ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

В.Б. К и м

О МНОГООБРАЗИИ КУБИК В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§I. Структурные формы многообразия кубик.

Рассмотрим трехмерное проективное пространство P_3, отнесенное к подвижному реперу $\{A_\gamma\}$ $(\gamma,\varkappa,\ell=0,1,2,3)$. Деривационные формулы этого репера запишем в виде

$$dA_\gamma=\omega_\gamma^\varkappa A_\varkappa\ , \qquad (1.1)$$

где формы Пфаффа $\omega_\gamma^\varkappa$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_\gamma^\varkappa=\omega_\gamma^\ell\wedge\omega_\ell^\varkappa \qquad (1.2)$$

и условию

$$\omega_\gamma^\gamma=0\,. \qquad (1.3)$$

В пространстве P_3 рассмотрим плоскую кривую третьего порядка (кубику) K_3. Вершину A_0 репера $\{A_\gamma\}$ поместим в некоторую точку пространства P_3 вне плоскости кубики, а вершины A_1, A_2, A_3 расположим в плоскости кубики, причем, что не умаляет общности, вершину A_1 можно считать лежащей вне кубики K_3. Уравнение кубики K_3 в выбранном репере запишется в виде:

$$a_{pq\tau}x^p x^q x^\tau=0,\ x^0=0,\qquad (p,q,\tau=1,2,3), \qquad (1.4)$$

где

$$a_{111}=1\,. \qquad (1.5)$$

Система уравнений стационарности кубики K_3 имеет вид:

$$\Delta a_{pq\tau}=da_{pq\tau}-a_{sq\tau}\omega_p^s-a_{ps\tau}\omega_q^s-a_{pqs}\omega_\tau^s+ 3a_{11s}a_{pq\tau}\omega_1^s=0,\quad \omega_p^0=0\,. \qquad (1.6)$$

Формы $\Delta a_{pq\tau},\omega_p^0$ являются структурными формами многообразия кубик K_3 и удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\mathcal{D}\Delta a_{pq\tau}=-\Delta a_{sq\tau}\wedge\omega_p^s-\Delta a_{ps\tau}\wedge\omega_q^s-\Delta a_{pqs}\wedge\omega_\tau^s+ 3a_{11s}\Delta a_{pq\tau}\wedge\omega_1^s+3a_{pq\tau}\Delta a_{11s}\wedge\omega_1^s+(a_{sq\tau}\omega_p^0+ a_{ps\tau}\omega_q^0+a_{pqs}\omega_\tau^0)\wedge\omega_0^s+3a_{pq\tau}a_{11s}\omega_1^0\wedge\omega_0^s;\ \mathcal{D}\omega_p^0=\omega_q^0\wedge(\delta_p^q\omega_0^0-\omega_p^q). \qquad (1.7)$$

Из (I.6) следует, что кубика K_3 задается полиномиальным объектом второй степени [2].

Совокупность всех кубик пространства P_3 образует пространство кубик $R(K_3)$. Через a^λ ($\lambda=0,1,\dots,11$) обозначим первые интегралы системы (I.7) и назовем их координатами пространства $R(K_3)$ [I].

§2. Общая характеристика пространства кубик.

Исключим из рассмотрения распадающиеся кубики и будем рассматривать только нераспадающиеся кубики. Известно [4], что для таких кубик существует единственный автополярный треугольник - сизигетический. Поместим вершины A_p репера в вершины сизигетического треугольника и получим следующие уравнения кубики:

$$(x^1)^3+(x^2)^3+(x^3)^3+6a\,x^1x^2x^3=0,\quad x^0=0\ , \qquad (2.1)$$

где

$$a\neq-\tfrac{1}{2}\,. \qquad (2.2)$$

В этом случае формы $\Delta a_{pq\tau}$ примут вид:

$$\begin{aligned}\Delta a_{iii}&=3(\omega_1^1-\omega_i^i),\\ \Delta a_{iij}&=-\omega_j^k-2a\,\omega_k^i,\\ \Delta a_{123}&=da+a\,(2\omega_1^1-\omega_2^2-\omega_3^3).\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Здесь и далее индексы i,j,k принимают значения I,2,3, причем они всегда различны и по ним суммирование не производится.

Заметим, что ранг системы форм $\Delta a_{pqr}, \omega^0_p$ равен $N = 12$, а ранг системы форм

$$\omega^0_p;\ 3(\omega^1_1-\omega^i_i);\ -\omega^k_j-2a\omega^i_k;\ a(2\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)$$

равен $R = 11$. Следовательно, кубика K_3 является фигурой ранга $N = 12$, и жанра $\rho = N - R = 1$ [1]. Ранг N кубики K_3 равен размерности пространства $R(K_3)$.

