являются нормальными векторами к площадкам $\Delta^{M}_{p-1}(x)$ и $\Delta^{R}_{p-1}(x)$ поверхности V_p в точке x. Тогда $\vec{R}=k\vec{H}$, где k – в общем случае функциональный множитель, зависящий от координат $u^1, u^2, \ldots, u^p$ точки x на поверхности V_p. При этом $R_i = kM_i$. С учетом этого имеем, что $dR = R_i\omega^i = kM_i\omega^i = k\,dM$. Отсюда следует, что $\frac{\partial R}{\partial u^i} - k\frac{\partial M}{\partial u^i} = 0$. Далее, дифференцируя i-е уравнение по u^j $(i \neq j)$, j-е уравнение по u^i и вычитая, получим $\frac{\partial k}{\partial u^i}\frac{\partial M}{\partial u^j} - \frac{\partial k}{\partial u^j}\frac{\partial M}{\partial u^i} = 0$ $(i \neq j)$. Известно, что если $\frac{\mathcal{D}(k,M)}{\mathcal{D}(u^i,u^j)} = 0$, то k и M функционально зависимы, т.е. $k = \varphi(M)$ [3]. Таким образом, $dR = \varphi(M)\,dM$. Интегрируя, получим, что R и M связаны функциональной зависимостью $R = f(M)$. Такие поверхности $V_p \subset E_n$ будем называть поверхностями Вейнгартена, если $k = \mathrm{const}$, то будем обозначать такие поверхности W.

Легко показать, что если $R = f(M)$, то $\vec{R} \parallel \vec{H}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Поверхность $V_p \subset E_n$ будет поверхностью Вейнгартена тогда и только тогда, когда векторы $\vec{R}$ и $\vec{H}$ коллинеарны.

Если рассмотреть градиенты скалярной и средней кривизны, то справедлива

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы поверхность $V_p \subset E_n$ была поверхностью Вейнгартена, необходимо и достаточно, чтобы градиенты скалярной и средней кривизны были коллинеарны.

Пфаффовым производным скалярной и средней кривизн M_i и R_i можно дать следующий геометрический смысл. Рассмотрим поверхности

$$V_p^M:\ \vec{y}_1 = \vec{x} + M\vec{e}_{p+1}, \qquad V_p^R:\ \vec{y}_2 = \vec{x} + R\vec{e}_{p+1}.$$

Когда точка x описывает на поверхности V_p линию ω^i, то точки y_1 и y_2 на этих поверхностях также описывают линиии, направления касательных к которым определяются следующим образом:

$$\bar{a}_i = (\delta_i^k - M\gamma^{kj} b_{ij}^{p+1})\vec{e}_k + M\Lambda^{\tilde{\beta}}_{p+1,i}\vec{e}_{\tilde{\beta}} + M_i\vec{e}_{p+1},$$

$$\bar{b}_i = (\delta_i^k - R\gamma^{kj} b_{ij}^{p+1})\vec{e}_k + R\Lambda^{\tilde{\beta}}_{p+1,i}\vec{e}_{\tilde{\beta}} + R_i\vec{e}_{p+1} \quad (\tilde{\alpha},\tilde{\beta} = p+2,\ldots,p+q).$$

Отсюда следует, что M_i и R_i есть проекции векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$ на нормаль $(x,\vec{e}_{p+1})$. Обозначим ее через S. При этом справедливы теоремы:

Т е о р е м а 4. Поверхность $V_p \subset E_n$ будет поверхностью Вейнгартена тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_1}{\Pi_{p_S}\vec{a}_1} = \frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_2}{\Pi_{p_S}\vec{a}_2} = \ldots = \frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_p}{\Pi_{p_S}\vec{a}_p}.$$

Т е о р е м а 5. Поверхность $V_p \subset E_n$ будет поверхностью W тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde{\alpha}}}\vec{b}_1}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde{\alpha}}}\vec{a}_1} = \frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde{\alpha}}}\vec{b}_2}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde{\alpha}}}\vec{a}_2} = \ldots = \frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde{\alpha}}}\vec{b}_p}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde{\alpha}}}\vec{a}_p}.$$

Библиографический список

1. Л у м и с т е Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны// Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М., 1981.Т.12.С.3-30.

2. М о с к а л е н к о Н.И. О второй поляре p-поверхности евклидова пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1989.Вып.20.С.60.

3. Ф и х т е н г о л ь ц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.М., 1969.Т.1.

4. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве//Лит.матем.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс, 1966.Т.6.№4.С.474-490.

УДК 514.75

$\mathcal{H}_1$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в
(Калининградский государственный университет)

В работе исследуются регулярные $\mathcal{H}$-распределения [1],[2] специального класса, а именно такие, для которых оснащающее M-распределение скомпоновано (следуя терминологии А.Н.Нордена [3]) из базисного Λ-распределения и L-распределения (распределение ℓ-мерных плоскостей $\Pi_\ell = L$, где $\ell = m - r$), т.е. в каждом центре X $\mathcal{H}$-распределения выполняются соотношения

$$X \subset L \subset M \subset H, \quad [\Lambda; L] = M, \quad \Lambda \cap L = X. \tag{I}$$

Регулярные $\mathcal{H}$-распределения, для которых выполнены условия (I), обозначим символом $\mathcal{H}(\Lambda, L)$. Репер $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ [1] выберем так, чтобы точки $\{A_p\} \subset \Lambda(A_0)$, $\{A_i\} \subset L(A_0)$, $\{A_\alpha\} \subset H(A_0)$, $X \equiv A_0$. Относительно репера нулевого порядка $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ дифференциальные уравнения $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения в проективном пространстве P_n имеют вид:

$$\omega_i^n = M^n_{i\varkappa}\omega_0^\varkappa, \quad \omega_p^n = \Lambda^n_{p\varkappa}\omega_0^\varkappa, \quad \omega_\alpha^n = H^n_{\alpha\varkappa}\omega_0^\varkappa, \tag{2}$$
$$\omega_p^i = \Lambda^i_{p\varkappa}\omega_0^\varkappa, \quad \omega_i^p = M^p_{i\varkappa}\omega_0^\varkappa, \quad \omega_p^\alpha = \Lambda^\alpha_{p\varkappa}\omega_0^\varkappa, \quad \omega_i^\alpha = M^\alpha_{i\varkappa}\omega_0^\varkappa.$$

Здесь и в дальнейшем используется следующая схема индексов: $\imath, \jmath, \varkappa = \overline{1,n}$;

$\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{\varkappa} = \overline{0,n}$; $u, v, w = \overline{r+1, n-1}$; $p, q, r, s, t = \overline{1,r}$; $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}, \bar{t} = \overline{0,r}$;

$$\hat{u},\hat{v},\hat{w}=\overline{r+1,n};\quad h,i,j,k,\ell=\overline{r+1,m};\quad \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\quad \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n};$$

$$a,b,c,d=\overline{1,m};\quad \bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}=\overline{0,m};\quad \bar{h},\bar{i},\bar{j},\bar{k},\bar{\ell}=(0;\overline{r+1,m});\quad \sigma,\tau,\rho=\overline{1,n-1}.$$

Нетрудно убедиться, что система (2) в инволюции, т.е. имеет место

Т е о р е м а 1. $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения существуют с произволом $m(n-m-1)+2r(m-r)+(n-1)$ функций n аргументов.

Выделим подкласс скомпонованных $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределений следующим образом. Потребуем, чтобы характеристика $X_{n-r-1}(A_0)$ гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих Λ-распределению, проходила через плоскость $L(A_0)$. В этом случае

$$M^n_{ip}=0. \qquad (3)$$

Скомпонованные $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения, для которых выполняется условие (3), назовем $\mathcal{H}_1$-распределениями.

В работе приведены дифференциальные уравнения $\mathcal{H}_1$-распределения в репере первого порядка (§1), введена двойственная нормализация в смысле Нордена-Чакмазяна [4],[5] базисного Λ-распределения и L-распределения, образующие элементы которых в каждом центре $A_0=X$ удовлетворяют условиям (1). В первых трех дифференциальных окрестностях образующего элемента регулярного $\mathcal{H}_1$-распределения найдены (§2) поля характерных квазинормалей, порождаемые Λ-распределением и L-распределением. С помощью найденных полей квазинормалей построены поля нормалей первого и второго рода в смысле Нордена-Чакмазяна (в первых трех окрестностях) Λ-распределения (§2). Кроме того, приведены (§3) построения полей оснащающих плоскостей в смысле Картана для скомпонованных распределений (Λ-распределения и L-распределения).

