УДК 517.984

А. А. Юрова, А. В. Юров, В. А. Юров

ДВУМЕРНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МУТАРА

Исследуется двумерный суперсимметричный гамильтониан H, компонентами которого служат сдвинутые на константу два скалярных (h_0, h_1) и один матричный $\left(\tilde{h}_{ml}\right)$ квантово-механические гамильтонианы. Предполагая, что решение спектральной задачи для оператора h_0 известно, обсуждается применение многомерного обобщения метода факторизации для нахождения $\tilde{h}_{ml}$ и h_1, дискретный спектр которых содержит нижний уровень, отвечающий энергии, меньшей чем энергия основного состояния h_0. Предложена схема построения суперсимметричного гамильтониана H с вырожденным уровнем E = 0. Для этого случая предъявлен (0 + 1)-супермультиплет с нарушенной $U(1)$ симметрией. Описан алгоритм реализации алгебры расширенной суперсимметрии. Установлена связь между задачей о «добавлении» нижнего уровня к спектру матричной компоненты супергамильтониана и формулой Мутара. Обсуждаются преобразования Мутара при d > 2.

This is a treatise on a two-dimensional supersymmetric hamiltonian H whose components consists of two scalar (h_0, h_1) and one matrix-valued $\left(\tilde{h}_{ml}\right)$ quantum-mechanical Hamiltonians with constant terms added to the mix. In particular, the article discusses the ways to utilize a known solution of the spectral problem for operator h_0 in the multi-dimensional generalization of the factorization method in order to pro-duce such $\tilde{h}_{ml}$ and h_1 that their ground-state eigenvalues will be identical to each other but lower than that of h_0. Then we propose a new scheme designed for the task of construction of supersymmetric Hamiltonian H with a degenerate eigenvalue E = 0 and provide the corresponding (0 + 1) super-multiplet with a broken $U(1)$ symmetry. Next, we describe the algorithm for production of the algebra of an extended supersymmetry. We determine the important connection that relates the Moutard formula with a problem of «insertion» of a new ground-state eigenvalue to the spectrum of the matrix-valued component of H. And, finally, we discuss the Moutard transformations and their viability for the higher dimensional cases when d > 2.

Ключевые слова: суперсимметрия, преобразование Мутара, квантовый гамильтониан.

Keywords: supersymmetry, Moutard transformation, quantum-mechanical Hamiltonian.

Введение

Суперсимметричная квантовая механика реализует описание систем с двойным вырождением энергетических уровней. В случае единственной пространственной переменной ($d = 1$) суперсимметрия связа-

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. № 1. С. 81 – 95.

на с одномерным методом факторизации и формализмом преобразования Дарбу (ПД) [1—3]. ПД связывает друг с другом два гамильтониана h_0 и h_1:

$$h_0 = q^+ q + E_0, \qquad h_1 = qq^+ + E_0,$$
$$q = \frac{d}{dx} - (\ln\varphi)' \qquad q^+ = -\frac{d}{dx} - (\ln\varphi)', \tag{1}$$

где $\varphi = \varphi(x; E_0)$ — решение уравнения $h_0\varphi = E_0\varphi$ (опорная функция) с фиксированным значением спектрального параметра $E = E_0$. Легко видеть, что h_0 и h_1 сплетаются посредством q и q^+:

$$qh_0 = h_1 q, \quad h_0 q^+ = q^+ h_1. \tag{2}$$

Отсюда следует, что если $\psi(x; E)$ — это общее решение уравнения $h_0\psi = E\psi$ с некоторым (произвольным) значением спектрального параметра E, то функция $\psi^{(1)}(x; E) \equiv q\psi$ является общим решением уравнения $h_1\psi^{(1)} = E\psi^{(1)}$ с тем же значением E. Справедливо и обратное утверждение, причем $\psi = q^+\psi^{(1)}$. Так как $q\varphi = 0$, то для нахождения решений уравнения Шрёдингера с гамильтонианом h^1 и значением $E = E_0$ следует вначале определить решение ϕ линейно независимое с опорной функцией:

$$\phi'\varphi - \varphi'\phi = 1, \tag{3}$$

после чего подействовать на ϕ оператором q и найти второе, линейно независимое с $q\phi$ решение. Проделав эту процедуру, легко убедиться, что общее решение уравнения $h_1\varphi^{(1)} = E_0\varphi^{(1)}$ будет иметь вид

$$\varphi^{(1)} = \frac{C_1}{\varphi}\int dx\varphi^2 + \frac{C_2}{\varphi}. \tag{4}$$

Замечательной особенностью ПД является то, что эти преобразования позволяют получать квантово-механические гамильтонианы, спектры которых совпадают с точностью до конечного числа уровней (для краткости далее в тексте под словом «спектр» мы будем понимать дискретную часть полного спектра соответствующего оператора). Теперь предположим, что мы можем решить уравнение $h_0\psi = E\psi$ для всех значений спектрального параметра. Несложно убедиться, что если опорная функция является знакоопределенным решением уравнения $h_0\varphi = E_0\varphi$, то функция $\psi^{(1)} = q\psi$ будет принадлежать пространству квадратично интегрируемых функций L^2, при условии что этому пространству принадлежит и функция ψ. Другими словами, ПД отображает пространство L^2 само в себя, откуда прямо следует, что спектры операторов h_0 и h_1 совпадают с точностью до уровня E_0. Уровень E_0 может принадлежать спектру гамильтониана h_0. В этом случае φ будет знакоопределенной, лишь если это волновая функция основного состояния h_0. При этом спектр h_1 получается из спектра h_0 вычеркиванием уровня E_0 [4]. Так как ПД обратимы, это дает возможность отталкиваясь от исходной решаемой модели (с гамильтонианом h_0) строить новые гамильтонианы с дополнительными уровнями. Например, чтобы получить гамильтониан h_1 со спектром, содержащим нижний уровень E_0, лежащий ниже всего спектра оператора h_0, а в остальном совпадающим с ним, следует выбрать ненормируемую, всюду положительную опорную функцию φ, удовлетворяющую асимптотическим условиям

