ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 4 1974

Малаховский В.С.

КАСАТЕЛЬНО ОСНАЩЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ КОНИК.

В трехмерном проективном пространстве исследуется двупараметрическое семейство (конгруэнция) $\mathcal{K}$ кривых второго порядка (коник) с заданным касательным распределением. Такая конгруэнция называется касательно оснащенной конгруэнцией коник, или конгруэнцией $\mathcal{K}^*$ [1]. Построен канонический репер конгруэнции $\mathcal{K}^*$ и рассмотрены основные ассоциированные с ней геометрические образы. Изучены некоторые классы конгруэнций $\mathcal{K}^*$.

§1. Система пфаффовых уравнений невырожденной касательно оснащенной конгруэнции коник.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 конгруэнцию $\mathcal{K}$ коник, плоскости которых образуют двупараметрическое семейство. Располагая вершины A_α $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3)$ репера $\{A_{\alpha'}\}$ $(\alpha', \beta', \gamma' = 1,2,3,4)$ в плоскости коники, приведем уравнения коники C конгруэнции $\mathcal{K}$ к виду:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^4 = 0, \tag{1.1}$$

причем

$$\det(a_{\alpha\beta}) = \mathrm{Const}. \tag{1.2}$$

Компоненты $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ деривационных формул

$$dA_{\alpha'} = \omega_{\alpha'}^{\beta'} A_{\beta'}$$

удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_{\alpha'}^{\beta'} = \omega_{\alpha'}^{\gamma'} \wedge \omega_{\gamma'}^{\beta'} \tag{1.3}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{1.4}$$

Обозначим

$$\omega_i = \omega_i^4 \qquad (i, j, k, h = 1,2). \tag{1.5}$$

Так как плоскости коник конгруэнции $\mathcal{K}$ образуют двупараметрическое семейство, то ранг системы форм $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3^4\}$ равен двум. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0. \tag{1.6}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{K}$ запишется в виде:

$$\nabla a_{\alpha\beta} + \frac{2}{3} a_{\alpha\beta}\, \omega_\gamma^\gamma = b_{\alpha\beta}^k \omega_k, \quad \omega_3^4 = a^k \omega_k, \tag{1.7}$$

где ∇ – символ ковариантного дифференцирования. Из (1.2) вытекают тождества

$$a^{\alpha\beta} b^{i}_{\alpha\beta} = 0 , \qquad (1.8)$$

где $a^{\alpha\beta}$ -приведенные миноры элемента $a_{\alpha\beta}$ матрицы $(a_{\alpha\beta})$. Продолжая (I.7), получим

$$\nabla b^{i}_{\alpha\beta} + b^{i}_{\alpha\beta}\left(\tfrac{2}{3}\omega^{\gamma}_{\gamma} - \omega^{4}_{4}\right) + a^{i} b^{k}_{\alpha\beta}\omega^{3}_{k} + \tfrac{2}{3} a_{\alpha\beta}\left(\omega^{i}_{4} + a^{i}\omega^{3}_{4}\right) -$$

$$- \left\{a_{\gamma\beta}\left(\delta^{i}_{\alpha} + \delta^{3}_{\alpha} a^{i}\right) + a_{\alpha\gamma}\left(\delta^{i}_{\beta} + \delta^{3}_{\beta} a^{i}\right)\right\}\omega^{\gamma}_{4} = b^{ik}_{\alpha\beta}\,\omega_{k} \qquad (1.9)$$

$$da^{i} + a^{k}\omega^{i}_{k} - a^{i}\omega^{3}_{3} + a^{k} a^{i}\omega^{3}_{k} - \omega^{i}_{3} = -\Gamma^{ik}_{3}\,\omega_{k} .$$

Зададим величину λ ,удовлетворяющую уравнению

$$d\lambda + \lambda\left(\omega^{1}_{1} - \omega^{2}_{2}\right) - \lambda^{2}\omega^{2}_{1} + \omega^{1}_{2} + \left(a^{1} - \lambda a^{2}\right)\left(\lambda\omega^{3}_{1} + \omega^{3}_{2}\right) = m^{k}\omega_{k} .$$

Геометрический обьект

$$\Gamma = \left\{a_{\alpha\beta} ,\ b^{i}_{\alpha\beta} ,\ a^{i} ,\ \lambda\right\} \qquad (1.11)$$

является касательно оснащающим объектом конгруэнции $\mathcal{K}$ ([I],стр.56).Конгруэнцию $\mathcal{K}$,на которой задано поле геометрического объекта Γ ,назовем касательно оснащенной конгруэнцией коник,или конгруэнцией $\mathcal{K}^{*}$.Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{K}^{*}$ состоит из уравнений (I.7), (I.9) и (I.10).