Систему уравнений стационарности кубики K_3 запишем в виде

$$\begin{aligned}&\omega^0_p = 0, \quad \omega^1_1-\omega^2_2=0, \quad \omega^1_1-\omega^3_3=0,\\ &\omega^j_i+2a\omega^k_j=0, \quad da=0.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Последнее уравнение этой системы определяет абсолютный инвариант кубики K_3 относительно проективных преобразований пространства P_3. В [4] показано, что две кубики K_3 и $\tilde{K}_3$ с равными значениями инварианта a проективно эквивалентны. Поэтому все пространство $R(K_3)$ разбивается на однопараметрическое семейство классов интранзитивности, каждый из которых состоит из ∞^{11} проективно эквивалентных между собой кубик.

Совокупность $R_1(K_3)$ всех кубик пространства P_3, получающихся из данной с помощью проективных преобразований, назовем, следуя [1], первым пространством кубики K_3. Размерность пространства $R_1(K_3)$ равна одиннадцати.

Пусть G группа проективных преобразований пространства P_3 с групповыми параметрами u^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, 15$). Координаты a^λ кубики K_3 в пространстве $R(K_3)$ занумеруем таким образом, чтобы $a^0 = a$.

Рассмотрим систему форм Пфаффа

$$\theta^{\varkappa}_{\gamma} = \omega^{\varkappa}_{\gamma}, \quad \theta = du^0 \tag{2.5}$$

Формы (2.5) удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{D}\theta^{\varkappa}_{\gamma} = \theta^{\hat{\alpha}}_{\gamma}\wedge\theta^{\varkappa}_{\hat{\alpha}}, \quad \mathcal{D}\theta = 0. \tag{2.6}$$

Система (2.5) вполне интегрируема и определяет группу Ли G' с групповыми параметрами $u^{\hat{\alpha}}$ ($\hat{\alpha} = 0, 1, \ldots, 15$). При этом форма θ определяет группу G'', изоморфную группе

сдвигов евклидовой прямой. Группа G' является прямым произведением групп G и G'':

$$G' = G \times G''.$$

Действие группы G' в пространстве $R(K_3)$ можно задать по формуле

$$\begin{aligned}&g'(a^0, a^1, \ldots, a^{11}) = (a^0+u^0, ga^1, \ldots, ga^{11})\\ &g' \in G', \quad g \in G, \quad u^0 \in G''.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что группа G' в пространстве $R(K_3)$ действует транзитивно.

Группа G, осуществляющая переход от кубики K_3 к эквивалентной ей кубике, определяется конечным уравнением $u^0=0$, а группа G'' определяется уравнениями $u^\alpha = 0$.

Две кубики K_3 и $\tilde{K}_3$, координаты которых a^λ и $\tilde{a}^\lambda$ связаны соотношениями

$$\tilde{a}^0 = a^0 + u^0, \quad \tilde{a}^1 = a^1, \ldots, \tilde{a}^{11} = a^{11}, \tag{2.8}$$

называются концентричными [1]. Совокупность $R_2(K_3)$ всех кубик, концентричных данной, образует второе пространство кубики. Пространство $R(K_3)$ изоморфно прямому произведению пространств $R_1(K_3) \times R_2(K_3)$.

§3. Присоединенное расслоенное пространство

Рассмотрим m-мерное дифференцируемое многообразие V_m, на котором задана система форм θ^ξ ($\xi, \eta, \rho = 1, 2, \ldots, m$, $m < 12$), удовлетворяющих структурным уравнениям

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}\theta^\xi = \theta^\eta \wedge \theta^\xi_\eta,\\ &\mathcal{D}\theta^\xi_\eta = \theta^\rho_\eta \wedge \theta^\xi_\rho + \theta^\rho \wedge \theta^\xi_{\eta\rho},\\ &\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{3.1}$$

Переобозначим структурные формы пространства $R(K_3)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}&\Omega^1 = -\omega^1_2 - 2a\omega^3_1, \quad \Omega^2 = -\omega^1_3 - 2a\omega^2_1, \quad \Omega^3 = -\omega^2_1 - 2a\omega^3_2,\\ &\Omega^4 = da + a(2\omega^1_1 - \omega^2_2 - \omega^3_3), \quad \Omega^5 = -\omega^3_1 - 2a\omega^2_3,\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\Omega^6 = 3\omega_1^1 - 3\omega_2^2,\ \Omega^7 = -\omega_3^2 - 2a\omega_2^1,\ \Omega^8 = -\omega_2^3 - 2a\omega_3^1,$$

$$\Omega^9 = 3\omega_1^1 - 3\omega_3^3,\ \Omega^{10} = \omega_1^0,\ \Omega^{11} = \omega_2^0,\ \Omega^{12} = \omega_3^0.$$