$$\varphi \to +\infty,\ x \to \pm \propto,$$

причем собственная функция гамильтониана h_1, отвечающая собственному значению $E = E_0$, находится по формуле (4) с $C_1 = 0$. Подробный анализ такого преобразования содержится в работе [5]. Наконец, можно обойти условие знакоопределенности опорной функции и удалять уровни целыми группами, пользуясь специальной схемой, предложенной в [5], причем нижний уровень в серии, составленной из этих групп, может быть возбужденным.

Все сказанное имеет прямое отношение к одномерной суперсимметричной квантовой механике, основанной на известных перестановочных соотношениях

$$\left[Q, H\right] = \left[Q^{+}, H\right] = 0, \qquad \left\{Q, Q^{+}\right\} = H, \tag{5}$$

где

$$Q = q\sigma_{+}, \quad Q^{+} = q^{+}\sigma_{-}, \quad H = \mathrm{diag}\left(h_0 - E_0, h_1 - E_0\right), \tag{6}$$

причем $\sigma_{\pm} = \left(\sigma_1 \pm i\sigma_2\right)/2$, $\sigma_{1,2}$ — матрицы Паули. Отметим, что q и q^{+} — бозонные, а σ_{-} и σ_{+} — фермионные операторы уничтожения/рождения. Если дискретные спектры h_0 и h_1 отличаются на один уровень, то (5) отвечает точной суперсимметрии. Если же уровень E_0 отсутствует в спектрах обоих гамильтонианов, то суперсимметрия нарушена. Легко видеть, что уровень E_0 не может одновременно присутствовать в спектре h_0 и спектре h_1. Это означает, что если нижний уровень в спектре одномерного суперсимметричного гамильтониана равен нулю, то он невырожден.

В данной работе мы рассмотрим случай двумерный суперсимметричной квантовой механики. Операторы, удовлетворяющие алгебре (5), представляются в виде (7):

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & -q_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_{+} = \begin{pmatrix} 0 & q_1^{+} & q_2^{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2^{+} \\ 0 & 0 & 0 & -q_1^{+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$H = \mathrm{diag}\left(h_0 - E_0, \tilde{h}_{ml} - 2\delta_{ml}E_0, h_1 - E_0\right), \tag{8}$$

где

$$h_0 = q_m^{+}q_m + E_0, \qquad h_1 = q_m q_m^{+} + E_0, \qquad \tilde{h}_{ml} \equiv h_{ml} + H_{ml} - E_0\delta_{ml}, \tag{9}$$

причем

$$h_{ml} = q_m q_l^{+} + E_0\delta_{ml}, \qquad H_{ml} = p_m p_l^{+} + E_0\delta_{ml}, \tag{10}$$

$q_m = \partial_m - \partial_m(\ln\varphi)$, $p_m = \varepsilon_{mk} q_k^+$, ε_{mk} — единичный антисимметричный тензор, $\varphi = \varphi(x_1, x_2; E_0)$ — опорная функция, $\partial_m \equiv \partial / \partial x^m$, $m = 1, 2$ и всюду в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В отличие от случая $d = 1$, между спектрами h_0 и h_1 в общем случае нет никакой связи (связи существуют между скалярными гамильтонианами, сплетенными операторами Дарбу высшего порядка, однако классы соответствующих потенциалов весьма узки [8]). Для иллюстрации последнего утверждения рассмотрим притягивающий кулоновский потенциал (этот пример позаимствован из работы [4]) $u = -\alpha r^{-1}$, $\alpha > 0$.

Несложно убедиться, что если в роли φ выбрать волновую функцию основного состояния, то $u^{(1)} = +\alpha r^{-1}$. Таким образом, гамильтониан h_1 вообще не обладает дискретным спектром, тогда как при $d = 1$ спектр h_1 должен был получиться из спектра h_0 вычеркиванием нижнего уровня. Сказанное должно прояснить то обстоятельство, что при $d > 1$ мы не имеем общих формул, выражающих волновые функции h_1 через волновые функции h_0, подобные одномерному случаю, так как наличие таких формул означает и наличие общих связей между спектрами h_0 и h_1. Не запрещено, однако, существование общих формул, связывающих решения $\psi, \psi^{(1)}$ многомерных уравнений Шрёдингера (4) с одинаковым значением спектрального параметра. Для случая $d = 2$ такая формула может быть выведена при помощи преобразования Мутара (25) [9].

Замечание.

Связи между волновыми функциями гамильтонианов h_0 и h_1 возможны, когда потенциалы u и $u^{(1)}$ переводятся друг в друга путем подходящего выбора параметров $\{\lambda_v\}$, от которых они зависят, то есть если $u^{(1)}\left(x_1, x_2; \left\{\lambda_v'\right\}\right) = u\left(x_1, x_2; \{\lambda_v\}\right)$. Пример такого двумерного потенциала приведен в основном тексте статьи (формула (28)).

