i_{j_1\ldots j_p}(e) = 0$. Тогда в силу (5) уравнения (11) с точностью до бесконечно малых высших порядков относительно ε можно представить в виде

$$u^i = v^i\varepsilon + o(\varepsilon),\quad u^i_j = \delta^i_j + v^i_j\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$u^i_{jk}(\varepsilon) = v^i_{jk}\varepsilon + o(\varepsilon),\ \ldots,\ u^i_{j_1\ldots j_p}(\varepsilon) = v^i_{j_1\ldots j_p}\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{12}$$

Пусть $\gamma(\varepsilon) = j^p_0\psi_\varepsilon$, тогда в силу (11) имеем

$$\psi^i_\varepsilon(t) = u^i(\varepsilon) + u^i_j(\varepsilon)t^j + \frac{1}{2!}u^i_{jk}(\varepsilon)t^j t^k + \cdots +$$
$$+\frac{1}{p!}u^i_{j_1\ldots j_p}(\varepsilon)t^{j_1}\ldots t^{j_p} + o(\rho^p). \tag{13}$$

Формула (13) с учетом (12) принимает вид

$$\psi^i_\varepsilon(t) = t^i + P^i_V(t)\varepsilon + o(\varepsilon), \tag{14}$$

где

$$P^i_V(t) := v^i + \frac{1}{1!}v^i_j t^j + \frac{1}{2!}v^i_{jk}t^j t^k + \cdots + \frac{1}{p!}v^i_{j_1\ldots j_p}t^{j_1}\ldots t^{j_p}. \tag{15}$$

Поскольку Φ_θ — дифференциал отображения φ^p, то вектор $\Phi_\theta(V)$ является касательным вектором к пути

$$\tilde{\gamma} = \varphi^p \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to H^p(M)$$

на $H^p(M)$. Тогда в силу (10) координатное выражение для композиции $\varphi_\varepsilon := \varphi \circ \psi_\varepsilon$ получается путем замены в формуле (8) каждой из переменных t^i на $\psi_\varepsilon^i(t)$ с последующей подстановкой выражения (14):

$$\varphi_\varepsilon^i(t) = (\varphi \circ \psi_\varepsilon)^i(t) = \overline{x}^i + \overline{x}_j^i\left(t^j + P_V^j(t)\varepsilon\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\overline{x}_{jk}^i\left(t^j + P_V^j(t)\varepsilon\right)\left(t^k + P_V^k(t)\varepsilon\right) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{p!}\overline{x}_{j_1\ldots j_{p+1}}^i\left(t^{j_1} + P_V^{j_1}(t)\varepsilon\right)\ldots\left(t^{j_{p+1}} + P_V^{j_{p+1}}(t)\varepsilon\right) +$$

$$+o(\rho^{p+1}) + o(\varepsilon).$$

Раскрывая скобки и используя симметрию всех $\overline{x}_{jk}^i, \ldots, \overline{x}_{j_1\ldots j_{p+1}}^i$ по всем нижним индексам, получим с учетом (9), что

$$\varphi_\varepsilon^i(t) = P_\theta^i(t) + (\overline{x}_m^i + \frac{1}{(2-1)!}\overline{x}_{mj}^i t^j + \frac{1}{(3-1)!}\overline{x}_{mjk}^i t^j t^k +$$

$$+\cdots+\frac{1}{p!}\overline{x}_{mj_1\ldots j_p}^i t^{j_1}\ldots t^{j_p})P_V^m\left(t^k\right)\varepsilon + o(\rho^{p+1}) + o(\varepsilon) =$$

$$= P_{\underline{\theta}}^i(t) + \left(\sum_{s=0}^{p}\frac{1}{s!}\overline{x}_{mj_1\ldots j_s}^i t^{j_1}\ldots t^{j_s}\right)P_V^m(t)\varepsilon +$$

$$+o(\rho^p) + o(\varepsilon). \qquad (16)$$

6. Представим координатное выражение $\varphi_\varepsilon^i(t)$ для пути $\tilde{\gamma}$ в другой форме, используя равенство (7). А именно, в силу равенства (7) касательный вектор к пути $\tilde{\gamma}$ при $\varepsilon = 0$ равен $\underline{X}$. Координатное выражение для $\underline{X}$ имеет вид (4), причем $\tilde{\gamma}(0) = \underline{\theta}$, а значит, уравнения пути $\tilde{\gamma}$ в локальных координатах на $H^p(M)$ имеют вид

$$x^i(\varepsilon) = \overline{x}^i + \xi^i\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$x_{j_1\ldots j_s}^i(\varepsilon) = \overline{x}_{j_1\ldots j_s}^i + \xi_{j_1\ldots j_s}^i\varepsilon + o(\varepsilon), \quad s = \overline{1,p}. \qquad (17)$$