Получены проективные связности Γ и γ (§4), относящиеся к классу проективных связностей, определенных путем проектирования [6].

Обозначения и замечания.

1. Оператор ∇ дифференцирования применяем такой же, что и в работе [6].

2. Символом „δ" обозначим дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм ω^J_K при фиксированных параметрах обозначим π^J_K. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

3. Всюду в дальнейшем используются символические обозначения вида $[A_{J_1},A_{J_2},\dots,A_{J_t}]$, $[\sigma^{J_1},\sigma^{J_2},\dots,\sigma^{J_t}]$, где индексы $J_1,J_2,\dots,J_t$ принимают значения из набора $\overline{0,n}$. Они обозначают соответственно плоскость Π_{t-1}, натянутую на линейно независимые точки $A_{J_1},\dots,A_{J_t}$, и плоскость E_{n-t}, являющуюся пересечением линейно независимых гиперплоскостей $\sigma^{J_1},\sigma^{J_2},\dots,\sigma^{J_t}$.

4. Символ „$\equiv$" означает сравнение по модулю базисных форм ω^J_0.

§1. Дифференциальные уравнения $\mathcal{H}_1$-распределения

1. Частично канонизируем репер $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, поместив вершины $\{A_\alpha\}$ репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ в характеристику $X_{n-m-1}(A_0)\overset{def}{=}\Phi(A_0)$ гиперплоскости $H(A_0)$, полученную при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих оснащающему M-распределению, т.е. вдоль кривых

$$\omega^{\hat{\alpha}}_0=0,\quad \omega^a_0=\mu^a\theta, \qquad (1.1)$$

где $\nabla\mu^a=\mu^a\theta^0_0+\mu^a_2\theta$, $\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta^0_0$.

Тогда имеем

$$H^n_{\alpha p}=0,\quad \omega^p_\alpha=H^p_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0. \qquad (1.2)$$

Полученный репер первого порядка назовем репером $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$. В репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ дифференциальные уравнения $\mathcal{H}_1$-распределения принимают вид:

$$\begin{cases}\omega^n_p=\Lambda^n_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0,\quad \omega^n_i=M^n_{i\hat{u}}\omega^{\hat{u}}_0,\quad \omega^n_\alpha=H^n_{\alpha\hat{u}}\omega^{\hat{u}}_0,\quad \omega^\alpha_i=M^\alpha_{i\varkappa}\omega^\varkappa_0,\\ \omega^i_p=\Lambda^i_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0,\quad \omega^p_i=M^p_{i\varkappa}\omega^\varkappa_0,\quad \omega^\alpha_p=\Lambda^\alpha_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0,\quad \omega^p_\alpha=H^p_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0.\end{cases} \qquad (1.3)$$

Отметим, что компоненты $\{\Gamma_1, H^p_{\alpha\varkappa}\}$ фундаментального объекта Γ_2 $\mathcal{H}_1$-распределения подчинены соотношениям

$$\begin{cases}M^n_{ij}\Lambda^j_{[pq]}+M^n_{i\alpha}\Lambda^\alpha_{[pq]}+\Lambda^n_{s[p}M^s_{|i|q]}+M^n_{in}\Lambda^n_{[pq]}=0,\\ H^n_{\alpha\beta}\Lambda^\beta_{[pq]}+H^n_{\alpha i}\Lambda^i_{[pq]}+\Lambda^n_{s[p}H^s_{|\alpha|q]}+H^n_{\alpha n}\Lambda^n_{[pq]}=0.\end{cases} \qquad (1.4)$$

Используя систему (1.3), с учетом связей (1.4) на коэффициенты этой системы, приходим к следующему результату:

Т е о р е м а 2. Система уравнений (1.3) и соотношений (1.4) задает $\mathcal{H}_1$-распределение с произволом $(n-m-1)(m+r)+r(2m-2r+1)-C^2_r(n-r-1)$ функций n аргументов.

2. Из (1.3) следует, что каждая из совокупностей величин $\{\Lambda^n_{pq}\}$ и $\{M^n_{ij}\}$ образует тензор первого порядка. В дальнейшем будем полагать, что тензоры $\{\Lambda^n_{pq}\}$, $\{M^n_{ij}\}$ невырожденные, т.е.

$$\Lambda\overset{def}{=}\det\|\Lambda^n_{pq}\|\neq 0,\qquad M\overset{def}{=}\det\|M^n_{ij}\|\neq 0. \qquad (1.5)$$

Следовательно, можно ввести в рассмотрение обращенные тензоры первого порядка $\{\Lambda^{pq}_n\}$, $\{M^{ij}_n\}$, компоненты которых определяются из соотношений

$$\Lambda^{pq}_n \Lambda^n_{qt} = \Lambda^{qp}_n \cdot \Lambda^n_{tq} = \delta^p_t \,, \quad M^{ik}_n M^n_{kj} = M^{ki}_n M^n_{jk} = \delta^i_j \tag{I.6}$$

и удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{cases} \nabla \Lambda^{pq}_n = \Lambda^{pq}_{n\varkappa} \omega^\varkappa_0 & (\cdot \Lambda^{pq}_{n\varkappa} = -\Lambda^{ps}_n \Lambda^{tq}_n \Lambda^n_{st\varkappa}\,), \\ \nabla M^{ij}_n = M^{ij}_{n\varkappa} \omega^\varkappa_0 & (\, M^{ij}_{n\varkappa} = - M^{ik}_n M^{\ell j}_n M^n_{k\ell\varkappa}\,). \end{cases} \tag{I.7}$$

$\mathcal{H}_1$-распределения, для которых тензор $\{\Lambda^n_{pq}\}$ невырожденный (I.5), называются регулярными [1],[2].

3. Выясним геометрическую характеристику репера первого порядка $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$. Рассмотрим тангенциальный репер $\{\sigma^{\bar{\jmath}}\}$, взаимный точечному $\{A_{\bar{x}}\}$:

$$(A_{\bar{x}}, \sigma^{\bar{\jmath}}) = \delta^{\bar{\jmath}}_{\bar{x}} \,, \qquad d\sigma^{\bar{\jmath}} = -\,\omega^{\bar{\jmath}}_{\bar{x}} \sigma^{\bar{x}}, \tag{I.8}$$

где $\sigma^n(A_0) \stackrel{def}{=} \Pi_{n-1}(A_0) \stackrel{def}{=} H(A_0)$.

Пусть $X_{n-\tau-1}(A_0) \stackrel{def}{=} X(A_0)$ -характеристика гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$ при смещении точки A_0 вдоль кривых ℓ :

$$(\ell): \quad \omega^{\hat{u}}_0 = 0 \,, \quad \omega^p_0 = \mu^p \theta \quad (\mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1 \,, \ \nabla \mu^p = \mu^p \theta^0_0 + \mu^p_1 \theta\,), \tag{I.9}$$

принадлежащих базисному Λ-распределению.

Учитывая (1.1),(1.3),(1.5),(1.8),(1.9), убеждаемся в справедливости следующих утверждений:

а) $M^n_{ip} = 0 \iff (A_i, d\sigma^n) = 0 \pmod{\ell}$;

б) $H^n_{\alpha p} = 0 \iff (A_\alpha, d\sigma^n) = 0 \pmod{\ell}$,

т.е. в выбранном репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ вершины репера $\{A_i, A_\alpha\}$ принадлежат характеристике $X(A_0)$ гиперплоскости $H(A_0) = \sigma^n(A_0)$;

c) $\Lambda = |\Lambda^n_{pq}| \neq 0 \iff \Lambda(A_0) \cap X(A_0) = A_0$,

то есть регулярность $\mathcal{H}_1$-распределения геометрически определяется тем, что характеристика $X(A_0)$ и плоскость $\Lambda(A_0)$ находятся в общем положении в гиперплоскости $H(A_0)$;

d) $(\Lambda \neq 0 \,,\ M \neq 0) \iff M(A_0) \cap \Phi(A_0) = A_0$,

то есть регулярность $(|\Lambda^n_{ab}| = |\Lambda^n_{pq}| \cdot |M^n_{ij}| \neq 0)$ оснащающего M-распределения геометрически обозначает, что плоскости $M(A_0)$ и $\Phi(A_0)$ находятся в общем положении в гиперплоскости $H(A_0)$.

