УДК 514.76

А. И. Егоров
Пензенский государственный университет
gormj@mail.ru

Перспективы развития метода Егорова в теории движений

Доказано, что если пространство аффинной связности с тензором кручения связности $\Omega^i_{jk} \neq 0$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 3n + 20$ $(r > n^2 - 5n + 30)$, то необходимо, чтобы

$$\Omega^i_{jk} = \delta^i_j \Omega_k - \delta^i_k \Omega_j + A^i B_{jk}$$

$$(\Omega^i_{jk} = \delta^i_j \Omega_k - \delta^i_k \Omega_j + A^i B_{jk} + C^i D_{jk})$$

в любой системе координат.

Ключевые слова: группа движений, тензор кручения связности.

В предлагаемой работе изучаются движения в пространствах $\Omega_n(x)$ аффинной связности с тензором кручения связности $\Omega^i_{jk} \neq 0$, $(\Omega^i_{jk} = \Lambda^i_{[jk]})$, $(i, j, k = 1, 2, ..., n)$.

Выдающийся математик И. П. Егоров при изучении групп движений в пространствах $\Omega_n(x)$ применил очень тонкий и оригинальный метод, основанный на изучении условий интегрируемости уравнений движений исследуемых пространств, что позволило ему доказать очень важную и интересную теорему [1]:

Теорема 1. *Если пространство* $\Omega_n(x)$ *допускает группу движений* G_r *порядка* $r > n^2 - 2n + 6$, *то тензор кручения связности* Ω^i_{jk} *имеет вид*

$$\Omega^i_{jk} = \delta^i_j \Omega_k - \delta^i_k \Omega_j \quad (i, j, k = 1,2,...,n) . \tag{1}$$

При получении этого результата профессор И. П. Егоров рассматривал такие равенства:

$$\Omega^i_{jk} = 0, \quad (i \neq j, k), \tag{2}$$

при условии, что $r > n^2 - 2n + 6$.

Поскольку равенства (2) имеют место в любой системе координат, из них сразу следуют равенства (1).

Пространства $\Omega_n(x)$ со структурой тензора кручения связности (1) будем называть пространствами полусимметрической связности индекса (0) и обозначать в дальнейшем символом $\Omega^{(0)}_n(x)$.

В основу метода профессора И. П. Егорова, по существу, положено изучение порядков групп изотропии точки *M*, которые, как известно, в топологическом смысле изоморфны стационарной группе в этой точке M.

При изучении подвижности при $r > n^2 - 3n + 20$ $\left(r > n^2 - 5n + 30\right)$ пространства аффинной связности $\Omega_n(x)$, вместо равенств (2) необходимо рассматривать уже более общие равенства вида

$$\alpha = \Delta^{(ab)}_{(cdem)} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \Omega^a_{cd} & \Omega^a_{em} \\ \Omega^b_{cd} & \Omega^b_{em} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left(a, b \neq c, d, e, m\right), \ \left(a, b, c, d, ... = 1,2,....,n\right)$$

или

$$\left(\beta = \varDelta^{(abc)}_{(demrst)} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \varOmega^a_{de} & \varOmega^a_{mr} & \varOmega^a_{st} \\ \varOmega^b_{de} & \varOmega^b_{mr} & \varOmega^b_{st} \\ \varOmega^c_{de} & \varOmega^c_{mr} & \varOmega^c_{st} \end{vmatrix} = 0\right), \quad (a,b,c \neq d,e,m,r,s).$$

В этом и состоят дальнейшие перспективы развития метода И. П. Егорова в теории движений. В других случаях надо увеличивать порядок определителей в согласии с порядками групп изотропии $H_{r_0}(M_0)$ пространства $\varOmega_n(x)$.

Введем в рассмотрение базисные составляющие

$$\varOmega^2_{bc} \overset{def}{=} B_{bc}, \ (b,c = 1,2,...,n).$$

Будем в дальнейшем изучать матрицу

$$\left\| T^\alpha_\beta \begin{pmatrix} i \\ jk \end{pmatrix} \right\|, \tag{П}$$

где положено по определению:

$$T^\alpha_\beta \begin{pmatrix} i \\ jk \end{pmatrix} \overset{def}{=} \delta^\alpha_j \varOmega^i_{\beta k} + \delta^\alpha_k \varOmega^i_{j\beta} - \delta^i_\beta \varOmega^\alpha_{jk}.$$

Элементами этой матрицы являются коэффициенты при функциях u^β_α $\left(u^\beta_\alpha = v^\beta_{,\alpha}\right)$ в уравнениях

$$D\varOmega^i_{jk} = 0,$$

где D — символ производной Ли вдоль векторного поля $v^\alpha(x)$. Матрицу (П) будем называть матрицей Егорова, так как он ее рассматривал впервые.

Если предположить, что определитель второго порядка

$$\alpha = \varDelta^{(25)}_{(1334)} = \begin{vmatrix} B_{13} & B_{34} \\ \varOmega^5_{13} & \varOmega^5_{34} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то ему можно отнести минор (A) порядка $(4n-20)$ матрицы (Π), величина которого равна степени определителя α, т. е.

$$(A)=e\alpha^{2n-10}, \text{ где } e=\pm 1.$$

Этот минор (A) составлен из коэффициентов при функциях $u_i^1, u_j^4, u_2^4, u_2^k, u_5^4, u_5^e$ в матрицах