Тогда путь $\tilde{\gamma}$ имеет следующее координатное представление:

$$\varphi_{\varepsilon}^{i}(t) = x^{i}(\varepsilon) + x_{j}^{i}(\varepsilon)t^{j} +$$

$$+\frac{1}{2!}x_{jk}^{i}(\varepsilon)t^{j}t^{k} + \cdots + \frac{1}{p!}x_{j_1\dots j_p}^{i}(\varepsilon)t^{j_1}\dots t^{j_p} + o(\rho^{p}) =$$

$$= (\overline{x}^{i} + \xi^{i}\varepsilon) + (\overline{x}_{j}^{i} + \xi_{j}^{i}\varepsilon)t^{j} + \frac{1}{2!}(\overline{x}_{jk}^{i} + \xi_{jk}^{i}\varepsilon)t^{j}t^{k} + \cdots +$$

$$+\frac{1}{p!}\left(\overline{x}_{j_1\dots j_p}^{i} + \xi_{j_1\dots j_p}^{i}\varepsilon\right)t^{j_1}\dots t^{j_p} + o(\rho^{p}) + o(\varepsilon) =$$

$$= P_{\underline{\theta}}^{i}(t) + P_{\underline{X}}^{i}(t)\varepsilon + o(\rho^{p}) + o(\varepsilon), \qquad (18)$$

где

$$P_{\underline{X}}^{i}(t) = \xi^{i} + \xi_{j}^{i}t^{j} + \frac{1}{2!}\xi_{jk}^{i}t^{j}t^{k} + \cdots + \frac{1}{p!}\xi_{j_1\dots j_p}^{i}t^{j_1}\dots t^{j_p}. \qquad (19)$$

Приравняем в (16) и (18) члены при первой степени ε:

$$P_{\underline{X}}^{i}(t) = \left(\sum_{s=0}^{p}\frac{1}{s!}\overline{x}_{mj_1\dots j_s}^{i}t^{j_1}\dots t^{j_s}\right)P_{V}^{m}\left(t^{k}\right) + o(\rho^{p}).$$

Распишем полученное равенство подробнее с учетом формул (15) и (19):

$$\xi^{i} + \xi_{j}^{i}t^{j} + \frac{1}{2!}\xi_{jk}^{i}t^{j}t^{k} + \cdots + \frac{1}{p!}\xi_{j_1\dots j_p}^{i}t^{j_1}\dots t^{j_p} =$$

$$= \left(\overline{x}_{m}^{i} + \frac{1}{1!}\overline{x}_{mj}^{i}t^{j} + \frac{1}{2!}\overline{x}_{mjk}^{i}t^{j}t^{k} + \cdots + \frac{1}{p!}\overline{x}_{mj_1\dots j_p}^{i}t^{j_1}\dots t^{j_p}\right)\times$$

$$\times\left(v^{m} + \frac{1}{1!}v_{j}^{m}t^{j} + \cdots + \frac{1}{p!}v_{j_1\dots j_p}^{m}t^{j_1}\dots t^{j_p}\right) + o(\rho^{p}). \qquad (20)$$

Раскрывая скобки в правой части (20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых мономах вида $t^{j_1}\dots t^{j_s}$, получим

$$\xi_{j_1\dots j_s}^{i} = \sum_{\alpha=0}^{s}\frac{s!}{\alpha!(s-\alpha)!}\overline{x}_{m(j_1\dots j_\alpha}^{i}v_{j_{\alpha+1}\dots j_s)}^{m}, \qquad (21)$$

где $s = \overline{0,p}$. С учетом обозначений (2, 3) и (6) формула (21) принимает вид

$$dx_{j_1\dots j_s}^{i}(X) = \sum_{\alpha=0}^{s}\frac{s!}{\alpha!(s-\alpha)!}x_{m(j_1\dots j_\alpha}^{i}(\theta)\,\omega_{j_{\alpha+1}\dots j_s)}^{m}(X),$$

и в силу произвола выбора вектора X получаем окончательно:

Теорема ([1; 2]). *Скалярные компоненты* ω^i, ω^i_j, ... , $\omega^i_{j_1\dots j_p}$ *канонической формы* Θ *на расслоении* $H^{p+1}(M)$ *определяются по следующим неявным формулам:*

$$dx^i_{j_1\dots j_s} = \sum_{\alpha=0}^{s} \frac{s!}{\alpha!(s-\alpha)!} x^i_{m(j_1\dots j_\alpha} \omega^m_{j_{\alpha+1}\dots j_s)}, \quad s = \overline{0,p}. \qquad (22)$$

