PARALLEL CARRIES, GIVEN BY NOTTOTALLY INTEGRATED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

A surface is considered in projective space and is made its composition equipment (i.e. Cartans equipment and Nordens normalization of the second genus). Parallel carries of normal direction are investigated in induced connection and pseudoconnection of two types. It is shown, that both carries can be given by totally and nottotally integrated systems of differential equations depending on analytical representation of differential of point of intersection of a normal line with Cartans plane.

УДК 514.75

НОРМАЛЬНАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И. П о п о в

(*Калининградский государственный университет*)

Для оснащенной регулярной гиперполосы $\mathcal{H}_m$ аффинного пространства A_{n+1} в касательном расслоении $T(V_m)$ и в нормальном расслоении $N(V_m)$ введены соответственно внутренняя аффинная связность γ и нормальная центроаффинная связность $\gamma^{\perp}$. Рассмотрены нормальная характеристическая центроаффинная связность $\eta^{\perp}$ в слоях расслоения $\chi(V_m)$ характеристик χ_x гиперполосы $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$, а также нормальная центроаффинная связность $\overset{*}{\eta}{}^{\perp}$, индуцируемая расслоением $l(V_m)$ оснащающих прямых l_x, где $l_x \subset N_x$, $x \subset V_m$. Показано, что тривиальное, осевое и центрально-осевое оснащения регулярной гиперполосы $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ индуцируют в соответствующем расслоении плоскую связность [1]. Выяснено, например, что нормальная центроаффинная связность γ сферической гиперполосы [2] плоская, а внутренняя аффинная связность γ локально аффинная.

Схема использования индексов такова:

$$I,J,K,L=\overline{1,n+1};\quad i,j,k,l=\overline{1,m};\quad a,b,c,d=\overline{m+1,n};\quad \alpha,\beta=(a,n+1).$$

§1. Задание нормальной аффинной связности на оснащенной регулярной гиперполосе в A_{n+1}

Отнесем (n+1)-мерное аффинное пространство A_{n+1} к подвижному реперу $R=\{M,\bar{e}_I\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид :

$$d\overline{M}=\omega^I\bar{e}_I,\quad d\bar{e}_I=\omega_I^K\bar{e}_K. \tag{1.1}$$

Инвариантные формы ω^I и ω_I^K аффинной группы удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства

$$d\omega^I=\omega^K\wedge\omega_K^I,\quad d\omega_I^K=\omega_I^L\wedge\omega_L^K. \tag{1.2}$$

В репере 1-го порядка R^1 гиперполоса $\mathcal{H}_m\subset A_{n+1}$ задается уравнениями [3]:

$$\begin{cases}\omega^{n+1}=0,\quad \omega^a=0,\quad \omega_a^{n+1}=0,\\ \omega_i^{n+1}=b_{ij}^{n+1}\omega^j,\quad \omega_i^a=\lambda_{ij}^a\omega^j,\quad \omega_a^i=\lambda_{aj}^i\omega^j,\\ \nabla b_{ij}^{n+1}=b_{ijk}^{n+1}\omega^k,\quad \nabla\lambda_{aj}^i=\lambda_{ajk}^i\omega^k,\\ \nabla\lambda_{ij}^a+b_{ij}^{n+1}\omega_{n+1}^a=\lambda_{ijk}^a\omega^k,\end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$\lambda_{a[i}^k\, b_{j]k}^{n+1}=0, \tag{1.4}$$

и все функции в (1.3) симметричны по всем латинским индексам.

Формулы инфинитезимального перемещения репера $R^1=\{x,\bar{e}_K\}$, где $x\in V_m$, имеют следующий вид :

$$\begin{cases}d\bar{x}=\omega^i\bar{e}_i,\quad d\bar{e}_i=\omega_i^j\bar{e}_j+\omega_i^a\bar{e}_a+\omega_i^{n+1}\bar{e}_{n+1},\\ d\bar{e}_a=\omega_a^i\bar{e}_i+\omega_a^b\bar{e}_b,\ d\bar{e}_{n+1}=\omega_{n+1}^i\bar{e}_i+\omega_{n+1}^b\bar{e}_b+\omega_{n+1}^{n+1}\bar{e}_{n+1}.\end{cases} \tag{1.5}$$

Адаптируем репер R^1 полю нормалей N_x 1-го рода, выбирая вектор $\bar{e}_{n+1}||N_x$. В этом случае

$$\omega_{n+1}^i=\lambda_{n+1,j}^i\omega^j, \tag{1.6}$$

а поле нормалей 1-го рода N_x определяется уравнениями

$$\nabla\lambda_{n+1,j}^i-\lambda_{aj}^i\omega_{n+1}^a=\lambda_{n+1,jk}^i\omega^k. \tag{1.7}$$

Таким образом, уравнения (1.3),(1.6),(1.7) вместе с соотношениями (1.4) задают оснащенную гиперполосу $\mathcal{H}_m$ аффинного пространства A_{n+1}.