Обозначим буквами P_3 и P_1, P_2 соответственно характеристическую точку плоскости $x^4 = 0$ и точки пересечения коникой C поляры точки P_3 относительно C .

Определение I. Конгруэнция $\mathcal{K}^{*}$ называется невырожденной,если I)поверхности (P_α) не вырождаются в линии,2)точка P_3 не инцидентна конике C ,3)касательная плоскость к поверхности (P_i) в точке P_i не содержит точки P_j $(i \neq j)$.В работе рассматриваются только невырожденные конгруэнции $\mathcal{K}^{*}$.

§2.Геометрические образы,ассоциированные с конгру- с конгруэнцией $\mathcal{K}^{*}$.

Геометрический объект (I.II) содержит подобъекты $\{a_{\alpha\beta}\}$ $\{a^{i}\}$ и $\{a^{i},\lambda\}$.Подобъект $\{a_{\alpha\beta}\}$ определяет конику C , подобъект $\{a^{i}\}$ -характеристическую точку P_3 плоскости коники C .

Имеем:

$$P_3 = A_3 - a^{k} A_{k} , \qquad (2.1)$$

$$dP_3 = \left(\omega^{3}_{3} - a^{k}\omega^{3}_{k}\right) P_3 + \Gamma^{\ell k}_{3}\,\omega_{\ell}\, A_{k} . \qquad (2.2)$$

Подобъект $\{a^{i},\lambda\}$ определяет в плоскости коники инвариантную прямую

$$x^{1} - \lambda x^{2} + \mu x^{3} = 0 ,\quad x^{4} = 0 , \qquad (2.3)$$

где

$$\mu = a^{1} - \lambda a^{2} . \qquad (2.4)$$

Прямая (2.3), называемая оснащающей прямой, является характеристикой плоскости коники C вдоль ассоциированного однопараметрического семейства ([I], стр.59)

$$\Theta_1 \equiv \lambda\omega_1 + \omega_2 = 0 . \tag{2.5}$$

Из (2.I), (2.3) следует, что точка P_3 инцидентна оснащающей прямой. Относительно инвариантную форму Θ_1 назовем оснащающей формой Пфаффа.

Так как точка P_3 не инцидентна конике C, то

$$h = a_{kh} a^k a^h + a_{33} - 2 a_{3k} a^k \neq 0 . \tag{2.6}$$

Введем обозначения:

$$b_i = a_{ki} a^k - a_{3i} , \qquad b_3 = a_{13} a^1 + a_{23} a^2 - a_{33} , \tag{2.7}$$

$$m_1^1 = -(\lambda b_3 + \mu b_2), \quad m_1^2 = \mu b_1 - b_3 , \quad m_1^3 = \lambda b_1 + b_2 , \tag{2.8}$$

$$m_2^1 = (b_2 a_{3\alpha} - b_3 a_{2\alpha}) m_1^\alpha , \; m_2^2 = (b_3 a_{1\alpha} - b_1 a_{3\alpha}) m_1^\alpha , \; m_2^3 = (b_1 a_{2\alpha} - b_2 a_{1\alpha}) m_1^\alpha , \tag{2.9}$$

$$c_i = (-1)^j (\lambda \Gamma_3^{j2} - \Gamma_3^{j1}) , \quad c_3 = c_k a^k , \tag{2.10}$$

$$n_1^1 = b_3 c_2 - b_2 c_3 , \quad n_1^2 = b_3 c_1 - b_1 c_3 , \quad n_1^3 = b_2 c_1 - b_1 c_2 , \tag{2.11}$$