Замечание. Последовательно придавая индексу s значения $0, 1, 2, \dots, p$, получаем из (22) следующие хорошо известные формулы для ω^i, ω^i_j, ..., $\omega^i_{j_1\dots j_p}$, имеющие рекуррентный вид:

$$\omega^i = \tilde{x}^i_m dx^m, \quad \omega^i_j = \tilde{x}^i_m \left(x^m_k dx^k_j - x^m_{jk}\omega^k\right),$$

$$\omega^i_{j_1\dots j_s} = \tilde{x}^i_m \left(dx^m_{j_1\dots j_s} - \sum_{\alpha=1}^{s} C^\alpha_s x^i_{m(j_1\dots j_\alpha} \omega^m_{j_{\alpha+1}\dots j_s)}\right), \ s = \overline{2,p},$$

где матрица $(\tilde{x}^i_j)$ — обратная к матрице (x^i_j), т. е. $\tilde{x}^i_k x^k_j = \delta^i_j$.

Список литературы

1. *Евтушик Л. Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Тр. Геом. семин. М., 1969. Т. 2. С. 119—150.

2. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. М., 1979. Т. 9. С. 5—246.

3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М., 1981.

4. *Кулешов А. В.* О конструкции канонической формы на расслоении реперов // ДГМФ. 2023. №54 (2). С. 5—17. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-1.

5. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

6. *Юмагужин В. А.* Интегрируемые геометрические структуры конечного типа // Фундамент. и прикл. матем. 2004. Т. 10, вып. 1. С. 255—269.

7. *Kolář I., Michor P., Slovák J.* Natural operations in differential geometry. Berlin ; Heidelberg, 1993.

8. *Kolář I.* Canonical forms on the prolongations of principalfibre bundles // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1971. Vol. 16. P. 1091—1106.

9. *Kurek J., Mikulski W.* Canonical vector valued 1-forms on higher order principal prolongations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2008. Vol. 29. P. 24—26. https://doi.org/10.1134/S199508020801006X.

Для цитирования: *Кулешов А.В.* О скалярных компонентах канонической формы на расслоениях реперов высших порядков // ДГМФ. 2024. № 55 (1). С. 34—44. doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-4.

MSC 2010: 58A10, 58A20, 58A32

A. V. Kuleshov
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
arturkuleshov@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-4

On the scalar components of the canonical form on higher order frame bundles

Submitted on June 5, 2024

A detailed obtaining of the expressions for the scalar components of the canonical form on higher order frame bundles over a smooth manifold has been done. The canonical form on the frame bundle of order $p+1$ over an n-dimensional smooth manifold is a vector-valued differential 1-form with values in the tangent space to the p-th order frame bundle over the n-dimensional arithmetical space at the unit of the p-th order differential group. The scalar components of the canonical form are its coefficients with respect to natural basis of the tangent space. For every frame, there exists a polynomial mapping representing the frame in a given local chart on the manifold. Therefore, for any tangent vector to the frame bundle there is a first order Taylor expansion of one-parametric family of polynomial mappings representing the tangent vector. We obtain the formulas of the scalar components from the equations for coefficients of the two expansions for some tangent vector.

Keywords: smooth manifold, jet, frame bundle, canonical form

References

1. *Evtushik, L.E.:* Differential connections and infinitesimal transformations of a prolonged pseudogroup. Tr. Geom. Sem., 2, 119—150 (1969).

2. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet. Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

3. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Foundations of differential geometry. Interscience publishers, New York, London (1963).

4. *Kuleshov A. V.:* On construction of the canonical form on the frame bundle. DGMF, **54**:2, 5—17 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-2-1.

5. *Laptev, G.F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

6. *Yumaguzhin, V.A.:* Finite-type integrable geometric structures. J. Math. Sci., **136**:6, 4401—4410 (2006).

7. *Kolář, I., Michor, P., Slovák J.:* Natural operations in differential geometry. Springer, Berlin (1993).

8. *Kolář, I.:* Canonical forms on the prolongations of principalfibre bundles. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 16, 1091—1106 (1971).

9. *Kurek, J., Mikulski, W.:* Canonical vector valued 1-forms on higher order principal prolongations. Lobachevskii J. Math., **29**:1, 24—26 (2008). https://doi.org/10.1134/S199508020801006X.

For citation: Kuleshov, A.V. On the scalar components of the canonical form on higher order frame bundles. DGMF, 55 (1), 34—44 (2024). doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-4.