УДК 514.75

Н.В. Малаховский

(Калининградский государственный университет)

ОКРУЖНОСТИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ТРЕУГОЛЬНИКА

В работе приводится аналитическое доказательство результата, установленного и доказанного синтетически Роландом Штерком [1]: для любого невырожденного треугольника и произвольного действительного числа $\mu \geq 0$ существуют окружности, высекающие на прямых, содержащих стороны треугольника, отрезки; μ – пропорциональные этим сторонам (так называемые μ-окружности). Их число определяется зависящим от треугольника единственным действительным числом $m > 1$ и, в случаях $\mu < m, \mu = m, \mu > m$, равно соответственно 4,3,2. При этом уточняется оценка числа m: $m > \sqrt{2}$ и находится его аналитическое выражение.

Окружностью пропорциональных сечений (μ-окружностью) невырожденного треугольника $A_1A_2A_3$ называется окружность, высекающая на прямых, содержащих стороны A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 треугольника, отрезки Z_1Z_2, Z_3Z_4, Z_5Z_6, пропорциональные этим сторонам [1]:

$$\overrightarrow{Z_1Z_2} = \mu\overrightarrow{A_1A_2}, \qquad \overrightarrow{Z_3Z_4} = \mu\overrightarrow{A_2A_3}, \qquad \overrightarrow{Z_5Z_6} = \mu\overrightarrow{A_3A_1}. \tag{1}$$

Известно, что каждый невырожденный треугольник определяет пять окружностей: описанную окружность (1-окружность), вписанную и три вневписанных окружности (0-окружности). Справедлива

Теорема [1]. *Для любого невырожденного треугольника и произвольного действительного числа $\mu \geq 0$ существуют μ-окружности. Их число определяется зависящим от треугольника единственным действительным числом $m > \sqrt{2}$ и, в случаях $\mu < m, \mu = m, \mu > m$, равно соответственно 4,3,2.*

Доказательство. Пусть сначала $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$, т. е. треугольник $A_1A_2A_3$ не является равносторонним. Рассмотрим систему координат, в которой окружность, описанная около треугольника $A_1A_2A_3$, принята за единичную $|z| = 1$. Обозначим через z комплексную координату центра искомой μ-окружности, а через a_i – координаты точек A_i, $i = 1,2,3$. Справедливо утверждение [2]: е*сли прямая пересекает единичную окружность в точках A и B, то основанию S перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB, соответствует комплексное число s, определяемое формулой:*

$$s = \frac{1}{2}\left(a + b + m - ab\overline{m}\right). \tag{2}$$

Обозначим через $s_i, i = 1,2,3$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $Z(z)$ соответственно на прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. Из (1) и (2) следует

$$z_j - z_{j+1} = \mu(a_i - a_{i+1}), z_j + z_{j+1} = 2s_i \Rightarrow z_j = \frac{1}{2}\left(a_i + a_{i+1} + \mu(a_i - a_{i+1}) + z - a_i a_{i+1}\bar{z}\right), \quad (3)$$

где $i = 1,2,3$, а $j = 1,3,5$, $a_4 = a_1$. Потребуем, чтобы

$$|z - z_1| = |z - z_3| = |z - z_5|. \quad (4)$$

Обозначим

$$\nu = \mu^2 - 1 \quad (5)$$

и рассмотрим обобщённые ν-окружности. Из (3), (4), (5) следует

$$\sigma_3 \bar{z}^2 + 2z + \nu\sigma_1 = 0; \ \ \overline{\sigma_3} z^2 + 2\bar{z} + \nu\overline{\sigma_1} = 0, \quad (6)$$

где

$$\sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3; \qquad \sigma_2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1; \qquad \sigma_3 = a_1a_2a_3$$

обозначают симметрические многочлены чисел $a_i, i = 1,2,3.$ Уравнения (6) определяют равнобочные гиперболы с центрами на единичной окружности. Решения системы (6) определяют (для данного треугольника $A_1A_2A_3$ и данного действительного ν) центры искомых ν-окружностей. Решая систему уравнений (6) относительно z, получим уравнение четвёртой степени:

$$\left(z^2 + \nu\sigma_2\right)^2 + 8\sigma_3 z + 4\nu\sigma_1\sigma_3 = 0. \quad (7)$$

В силу основной теоремы алгебры уравнение (7) не может иметь больше четырёх решений. Однако это уравнение не может иметь и меньше двух различных решений. Действительно, находя последовательные производные уравнения (7), получим

$$z^3 + \nu\sigma_2 z + 2\sigma_3 = 0, \ \ 3z^2 + \nu\sigma_2 = 0, \ \ z = 0. \quad (8)$$

Подставляя $z = 0$ в уравнение (7), получим противоречие: $\sigma_3 = 0$.

