ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I9 1988

УДК 5I4.75

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ СООТВЕТСТВИИ ТОЧЕЧНОГО ПРОСТРАНСТВА С ПРОСТРАНСТВОМ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. М. Овчинников
(Гродненский университет)

Продолжено изучение локального дифференцируемого отображения Ψ точечного проективного пространства P_N $(N=2n-1)$ в пространство гиперплоскостных элементов проективного пространства P_n [1]. Проводится исследование геометрических образов, связанных с дифференцируемым отображением Ψ.

1. Пусть P_n – n-мерное проективное пространство. Обозначим через (p,π) пару, где p – точка, а π – инцидентная ей гиперплоскость. Имеем $N = \operatorname{rang}(p,\pi) = 2n-1$. Рассмотрим дифференцируемое отображение Ψ некоторой области $V\subset P_N$ в пространство гиперплоскостных элементов. Отображение Ψ разобъем на два отображения:

$\Psi_1(L)=p$, $\Psi_2(L)=\pi$, причем $\Psi(L)=(p,\pi)$, $L\in V$, $p\in\Psi_2(L)$.

В пространствах P_n и P_N выберем подвижные реперы $A=\{A_{i'}\}$, $(i',j'=0,1,\dots,n)$ и $M=\{M_{J'}\}$ $(J',K'=0,1,\dots,N)$, которые удовлетворяют следующим деривационным формулам:

$$dA_{i'}=\omega_{i'}^{j'}A_{j'},\qquad dM_{J'}=\Omega_{J'}^{K'}M_{K'},\tag{1.1}$$

где формы Пфаффа $\omega_{i'}^{j'}$, $\Omega_{J'}^{K'}$ удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$d\omega_{i'}^{j'}=\omega_{i'}^{k'}\wedge\omega_{k'}^{j'},\qquad d\Omega_{J'}^{K'}=\Omega_{J'}^{L'}\wedge\Omega_{L'}^{K'}.$$

Помещаем вершину M_0 в произвольную точку области $V\subset P_N$, вершину A_0 в точку $\Psi_1(M_0)$, а вершины A_i $(i,j,k=\overline{1,n-1})$ в гиперплоскость $\Psi_2(M_0)=\pi$. Система дифференциальных уравнений отображения Ψ_2 запишется в виде

$$\omega_0^{\bar i}=\Lambda_J^{\bar i}\Omega_0^J,\qquad \omega_i^n=\Lambda_{iJ}^n\Omega_0^J,\tag{1.2}$$

где $J,\mathcal{J},K=1,2,\dots N$; $i,j,k=\overline{1,n-1}$; $\bar i,\bar j,\bar k=\overline{1,n}$

Система величин $\Gamma_1=\{\Lambda_J^{\bar i},\Lambda_{iJ}^n\}$ образует фундаментальный геометрический объект I-го порядка отображения Ψ; $\Gamma_2=\{\Gamma_1,\Lambda_{JK}^{\bar i},\Lambda_{iJK}^n\}$ – фундаментальный объект второго порядка, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$d\Lambda_J^{\bar i}=\Lambda_J^{\bar i}(\omega_0^0-\Omega_0^0)-\Lambda_J^{\bar j}\omega_{\bar j}^{\bar i}+\Lambda_K^{\bar i}\Omega_J^K+\Lambda_{JK}^{\bar i}\Omega_0^K;\tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}d\Lambda_{JK}^{\bar i}={}&\Lambda_{JL}^{\bar i}\Omega_K^L+\Lambda_{LK}^{\bar i}\Omega_J^L+\Lambda_{JK}^{\bar i}(\omega_0^0-2\Omega_0^0)-\Lambda_J^{\bar i}\Omega_K^0-\\&-\Lambda_K^{\bar i}\Omega_J^0-\Lambda_{JK}^{\bar j}\omega_{\bar j}^{\bar i}+\Lambda_J^{\bar i}\Lambda_K^{\bar k}\omega_{\bar k}^0+\Lambda_J^{\bar j}\Lambda_K^{\bar i}\omega_{\bar j}^0+\Lambda_{JKL}^{\bar i}\Omega_0^L;\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$d\Lambda_{iJ}^n=\Lambda_{iK}^n\Omega_J^K-\Lambda_{iJ}^n(\Omega_0^0+\omega_n^n)+\Lambda_{jJ}^n\omega_i^j+\Lambda_J^n\omega_i^0+\Lambda_{iJK}^n\Omega_0^K;\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}d\Lambda_{iJK}^n={}&\Lambda_{iLK}^n\Omega_J^L+\Lambda_{iJL}^n\Omega_K^L-\Lambda_{iJK}^n(2\Omega_0^0+\omega_n^n)-\Lambda_{iK}^n\Omega_J^0-\\&-\Lambda_{iJ}^n\Omega_K^0+\Lambda_{jJK}^n\omega_i^j+(\Lambda_K^n\Lambda_{iJ}^n+\Lambda_J^n\Lambda_{iK}^n)\omega_n^0+\\&+(\Lambda_{JK}^n-\Lambda_K^j\Lambda_{jJ}^n)\omega_i^0+(\Lambda_{iJ}^n\Lambda_{jK}^n+\Lambda_{jJ}^n\Lambda_{iK}^n)\omega_n^j+\Lambda_{iJKL}^n\Omega_0^L.\end{aligned}\tag{1.6}$$