4. Продолжение уравнений (I.3) приводит к следующим дифференциальным уравнениям, которым подчинены компоненты фундаментального объекта первого порядка:

$$\Gamma_1 = \{\Lambda^n_{p\varkappa}, M^n_{i\hat{u}}, H^n_{\alpha\hat{u}}, M^\alpha_{i\varkappa}, \Lambda^i_{p\varkappa}, M^p_{i\varkappa}, \Lambda^\alpha_{p\varkappa}\}$$

и величины $\{H^p_{\alpha\varkappa}\}$ второго порядка

$$\nabla \Lambda^n_{p\varkappa} - \delta^n_\varkappa \omega^0_p = \Lambda^n_{p\varkappa\mathcal{L}} \omega^{\mathcal{L}}, \tag{I.10}$$

$$\nabla M^n_{i\hat{u}} - \omega^0_i \delta^n_{\hat{u}} = M^n_{i\hat{u}\mathcal{L}} \omega^{\mathcal{L}}_0, \tag{I.11}$$

$$\nabla H^n_{\alpha\hat{u}} - M^n_{i\hat{u}} \omega^i_\alpha - \delta^n_{\hat{u}} \omega^0_\alpha = H^n_{\alpha\hat{u}\mathcal{L}} \omega^{\mathcal{L}}, \tag{I.12}$$

$$\nabla M^\alpha_{i\varkappa} + M^n_{i\varkappa} \omega^\alpha_n - \delta^\alpha_\varkappa \omega^0_i = M^\alpha_{i\varkappa\mathcal{L}} \omega^{\mathcal{L}}, \tag{I.13}$$

$$\nabla \Lambda^i_{p\varkappa} + \Lambda^\alpha_{p\varkappa} \omega^i_\alpha + \Lambda^n_{p\varkappa} \omega^i_n - \delta^i_\varkappa \omega^0_p = \Lambda^i_{p\varkappa\mathcal{L}} \omega^{\mathcal{L}}, \tag{I.14}$$

$$\nabla M^p_{i\varkappa} + M^n_{i\varkappa} \omega^p_n - \delta^p_\varkappa \omega^0_i = M^p_{i\varkappa\mathcal{L}} \omega^{\mathcal{L}}, \tag{I.15}$$

$$\nabla \Lambda^\alpha_{p\varkappa} + \Lambda^n_{p\varkappa} \omega^\alpha_n - \delta^\alpha_\varkappa \omega^0_p = \Lambda^\alpha_{p\varkappa\mathcal{L}} \omega^{\mathcal{L}}, \tag{I.16}$$

$$\nabla H^p_{\alpha\varkappa} + H^n_{\alpha\varkappa} \omega^p_n - M^p_{i\varkappa} \omega^i_\alpha - \delta^p_\varkappa \omega^0_\alpha = H^p_{\alpha\varkappa\mathcal{L}} \omega^{\mathcal{L}}. \tag{I.17}$$

Коэффициенты в правых частях уравнений (I.10) - (I.17), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам.

§2. Инвариантные нормализации Нордена-Чакмазяна регулярного $\mathcal{H}_1$-распределения

1. Двойственные нормализации Λ-распределения и L-распределения.

Под двойственной нормализацией регулярного $\mathcal{H}_1$-распределения мы будем понимать нормализацию его базисного Λ-распределения в смысле Нордена-Чакмазяна [4],[5], т.е. в каждом центре A_0 для плоскости $\Pi_\tau(A_0)$ определена нормализация А.П. Нордена [4] такая, что нормаль первого рода $N_{n-\tau}(A_0)$ плоскости $\Pi_\tau(A_0)$ проходит через характеристику $X_{n-\tau-1}(A_0)$ текущего элемента $\Pi_{n-1}(A_0)$ оснащающего H-распределения.

Требование инвариантности нормали

$$N_{n-\tau}(A_0) = [X_{n-\tau-1}, X_n], \quad X_n = A_n + x^p_n A_p + x^i_n A_i + x^\alpha_n A_\alpha\,,$$

приводит к условиям

$$\nabla x^p_n + \omega^p_n = x^p_{n\varkappa} \omega^\varkappa_0, \tag{2.1}$$

причем на величины x^i_n и x^α_n это требование никаких условий не накладывает. Однако, если потребовать, чтобы прямая $N_1 = [A_0, X_n]$ была инвариантна, то, кроме условий (2.I), находим, что величины x^i_n и x^α_n должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} \nabla x^i_n + x^\alpha_n \omega^i_\alpha + \omega^i_n = x^i_{n\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \\ \nabla x^\alpha_n + \omega^\alpha_n = x^\alpha_{n\varkappa}\,\omega^\varkappa_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Таким образом, в качестве величин $\{x^p_n\}, \{x^\alpha_n\}, \{x^i_n, x^\alpha_n\}$ можно брать квазитензоры $\{\nu^p_n\}, \{\nu^\alpha_n\}, \{\nu^i_n, \nu^\alpha_n\}$, полученные в работе [1], компоненты которых удовлетворяют соответственно уравнениям (2.I) и (2.2). В дальнейшем будем считать, что прямая $N_1 = [A_0, X_n]$ инвариантна, а точка X_n имеет вид

$$X_n(\nu) = A_n + \nu^p_n A_p + \nu^i_n A_i + \nu^\alpha_n A_\alpha. \tag{2.3}$$

Нормаль второго рода $\mathcal{N}_{r-1}(A_0)$ элемента Λ-распределения определим точками

$$M_p = A_p + x^0_p A_0. \tag{2.4}$$

Требование инвариантности поля плоскостей $\mathcal{N}_{r-1}(A_0)$ приводит к условиям

$$\nabla x^0_p + \omega^0_p = x^0_{p\varkappa}\,\omega^\varkappa. \tag{2.5}$$

Значит, в качестве величин x^0_p можно брать любой квазитензор $\{\nu^0_p\}$ [1], [2], удовлетворяющий уравнениям (2.5).

Итак, в дальнейшем под полем инвариантных нормалей первого (второго рода) элемента Λ-распределения будем понимать поле соответствующего квазитензора $\{\nu^p_n\}$ ($\{\nu^0_p\}$).

Плоскость

$$N_{n-\ell}(A_0) = [X_{n-\ell-1}, X_n],$$

где $X_{n-\ell-1}(A_0)$ – характеристика гиперплоскости $H(A_0)$, полученная при смещении центра A_0 вдоль кривых

$$(\mathcal{L}):\ \omega^n_0 = 0,\ \ \omega^\alpha_0 = \omega^p_0 = 0,\ \ \omega^i = \mu^i\theta \quad (\nabla\mu^i = \mu^i\theta^0_0 + \mu^i_1\theta), \tag{2.6}$$

принадлежащих распределению плоскостей L, является нормалью первого рода элемента L-распределения.

Можно показать, что при заданном поле инвариантных прямых N_1 поле нормалей первого рода L-распределения определяется полем геометрического объекта $\{\nu^i_n\}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (2.2).

Плоскость

$$\mathcal{N}_{\ell-1}(A_0) = [A_i + \nu^0_i A_0 \overset{def}{=} M_i]$$

является нормалью второго рода элемента L-распределения и определена квазитензором $\{\nu^0_i\}$:

$$\nabla\nu^0_i + \omega^0_i = \nu^0_{i\varkappa}\,\omega^\varkappa_0. \tag{2.7}$$

Очевидно, что инвариантная прямая $N_1(A_0) = [A_0, X_n]$ – нормаль первого рода гиперплоскости $H(A_0)$, в качестве инвариантной нормали второго рода гиперплоскости $H(A_0)$ можно взять плоскость

$$\mathcal{N}_{n-2}(A_0) = [M_p, M_i, M_\alpha],$$

где

$$M_\alpha = A_\alpha + \nu^0_\alpha A_0 + \nu^i_\alpha A_i,\quad \nabla\nu^i_\alpha + \omega^i_\alpha = \nu^i_{\alpha\varkappa}\,\omega^\varkappa_0,$$

$$\nabla\nu^0_\alpha + \nu^i_\alpha\omega^0_i + \omega^0_\alpha = \nu^0_{\alpha\varkappa}\,\omega^\varkappa_0. \tag{2.8}$$

2. Поля квазинормалей и нормалей базисного Λ-распределения. Квазинормали L-распределения.