Из (1.5) следует, что при фиксации точки x базисной поверхности $V_m\subset\mathcal{H}_m$ плоскости N_x (нормаль 1-го рода) и T_x (касательная плоскость) остаются неподвижными . Следовательно, на V_m возникает нормальное $N(V_m)$ и касательное $T(V_m)$ расслоения. Структурные уравнения касательного расслоения $T(V_m)$ в силу (1.2)-(1.4),(1.6) имеют такой вид :

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \Omega^i_j, \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^i_j &= \omega^a_j \wedge \omega^i_a + \omega^{n+1}_j \wedge \omega^i_{n+1} = (\lambda^a_{j[k}\,\lambda^i_{|a|l]} + b^{n+1}_{j[k}\,\lambda^i_{|n+1|l]})\omega^k \wedge \omega^l = \\ &= R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$R^i_{jkl} = \lambda^a_{j[k}\,\lambda^i_{|a|l]} + b^{n+1}_{j[k}\,\lambda^i_{|n+1|l]}. \tag{1.10}$$

Следуя работам [4],[5], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T(V_m)$ возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности ω^i, ω^i_j и 2-формами кривизны Ω^i_j (1.9), причем тензор кривизны $\{R^i_{jkl}\}$ этой связности имеет строение (1.10). Связность γ в касательном расслоении $T(V_m)$ назовем внутренней (касательной) аффинной связностью гиперполосы $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ [2].

Структурные уравнения нормального расслоения $N(V_m)$ с учетом (1.2)-(1.4), (1.6) можно представить в виде

$$\begin{cases} d\omega^b_a = \omega^c_a \wedge \omega^b_c + \Omega^b_a \quad \text{(a)}, \quad d\omega^{n+1}_a = 0, \\ d\omega^a_{n+1} = \omega^\alpha_{n+1} \wedge \omega^a_\alpha + \Omega^a_{n+1}, \quad d\omega^{n+1}_{n+1} = \Omega^{n+1}_{n+1}, \end{cases} \tag{1.11}$$

где

$$\begin{cases} \Omega^b_a = \omega^i_a \wedge \omega^b_i = \lambda^i_{a[k}\,\lambda^b_{l]i}\omega^k \wedge \omega^l = R^b_{akl}\omega^k \wedge \omega^l, \\ \Omega^a_{n+1} = \omega^i_{n+1} \wedge \omega^a_i = \lambda^i_{n+1[k}\,\lambda^a_{l]i}\omega^k \wedge \omega^l = R^a_{n+1,kl}\omega^k \wedge \omega^l, \\ \Omega^{n+1}_a = \lambda^i_{a[k}\,b^{n+1}_{l]i}\omega^k \wedge \omega^l = 0, \\ \Omega^{n+1}_{n+1} = \omega^i_{n+1} \wedge \omega^{n+1}_i = \lambda^i_{n+1[k}\,b^{n+1}_{l]i}\omega^k \wedge \omega^l = R^{n+1}_{n+1,kl}\omega^k \wedge \omega^l, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &R^b_{akl} = \lambda^i_{a[k}\,\lambda^b_{l]i} \quad \text{(a)}, \quad R^a_{n+1,kl} = \lambda^i_{n+1[k}\,\lambda^a_{l]i}, \\ &R^{n+1}_{akl} = \lambda^i_{a[k}\,b^{n+1}_{l]i} = 0, \quad R^{n+1}_{n+1,kl} = \lambda^i_{n+1[k}\,b^{n+1}_{l]i}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Согласно работам [4],[5] получаем, что в нормальном расслоении $N(V_m)$ возникает центроаффинная связность $\gamma^\perp$ с формами связности ω^β_α и 2-формами кривизны Ω^β_α (1.12), компоненты тензора кривизны $\{R^\beta_{\alpha ij}\}$ которой имеют строение (1.13). Связность $\gamma^\perp$ в дальнейшем будем называть нормальной центроаффинной связностью оснащенной гиперполосы $\mathcal{H}_m$.

Так как в каждой точке $x \in V_m$ определена характеристика χ_x гиперполосы $\mathcal{H}_m$ [3], причем $\chi_x \subset N_x$, то на базисной поверхности V_m определено расслоение характеристик $\chi(V_m)$, которое представляет собой нормальное (n-m)-мерное подрасслоение $N^{n-m}(V_m)$ [5]. Структурные уравнения расслоения $\chi(V_m)$ определяются уравнениями (1.11a-1.13a). Связность в расслоении $\chi(V_m)$ назовем нормальной центроаффинной характеристической связностью $\eta^{\perp}$ гиперполосы $\mathcal{H}_m$.