2. Дадим геометрическую характеристику некоторым объектам, порождаемым отображением Ψ. Система величин $\{\Lambda_J^{\bar i}\}$, $\{\Lambda_{JK}^{\bar i}\}$, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям (1.3) и (1.4), определяет отображение Ψ_1; а система величин $\{\Lambda_{iJ}^n\}$, $\{\Lambda_{iJK}^n\}$, удовлетворяющая уравнениям (1.5) и (1.6), определяет отображение Ψ_2. Рассмотрим дифференцируемое отображение

$$\Psi_1(M_0)=A_0,\quad M_0\in V\subset P_N,\quad A_0\in P_n.\tag{2.1}$$

В результате точечного отображения Ψ_1 в пространстве P_N выделится n-мерная поверхность $V_n\subset P_N$. Сужение отображения Ψ_1/V_n выделяет проективитет между направлениями в точке M_0 и направлениями в точке A_0, лежащими в гиперплоскости π. Обозначим через T_x – касательную плоскость к V_n в этой точке. Присоединим в точке x проективный репер $\{M_0,M_1,\dots,M_N\}$, так что $M_0=x$, $M_{\bar i}\in T_x$, а точки M_α выбираются произвольно $(\bar i,\bar j,\bar k=1,\dots,n;\ \alpha,\beta,\gamma=n+1,\dots,N)$. В силу того, что $dM_0\in T_x$, уравнения движения репера примут вид:

$$\left.\begin{aligned}&dM_0=\Omega_0^0M_0+\Omega_0^{\bar i}M_{\bar i},\\&dM_{\bar i}=\Omega_{\bar i}^0M_0+\Omega_{\bar i}^{\bar j}M_{\bar j}+\Omega_{\bar i}^\alpha M_\alpha;\quad dM_\alpha=\Omega_\alpha^0M_0+\Omega_\alpha^{\bar i}M_{\bar i}+\Omega_\alpha^\beta M_\beta.\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

Поверхность $V_n \subset P_N$ определяется системой уравнений

$$\Omega^{\alpha}_{0} = 0. \qquad (2.3)$$

Дифференцируя уравнения (2.3) и используя лемму Картана, получим

$$\Omega^{\alpha}_{\bar{i}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} \Omega^{\bar{j}}_{0}, \quad \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{j}\bar{i}}, \qquad (2.4)$$

где

$$d\Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{k}} \Omega^{\bar{k}}_{\bar{j}} + \Lambda^{\alpha}_{\bar{k}\bar{j}} \Omega^{\bar{k}}_{\bar{i}} - \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} \Omega^{0}_{0} - \Lambda^{\beta}_{\bar{i}\bar{j}} \Omega^{\alpha}_{\beta} + \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \Omega^{\bar{k}}_{0}. \qquad (2.5)$$

Квадратичные формы $\varphi^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} \Omega^{\bar{i}}_{0} \Omega^{\bar{j}}_{0}$ являются асимптотическими квадратичными формами поверхности $V_n \subset P_N$. Используем понятие нуль-индекса $\mu(x)$ точки x поверхности V_n [2]. Он равен размерности подпространства $L_x \subset T_x$, определяемого системой

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} y^{\bar{j}} = 0. \qquad (2.6)$$