Общие связи между спектрами существуют для пар h_0, h_{ml} и h_1, H_{ml}. Действительно, учитывая, что h_1 можно представить в виде $h_1 = p_m^+ p_m + E_0$, несложно проверить истинность соотношений сплетания:

$$\begin{aligned} &q_m h_0 = h_{ml} q_l, \qquad p_m h_1 = H_{ml} p_l, \\ &h_0 q_m^+ = q_l^+ h_{lm}, \qquad h_1 p_m^+ = p_l^+ H_{lm}, \end{aligned} \tag{11}$$

что и означает наличие таких связей. По этим же формулам сплетается с h_0 и h_1 оператор $\tilde{h}_{ml}$. Его спектр совпадает со спектрами скалярных гамильтонианов с точностью до, быть может, уровня E_0.

В работе [7] изучалась суперсимметрия, определенная с помощью операторов (7)—(10), причем предполагалось, что $\varphi(x_1, x_2; E_0)$ — волновая функция основного состояния гамильтониана h_0. Как показано в цитируемой статье, такой выбор опорной функции приводит к тому, что уровень E_0 отсутствует в физических частях спектров $\tilde{h}_{ml}$ и h_1, то есть к ненарушенной суперсимметрии. Основное внимание было уделено связям между спектрами h_0, $\tilde{h}_{ml}$ и h_1 при условии $E > E_0$. В этой работе нас будет интересовать главным образом вопрос о наличии уровня E_0 в спектрах этих гамильтонианов. В частности, мы обсудим задачу о добавлении уровня E_0, отсутствующего в спектре h_0, к спектрам двух других гамильтонианов. Такой выбор темы обусловлен тем обстоятельством, что именно наличие или отсутствие уровня E_0 в спектрах h_0, $\tilde{h}_{ml}$ и h_1 определяет, точна или нарушена суперсимметрия в рассматриваемой модели. В первом разделе будет развит общий подход, позволяющий осуществить эту процедуру. В разделе 2 на примере радиально-симметричного потенциала мы покажем, что при специальном выборе асимптотик опорной функции могут быть реализованы 25 различных случаев «распределения уровня E_0» по спектрам h_0, $\tilde{h}_{ml}$ и h_1. В тринадцати из них уровень E_0 вообще отсутствует в спектрах всех гамильтонианов, что означает наличие спонтанно нарушенной суперсимметрии, а в четырех случаях суперсимметричный гамильтониан обладает двукратно вырожденным уровнем с E_0 — ситуация, не встречающаяся для $d = 1$ в общем случае и для $d \geq 2$ при удалении уровня с помощью волновой функции основного состояния гамильтониана h_0 (случай, подробно исследованный в [4; 7; 10]. Там же, используя суперполевой формализм, мы продемонстрируем, что наша модель приводит к наличию супермультиплета полей со спонтанно нарушенной $U(1)$ симметрией. В разделе 3 мы кратко опишем алгоритм построения $d = 2$ моделей расширенной суперсимметрии, обобщающий соответствующий алгоритм для одномерных моделей, предложенный в [11]. В разделе 2 демонстрируется тесная связь между задачей о добавлении уровня E_0 к спектру матричной компоненты $d = 2$ супергамильтониана и формулой Мутара, поэтому, имея в виду возможные обобщения указанной задачи на $d > 2$, в разделе 4 мы демонстрируем многомерные преобразования Мутара, реализованные между волновыми функциями из пространств, объединенных в обобщенный комплекс де Рама [4].

1. Добавление уровня и преобразование Мутара

Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$h_0\psi = E\psi,$$

где $h_0 = -\Delta + u$.

Будем называть интегрируемыми потенциалами такие функции $u = u(x_1, x_2)$, для которых это уравнение может быть решено явно для любого значения спектрального параметра E. Пусть u — некоторый заданный интегрируемый потенциал. В отличие от одномерного случая, потенциал

$$u^{(1)} = u - 2\Delta \ln \varphi, \tag{12}$$

где φ — опорная функция $(h_0\varphi = E_0\varphi)$, уже не является интегрируемым.

Предположим, что значение спектрального параметра E_0 лежит ниже энергии основного состояния гамильтониана h_0. Нас интересует следующий вопрос: какой следует выбрать опорную функцию φ, чтобы уровень E_0 появился в физической части спектров h_1 и $\tilde{h}_{ml}$?

Для скалярного гамильтониана ответить на этот вопрос не составляет труда. Действительно, легко убедиться, что функция φ^{-1} удовлетворяет уравнению

$$h_1 \frac{1}{\varphi} = E_0 \frac{1}{\varphi}, \tag{13}$$

поэтому достаточно выбрать φ положительной для всех x_1 и x_2 и обладающей экспоненциальным ростом по всем направлениям на плоскости. Ситуация здесь буквально совпадает с одномерным случаем (если не рассматривать поведение возбужденных уровней).

Рассмотрим теперь матричный гамильтониан. В [4] показано, что все собственные функции $\tilde{h}_{ml}$, отвечающие значениям $E > E_0$, строятся из собственных функций скалярных гамильтонианов h_0 и h_1 с помощью операторов q_m и p_m. Очевидно, что если ψ — второе решение уравнения Шрёдингера с $E = E_0$, то функция

$$\psi_m = q_m \psi \tag{14}$$

будет удовлетворять соотношению

$$\tilde{h}_{ml} \psi_l = E_0 \psi_m. \tag{15}$$

Докажем, что если ψ_m достаточно быстро убывает на бесконечности вместе со своими производными, то (14) является не только достаточным, но и необходимым условием того, чтобы ψ_m была решением (15). В самом деле, пусть ψ_m — нормируемое решение (15). Определим функции ρ_m и σ_m равенствами

$$\rho_m \equiv h_{ml}\psi_l, \qquad \sigma_m \equiv H_{ml}\psi_l \tag{16}$$

и будем считать, что эти функции вместе с ψ_m квадратично интегрируемы.

