УДК 514.76

***М. Б. Банару*[1]**
[1] *Смоленский государственный университет, Россия*
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-2

Об одном свойстве W_4-многообразий

Доказано, что квазисасакиева структура, индуцированная на вполне омбилической гиперповерхности W_4-многообразия, либо гомотетична сасакиевой структуре, либо является косимплектической структурой.

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие, W_4-многообразие, почти контактная метрическая структура, гиперповерхность.

1. Значение класса W_4 почти эрмитовых многообразий определяется прежде всего тем, что этот класс содержит все локально конформные келеровы (locally conformal Kählerian, LCK-) многообразия. При этом класс W_4 совпадает с классом LCK-многообразий для размерности не ниже шести [1]. Отметим, что W_4-многообразия изучали с разных точек зрения такие известнейшие геометры, как Альфред Грей (США), Изу Вайсман (Израиль) и Вадим Фёдорович Кириченко (Россия).

Данная статья продолжает работу автора, связанную с изучением почти контактных метрических структур на гиперповерхностях W_4-многообразий [2—5].

2. Напомним [1], что под почти эрмитовой структурой на четномерном многообразии M^{2n} мы понимаем пару $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$,

---

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.

состоящую из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$, причем J и $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ должны удовлетворять условию

$$\langle JX, JY\rangle=\langle X, Y\rangle, \quad X, Y\in\aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких векторных полей на многообразии M^{2n}.

Пусть $\left(M^{2n}, \{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}\right)$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p\in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в выбранной точке p, а $\left\{J_p, g_p=\langle\cdot,\cdot\rangle\right\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\left\{J, g=\langle\cdot,\cdot\rangle\right\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (А-реперы), устроены так:

$$(p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры в комплексификации касательного пространства, принадлежащие собственному значению оператора $i=\sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, принадлежащие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a}=a+n$.

Почти эрмитова структура на многообразии M^{2n} принадлежит классу W_4, если

$$\nabla_X(F)(Y,Z) = -\frac{1}{2(n-1)}\Big\{\langle X,Y\rangle\delta F(Z)-\langle X,Z\rangle\delta F(Y)-$$
$$-\langle X,JY\rangle\delta F(JZ)+\langle X,JZ\rangle\delta F(JY)\Big\}, \quad X,Y,Z\in\aleph(M^{2n}).$$

Здесь $F(X, Y)=\langle X, JY\rangle$ — фундаментальная форма почти эрмитовой структуры; через δ обозначен оператор кодифференцирования, через ∇ — риманова связность метрики $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ [1].

На всякой ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} почти эрмитова многообразия M^{2n} индуцируется почти контактная метрическая структура [4; 6], понимаемая как система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика.

3. Структурные уравнения Картана (в А-репере) почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} в произвольном W_4-многообразии M^{2n} имеют следующий вид [2; 3; 5]:

$$d\omega^\alpha=\omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta+B^{\alpha\beta}{}_\gamma\omega^\gamma\wedge\omega_\beta+\left(\sqrt{2}B^{\alpha n}{}_\beta+i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta\wedge\omega+$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n+i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta\wedge\omega; \qquad (1)$$

$$d\omega_\alpha=-\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta+B_{\alpha\beta}{}^\gamma\omega_\gamma\wedge\omega^\beta+\left(\sqrt{2}B_{\alpha n}{}^\beta-i\sigma^\beta_\alpha\right)\omega_\beta\wedge\omega+$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^n-i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta\wedge\omega;$$

$$d\omega=\left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta-\sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha-2i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta\wedge\omega_\alpha+\left(B_{n\beta}{}^n+i\sigma_{n\beta}\right)\omega\wedge\omega^\beta+$$
$$+\left(B^{n\beta}{}_n-i\sigma^\beta_n\right)\omega\wedge\omega_\beta,$$

где $B^{ab}{}_c=-\frac{i}{2}J^a_{\hat{b},c}$, $\quad B_{ab}{}^c=\frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}$.

Здесь через $\{\omega^{\alpha}\}, \{\omega_{\alpha}\}$ обозначены компоненты форм смещения $(\omega^{n}=\omega)$, через $\{\omega_{j}^{k}\}$ — компоненты форм римановой связности; а через $\{J_{k,m}^{j}\}$ обозначены компоненты ∇J. Отметим, что системы функций $\left\{B^{ab}{}_{c}\right\}$ и $\left\{B_{ab}{}^{c}\right\}$ являются компонентами тензоров Кириченко [6] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Здесь и далее $\alpha,\beta,\gamma=1,\ldots,n-1$; $a,b,c=1,\ldots,n$; $\hat{a}=a+n$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в W_4-многообразие M^{2n}.

Гиперповерхность W_4-многообразия является вполне омбилической в том и только том случае, если $\sigma_{ps}=\lambda g_{ps}$, $\lambda - const$, при этом гиперповерхность W_4-многообразия является вполне геодезической тогда и только тогда, когда матрица ее второй квадратичной формы будет нулевой. Принимая во внимание вид матрицы метрического тензора [4; 6]

$$\left(g_{ps}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix}0\\ \ldots\\ 0\end{matrix} & I_{n-1} \\ \hline 0\ldots0 & 1 & 0\ldots0 \\ \hline I_{n-1} & \begin{matrix}0\\ \ldots\\ 0\end{matrix} & 0 \end{array}\right),$$

мы можем сделать вывод о том, что «блоки» $(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$ и $(\sigma_{\alpha\hat{\beta}})$ матрицы второй квадратичной формы погружения вполне омбилической гиперповерхности N^{2n-1} в W_4-многообразие M^{2n} имеют скалярный вид: $\sigma_{\hat{\alpha}\beta}=i\,\delta_{\beta}^{\alpha}$.