Считаем, что $\mu(x) = k = n-1$. Тогда $M_i \in L_x$ ($i, j, k = \overline{1, n-1}$) и симметричные матрицы $\Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}}$ примут вид

$$\Lambda^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^{\alpha}_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (2.7)$$

Тогда асимптотические квадратичные формы поверхности V_n запишутся так:

$$\varphi^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{nn} (\Omega^{n}_{0})^2. \qquad (2.8)$$

Так как система уравнений $\Omega^{n}_{0} = 0$ вполне интегрируема на V_n, то она определяет на V_n расслоение с одномерной базой и ($n-1$)-мерными слоями. Многообразия

$$\begin{aligned} &\Lambda^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} X^{\bar{j}} X^{\bar{k}} - 2 \Lambda^{\bar{i}}_{\bar{j}} X^{\bar{j}} X^{0} = 0, \\ &\Lambda^{n}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} X^{\bar{j}} X^{\bar{k}} - 2 \Lambda^{n}_{\bar{i}\bar{j}} X^{\bar{j}} = 0 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

являются T-индикатрисой и H_0-индикатрисой [3] отображений Ψ_1 и Ψ_2. Соответствующий геометрический аналог корреляции, имеющей касание второго порядка с отображением Ψ_2, можно получить из [4].

Библиографический список

1. О в ч и н н и к о в В.М. Некоторые вопросы геометрии соответствий между точечным пространством и пространством гиперплоских элементов//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1976. Вып.7. С.69-72.

2. А к и в и с М.А. О многомерных сильно параболических поверхностях//Изв.вузов. Матем. 1987. №5. С.3-10.

3. А н д р е е в Б.А. О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и многообразием $R_N(Q)$ гиперквадрик аффинного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1978. Вып.9. С.11-19.

4. А к и в и с М.А. О простейшем условии алгебраизуемости n-мерного многообразия нуль-пар//Проблемы теории тканей и квазигрупп/Калининский ун-т. Калинин. 1985. С.3-7.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.19 1988

УДК 514.762

ЛИФТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н.Д. П о л я к о в

(Чувашский пединститут)

1. Пусть задано дифференцируемое многообразие M класса C^{∞} ($\dim M = n$). Рассмотрим n-мерную окрестность U, в которой текущая точка x определяется системой координат x^i ($i, j, \ldots = \overline{1,n}$). Г.Ф.Лаптевым показано [1], что на M возникает бесконечная последовательность линейных дифференциальных форм $\omega^i, \omega^i_k, \omega^i_{k_1 k_2}, \ldots$, симметричных по нижним индексам и имеющих расслоенную структуру по базовым формам ω^i:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}. \qquad (1)$$

формы $\bar{\omega}^i_j = \omega^i_j |_{\omega^k = 0}$ являются инвариантными формами группы $\mathcal{D}^1_n$, а формы $\bar{\omega}^i_j, \bar{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} |_{\omega^k = 0}$ -группы $\mathcal{D}^2_n$.

На дифференцируемом многообразии M зададим распределение m-мерных касательных элементов λ [2] с помощью следующих дифференциальных уравнений:

$$d\lambda^i_a - \lambda^i_b \theta^b_a + \lambda^j_a \omega^i_j = \lambda^i_{ak} \omega^k, \qquad (2)$$

где θ^a_b -параметрические формы, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$d\theta^a_b = \theta^c_b \wedge \theta^a_c + \omega^i \wedge \theta^a_{bi}. \qquad (3)$$

Формы θ^a_b при $\omega^i = 0$ становятся инвариантными формами полной линейной группы $GL(m,R)$, представленной как группа преобразований системы векторов $\lambda_a = \lambda^i_a e_i$. Векторы λ_a натягивают в каждой точке $x \in M$ элемент распределения λ.

Продолжив уравнения (2), получим

$$d\lambda^i_{ak} - \lambda^i_{bk} \theta^b_a - \lambda^i_{aj} \omega^j_k + \lambda^j_{ak} \omega^i_j - \lambda^i_b \theta^b_{ak} + \lambda^j_a \omega^i_{jk} = \lambda^i_{akm} \omega^m. \qquad (4)$$

Объект $\{\lambda^i_a, \lambda^i_{ak}\}$ является фундаментальным объектом первого порядка распределения λ.

5 Зак. 806