Систему величин $\{K_p\}$ назовем квазинормалью [6], [7] $\mathcal{H}_1$-распределения, ассоциированной с Λ-распределением, если в выбранном репере первого порядка при преобразованиях стационарной подгруппы элемента $\mathcal{H}_1$-распределения имеем один из следующих законов преобразования величин K_p [7]:

$$\nabla_\delta K_p = \lambda b^n_{pq}\pi^q_n + \sigma\pi^0_p, \tag{2.9}$$

$$\nabla_\delta K_p = \lambda\Lambda^n_{pq}\pi^q_n + \sigma\pi^0_p, \tag{2.10}$$

$$\nabla_\delta K_p = \lambda\Lambda^n_{qp}\pi^q_n + \sigma\pi^0_p, \tag{2.11}$$

где

$$b^n_{pq} = \tfrac{1}{2}(\Lambda^n_{pq} + \Lambda^n_{qp}),\quad \nabla b^n_{pq} = b^n_{pq\varkappa}\,\omega^\varkappa_0, \tag{2.12}$$

а λ, σ – постоянные числа, отличные от нуля. Каждая из этих трех типов квазинормалей устанавливает биекцию между нормалями первого и второго рода Λ-распределения таким образом:

$$\text{а)}\ \nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}(K_p + \lambda b^n_{pq}\nu^q_n),\quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}(K_p + \sigma\nu^0_p)\, b^{pt}_n, \tag{2.13}$$

если $\{K_p\}$ – квазинормаль первого типа (2.9);

$$\text{в)}\ \nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}(K_p + \lambda\Lambda^n_{pq}\nu^q_n),\quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}\Lambda^{tp}_n(K_p + \sigma\nu^0_p), \tag{2.14}$$

если $\{K_p\}$ -квазинормаль второго типа (2.10);

$$c)\ \nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}\left(K_p + \lambda \Lambda^n_{qp} \nu^q_n\right), \quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}\left(K_p + \sigma \nu^0_p\right)\Lambda^{pt}_n, \tag{2.15}$$

если $\{K_p\}$ -квазинормаль третьего типа (2.11).

Построим в разных дифференциальных окрестностях следующие квазинормали базисного Λ-распределения:

а) в окрестности первого порядка

$$\overset{1}{K}_p = \frac{1}{n-\tau}\left(\Lambda^n_{pn} + \Lambda^\alpha_{p\alpha} + \Lambda^i_{pi}\right), \tag{2.16}$$

$$\overset{2}{K}_p = \frac{1}{\ell+1}\left[\Lambda^n_{pn} + \Lambda^i_{pi} + \Lambda^n_{p\alpha}\nu^\alpha_n + \left(\Lambda^\alpha_{pi} - \Lambda^n_{pi}\nu^\alpha_n\right)M^i_\alpha\right], \tag{2.17}$$

$$\overset{3}{K}_p = \frac{1}{n-m}\left[\Lambda^n_{pn} + \Lambda^\alpha_{p\alpha} + \Lambda^n_{pi}\nu^i_n - \left(\Lambda^\alpha_{pi} - \Lambda^n_{pi}\nu^\alpha_n\right)M^i_\alpha\right], \tag{2.18}$$

$$\overset{4}{K}_p = \Lambda^n_{pn} + \Lambda^n_{p\alpha}\nu^\alpha_n + \Lambda^n_{pi}\nu^i_n, \tag{2.19}$$

где $\{\nu^i_n, \nu^\alpha_n\} = \{\nu^u_n\}$ — квазитензор первого порядка,

$$M^i_\alpha = M^n_{j\alpha} M^{ji}_n, \qquad \nabla M^i_\alpha = \omega^i_\alpha + M^i_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0 ; \tag{2.20}$$

в) в окрестности второго порядка

$$\hat{\overset{3}{K}}_p = \frac{1}{n-m}\left[\Lambda^n_{pn} + \Lambda^\alpha_{p\alpha} + \Lambda^n_{pi}\nu^i_n - \left(\Lambda^\alpha_{pi} - \Lambda^n_{pi}\ \nu^\alpha_n\right)M^i_\alpha\right], \tag{2.21}$$

$$\overset{4}{K}_p = \Lambda^n_{pn} + \Lambda^n_{pu}\nu^u_n, \tag{2.22}$$

$$\overset{5}{K}_p = \frac{1}{\tau+2}\Lambda_p ; \quad \hat{\overset{5}{K}}_p = \frac{1}{\ell}\left(M_p - 2M^\alpha_{ip}M^i_\alpha\right), \quad \overset{6}{K}_p = \mathcal{B}_p , \tag{2.23}$$

где $\{\nu^u_n\}$, $\{\nu^\alpha_n\}$ -квазитензоры второго порядка,

$$\Lambda_p = \Lambda^{qs}_n \Lambda^n_{sqp} , \quad \nabla\Lambda_p + (\tau+2)\,\omega^0_p - (\tau+2)\,\Lambda^n_{qp}\,\omega^q_n \equiv 0 , \tag{2.24}$$

$$M_p = M^{ji}_n M^n_{ijp} , \quad \nabla M_p + \ell\,\omega^0_p - \ell\,\Lambda^n_{qp}\,\omega^q_n - 2M^\alpha_{\kappa p}\,\omega^\kappa_\alpha \equiv 0. \tag{2.25}$$

$$\mathcal{B}_p = \frac{1}{\tau+2}\mathcal{B}^n_{pqt}\mathcal{B}^{qt}_n , \quad \nabla\mathcal{B}_p - \mathcal{B}^n_{ps}\,\omega^s_n + \omega^0_p \equiv 0 ; \tag{2.26}$$

с) в окрестности третьего порядка [1]:

$$\overset{7}{K}_p = \mathcal{C}_p , \quad \nabla \mathcal{C}_p + \mathcal{B}^n_{pq}\,\omega^q_n + \tau^n_{pq}\,\omega^q_n + \omega^0_p = \mathcal{C}_{p\varkappa}\,\omega^\varkappa_0 . \tag{2.27}$$

Будем определять нормали $\{\nu^p_n\}$, $\{\nu^0_p\}$ первого и второго рода

Λ-распределения в смысле Нордена-Чакмазяна, используя способ нахождения общих нормалей двух квазинормалей [7]. Построим некоторые нормали первого рода $\{\nu^p_n\}$ и второго рода $\{\nu^0_p\}$ в различных дифференциальных окрестностях для базисного Λ-распределения.