Структурные уравнения для форм Ω^a $(a, b = 1, 2, \ldots, 12)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\Omega^a &= \Omega^b \wedge \Omega_b^a, \\ \mathcal{D}\Omega_b^a &= \Omega_b^c \wedge \Omega_c^a + \Omega^c \wedge \Omega_{bc}^a. \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\Omega_1^1 = \tfrac{1}{2}\Omega_3^3 = \tfrac{1}{3}\Omega_6^6 = \omega_1^1 - \omega_2^2,\ \Omega_2^2 = \tfrac{1}{2}\Omega_5^5 = \tfrac{1}{3}\Omega_9^9 = \omega_1^1 - \omega_3^3,$$

$$\Omega_4^4 = 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3,\ \Omega_7^7 = 2\Omega_1^1 + \Omega_3^3,\ \Omega_8^8 = 2\Omega_2^2 + \Omega_1^1,$$

$$\Omega_{10}^{10} = \omega_0^0 - \omega_1^1,\ \Omega_{11}^{11} = \omega_0^0 - \omega_2^2,\ \Omega_{12}^{12} = \omega_0^0 - \omega_3^3,$$

$$\Omega_2^1 = \tfrac{1}{2}\Omega_4^3 = \Omega_5^4 = \tfrac{1}{3}\Omega_7^6 = \tfrac{1}{2}\Omega_8^7 = \Omega_{12}^{11} = -\omega_2^3,$$

$$\Omega_1^2 = \Omega_3^4 = \tfrac{1}{2}\Omega_4^5 = \Omega_6^7 = \tfrac{1}{2}\Omega_7^8 = \tfrac{1}{3}\Omega_8^9 = \Omega_{11}^{12} = -\omega_3^2,$$

$$\Omega_6^3 = \tfrac{1}{2}\Omega_3^1 = \tfrac{1}{2}\Omega_4^2 = \Omega_7^4 = \Omega_8^5 = -\tfrac{1}{3}\Omega_1^6 = -\tfrac{1}{3}\Omega_1^9 = \Omega_{11}^{10} = -\omega_1^2,$$

$$\Omega_5^8 = \tfrac{1}{2}\Omega_1^3 = \tfrac{1}{3}\Omega_3^6 = \tfrac{1}{2}\Omega_7^4 = \Omega_{10}^{11} = -\omega_2^1,$$

$$\Omega_3^7 = \tfrac{1}{2}\Omega_2^5 = \tfrac{1}{2}\Omega_4^8 = \tfrac{1}{3}\Omega_5^9 = \Omega_{10}^{12} = -\omega_3^1,$$

$$\Omega_7^7 = \tfrac{1}{2}\Omega_4^1 = \tfrac{1}{2}\Omega_5^2 = \Omega_8^4 = \Omega_9^5 = -\tfrac{1}{3}\Omega_2^6 = -\tfrac{1}{3}\Omega_2^9 = \Omega_{12}^{10} = -\omega_1^3,$$

$$\Omega_{11}^1 = \Omega_{11}^2 = -\frac{1}{2a}\Omega_{10}^4 = -\frac{1}{3}\Omega_{10}^6 = -\frac{1}{2a}\Omega_{11}^7 = -\frac{1}{2a}\Omega_{12}^8 =$$

$$= \tfrac{1}{3}\Omega_{10}^9 = -\omega_0^1,$$

$$\Omega_{10}^3 = \frac{1}{2a}\Omega_{10}^2 = \frac{1}{a}\Omega_{11}^4 = \frac{1}{2a}\Omega_{12}^5 = \tfrac{1}{3}\Omega_{11}^6 = \Omega_{12}^7 = -\omega_0^2,$$

$$\Omega_{10}^5 = \frac{1}{2a}\Omega_{10}^1 = \frac{1}{2a}\Omega_{11}^3 = \frac{1}{a}\Omega_{12}^4 = \Omega_{11}^8 = \tfrac{1}{3}\Omega_{12}^9 = -\omega_0^3.$$

Невыписанные формы Ω_b^a равны нулю. Формы Ω_{bc}^a будут линейными комбинациями форм Ω_b^a.

Рассмотрим присоединенное расслоенное пространство V [3], базой которого является многообразие V_m, слоем - пространство $R(K_3)$, а группой, действующей в слое, - группа G'. Уравнения (3.1) и (3.3) будут структурными уравнениями расслоенного пространства V.

На расслоенном пространстве V тогда и только тогда будет задана линейная дифференциально-геометрическая связность, когда будет задано поле геометрического объекта Γ_ξ^a, удовлетворяющего уравнениям

$$d\Gamma_\xi^a - \Gamma_\eta^a \theta_\xi^\eta + \Gamma_\xi^b \Omega_b^a = \Gamma_{\xi\eta}^a \theta^\eta. \tag{3.5}$$

В этом случае

$$\tilde{\Omega}^a = \Omega^a - \Gamma_\xi^a \theta^\xi \tag{3.6}$$

будут формами рассматриваемой связности.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. "Труды геом. семинара ВИНИТИ", М., 2, 1969, 181-206.

2. Малаховский В.С. Производные и полиномиальные объекты. - "Труды Томского госуд. ун-та", 169, 1968, 3-14

3. Лаптев Г.Ф. Инвариантная аналитическая теория дифференцируемых отображений. - "Труды геом. семинара ВИНИТИ", 6, 1974, 37-42.

4. Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М., ФМ, 1960.