Из (9)–(11) следует, что $\sigma_m + \rho_m = 2E_0\psi_m$, то есть

$$(\rho_m + \sigma_m, \rho_m + \sigma_m) = 4 E_0^2. \tag{17}$$

С другой стороны, можно убедиться, что

$$h_{mk} H_{kl} = H_{mk} h_{kl} = E_0 \tilde{h}_{ml}, \tag{18}$$

откуда

$$h_{ml}\sigma_l = H_{ml}\rho_l = E_0^2 \psi_m. \tag{19}$$

Таким образом,

$$(\psi_m, h_{ml}\sigma_l) = (h_{lm}\psi_m, \sigma_l) = (\rho_m, \sigma_m) = E_0^2. \tag{20}$$

Комбинируя с (17), получаем $(\rho_m - \sigma_m, \rho_m - \sigma_m) = 0$, следовательно $\sigma_m = \rho_m = E_0\psi_m$. Окончательно из (16) получаем, что ψ_m должна удовлетворять уравнениям

$$h_{ml}\psi_l = H_{ml}\psi_l = E_0\psi_m. \tag{21}$$

Осталось учесть, что из результатов работы [4] следует существование взаимо однозначного соответствия между собственными функциями операторов h_{ml} и h_0. Это утверждение совместно с формулой (21) завершает доказательство.

Аналогичное рассуждение справедливо и для функции, возникающей при действии p_m на решение $\psi^{(1)}$ (не обязательно нормируемое) уравнения Шрёдингера с потенциалом $u^{(1)}$ и энергией $E = E_0$. Это означает наличие нетривиальной связи между решениями ψ и $\psi^{(1)}$, отвечающих одинаковым значениям спектрального параметра ($E = E_0$) и потенциалам u и $u^{(1)}$ из соотношения (12). Соответствующую связь легко установить, используя (21). Из этих уравнений следует, что

$$q_m^+\psi_m = p_m^+\psi_m = 0, \tag{22}$$

то есть должны существовать две функции ψ и $\psi^{(1)}$, такие, что:

$$\psi_m = q_m\psi = p_m\psi^{(1)}, \tag{23}$$

и удовлетворяющие уравнениям

$$h_0\psi = E_0\psi, \qquad h_1\psi^{(1)} = E_0\psi^{(1)}. \tag{24}$$

Интегрируя (23), получаем искомую связь, которая оказывается известной формулой (или преобразованием) Мутара [9]:

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{\psi}\int dx_k\varepsilon_{km}\left(\varphi\partial_m\psi - \psi\partial_m\varphi\right). \tag{25}$$

Отметим, что 1-форма под интегралом в (25) замкнута.

Таким образом, формула Мутара оказывается тесно связанной с задачей построения матричной компоненты $\tilde{h}_{ml}$ супергамильтониана (8), в спектр которой входит уровень E_0. Можно сказать, что наличие этой формулы означает выполнение необходимого условия существования уровня E_0 в спектре $\tilde{h}_{ml}$. Разумеется, в рассматриваемом двумерном случае это утверждение тривиально, но при $d > 2$ ситуация становится иной. Мы вернемся к этому вопросу в последнем разделе.

2. Радиально-симметричный потенциал

Рассмотрим случай, когда исходный потенциал обладает радиальной симметрией $u = u(r)$ $\left(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$, и потребуем, чтобы аналогичным свойством обладала и опорная функция преобразования φ. Линейно независимые решения с φ и $1/\varphi$ мы обозначим ψ и $\psi^{(1)}$ (напомним, что φ и ψ — это решения уравнения Шрёдингера с потенциалом

u, а $1/\varphi$ и $\psi^{(1)}$ — с потенциалом $u^{(1)}$, см. (12)). Отсюда получаем две функции, удовлетворяющие уравнению Шрёдингера с матричным потенциалом $\tilde{h}_{ml}$ и значением $E = E_0$:

$$\psi_m = q_m \psi = \frac{x_m}{r^2 \varphi}, \qquad \phi_m = p_m \psi^{(1)} = \frac{\varepsilon_{mn} x_n \varphi}{r^2}. \tag{26}$$

Выше мы предполагали, что фиксирован интегрируемый потенциал $u(r)$, отвечающий гамильтониану h_0, а опорная функция φ подбирается таким образом, чтобы уровень E_0 присутствовал или нет в спектрах $\tilde{h}_{ml}$ и h_1. Можно поступить и иначе, то есть задать явный вид опорной функции, после чего прямой подстановкой в уравнение Шрёдингера найти потенциалы u и $u^{(1)}$. Пусть регулярная при $r \neq 0$, всюду положительная функция φ принимает следующие асимптотические значения: $\varphi \to r^a$ при $r \to \infty$ и $\varphi \to r^b$ при $r \to 0$. В этом, простом, случае вопрос о наличии уровня E_0 в спектрах трех гамильтонианов h_0, $\tilde{h}_{ml}$ и h_1 может быть исследован до конца. Результаты такого исследования удобно представить в виде таблицы.