Имеем

1) в окрестности первого порядка:

$$a)\ (\overset{1}{K}_p, \overset{4}{K}_p) \to \begin{cases} \mathcal{L}^p_n = -\frac{n-\tau}{n-\tau-1}\Lambda^{pq}_n\left(\overset{4}{K}_q - \overset{1}{K}_q\right), \\ \mathcal{L}^0_p = -\frac{1}{n-\tau-1}\left[(n-\tau)\overset{1}{K}_p - \overset{4}{K}_p\right]; \end{cases} \tag{2.28}$$

$$в)\ (\overset{2}{K}_p, \overset{4}{K}_p) \to \begin{cases} \mathfrak{G}^p_n = -\frac{\ell+1}{\ell}\Lambda^{pq}_n\left(\overset{4}{K}_q - \overset{2}{K}_q\right), \\ \mathfrak{G}^0_p = -\frac{1}{\ell}\left[(\ell+1)\overset{2}{K}_p - \overset{4}{K}_p\right]; \end{cases} \tag{2.29}$$

$$c)\ (\overset{3}{K}_p, \overset{4}{K}_p) \to \begin{cases} \mathfrak{L}^p_n = -\frac{n-m}{n-m-1}\Lambda^{pq}_n\left(\overset{4}{K}_q - \overset{3}{K}_q\right), \\ \mathfrak{L}^0_p = -\frac{1}{n-m-1}\left[(n-m)\overset{3}{K}_p - \overset{4}{K}_p\right]; \end{cases} \tag{2.30}$$

2) в окрестности второго порядка

$$a)\ (\hat{\overset{4}{K}}_p, \overset{1}{K}_p) \to \begin{cases} \hat{\mathcal{L}}^p_n = -\frac{n-\tau}{n-\tau-1}\Lambda^{pq}_n\left(\hat{\overset{4}{K}}_q - \overset{1}{K}_q\right), \\ \hat{\mathcal{L}}^0_p = -\frac{1}{n-\tau-1}\left[(n-\tau)\overset{1}{K}_p - \hat{\overset{4}{K}}_p\right]; \end{cases} \tag{2.31}$$

$$в)\ (\hat{\overset{4}{K}}_p, \overset{2}{K}_p) \to \begin{cases} \hat{\mathfrak{G}}^p_n = -\frac{\ell+1}{\ell}\Lambda^{pq}_n\left(\hat{\overset{4}{K}}_q - \overset{2}{K}_q\right), \\ \hat{\mathfrak{G}}^0_p = -\frac{1}{\ell}\left[(\ell+1)\overset{2}{K}_p - \hat{\overset{4}{K}}_p\right]; \end{cases} \tag{2.32}$$

$$c)\ (\hat{\overset{4}{K}}_p, \overset{3}{K}_p) \to \begin{cases} \hat{\mathfrak{L}}^p_n = -\frac{n-m}{n-m-1}\Lambda^{pq}_n\left(\hat{\overset{4}{K}}_q - \overset{3}{K}_q\right), \\ \hat{\mathfrak{L}}^0_p = -\frac{1}{n-m-1}\left[(n-m)\overset{3}{K}_p - \hat{\overset{4}{K}}_p\right]. \end{cases} \tag{2.33}$$

d) Пара $(\overset{4}{K}_p, \overset{5}{K}_p)$ в дифференциальной окрестности второго порядка определяет инвариантную нормаль первого рода

$$\mathcal{H}^p_n = -\frac{1}{2}\mathcal{B}^{pq}_n\left(\overset{4}{K}_q - \overset{5}{K}_q\right). \tag{2.34}$$

При

$$\tau^n_{pq} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^n_{pq} - \Lambda^n_{qp}\right) \neq 0 , \quad \nabla\tau^n_{pq} \equiv 0$$

эта пара квазинормалей общей нормали второго рода не имеет [7], а при $\tau^n_{pq} = 0$ общая нормаль второго рода имеет вид

$$\mathcal{H}^0_p = \frac{1}{2}\left(\overset{5}{K}_p - \overset{4}{K}_p\right). \tag{2.35}$$

е) Аналогично, как и в пункте d), находим следующие нормали первого рода Λ-распределения в дифференциальной окрестности второго порядка:

$$(\hat K^4_p, K^5_p) \to \hat{\mathcal H}^p_n = -\tfrac12 b^{pq}_n (\hat K^4_q + K^5_q), \qquad (2.36)$$

$$(K^4_p, \hat K^5_p) \to \tilde{\mathcal H}^p_n = -\tfrac12 b^{pq}_n (K^4_q + \hat K^5_q), \qquad (2.37)$$

$$(\hat K^4_p, \hat K^5_p) \to \overset{*}{\mathcal H}{}^p_n = -\tfrac12 b^{pq}_n (\hat K^5_q - \hat K^4_q). \qquad (2.38)$$

Каждая из пар квазинормалей (2.36)-(2.38) при $\tau^n_{pq} \neq 0$ общей нормали не имеет, а при $\tau^n_{pq} = 0$ существует для этих пар следующие нормали $\{\nu^0_p\}$ второго рода:

$$(\hat K^4_p, K^5_p) \to \hat{\mathcal H}^0_p = \tfrac12 (K^5_p - \hat K^4_p), \qquad (2.39)$$

$$(K^4_p, \hat K^5_p) \to \tilde{\mathcal H}^0_p = \tfrac12 (\hat K^5_p - K^4_p), \qquad (2.40)$$

$$(\hat K^4_p, \hat K^5_p) \to \overset{*}{\mathcal H}{}^0_p = \tfrac12 (\hat K^5_p - \hat K^4_p); \qquad (2.41)$$

3) в окрестности третьего порядка

$$\text{а)}\ (K^6_p, K^7_p) \to \begin{cases} \Phi^p_n = \tfrac12 b^{pq}_n (K^7_q - K^6_q), \\ \Phi^0_p = \tfrac12 (K^7_p - 2K^6_p); \end{cases} \qquad (2.42)$$

$$\text{в)}\ (K^7_p, K^5_p) \to \begin{cases} \Psi^p_n = \tfrac12 \Lambda^{qp}_n (K^7_q - K^5_q), \\ \Psi^0_p = \tfrac12 (K^5_p + K^7_p); \end{cases} \qquad (2.43)$$

$$\text{с)}\ (K^7_p, \hat K^5_p) \to \begin{cases} \hat\varphi^p_n = \tfrac12 \Lambda^{qp}_n (K^7_q - \hat K^5_q), \\ \hat\varphi^0_p = \tfrac12 (\hat K^5_p - K^7_p). \end{cases} \qquad (2.44)$$

Заметим, что в случае регулярной гиперполосы, а также регулярного гиперполосного распределения [7], нормали (2.42) являются аналогами нормалей Фубини. В силу этого нормали (2.42) назовем (первыми) аналогами нормалей Фубини $\mathcal H_1$-распределения, ассоциированными с базисным Λ-распределением.

Следуя алгоритму построения двойственных нормалей [7], найдем, например, нормаль $\{\nu^0_p\} = \{\hat M^0_p\}$, двойственную нормали Михэйлеску первого рода $\{\hat M^p_n\}$ $\mathcal H_1$-распределения [1],[2]:

$$\hat M^p_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(r+2)} \Lambda^{ps}_n b^{qt}_n (\Lambda^n_{sqt} + \Lambda^n_{sq}\hat K^4_t + \Lambda^n_{st}\hat K^4_q + \Lambda^n_{tq}\hat K^4_s). \qquad (2.45)$$

Используя биекцию (2.14) (при $\sigma = 1$; $\varkappa = 1$), определенную квазинормалью $\hat K^4_p$ второго порядка, получим [2]:

$$\hat M^0_p = -[\hat K^4_p - \frac{1}{2(r+2)} b^{qt}_n (\Lambda^n_{pqt} + \Lambda^n_{pq}\hat K^4_t + \Lambda^n_{pt}\hat K^4_q + \Lambda^n_{tq}\hat K^4_p)]. \qquad (2.46)$$

Нормали $\{\hat M^p_n\}$ и $\{\hat M^0_p\}$ назовем [7],[1],[2] первыми аналогами нормалей Михэйлеску соответственно первого и второго рода $\mathcal H_1$-распределения. Совершенно аналогичные построения проводим в окрестности второго порядка элемента $\mathcal H_1$-распределения, исходя из квазинормали $\{K^4_p\}$ (2.19) первого порядка:

$$M^p_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(r+2)} \Lambda^{ps}_n b^{qt}_n (\Lambda^n_{sqt} + \Lambda^n_{sq}K^4_t + \Lambda^n_{st}K^4_q + \Lambda^n_{tq}K^4_s), \qquad (2.47)$$

$$M^0_p \overset{def}{=} -[K^4_p - \frac{1}{2(r+2)} b^{qt}_n (\Lambda^n_{pq}K^4_t + \Lambda^n_{pt}K^4_q + \Lambda^n_{tq}K^4_p + \Lambda^n_{pqt}). \qquad (2.48)$$

Нормали $\{M^p_n\}$ и $\{M^0_p\}$ назовем вторыми аналогами нормалей Михэйлеску соответственно первого и второго рода $\mathcal H_1$-распределения [2].

Аналогичные построения нормалей первого и второго рода $\mathcal H_1$-распределения можно провести, используя квазинормали, ассоциированные с L-распределением. Здесь мы приведем только охваты характерных квазинормалей, ассоциированных с L-распределением.