Сопоставляя уравнения (1) с известными [1] структурными уравнениями квазисасакиевой структуры

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} + B^{\alpha}_{\beta}\omega \wedge \omega^{\beta};$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} - B^{\beta}_{\alpha}\omega \wedge \omega_{\beta};$$

$$d\omega = 2B^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha},$$

структуры, гомотетичной сасакиевой,

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} - i\lambda\,\delta^{\alpha}_{\beta}\,\omega \wedge \omega^{\beta};$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta} + i\lambda\,\delta^{\beta}_{\alpha}\,\omega \wedge \omega_{\beta};$$

$$d\omega = -2i\lambda\,\omega^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha}\ ,$$

а также косимплектической структуры

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta},$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega^{\beta}_{\alpha} \wedge \omega_{\beta},$$

$$d\omega = 0\ ,$$

мы приходим к такому результату.

Теорема. *Квазисасакиева структура, индуцированная на вполне омбилической гиперповерхности* N^{2n-1} W_4*-многообразия* M^{2n}, *является либо гомотетичной сасакиевой структуре, либо косимплектической структурой. При этом структура будет косимплектической в том и только том случае, когда гиперповерхность является вполне геодезическим подмногообразием многообразия* M^{2n}.

Учитывая упомянутый выше факт о том, что класс W_4 почти эрмитовых многообразий содержит все LCK-многообразия, мы получаем такое

Следствие 1. Квазисасакиева структура, индуцированная на вполне омбилической гиперповерхности N^{2n-1} всякого

LCK-многообразия M^{2n}, является либо гомотетичной сасакиевой структуре, либо косимплектической структурой. При этом структура будет косимплектической в том и только том случае, когда гиперповерхность является вполне геодезическим подмногообразием LCK-многообразия M^{2n}.

С учетом результатов В. Ф. Кириченко о строении косимплектических многообразий [6] мы приходим еще к одному результату.

Следствие 2. Пусть N^{2n-1} — вполне геодезическая гиперповерхность W_4-многообразия M^{2n}, на которой индуцирована квазисасакиева структура. Тогда гиперповерхность N^{2n-1} локально эквивалентна произведению келерова многообразия на вещественную прямую.

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

2. *Банару М.Б.* W_4-многообразия и аксиома косимплектических гиперповерхностей // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. №5. 34—37.

3. *Банару М.Б.* О некоторых почти контактных метрических гиперповерхностях W_4-многообразий // ДГМФ. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 12—18.

4. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2018. №1. С. 67—70.

5. *Banaru M.B., Banaru G.A., Melekhina T.L.* A note on almost contact metric 2- and 3-hypersurfaces in W_4-manifolds // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2019. №1 (89). P. 103—108.

6. *Banaru M.B., Kirichenko V.F.* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. Vol. 207, iss. 4. P. 513—537.

M. B. Banaru[1]
[1] Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-2

On a property of W_4-manifolds

Submitted on March 12, 2020

The properties of almost Hermitian manifolds belonging to the Gray — Hervella class W_4 are considered. The almost Hermitian manifolds of this class were studied by such outstanding geometers like Alfred Gray, Izu Vaisman, and Vadim Feodorovich Kirichenko.

Using the Cartan structural equations of an almost contact metric structure induced on an arbitrary oriented hypersurface of a W_4-manifold, some results on totally umbilical and totally geodesic hypersurfaces of W_4-manifolds are presented. It is proved that the quasi-Sasakian structure induced on a totally umbilical hypersurface of a W_4-manifold is either homothetic to a Sasakian structure or cosymplectic. Moreover, the quasi-Sasakian structure is cosymplectic if and only if the hypersurface is a totally geodesic submanifold of the considered W_4-manifold.

From the present result it immediately follows that the quasi-Sasakian structure induced on a totally umbilical hypersurface of a locally conformal Kählerian (LCK-) manifold also is either homothetic to a Sasakian structure or cosymplectic.

Keywords: almost Hermitian manifold, W_4-manifold, almost contact metric structure, hypersurface.

References

1. *Kirichenko, V. F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

2. *Banaru, M. B.:* The axiom of cosymplectic surfaces and W_4-manifolds // Moscow University Math. Bull., **70**:5, 213—215 (2015).

3. *Banaru, M. B.:* On some almost contact metric hypersurfaces of W_4-manifolds. DGMF. Kaliningrad. 49, 12—18 (2018).

4. *Banaru, M. B.:* On almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4-manifolds. Moscow University Math. Bull., **73**:1, 38—40 (2018).

5. *Banaru, M. B., Banaru, G. A., Melekhina, T. L.:* A note on almost contact metric 2- and 3-hypersurfaces in W_4-manifolds. Buletinul Academiei Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, 1 (89), 103—108 (2019).

6. *Banaru, M. B., Kirichenko, V. F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci. (New York), **207**:4, 513—537 (2015).