Нахождение уровня E_0 в спектрах компонент супергамильтониана при соответствующих асимптотических условиях

Область изменения параметра b	Область изменения параметра a				
	1. $(-\infty; -\mathbf{1})$	2. $(-1; 0]$	3. $\mathbf{a = 0}$	4. $(\mathbf{0}; \mathbf{1}]$	5. $(\mathbf{1}; +\infty)$
1. $(-\infty; -1]$	∅	∅	∅	$\tilde{h}_{ml}$	$\tilde{h}_{ml}, h_1$
2. $(-1; 0)$	h_0	∅	∅	$\tilde{h}_{ml}$	$\tilde{h}_{ml}, h_1$
3. $\mathbf{b = 0}$	h_0	∅	∅	∅	h_1
4. $(\mathbf{0}; \mathbf{1})$	$\tilde{h}_{ml}, h_0$	$\tilde{h}_{ml}$	∅	∅	h_1
5. $[\mathbf{1}; +\infty)$	$\tilde{h}_{ml}, h_0$	$\tilde{h}_{ml}$	∅	∅	∅

В первой строке указана область изменения параметра a, а в первом столбце — параметра b. В клетках вписаны гамильтонианы, в спектре которых имеется уровень E_0, при соответствующих значениях параметров a и b. Значок ∅ означает, что этот уровень отсутствует в спектрах всех трех гамильтонианов.

Эта таблица пригодна и для обычных в приложениях случаев, когда функция меняется не по степенному, а по показательному закону. Например, волновая функция основного состояния (с энергией E_0) для регулярных потенциалов степенного типа убывает на бесконечности экспоненциальным образом и не обращается в нуль в начале координат. Этому соответствует клетка (3; 1) (с $b = 0$ и $a \in (-\infty; -1)$) в нашей таблице. Отсюда видно, что в этом случае уровень E_0 присутствует только в спектре скалярного гамильтониана h_0, в согласии с результатами работы [4].

Комментируя таблицу, отметим, что из всех 25 вариантов в 13 случаях суперсимметрия спонтанно нарушена (клетки со значком ∅), а среди остальных 12 имеются 4 случая, когда уровень $E = 0$ супергамильтониана (8) по крайней мере двукратно вырожден.

Поясним последнее обстоятельство. Спектр суперсимметричного гамильтониана (8) состоит из уровней

$$\left\{E_i - E_0,\, E_i^{(1)} - E_0\right\},$$

где $E_i, E_i^{(1)}$ — уровни дискретных спектров h_0 и h_1 соответственно. Выберем φ такой, чтобы выполнялись асимптотические условия (1; 5) или (2; 5) в таблице. В результате в спектре (8) появляется двукратно вырожденный уровень E_0, которому отвечают собственные функции

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 r^{-2}\varphi^{-1} \\ x_2 r^{-2}\varphi^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Используя явный вид нечетных суперсимметричных операторов (7), можно убедиться, что известные соотношения для волновых функций, отвечающих нулевому уровню,

$$Q\Psi_{1,2} = Q^{+}\Psi_{1,2} = 0$$

удовлетворяются.

В качестве примера выберем $\varphi = \exp(\alpha r)/r^k$, где $\alpha, k > 0$. Такая функция удовлетворяет требуемому асимптотическому поведению. В результате получаем два скалярных потенциала, соответствующих гамильтонианам h_0 и h_1:

$$u = \frac{k^2}{r^2} - \frac{\alpha(2k-1)}{r}, \qquad u^{(1)} = \frac{k^2}{r^2} - \frac{\alpha(2k+1)}{r}. \tag{28}$$

Добавленный уровень соответствует энергии $E_0 = -\alpha^2$. В этом несложно убедиться, заметив, что эти потенциалы интегрируются с помощью гипергеометрических функций. Дискретные спектры определяются формулами

$$E_{N,m} = -\frac{\alpha^2(2k \pm 1)^2}{\left(1 + 2\left[N + \sqrt{m^2 + k^2}\right]\right)^2}, \tag{29}$$

где знак «–» относится к u, «+» — к $u^{(1)}$, N — главное, а m — магнитное квантовое число.

Построенные потенциалы интересны с той точки зрения, что на их примере можно рассмотреть качественное отличие многомерных преобразований Дарбу от их одномерного аналога. В частности, сравнение спектров гамильтонианов h_0 и h_1 показывает, что добавление нижнего уровня сдвигает весь спектр. Если рассмотреть потенциалы (28), то видно, что уровни гамильтониана h_1 смещаются вниз по отношению к уровням h_0. Это смещение максимально в нижней части ямы и убывает как $1 / N^2$ в верхней части спектра. В свою очередь, спектр суперсимметричного гамильтониана (8) вырожден двукратно, включая уровень $E = 0$. Его нормируемые вакуумные волновые функции даются выражениями (27) после подстановки явного вида φ.