Исследуем количество решений уравнения (8) в зависимости от значений действительного параметра ν. Рассмотрим случай касания гипербол (6), т.е. случай кратных корней уравнения (7). Находя дифференциалы обеих частей уравнений системы (6), получим

$$\sigma_3 \bar{z} d\bar{z} + dz = 0, \ \ \overline{\sigma_3} z dz + d\bar{z} = 0. \quad (9)$$

Приравнивая отношения коэффициентов при dz и $d\bar{z}$, получим $z\bar{z} = 1$, т.е. если гиперболы пересекаются и в точке пересечения имеют общую касательную, то эта точка принадлежит единичной окружности $z\bar{z} = 1$. Исключая из системы (6) параметр ν, получим уравнение, определяющее равнобочную гиперболу с центром в точке с координатой, лежащей на единичной окружности:

$$\overline{\sigma_2} z^2 - \sigma_2 \bar{z}^2 - 2\overline{\sigma_1} z + 2\sigma_1 \bar{z} = 0. \quad (10)$$

Назовём гиперболу (10) базисной гиперболой неравностороннего треугольника ABC. Базисная гипербола проходит через центры описанной, вписанной и трёх вневписанных окружностей треугольника ABC. Следовательно, необходимым условием для центров всех ν-окружностей является их принадлежность базисной гиперболе. Наоборот, для любой точки базисной гиперболы существует единственное действительно число ν, определяющее решения системы (6) и являющееся функцией точек базисной гиперболы. Действительно, пусть даны уравнения

$$\sigma_3 \bar{z}^2 + 2z + \nu^* \sigma_1 = 0; \ \overline{\sigma_3} z^2 + 2\bar{z} + \overline{\nu^*}\,\overline{\sigma_1} = 0.$$

Разрешая их относительно ν^* и $\overline{\nu^*}$, получим

$$\nu^* = -\frac{\sigma_3 \bar{z}^2 + 2z}{\sigma_1} = -\frac{\sigma_2 \bar{z}^2 + 2\overline{\sigma_1} z}{|\sigma_1|^2}, \ \overline{\nu^*} = -\frac{\overline{\sigma_3} z^2 + 2\bar{z}}{\overline{\sigma_1}} = -\frac{\overline{\sigma_2} z^2 + 2\sigma_1 \bar{z}}{|\sigma_1|^2}.$$

Учитывая во втором уравнении принадлежность точки z базисной гиперболе

$$\overline{\sigma_2} z^2 + 2\sigma_1 \bar{z} = \sigma_2 \bar{z}^2 + 2\overline{\sigma_1} z,$$

получим $\nu^* = \overline{\nu^*}$, т. е. для каждой точки базисной гиперболы существует единственное действительное число $\nu^* = \nu$, определяемое формулой

$$\nu = -\frac{\sigma_3 \bar{z}^2 + 2z}{\sigma_1},$$

для которого эта точка является общей точкой пересечения гипербол (6).

В силу доказанных условий точки касания гипербол (6) будем искать среди точек пересечения базисной гиперболы с единичной окружностью. Заметим, что базисная гипербола имеет с единичной окружностью только две общие точки и, следовательно, существует только два различных действительных значения параметра ν, соответствующих этим точкам. Действительно, базисная гипербола проходит через начало координат и её центр принадлежит единичной окружности. Разрешая уравнение (8) и его первую производную – первое уравнение из (9) – относительно ν, получим уравнение четвёртой степени с действительными коэффициентами:

$$\nu^4 + 4\left(\frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3 \sigma_3}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}\right)\nu^3 + 18\frac{\sigma_3}{\sigma_1 \sigma_2}\nu^2 - 27\frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = 0. \qquad (11)$$

Для отделения действительных корней уравнения (11) применим правило знаков Декарта. Заметим, что коэффициент

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{|\sigma_1|^2}$$

является действительным положительным числом, следовательно, возможна следующая перемена знаков коэффициентов уравнения (11) $+,+,+,-$ или $+,-,+,-$. В первом случае имеем одну перемену знака, во втором – три. В силу правила знаков Декарта уравнение (11) имеет либо только один положительный корень, либо три. Аналогично, заменяя ν на $-\nu$, получим, что уравнение (11) имеет либо только один отрицательный корень, либо три. А так как уравнением (11) определяются параметры ν, соответствующие общим точкам единичной окружности и базисной гиперболы, которых только две, причём каждой точке соответствует единственное действительное значение параметра ν, то уравнение имеет в точности только один положительный, только один отрицательный действительный корень и одну пару комплексно сопряжённых корней. Рассмотрим комплексное число

$$\sigma_2 - 2\sigma_1, \tag{12}$$

отличное от нуля, кроме случая, когда $\sigma_1 = 0.$ Действительно, предположим противное, т. е.

$$\sigma_2 = 2\sigma_1, \sigma_1 \neq 0. \tag{13}$$

Беря модули обеих частей последнего равенства и учитывая, что

$$|\sigma_1| = |\sigma_2|, \tag{14}$$

получим противоречие. В силу (13) и (14) точки с координатами $2\sigma_1, \sigma_2$ лежат на концентрических окружностях с центрами в нулевой точке и различными радиусами. Откуда следует, что комплексное число (12) равняется нулю тогда и только тогда, когда $\sigma_1 = 0$, т. е. когда треугольник ABC равносторонний. Докажем далее, что для любого треугольника ABC выполняется неравенство

$$0 \leq |\sigma_2 - 2\sigma_1| \leq 3. \tag{15}$$

Имеем

$$|\sigma_2 - 2\sigma_1| = \left|\overline{\sigma_2 - 2\sigma_1}\right| = \left|\frac{(\overline{\sigma_2} - 2\overline{\sigma_1})\sigma_3}{\sigma_3}\right| = \frac{|\sigma_1 - 2\sigma_2|}{|\sigma_3|} = |\sigma_1 - 2\sigma_2|. \tag{16}$$