§2. Об оснащениях регулярной гиперполосы $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ с плоской нормальной связностью

Распространим понятие тривиального (параллельного) оснащения, введенного Л.С.Атанасяном [6] для подмногообразий M_m аффинного пространства на регулярные гиперполосы $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$. Оснащенные подмногообразия M_m аффинного пространства с параллельным полем p-мерных нормальных направлений изучает А.В.Чакмазян [1], [5].

Будем говорить, что поле оснащающих плоскостей $N^q(V_m)$ гиперполосы $\mathcal{H}_m$ тривиальное, если все плоскости N^q параллельны некоторой постоянной плоскости π_q $(1 \le q \le n-m)$.

Теорема 1. Если расслоение $\chi(V_m)$ тривиальное, то индуцируемая нормальная центроаффинная характеристическая связность $\eta^{\perp}$ плоская.

Доказательство проведем аналогично работе [5,§13]. Условие параллельности характеристик представим в виде $\bar{e}_a = f_a^b \bar{p}_b$, где $\bar{p}_b$ - постоянные базисные векторы неподвижной плоскости π_{n-m}, $f_a^b(u^1, u^2, \ldots, u^m)$ - скалярные функции, матрица которых невырождена. В результате получим

$$d\bar{e}_a = \varphi_a^b \bar{e}_b. \tag{2.1}$$

Сравнивая (2.1) с (1.5), получим $\omega_a^i = 0 \Leftrightarrow \lambda_{aj}^i = 0$. В силу этого из (1.13) следует $R_{bkl}^a = 0$, т.е. связность $\eta^{\perp}$ плоская [5].

Следствие 1. Тензор кривизны внутренней аффинной связности γ, когда расслоение $\chi(V_m)$ тривиально, имеет вид

$$R_{jkl}^i = \lambda_{n+1[1}^i \, b_{k]j}^{n+1}. \tag{2.2}$$

Теорема 2. Если регулярная гиперполоса ☞$_m \subset A_{n+1}$ оснащена так, что расслоение $l\,(V_m)$ оснащающих прямых l_x тривиально, то нормальная центроаффинная связность $\overset{*}{\eta}{}^{\perp}$, индуцируемая расслоением $l\,(V_m)$, плоская.

Пусть $l_x \,||\, \bar{e}_{n+1}$ и расслоение $l\,(V_m)$ тривиальное. Тогда

$$d\bar{e}_{n+1} = \psi(u^1,\ldots,u^m)\bar{e}_{n+1}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) и (1.5) получаем

$$\omega^i_{n+1} = 0, \quad \omega^b_{n+1} = 0. \tag{2.4}$$

В силу (2.4) из (1.6) имеем $\lambda^i_{n+1,j} = 0$, что приводит к условиям

$$R^{n+1}_{n+1,kl} = 0, \quad R^a_{n+1,kl} = 0, \tag{2.5}$$

т.е. связность $\overset{*}{\eta}{}^{\perp}$ плоская.

Следствие 2. Если связность $\overset{*}{\eta}{}^{\perp}$ плоская, то тензор кривизны внутренней аффинной связности принимает такой вид

$$R^i_{jkl} = -\lambda^i_{a[l}\,\lambda^a_{k]j}. \tag{2.6}$$

Теорема 3. Если гиперполоса ☞$_m \subset A_{n+1}$ оснащена тривиально, то индуцируемая нормальная аффинная связность $\gamma^{\perp}$ плоская, а внутренняя аффинная связность γ локально плоская.

Доказательство проведем аналогично работе [5,§13]. Из условия тривиальности оснащения получаем $\lambda^i_{aj} = 0$ и $\lambda^i_{n+1,j} = 0$. Тогда из (1.13), (1.10) следует, что $R^{\alpha}_{\beta ij} = 0,\ R^i_{jkl} = 0$. Это и означает, что связность $\gamma^{\perp}$ плоская, а связность γ локально аффинная.

Следствие 3. При тривиальном оснащении гиперполосы связности $\eta^{\perp}$ и $\overset{*}{\eta}{}^{\perp}$ - плоские.

Известно [2], что осевое оснащение гиперполосы ☞$_m$ характеризуется тем, что характеристики χ_x пересекаются по (n-m-1)-мерной неподвижной плоскости K_{n-m-1}, которая называется осью оснащения.

Теорема 4. Нормальная центроаффинная связность $\eta^{\perp}$ гиперполосы ☞$_m$, имеющей осевое оснащение, плоская.