В работе [7] показано, что d-мерную суперсимметричную квантовую механику можно рассматривать как (0 + 1)-мерную теорию d-компонентного суперполя. Интересно рассмотреть с полевой точки зрения описанную модель с вырожденным нулевым уровнем. Соответствующий лагранжиан имеет вид [7]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial x)^2 + \frac{i}{2}\overline{\psi_l}\hat{\partial}\psi_l - \frac{1}{2}\left(\partial_l \chi(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_l \partial_m \chi(x)\right)\overline{\psi_l}\psi_m, \tag{30}$$

где $x = (x(t), y(t))$, $\psi(t)$ — двухкомпонентный спинор, $\chi(x) \equiv -\ln\varphi$ — суперпотенциал, φ — опорная функция, $\hat{\partial} = \gamma_0\partial$, $\gamma_0 = \sigma_1$, $\gamma_1 = i\sigma_2$, $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$, $l = 1, 2.$ Скалярные поля x_l вещественны, а фермионное поле майораново: $\psi = \psi^C \equiv C\overline{\psi}^T$, $C = \sigma_2$. После перехода к гамильтоновскому формализму и канонического квантования получается квантовый суперсимметричный гамильтониан, который в координатном представлении совпадает с оператором (8).

Очевидно, что третий член, описывающий взаимодействие скалярных полей, спонтанно нарушает $U(1)$ симметрию, если суперпотенциал радиально симметричен. Подставим явный вид нашей опорной функции в (30) и перейдем к новым полевым переменным

$$x(t) = r(t)\cos(\theta(t)),\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)).$$

Потенциальная энергия скалярных полей минимизируется при $r = r_0 = k/a$. Раскладывая два последних члена в (30) около точки r_0 и переходя к сдвинутому полю $R(t) = r(t) - r_0$, получаем систему из одного массивного (с массой $m = a^2/k$) скалярного поля (R), годстоуновского бозона (θ) и двух безмассовых фермионов.

3. Расширенная суперсимметрия

В предыдущем разделе мы показали, как построить двумерный суперсимметричный гамильтониан с двукратно вырожденным уровнем $E = 0$. Можно получить и модели, в которых все уровни (включая нулевой, если он принадлежит спектру) вырождены многократно. Такая ситуация реализуется в моделях расширенной суперсимметрии:

$$\{Q_i, Q_k\} = \delta_{ik}\mathrm{H},\ [Q_i, \mathrm{H}] = 0,\ i, k = 1, \ldots, N. \tag{31}$$

Одномерная расширенная суперсимметричная квантовая механика, основанная на технике преобразования Дарбу, исследовалась в работе [11]. В этом разделе мы покажем, как можно реализовать соответствующую алгебру в случае $d = 2$ (см. также [12]).

Рассмотрим два супергамильтониана: $H_1 \equiv H$ из (8) и H_2, определенный соотношением

$$H_2 = \mathrm{diag}\,(h_1 - E_0, \hat{h}_{ml} - 2\delta_{ml}E_0, h_0 - E_0). \tag{32}$$

Оператор $\hat{h}_{ml}$ отличается от $\tilde{h}_{ml}$ тем, что сплетается с h_1 не операторами p_m, а дуальными к ним $\pm q_m^+$. Соответственно, его спектр совпадает со спектром $\tilde{h}_{ml}$, кроме, возможно, уровня E_0. Отметим, что такие «эквивалентные по спектру» матричные операторы уже рассматривались в работе [10].

Нам потребуются еще три оператора: $Q_1 \equiv Q$ из (7) и

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q_2^+ & 0 & 0 & 0 \\ q_1^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_1^+ & -q_2^+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & q_2 & -q_1 & 0 \\ q_1 & 0 & 0 & q_2^+ \\ -q_2 & 0 & 0 & -q_1^+ \\ 0 & -q_1^+ & -q_2^+ & 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$Q_2^+B + BQ_1^+ = Q_2B + BQ_1 = BH_1 - H_2B = 0, \tag{34}$$

$$H_1 = \left\{Q_1^+, Q_1\right\} = B^+B, \quad H_2 = \left\{Q_2^+, Q_2\right\} = BB^+. \tag{35}$$

Можно убедиться, что операторы

$$H[2] = \operatorname{diag}(H_1, H_2), \qquad Q_1[2] = \operatorname{diag}\left(Q_1, Q_2\right), \tag{36}$$

$$Q_2[2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

образуют алгебру (31) при $N = 2$.

Введенные операторы являются исходными блоками для построения матриц расширенной суперсимметрии для любого натурального N. Так, на следующем шаге следует найти оператор A, факторизующий суперсимметричный гамильтониан $H[2]$. Этот оператор имеет блочно-диагональный вид:

$$A = \operatorname{diag}(B, B^+). \tag{38}$$

Оператор A сплетает $H[2]$ с AA^+, поэтому естественно объединить их в новый супергамильтониан с удвоенной матричной размерностью. При этом структура $Q_1[3]$ повторяет структуру $H(3)$, $Q_2[3]$ получается из $Q_2[2]$ формальной заменой $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ и возникает еще один супергенератор $Q_3[3]$:

$$Q_3[3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^+ & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Операторы $H(3) = \operatorname{diag}(\mathrm{A^+A}, \mathrm{AA^+})$ и $Q_k[3]$, $k = 1, 2, 3$ реализуют алгебру расширеной суперсимметрии при $N = 3$.