Из (16) следует, что точки с комплексными координатами $\sigma_2 - 2\sigma_1$ и $\sigma_1 - 2\sigma_2$ лежат на одной окружности с центром в нулевой точке. Радиус этой окружности не может превосходить половины модуля комплексного числа, равного сумме чисел $\sigma_2 - 2\sigma_1$ и $\sigma_1 - 2\sigma_2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}|\sigma_2 - 2\sigma_1 + \sigma_1 - 2\sigma_2| = \frac{1}{2}|\sigma_1 + \sigma_2| \leq \frac{1}{2}(|\sigma_1| + |\sigma_2|) = \frac{1}{2}2|\sigma_1| = |\sigma_1| = |a + b + c| \leq 3,$$

причём $|a + b + c| = 3$ тогда и только тогда, когда треугольник вырожден.

В силу неравенства нулю числа $\sigma_2 - 2\sigma_1$ прямую OS, где $S(\sigma_2 - 2\sigma_1)$, можно считать действительной осью плоскости неравностороннего треугольника ABC. Таким образом,

$$\sigma_2 - 2\sigma_1 = \overline{\sigma_2 - 2\sigma_1}, \tag{17}$$

т.е. число $\sigma_2 - 2\sigma_1$ является действительным. Умножая обе части (17) на ненулевое комплексное число σ_3, получим

$$\sigma_3(\sigma_2 - 2\sigma_1) = \sigma_1 - 2\sigma_2, \text{ или } \sigma_3 = \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2}{\sigma_2 - 2\sigma_1}. \tag{18}$$

Учитывая в уравнении базисной гиперболы условие (18), получим, что она проходит через единичную точку $z = 1$. В единичной точке касательные к гиперболам (6) совпадают, следовательно, эта точка является кратным корнем уравнения (7). Учитывая в уравнении (7) $z = 1$ и условие (18), получим

$$\nu = \frac{3}{\sigma_2 - 2\sigma_1}.$$

Выбирая

$$0 < \sigma_2 - 2\sigma_1 < 3,$$

получим

$$\nu > 0\,,\ \mu^2 = 1 + \frac{3}{\sigma_2 - 2\sigma_1} > 2.$$

В этом случае единичной точке соответствует положительное значение ν, а другой точке пересечения базисной гиперболы с единичной окружностью – отрицательное значение. Наоборот, выбирая

$$-3 < \sigma_2 - 2\sigma_1 < 0\,,$$

получим

$$\nu < 0 \ \text{и}\ \mu^2 = 1 + \frac{3}{\sigma_2 - 2\sigma_1} < 0.$$

В этом случае единичной точке соответствует отрицательное значение ν, а другой точке пересечения базисной гиперболы с единичной окружностью – положительное значение. По условию задачи параметр μ должен быть действительным и неотрицательным. Следовательно, для любого невырожденного треугольника ABC существует единственное действительное положительное число $m = \sqrt{1 + \dfrac{3}{\sigma_2 - 2\sigma_1}} > \sqrt{2}$, при котором существуют только три центра μ-окружностей.

Рассмотрим теперь случай равностороннего треугольника ABC. Учитывая в уравнении (7) $\sigma_1 = 0,$ получим уравнение $z(z^3 + 8\sigma_3) = 0,$ корнями которого являются координаты центров вписанной и трёх вневписанных окружностей треугольника ABC. Действительно, если $z_k, k = 1,2,3,4$ – его корни, то

$$\sum_k z_k = 0, \qquad |z_k| = 2.$$

То же уравнение получается из уравнения (7) при условии $\nu = 0$. Таким образом, каждый невырожденный треугольник $A_1A_2A_3$ порождает инвариантный, правильный треугольник.

Список литературы

1. *Roland Staerk* Ueber die Kreise, welche aus drei Geraden Strecken vorgegebener Laenge herausschneiden // Elemente der Mathematik. 1994 №49 S. 118 – 128.

2. *Малаховский Н. В.* Метод комплексных чисел в планиметрии. Калининград 1996.

N. Malakhovsky

CIRCLES OF PROPORTIONAL SECTIONS OF TRIANGLES

An analytical proof of synthetically proved in [1] theorem is given: for any nondegenerated triangle and any arbitrary real number $\mu \geq 0$ there are circles cutting on lines, containing sides of triangle, segments, μ-proportional to the side lengths (the so-called μ-circles). Their number is determined by an unique real number $m > 1$, depending on the triangle, and, in cases $\mu < m, \mu = m, \mu > m$, is equal accordingly to 4,3,2. The estimation of the number m is specified: $m > \sqrt{2}$ and also an analytical expression of m is given.