Доказательство проведем аналогично, следуя работе [5,§13]. Предположим, что точки z_a принадлежат оси K_{n-m-1} пучка характеристик χ гиперполосы ☞$_m$. Из условия неподвижности плоскости K_{n-m-1} имеем

$$d\bar{z}_a = \theta^b_a \bar{z}_b. \tag{2.7}$$

Из (2.7), (1.5) следует, что

$$\omega_a^i + \lambda_a \omega^i = 0, \quad \nabla \lambda_\alpha = 0. \tag{2.8}$$

В силу (2.8) и (1.3)

$$\lambda_{aj}^i = -\lambda_a \delta_j^i. \tag{2.9}$$

Тогда из (1.13a) с учетом (2.9) получим $R_{bkl}^a = 0$, т.е. связность $\eta^\perp$ плоская.

Следствие 4. Тензор кривизны внутренней аффинной связности γ гиперполосы с осевым оснащением имеет вид (2.2).

Теорема 5. Если оснащение регулярной гиперполосы $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ центральное [2], то связность $\overset{*}{\eta}{}^\perp$ плоская.

Доказательство. Пусть точка z_{n+1} есть центр оснащения. Тогда радиус-вектор этой точки можно представить в виде

$$\bar{z}_{n+1} = \bar{x} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \bar{e}_{n+1}, \text{ где } \lambda_{n+1} \neq 0.$$

Из условия неподвижности точки z_{n+1} следует

$$\omega_{n+1}^i = -\lambda_{n+1} \omega^i. \tag{2.10}$$

Из (1.6) в силу (2.10) получаем $\lambda_{n+1,j}^i = -\lambda_{n+1} \delta_j^i$. В этом случае выполняются условия (2.5), т.е. связность $\overset{*}{\eta}{}^\perp$ плоская.

Следствие 5. Тензор кривизны внутренней аффинной связности центрально оснащенной гиперполосы имеет строение (2.6).

Теорема 6. Если регулярная гиперполоса $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ допускает центрально-осевое оснащение [2], то ее нормальная центроаффинная связность $\gamma^\perp$ плоская, а внутренняя аффинная связность γ локально аффинная.

Теорема 6 является следствием теорем 4 и 5.

Следствие 6. Нормальная центроаффинная связность сферической гиперполосы плоская, а внутренняя аффинная связность γ локально аффинная [5].

Действительно, сферическая гиперполоса имеет центрально-осевое оснащение. Отсюда в силу теоремы 6 и вытекает следствие 6.

Работа выполнена по теме гранта (95-0-1.0-22).

Библиографический список

1. *Чакмазян А.В.* Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства с плоской нормальной аффинной связностью // Дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. С. 120-129.

2. *Попов Ю.И.* Внутренняя геометрия регулярных гиперполос аффинного пространства. Калининград, 1997. 29 с. Деп. в ВИНИТИ, N1199-В97.

3. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос: Учебное пособие. Калининград, 1983. 82 с.

4. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С. 7-70.

5. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография. Ереван, 1990. 116 с.

6. *Атанасян Л.С.* Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. М., 1952. Вып. 9. С. 351-410.

Iu.I. P o p o v

NORMAL AFFINE CONNECTION OF EQUIPPED HYPERSTRIP OF AFFINE SPACE

An interior affine connection γ and a normal centroaffine connection $\gamma^{\perp}$ are introduced for the equipped regular hyperstrip $\mathcal{H}_m$ of the affine space A_{n+1} in the tangent fibering $T(V_m)$ and in the normal fibering $N(V_m)$ respectively. A normal characteristic centroaffine connection $\eta^{\perp}$ in fiber bundles $\chi(V_m)$ of characteristic χ_x of the hyperstrip $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ and also a normal centroaffine connection $\overset{*}{\eta}{}^{\perp}$, induced by the fibering $l(V_m)$ of equipping lines l_x, where $l_x \subset N_x$, $x \in V_m$, are considered.

It is shown that trivial, axial and central axial equipment of the regular hyperstrip $\mathcal{H}_m \subset A_{n+1}$ induce a plane connection in the corresponding fibering. It is determined, for example, that the normal centroaffine connection $\gamma^{\perp}$ of a spherical strip is plane and the interior affine connection γ is locally affine.

УДК 514.75

НОРМАЛЬНАЯ ЦЕНТРОПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ ГИПЕРПОЛОСЫ CH_m^r ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Т.Ю. П о п о в а

(Калининградское ВВМУ)

Введены в рассмотрение касательное расслоение $T(V_r)$ и нормальное расслоение $N(V_r)$, ассоциированные с нормализованной по Нордену гиперполосой $CH_m^r \subset P_n$. Доказано, что в этих расслоениях соответственно индуцируются