На N-м шаге супергамильтониан

$$H[N] = \begin{pmatrix} B_N^+B_N & 0 \\ 0 & B_NB_N^+ \end{pmatrix} \tag{40}$$

факторизуется операторами $B_{N+1} = \operatorname{diag}(B_N, B_N^+)$. В свою очередь, $H[N + 1]$, $B_k[N + 1]$, $(k \le N)$ определяются заменой $B_N \to B_{N+1}$ и добавлением нового оператора $Q_{N+1}[N+1]$ с новой матричной структурой. На каждом шаге размерность матриц удваивается, поэтому соответствующая алгебра реализуется матрицами $2^{N+1}\times 2^{N+1}$. Например, при $N=4$ будет четыре оператора $Q_i[4]$ размерности 32×32 и такой же супергамильтониан $H[4]$:

$$H[4] = \mathrm{diag}\}\ (H_1, H_2, H_2, H_1, H_2, H_1, H_1, H_2), \tag{41}$$

$$Q_1[4] = \mathrm{diag}\}\ (Q_1, Q_2, Q_2, Q_1, Q_2, Q_1, Q_1, Q_2), \tag{42}$$

$$Q_s[4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{+} & -B^{+} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^{+} & 0 & 0 & -B^{+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^{+} & 0 & -B^{+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & -B & B & 0 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

причем $s = 2, 3, 4$ и элементы трех соответствующих операторов лежат под главной диагональю матрицы (43) параллельно ей. Если в качестве исходной скалярной модели взять рассмотренный в предыдущем разделе потенциал, то очевидно, что все уровни, включая нулевой, будут вырождены с кратностью 2^N.

4. Преобразования Мутара в высших измерениях

В первом разделе была продемонстрирована тесная связь между процедурой «добавления» уровня к спектру матричного гамильтониана $\tilde{h}_{ml}$ и формулой Мутара, а во втором обсуждалась эта процедура для радиально-симметричных потенциалов. Ясно, что для несимметричных потенциалов подобное исследование провести гораздо сложнее. С новыми трудностями приходится сталкиваться и в моделях с $d>2$. Вместо трех гамильтонианов (двух скалярных и одного матричного) возникает цепочка матричных операторов [4]

$$h_0 \leftrightarrow h^{(1)} + H^{(1)} \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow h^{(d-1)} + H^{(d-1)} \leftrightarrow h_1. \tag{44}$$

Каждый оператор имеет матричную размерность $C_d^m \times C_d^m$, $m = 0, \ldots, d$, $C_d^m = \dfrac{d!}{m!(d-m)!}$. Собственные функции операторов $h^{(m)}$ и $H^{(m)}$ связаны с собственными функциями соответствующих операторов $H^{(m-1)}$, $h^{(m+1)}$, а $\tilde{h}^{(m)} \equiv h^{(m)} + H^{(m)} - \mathbf{I}E_0$ ($\mathbf{I}$ — единичная матрица) имеет вид обычного, квантово-механического гамильтониана. Операторы $h^{(m)}$ и $H^{(m)}$ факторизованы, соответственно, операторами $q^{(m-1)}$, $(q^{(m-1)})^{+}$ и $(q^{(m)})^{+}$, $q^{(m)}$ и существует естественный гомоморфизм пространств антисимметричных волновых функций в пространства внешних дифференциальных форм. Операторы $q^{(m)}$ при этом становятся универсальными операторами типа внешнего дифференцирования, а описанный комплекс является обобщением комплекса де Рама [4].

Подобно двумерному случаю, разобранному в разделе 1, можно показать, что уровень E_0 (значение спектрального параметра опорной скалярной функции d переменных, с помощью которой строится цепочка (44)) присутствует в спектрах гамильтонианов $\tilde{h}^{(m)}$, если и только если он присутствует в спектрах $h^{(m)}$ и $H^{(m)}$ (при достаточно быстром убывании соответствующей собственной функции). В свою очередь, это приводит к необходимости существования связей между (не обязательно нормируемыми) решениями уравнений на собственные значения операторов $H^{(m)}$ и $h^{(m+2)}$ при $E = E_0$. Оказывается, такие связи действительно существуют в требуемом количестве (d – 1). Целесообразно назвать их многомерными формулами (или преобразованиями) Мутара. Ограничимся обсуждением модели с $d = 3$. В этом случае элементы цепочки (44) имеют вид

$$\begin{aligned} &h^{(1)}_{ml} = q_m q^+_l + E_0\delta_{ml}, \quad H^{(1)}_{ml} = p_{mk} p^+_{kl} + E_0\delta_{ml}, \\ &h^{(2)}_{ml} = p^+_{mk} p_{lk} + E_0\delta_{ml}, \; H^{(2)}_{ml} = q^+_m q_l + E_0\delta_{ml}, \\ &p_{ml} \equiv \varepsilon_{mlk} q^+_k. \end{aligned} \tag{45}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &(h_0\psi)\psi^{-1} = (h_0\varphi)\varphi^{-1} = \left(h_1\psi^{(1)}\right)\left(\psi^{(1)}\right)^{-1} = E_0, \\ &h^{(J)}_{ml}\psi^{(J)}_l = E_0\psi^{(J)}_m, \qquad H^{(J)}_{ml}\phi^{(J)}_l = E_0\phi^{(J)}_m, \end{aligned} \tag{46}$$

где верхний индекс принимает значения $J = 1, 2$. Трехмерные формулы Мутара связывают пары функций $\psi, \psi^{(2)}_l$ и $\phi^{(1)}_l, \psi^{(1)}$:

$$\phi^{(1)}_m = \varphi\left(\partial_m f + \varepsilon_{mkn}\partial_k i_n\right), \tag{47}$$

где $\mathbf{i} = \int d^3x' \frac{\nabla'\left(\varphi\psi^{(1)}\right)}{\xi\varphi^2}$, $\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $f(\mathbf{r})$ — произвольная дифференцируемая функция и все подинтегральное выражение зависит от $\mathbf{r}'$ (кроме ξ). Обратное к (47) преобразование определяется формулой

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{\varphi}\int_\Gamma dx_m \varepsilon_{mlk}\varphi q_l \phi^{(1)}_k, \tag{48}$$

где Γ — контур интегрирования. Аналогично

$$\psi^{(2)}_k = \frac{1}{\varphi}\left(\partial_k f + \varepsilon_{knm}\partial_n j_m\right), \; j = \int d^3x' \frac{\varphi\nabla'\psi - \psi\nabla'\varphi}{\xi}, \tag{49}$$

и

$$\psi = \varphi\int_\Gamma dx_m \frac{\varepsilon_{mkn} q^+_k \psi^{(2)}_n}{\varphi}. \tag{50}$$

Подчеркнем, что, как и в формуле (25), 1-форма под интегралом в (48) и (50) замкнута.