1) В окрестности первого порядка

$$\text{а)}\ K^1_i = \frac{1}{n-m}[M^\alpha_{i\alpha} + M^n_{in} - (M^\alpha_{ij} - M^n_{ij}\nu^\alpha_n)M^j_\alpha], \qquad (2.49)$$

$$\text{б)}\ K^2_i = M^n_{in} + M^n_{i\alpha}\nu^\alpha_n. \qquad (2.50)$$

2) В окрестности второго порядка

$$\text{а)}\ K^3_i = \frac{1}{n-l}[M^n_{in} + M^p_{ip} + M^\alpha_{i\alpha} - (M^\alpha_{ij} - M^n_{ij}\nu^\alpha_n)M^j_\alpha], \qquad (2.51)$$

$$\text{в)}\ K^4_i = \frac{1}{r+1}(M^n_{in} + M^p_{ip} + M^n_{i\alpha}\nu^\alpha_n). \qquad (2.52)$$

3) В окрестности третьего порядка:

$$\text{а)}\ K^5_i = \frac{1}{r}\Lambda_i + \frac{r+2}{r}\Lambda^n_{qi}\nu^q_n + H^n_{\alpha i}\nu^\alpha_n, \qquad (2.53)$$

$$\text{в)}\ K^6_i = \frac{1}{l+2}\hat\Lambda_i + \frac{l}{l+2}\Lambda^n_{qi}\nu^q_n + \frac{l}{l+2}H^n_{\alpha i}\nu^\alpha_n - \frac{2}{l+2}(M^\alpha_{ji} - M^n_{ji}\nu^\alpha_n)M^j_\alpha. \qquad (2.54)$$

§3. Инвариантные оснащения в смысле Картана Λ-распределения и L-распределения.

1. Найдем инвариантную оснащающую плоскость $\mathfrak{A}_{n-r-1}(\nu^p_n)(A_0)$, принадлежащую нормали первого рода $N_{n-r}(\nu^p_n)(A_0)$ Λ-распределения. Плоскость $\mathfrak{A}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ зададим точками

$$K_i(\nu^p_n)=x^0_i A_0+A_i\,;\ K_\alpha(\nu^p_n)=x^0_\alpha A_0+x^i_\alpha A_i+A_\alpha\,;\ K_n(\nu^p_n)=x^0_n A_0+X_n(\nu^p_n), \tag{3.1}$$

где $X_n(\nu^p_n)=A_n+\nu^p_n A_p+\nu^\alpha_n A_\alpha+\nu^i_n A_i$.

Из условия инвариантности плоскости $\mathfrak{A}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}&\nabla_\delta x^0_n+\nu^u_n\pi^0_u+\pi^0_n=0, \qquad \nabla_\delta x^0_i=-\pi^0_i,\\ &\nabla_\delta x^0_\alpha+\nu^i_\alpha\pi^0_i+\pi^0_\alpha=0, \qquad \nabla_\delta x^i_\alpha+\pi^i_\alpha=0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Можно убедиться, что уравнения (3.2) выполняются, если положить

$$x^0_n=\nu^0_n-\nu^\alpha_n H^0_\alpha-\nu^i_n M^0_i\,;\ x^0_i=-M^0_i\,;\ x^0_\alpha=-\overline{H}^0_\alpha\,;\ x^i_\alpha=-M^i_\alpha\,; \tag{3.3}$$

$$\nu^0_n\overset{def}{=}-\frac{1}{r}(\nu^p_{np}-\Lambda^n_{pq}\nu^p_n\nu^q_n)\,;\ M^0_i=\frac{1}{r}M^p_{ip}\,;\ H^0_\alpha=\frac{1}{r}H^p_{\alpha p}\,;\ \overline{H}^0_\alpha=\frac{1}{r}(H^p_{\alpha p}-M^p_{ip}M^i_\alpha). \tag{3.4}$$

Таким образом, инвариантная оснащающая плоскость $\mathfrak{A}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ натянута на точки

$$K_\alpha=A_\alpha-\overline{H}^0_\alpha A_0-M^i_\alpha A_i\,,\ K_i=A_i-M^0_i A_0\,;\ K_n(\nu^p_n)=x^0_n A_0+X_n(\nu^p_n) \tag{3.5}$$

и определяется уравнениями

$$x^p-\nu^p_n x^n=0\,,\quad x^0-\nu^0_n x^n+H^0_\alpha x^\alpha+M^0_i x^i=0. \tag{3.6}$$

Плоскость $\mathfrak{A}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ (3.6) пересекает характеристику $\chi_{n-r-1}(A_0)$ гиперплоскости $H(A_0)$ по $(n-r-2)$-мерной плоскости Π_{n-r-2}:

$$x^n=x^p=0\,,\quad x^0+M^0_i x^i+H^0_\alpha x^\alpha=0. \tag{3.7}$$

Так как задание (3.7) плоскости Π_{n-r-2} не зависит от выбора нормали первого рода $N_{n-r}(\nu^p_n)$ (от выбора квазитензора $\{\nu^p_n\}$) в данной точке A_0, то, следовательно, в каждом центре A_0 $\mathcal{H}_1$-распределения инвариантные оснащающие плоскости $\mathfrak{A}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ (3.6) принадлежат одной связке, вершиной которой служит плоскость $\Pi_{n-r-2}(A_0)\subset\chi_{n-r-1}(A_0)$. Отметим, что инвариантная точка $K_n(\nu^p_n)$

является точкой пересечения оснащающей плоскости $\mathfrak{A}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ с инвариантной прямой $N_1(\nu^p_n)=[A_0, X_n]$, соответствующей данной нормали $N_{n-r}(\nu^p_n)$, т.е. для Λ-распределения точки $K_n(\nu^p_n)$ представляет собой аналог обобщенной точки Кенигса [8], соответствующей нормали $N_{n-r}(\nu^p_n)$. Будем также говорить, что точка $K_n(\nu^p_n)\subset N_1(\nu^p_n)$ является точкой Кенигса H-распределения, ассоциированная с базисным распределением [7],[11],[2].

Итак, плоскость $\mathfrak{A}_{n-r-1}(\nu^p_n)(A_0)$ (3.6), натянутая на точки (3.5), является оснащающей плоскостью Картана элемента Λ-распределения, т.е. плоскости $\Lambda(A_0)$.

2. Внутренним инвариантным образом присоединим к плоскости $L(A_0)$ оснащающую плоскость $\mathfrak{A}_{n-\ell-1}(\nu^i_n)(A_0)\subset N_{n-\ell}(\nu^i_n)(A_0)$.

Можно непосредственно убедиться, что величина

$$\begin{aligned}\varphi^0_n=-\frac{1}{\ell}(&\nu^i_{ni}-M^n_{ki}\nu^k_n\nu^i_n-\nu^\alpha_{ni}M^i_\alpha-M^n_{ki}\nu^k_n\nu^\alpha_n M^i_\alpha+M^\alpha_{ki}M^i_\alpha\nu^k_n-\\ &-H^n_{\alpha i}\nu^\alpha_n\nu^i_n-H^n_{\alpha i}M^i_\beta\nu^\alpha_n\nu^\beta_n+\ell\nu^\alpha_n\nu^0_\alpha)\end{aligned} \tag{3.8}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla_\delta\varphi^0_n+(\nu^k_n-\nu^\alpha_n\nu^k_\alpha)\pi^0_k+L^0_p\pi^p_n-\nu^0_\alpha\pi^\alpha_n+\pi^0_n=0, \tag{3.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned}&L^0_p=\frac{1}{\ell}L^i_{pi}\,,\quad \nabla_\delta L^0_p\equiv\pi^0_p\,;\\ &L^i_{pj}=\Lambda^i_{pj}-\Lambda^n_{pj}\nu^i_n-(\Lambda^\alpha_{pj}-\nu^\alpha_n\Lambda^n_{pj})M^i_\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Плоскость $\mathfrak{A}_{n-\ell-1}(\nu^i_n)(A_0)$ определим точками

$$\hat{K}_p=y^0_p A_0+A_p,\ \hat{K}_\alpha=y^0_\alpha A_0+y^i_\alpha A_i+A_\alpha\,,\ \hat{K}_n(\nu^i_n)=y^0_n A_0+\nu^\sigma_n A_\sigma+A_n. \tag{3.11}$$