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \delta 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 34 \end{pmatrix},$$

$$(i, j, \delta, r, \tau, \sigma = 6,7,...,n; k, e, s, t = 7,8,...,n).$$

Лемма 1. *Если пространство $\Omega_n(x)$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 3n + 20$, то необходимо, чтобы все определители второго порядка имели вид*

$$\alpha = \Delta_{(cdde)}^{(2b)} = \begin{vmatrix} B_{cd} & B_{de} \\ \Omega_{cd}^b & \Omega_{de}^b \end{vmatrix} = 0, \quad \Omega_{ac}^b = A^b B_{ac} \quad (b \neq a, c)$$

$$\Pi_{ac}^b = \Omega_{ac}^b - A^b B_{ac} = 0, (b \neq a, c). \tag{3}$$

Из равенств (3) следует, что

$$\Pi_{jk}^i = \delta_j^i \Omega_k - \delta_k^i \Omega_j$$

или

$$\Omega_{jk}^i = \delta_j^i \Omega_k - \delta_k^i \Omega_j + A^i B_{jk} \quad (i, j, k = 1,2,...,n). \tag{4}$$

Замечание 1. Если определители второго порядка вида

$$\alpha = \Delta_{(cdde)}^{(2b)} = 0,$$

то более общие определители вида

$$\beta = \Delta_{(cdem)}^{(2b)} = 0 \quad (2b \neq c, d, e, m).$$

Это всегда будет выполняться при размерности группы движений порядка $r > n^2 - 3n + 20$.

Собирая полученные выше результаты, мы приходим в следующему выводу.

Теорема 1. *Если пространство $\Omega_n(x)$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 3n + 20$, то необходимо, чтобы в любой системе координат выполнялось условие (4).*

Замечание 2. Если определитель $\alpha \neq 0$, то одно из произведений не равно нулю:

$$\Omega_{13}^2 \cdot \Omega_{34}^5 \neq 0 \quad \left(\Omega_{13}^5 \cdot \Omega_{34}^2 \neq 0\right),$$

следовательно, можно считать, что, например,

$$\Omega_{13}^2 \neq 0, \Omega_{34}^5 \neq 0.$$

Это позволяет построить новый определить (B) порядка уже $(5n-25)$ матрицы (Π), составленной из коэффициентов при функциях $u_i^1, u_j^4, u_2^4, u_2^k, u_5^4, u_5^e, u_\tau^3$ в матрицах

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \delta 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1\sigma \end{pmatrix},$$

$$(i, j, \delta, r, \tau, \sigma = 6,7,...,n;\ k, e, s, t = 7,8,...,n),$$

который равен

$$(B) = e\alpha^{2n-10} \cdot \left(\Omega_{13}^2\right)^{n-5} \neq 0 \quad (e = \pm 1),$$

т. е. отличен от нуля.

Теорема 2. *Если пространство $\Omega_n(x)$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 4n + 25$, то рассматриваемое пространство есть необходимо пространство $\Omega_n^{(1)}(x)$, т. е. выполняется условие (4).*

Эта теорема усиливает результат теоремы 1.

Если случится, что

$$\Omega^{i}_{jk} = \delta^{i}_{j}\Omega_{k} - \delta^{i}_{k}\Omega_{j} + A^{i}B_{jk} + C^{i}D_{jk}, \qquad (5)$$

то такое пространство по определению называется пространством полусимметрической связности индекса (2) и обозначается $\Omega^{(2)}_{n}(x)$. Для получения структуры (5) необходимо рассматривать уже определители третьего порядка следующей структуры:

$$\Delta^{(abc)}_{(demkrp)} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \Omega^{a}_{de} & \Omega^{a}_{mk} & \Omega^{a}_{rp} \\ \Omega^{b}_{de} & \Omega^{b}_{mk} & \Omega^{b}_{rp} \\ \Omega^{c}_{de} & \Omega^{c}_{mk} & \Omega^{c}_{rp} \end{vmatrix} = 0 \;\; \left(a, b, c \neq d, e, m, k, r, p\right)$$

в любой системе координат. Вычисления указанных выше определителей матрицы (Π) весьма трудоемкие. Во всех приведенных рассуждениях размерность n пространства $\Omega_{n}(x)$ предполагается достаточно большой.

Можно убедиться, что если порядок группы движений G_{r} будет

$$r > n^{2} - 5n + 30,$$

то тензор кручения связности Ω^{i}_{jk} необходимо имеет структуру (5), характеризующую уже пространство $\Omega^{(2)}_{n}(x)$.

Замечание 3. Применение других известных методов исследований Ю. Муто, Г. Вранчану [1] приводит к появлению многих возможных случаев, что очень затрудняет получение результатов, которые мы привели в настоящей работе.

Список литературы

1. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. зап. Пензен. пед. ин-та. Казань, 1965. С. 3—179.

A. Egorov

Trends for the development of Egorov's method in the theory of movements

This work proves that if the space of affine connection with the torsion tensor $\Omega^i_{jk} \neq 0$ allows the group of moving G_r of order $r > n^2 - 3n + 20$ $(r > n^2 - 5n + 30)$, it is necessary that

$$\Omega^i_{jk} = \delta^i_j \Omega_k - \delta^i_k \Omega_j + A^i B_{jk}$$

$$(\Omega^i_{jk} = \delta^i_j \Omega_k - \delta^i_k \Omega_j + A^i B_{jk} + C^i D_{jk})$$

in any coordinate system.

УДК 514.75

Н. А. Елисеева
Калининградский государственный технический университет
ne2705@gmail.com

Поля фундаментальных и охваченных объектов гиперповерхности Ω_{n-1}, оснащенной распределениями

Продолжается исследование гиперповерхности $\Omega_{n-1} \subset P_n$, несущей тройку сильно взаимных подрасслоений [1]. Построены поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов гиперповерхности Ω_{n-1}.

Ключевые слова: гиперповерхность, распределение, нормализация, соответствие Бомпьяни — Пантази.