Аналогичные формулы можно получить и при $d > 3$. Отметим, что в четномерных пространствах возникает дополнительная специфика, позволяющая объединять с помощью многомерных формул Мутара волновые функции гамильтонианов одинаковой матричной размерности, а именно $C_d^{1+d/2} \times C_d^{1+d/2}$. В частном случае $d = 2$ мы имеем обычные преобразования Мутара между скалярными гамильтонианами.

Введенные выше преобразования позволяют разработать технику построения многомерных супергамильтонианов с точной и нарушенной суперсимметрией, а также супергамильтонианов с вырожденным уровнем $E = 0$. Исследование соответствующих моделей будет представлено в отдельной работе.

Заключение

Мы рассмотрели задачу построения $d = 2$ суперсимметричных гамильтонианов с точной (в том числе с вырожденным уровнем $E = 0$) и нарушенной суперсимметрией. Оказалось, что задача «добавления нижнего уровня» тесно связана с формулой Мутара. Показано, что можно получить формулы, обобщающие двумерное преобразование Мутара при $d > 2$. В заключение отметим два открытых вопроса, которые связаны с дальнейшим развитием метода многомерной факторизации и приложений многомерных преобразований Мутара.

1. Как уже говорилось, существует естественный гомоморфизм пространств волновых функций в пространства внешних дифференциальных форм. В то же время известно, что лишь дифференциальные формы являются полями, на которых можно определить не зависящий от выбора метрики дифференциальный оператор, а именно оператор внешнего дифференцирования. Возникает естественный вопрос: нельзя ли реализовать обобщенный комплекс де Рама, описанный в предыдущем разделе, используя лишь язык дифференциальных форм и операторы (прямой и сопряженный) внешнего дифференцирования? При этом все основные свойства комплекса будут зависеть лишь от топологии соответствующего многообразия и не будут зависеть от метрики.

2. Преобразования Мутара выражаются с помощью замкнутых 1-форм. Если допустить наличие особенности у потенциала u и, соответственно, у опорной функции, то такие формы, оставаясь замкнутыми, уже не будут точными. Интересно выяснить, как связано общее число таких преобразований Мутара с первым (поскольку в этих преобразованиях участвуют 1-формы) числом Бетти для данного многообразия, то есть с размерностью первой группы его когомологий.

Список литературы

1. *Darboux G.* Theórie generale des surfaces. N. Y., 1972.

2. *Infeld L., Hull T.E.* The Factorization Method // Rev. Mod. Phys. Vol. 23. 1951. P. 21.

3. *Beckers J., Debergh N.* Parastatistics and supersymmetry in quantum mechanics // Nucl. Phys. 1990. Vol. 340. P. 767—776.

4. *Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В.* Метод факторизации и преобразование Дарбу для многомерных гамильтонианов // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 61, № 2. С. 183—198.

5. *Березовой В.П., Пашнев А.И.* Суперсимметричная квантовая механика и перестройка спектров гамильтонианов // Теоретическая и математическая физика. 1987. Т. 70, № 1. С. 146—153.

6. *Адлер В.Э.* О модификации метода Крама // Теоретическая и математическая физика. 1994. Т. 101, № 3. С. 323—330.

7. *Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В., Эйдес М.И.* Суперсимметричная механика: новый взгляд на эквивалентность квантовых систем // Теоретическая и математическая физика. 1984. Т. 61, № 1. С. 17—28.

8. *Андрианов А.А., Иоффе М.В., Нишнианидзе Д.Н.* Полиномиальная суперсимметрия и динамические симметрии в квантовой механике // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 104, № 3. С. 463—478.

9. *Верещагин М.Д., Верещагин С.Д., Юров А.В.* Трехмерное преобразование Мутара // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 5. С. 111—125.

10. *Andrianov A.A., Ioffe M.V.* Nonlinear Supersymmetric Quantum Mechanics: concepts and realizations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2012. Vol. 45, № 50.

11. *Березовой В.П., Пашнев А.И.* Одномерная расширенная суперсимметричная квантовая механика // Теоретическая и математическая физика. 1989. Т. 78, № 2. С. 289—296.

12. *Юров А.В.* Преобразование Дарбу в квантовой механике : учеб. пособие. Калининград, 1998.

Об авторах

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: AIUrova@kantiana.ru

Артем Валерьянович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Валериан Артемович Юров — канд. физ.-мат. наук, PhD по математике, ст. науч. сотр., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: vayt37@gmail.com

The authors

Dr Alla Yurova, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, State Technical University, Russia.

E-mail: AIUrova@kantiana.ru

Dr Artem Yurov, Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Dr Valerian Yurov, senior researcher, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: vayt37@gmail.com