Из условия инвариантности плоскости $\mathfrak{A}_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ находим, что

$$\nabla_\delta y^0_n+\nu^\sigma_n\pi^0_\sigma+\pi^0_n=0,\ \nabla_\delta y^0_p+\pi^0_p=0,\ \nabla_\delta y^0_\alpha+y^i_\alpha\pi^0_i+\pi^0_\alpha=0,\ \nabla_\delta y^i_\alpha+\pi^i_\alpha=0. \tag{3.12}$$

В силу (3.8)-(3.10) уравнения (3.12) выполняются, если положить

$$y^0_n=\varphi^0_n+\nu^\alpha_n\nu^0_\alpha-\nu^p_n L^0_p\,;\ y^0_p=-L^0_p,\ y^0_\alpha=\nu^0_\alpha\,;\ y^i_\alpha=-M^i_\alpha. \tag{3.13}$$

Итак, инвариантная оснащающая по Картану плоскость $\mathfrak{A}_{n-\ell-1}(\nu^i_n)(A_0)$ определена точками

$$\hat{K}_\alpha = A_\alpha + \nu^0_\alpha A_0 - M^i_\alpha A_i ;\quad \hat{K}_p = A_p - L^0_p A_0 ;\quad \hat{K}_n = \chi^0_n A_0 + \nu^\sigma_n A_\sigma + A_n , \qquad (3.14)$$

где $\chi^0_n = \varphi^0_n + \nu^\alpha_n \nu^0_\alpha - \nu^p_n L^0_p$, и в репере первого порядка задается уравнениями

$$x^i - \nu^i_n x^n = 0 , \qquad x^0 - \varphi^0_n x^n - \nu^0_\alpha x^\alpha + L^0_p x^p = 0 . \qquad (3.15)$$

Инвариантная точка $\hat{K}_n$ (3.14) является аналогом обобщенной точки Кенигса [8] H-распределения, ассоциированной с L-распределением [7],[1],[2].

§4. Проективные связности, ассоциированные с базисным Λ-распределением и L-распределением.

1. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,r}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n , а слоями - плоскости $\Lambda(A_0)$. Проективную связность Γ пространства $P_{n,r}$ всегда можно определить при помощи системы форм $\{\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}\}$ [6]:

$$\hat\omega^{\bar p}_{\bar q} = \omega^{\bar p}_{\bar q} - \Gamma^{\bar p}_{\bar q K}\,\omega^K_0 , \qquad (4.1)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega^J_0 = \omega^L_0 \wedge \omega^J_L + \omega^0_0 \wedge \omega^J_0 ;\ D\hat\omega^{\bar p}_{\bar q} = \hat\omega^{\bar s}_{\bar q} \wedge \hat\omega^{\bar p}_{\bar s} + \omega^K_0 \wedge \Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q K} , \qquad (4.2)$$

где

$$\Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q K} = d\Gamma^{\bar p}_{\bar q K} - \Gamma^{\bar p}_{\bar s K}\omega^{\bar s}_{\bar q} + \Gamma^{\bar s}_{\bar q K}\omega^{\bar p}_{\bar s} - \Gamma^{\bar s}_{\bar q K}\Gamma^{\bar p}_{\bar s J}\omega^J_0 + \Lambda^n_{\bar q K}\omega^{\bar p}_n + \Lambda^u_{\bar q K}\omega^{\bar p}_u + \Gamma^{\bar p}_{\bar q K}\omega^0_0 - \Gamma^{\bar p}_{\bar q J}\omega^J_K ,\quad \Lambda^{\hat\alpha}_{0K} = \delta^{\hat\alpha}_K ,\quad \Lambda^i_{0K} = \delta^i_K . \qquad (4.3)$$

Формы $\Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}, \omega^K_0$ на $\mathcal{H}_1$-распределении образуют вполне интегрируемую систему и определяют над исходной базой $\{\omega^K_0\}$ пространство геометрического объекта $\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}$. Геометрический объект $\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}$ назовем объектом проективной связности [6] пространства $P_{n,r}$. Для того, чтобы формы $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ определяли проективную связность в слоях (плоскостях Λ) пространства проективной связности $P_{n,r}$, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта связности $\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}$, т.е. чтобы выполнялись дифференциальные уравнения [9],[10]:

$$\Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q K} = \Gamma^{\bar p}_{\bar q K L}\,\omega^L_0 . \qquad (4.4)$$

Структурные уравнения для слоевых форм $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ пространства $P_{n,r}$ имеют вид

$$D\hat\omega^{\bar p}_{\bar q} = \hat\omega^{\bar s}_{\bar q} \wedge \hat\omega^{\bar p}_{\bar s} + \frac{1}{2} R^{\bar p}_{\bar q K L}\,\omega^K_0 \wedge \omega^L_0 , \qquad (4.5)$$

где

$$R^{\bar p}_{\bar q K L} = 2\Gamma^{\bar p}_{\bar q [K L]} \qquad (4.6)$$

является тензором кручения-кривизны проективной связности Γ пространства $P_{n,r}$.

Пусть Λ-распределение оснащено в смысле Картана внутренним образом. Построим проективную связность Γ, внутренне определенную самим $\mathcal{H}_1$-распределением, т.е. построим охват объекта проективной связности $\Gamma = \{\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}\}$ фундаментальными объектами $\mathcal{H}_1$-распределения. Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (4.4) удовлетворяются, если охваты компонент объекта проективной связности $\Gamma = \{\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}\}$ осуществить следующим образом:

$$\Gamma^q_{0\sigma} = 0 ,\ \Gamma^q_{0n} = \nu^q_n ,\ \Gamma^0_{0p} = 0 ,\ \Gamma^0_{0i} = -M^0_i ,\ \Gamma^0_{0\alpha} = -H^0_\alpha ,\ \Gamma^0_{0n} = \nu^0_n , \qquad (4.7)$$

$$\Gamma^p_{qK} = \Lambda^n_{qK}\nu^p_n ,\quad \Gamma^0_{pK} = \Lambda^n_{pK}\nu^0_n - \Lambda^\alpha_{pK}H^0_\alpha - \Lambda^i_{pK}M^0_i . \qquad (4.8)$$

Из формул (4.1),(4.7),(4.8) следует, что слоевые формы $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ пространства проективной связности $P_{n,r}$, внутренне определенного на $\mathcal{H}_1$-распределении и ассоциированного с Λ-распределением, имеют вид:

$$\hat\omega^0_0 = \omega^0_0 - (\delta^n_K\nu^0_n - M^0_i\delta^i_K - H^0_\alpha\delta^\alpha_K)\omega^K_0 ,\quad \hat\omega^p_0 = \omega^p_0 - \nu^p_n\delta^n_K\omega^K_0 , \qquad (4.9)$$

$$\hat\omega^0_p = \omega^0_p - (\Lambda^n_{pK}\nu^0_n - \Lambda^\alpha_{pK}H^0_\alpha - \Lambda^i_{pK}M^0_i)\omega^K_0 ,\quad \hat\omega^p_q = \omega^p_q - \Lambda^n_{qK}\nu^p_n\omega^K_0 . \qquad (4.10)$$

Аналогично, как это показано в работе [6], убеждаемся, что определенная нами проективная связность (4.7),(4.8), есть связность, полученная путем проектирования при помощи внутренне определенной оснащающей по Картану плоскости $\mathcal{L}_{n-r-1}(\nu^0_n)(A_0)$ (3.6).

2. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,\ell}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n, а слоями - плоскости L (ℓ-мерные центропроективные пространства, $\ell = m-r$).

Проективную связность γ пространства $P_{n,\ell}$ определим при помощи системы форм $\{\theta^{\bar\imath}_{\bar\jmath}\}$ [6]:

$$\theta^{\bar\imath}_{\bar\jmath} = \omega^{\bar\imath}_{\bar\jmath} - \gamma^{\bar\imath}_{\bar\jmath K}\,\omega^K_0 , \qquad (4.11)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega^J_0 = \omega^L_0 \wedge \omega^J_L + \omega^0_0 \wedge \omega^J_0 ,\quad D\theta^{\bar\imath}_{\bar\jmath} = \theta^{\bar k}_{\bar\jmath} \wedge \theta^{\bar\imath}_{\bar k} + \omega^K_0 \wedge \Delta\gamma^{\bar\imath}_{\bar\jmath K} , \qquad (4.12)$$

где

$$\Delta\gamma^{\bar\imath}_{\bar\jmath K} = d\gamma^{\bar\imath}_{\bar\jmath K} + \gamma^{\bar\ell}_{\bar\jmath K}\omega^{\bar\imath}_{\bar\ell} - \gamma^{\bar\imath}_{\bar\ell K}\omega^{\bar\ell}_{\bar\jmath} - \gamma^{\bar\ell}_{\bar\jmath K}\gamma^{\bar\imath}_{\bar\ell J}\omega^J_0 + M^p_{\bar\jmath K}\omega^{\bar\imath}_p +$$

$$+ M^{\alpha}_{j\varkappa}\,\omega^{i}_{\alpha} + M^{n}_{j\hat{u}}\,\delta^{\hat{u}}_{\varkappa}\,\omega^{i}_{n} + \gamma^{i}_{j\varkappa}\,\omega^{0}_{0} - \gamma^{i}_{jl}\,\omega^{l}_{\varkappa}\,, \quad M^{\hat{\alpha}}_{0\varkappa} = \delta^{\hat{\alpha}}_{\varkappa}\,, \quad M^{p}_{0\varkappa} = \delta^{p}_{\varkappa}\,. \qquad (4.13)$$

Формы $\Delta\gamma^{i}_{j\varkappa}, \omega^{\varkappa}_{0}$ на $\mathcal{H}_1$-распределении образуют вполне интегрируемую систему и определяют над исходной базой $\{\omega^{\varkappa}_{0}\}$ пространство объекта проективной связности $\overset{\circ}{\gamma}{}^{i}_{j\varkappa}$ [6]. Для того, чтобы формы θ^{i}_{j} определяли проективную связность в слоях (плоскостях Π_{ℓ} L-распределения) пространства $P_{n,\ell}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнения [9],[10] :

$$\Delta\gamma^{i}_{j\varkappa} = \gamma^{i}_{j\varkappa y}\,\omega^{y}_{0}\,. \qquad (4.14)$$

Структурные уравнения для слоевых форм θ^{i}_{j} пространства $P_{n,\ell}$ имеют вид

$$\mathcal{D}\theta^{i}_{j} = \theta^{k}_{j}\wedge\theta^{i}_{k} + \frac{1}{2}\,\tau^{i}_{j\varkappa L}\,\omega^{\varkappa}_{0}\wedge\omega^{L}_{0}\,, \qquad (4.15)$$

где совокупность величин

$$\tau^{i}_{j\varkappa L} = 2\,\gamma^{i}_{j[\varkappa L]} \qquad (4.16)$$

образует тензор кручения-кривизны проективной связности γ пространства $P_{n,\ell}$.

Следуя работе [6], найдем проективную связность γ , внутренне определенную самим $\mathcal{H}_1$-распределением, т.е. построим охват объекта проективной связности $\gamma = \{\gamma^{i}_{j\varkappa}\}$ фундаментальными объектами $\mathcal{H}_1$-распределения.

Если охваты компонент объекта $\gamma = \{\gamma^{i}_{j\varkappa}\}$ осуществить по формулам

$$\gamma^{i}_{0\varkappa} = \delta^{n}_{\varkappa}\,\nu^{i}_{n} - \delta^{\alpha}_{\varkappa}\,M^{i}_{\alpha} + \delta^{n}_{\varkappa}\,\nu^{\alpha}_{n}\,M^{i}_{\alpha}\,,$$
$$\gamma^{j}_{i\varkappa} = M^{n}_{i\hat{u}}\,\delta^{\hat{u}}_{\varkappa}\,\nu^{j}_{n} - M^{\alpha}_{i\varkappa}\,M^{j}_{\alpha} + M^{n}_{i\hat{u}}\,\delta^{\hat{u}}_{\varkappa}\,\nu^{\alpha}_{n}\,M^{j}_{\alpha}\,, \qquad (4.17)$$
$$\gamma^{0}_{0\varkappa} = \varphi^{0}_{n}\,\delta^{n}_{\varkappa} - L^{0}_{p}\,\delta^{p}_{\varkappa} + \nu^{0}_{\alpha}\,\delta^{\alpha}_{\varkappa}\,, \quad \gamma^{0}_{i\varkappa} = M^{n}_{i\hat{u}}\,\delta^{\hat{u}}_{\varkappa}\,\varphi^{0}_{n} - M^{p}_{i\varkappa}\,L^{0}_{p} + \nu^{0}_{\alpha}\,M^{\alpha}_{i\varkappa}\,,$$

то уравнения (4.14) удовлетворяются.

Таким образом, в силу (4.11),(4.17), слоевые формы θ^{i}_{j} пространства проективной связности $P_{n,\ell}$ имеют такое строение :

$$\theta^{i}_{0} = \omega^{i}_{0} - (\nu^{i}_{n}\,\delta^{n}_{\varkappa} - M^{i}_{\alpha}\,\delta^{\alpha}_{\varkappa} + \nu^{\alpha}_{n}\,M^{i}_{\alpha}\,\delta^{n}_{\varkappa})\,\omega^{\varkappa}_{0}\,,$$
$$\theta^{0}_{0} = \omega^{0}_{0} - (\varphi^{0}_{n}\,\delta^{n}_{\varkappa} - L^{0}_{p}\,\delta^{p}_{\varkappa} + \nu^{0}_{\alpha}\,\delta^{\alpha}_{\varkappa})\,\omega^{\varkappa}_{0}\,, \qquad (4.18)$$
$$\theta^{i}_{j} = \omega^{i}_{j} - (\nu^{i}_{n}\,M^{n}_{j\hat{u}}\,\delta^{\hat{u}}_{\varkappa} - M^{i}_{\alpha}\,M^{\alpha}_{j\varkappa} + M^{n}_{j\hat{u}}\,\delta^{\hat{u}}_{\varkappa}\,\nu^{\alpha}_{n}\,M^{i}_{\alpha})\,\omega^{\varkappa}_{0}\,,$$

$$\theta^{0}_{i} = \omega^{0}_{i} - (\varphi^{0}_{n}\,\delta^{\hat{u}}_{\varkappa}\,M^{n}_{i\hat{u}} - L^{0}_{p}\,M^{p}_{i\varkappa} + \nu^{0}_{\alpha}\,M^{\alpha}_{i\varkappa})\,\omega^{\varkappa}_{0}\,.$$

Пусть L-распределение оснащено в смысле Картана внутренним образом. Аналогично [6], можно показать, что построенная внутренним образом, проективная связность γ определена путем проектирования при помощи внутренне определенной (оснащающей по Картану) плоскости

$$\mathcal{K}_{n-\ell-1} = [\hat{K}_{p}, \hat{K}_{\alpha}, \hat{K}_{n}]\,. \qquad (3.15)$$

Библиографический список

1.П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^{z}_{m,n-1}$ проективного пространства / Калинингр.ун-т.Калининград,1982.126с. Библиогр.20 назв.Деп.в ВИНИТИ 16.12.82. № 6192-82.

2.П о п о в Ю.И. Скомпонованные трехсоставные распределения проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград ,1989.Вып. 20.С.73-96.

3.Н о р д е н А.П. Теория композиций//Проблемы геометрии/ВИНИТИ. М.,1978.Т.10.С.117-145.

4.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.:Наука,1976.

5.Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация/Докл.АН Арм.ССР. 1959.Т.28.№4.С.151-157.

6.Л ап т е в Г.Ф.,Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности//Тр.геометр.семинара/ ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-94.

7.С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975.Т.7.С.117-151.

8.О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1973.Т.4. С.71-120.

9.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.Моск.матем.о-ва/ ГИТТЛ.1953.Т.2.С.275-382.

10.Л а п т е в Г.Ф. Многообразия,погруженные в обобщенные пространства// Тр. IУ Всес.матем.съезда,1961.Л.:Наука,1964.Т.2.С.226-233.