$$n_2^1 = (\quad a_{3\alpha} - b_3 a_{2\alpha}) n_1^\alpha , \; n_2^2 = (b_3 a_{1\alpha} - b_1 a_{3\alpha}) n_1^\alpha , \; n_2^3 = (b_1 a_{2\alpha} - b_2 a_{1\alpha}) n_1^\alpha , \tag{2.12}$$

$$\hat{m}_i = (-1)^j (m_2^j + a^j m_2^3) , \; \hat{m}_3 = a^k \hat{m}_k , \; \hat{n}_i = (-1)^j (n_2^j + a^j n_2^3) , \; \hat{n}_3 = a^k \hat{n}_k , \tag{2.13}$$

$$\lambda^* = \frac{\hat{m}_1 \Gamma_3^{12} + \hat{m}_2 \Gamma_3^{11}}{\hat{m}_1 \Gamma_3^{22} + \hat{m}_2 \Gamma_3^{21}} . \tag{2.14}$$

На конгруэнции K^* системы величин (2.7)- (2.I4) определяют следующие геометрические образы.

Поляра точки P_3 относительно коники C:

$$b_\alpha x^\alpha = 0 , \quad x^4 = 0 \tag{2.15}$$

Оснащающая точка

$$M_1 = m_1^\alpha A_\alpha , \tag{2.16}$$

являющаяся точкой пересечения поляры (2.I5) с оснащающей прямой (2.3). Сопряженно оснащающая точка

$$M_2 = m_2^\alpha A_\alpha \tag{2.17}$$

-точка поляры (2.I5), полярно сопряженная оснащающей точке M_1 относительно коники C.

Индуцированная прямая

$$c_\alpha x^\alpha = 0 , \quad x^4 = 0 \tag{2.18}$$

-касательная на поверхности (P_3) вдоль ассоциированного однопараметрического семейства (2.5).

Индуцированная точка

$$N_1 = n_1^\alpha A_\alpha , \tag{2.19}$$

являющаяся точкой пересечения поляры (2.I5) с индуцированной прямой (2.I8).

Сопряженно индуцированная точка

$$N_2 = n_2^\alpha A_\alpha \tag{2.20}$$

-точка поляры (2.13), полярно сопряженная индуцированной точке относительно коники C.

Сопряженно оснащающая прямая

$$\hat{m}_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^4 = 0 \tag{2.21}$$

-касательная $P_3 M_2$ на поверхности (P_3).

Сопряженно индуцированная прямая

$$\hat{n}_\alpha x^\alpha = 0, \quad x^4 = 0 \tag{2.22}$$

-касательная $P_3 N_2$ на поверхности (P_3).

Сопряженно оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_2 = \omega_1 + \overset{*}{\lambda}\,\omega_2. \tag{2.23}$$

§3. Канонический репер конгруэнции $\mathcal{K}^*$.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}^*$ к частично канонизированному реперу, совместив вершины A_α с точками P_α, расположив вершину A_4 на линии пересечения касательных плоскостей к поверхностям (P_i) в точках P_i и приведя вершину λ к единице. Тогда

$$a_{ii} = 0, \quad a_{i3} = 0, \quad a^i = 0, \quad \lambda = 1, \quad \Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21}, \tag{3.1}$$

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_i^j = h_i\omega_i^3, \quad \omega_4^i - h_j\omega_4^3 = \ell^k\omega_k,$$
$$\omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = 2p^k\omega_k. \tag{3.2}$$

Так как поверхность (P_3) не вырождается в линию, то

$$\Delta = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21} \neq 0. \tag{3.3}$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, символами $\pi_{\alpha'}^{\beta'}$ —значения форм $\omega_{\alpha'}^{\beta'}$ при фиксированных первичных параметрах. Из (1.6), (3.2) следует

$$\delta\left(\frac{a_{12}}{a_{33}}\right) = \frac{a_{12}}{a_{33}}\left(\pi_1^1 + \pi_2^2 - 2\pi_3^3\right),$$

$$\delta\Delta = 2\Delta\left(\pi_3^3 + \pi_4^4 - \pi_1^1 - \pi_2^2\right), \tag{3.4}$$

$$\delta\left(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}\right) = \left(\Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32}\right)\left(\pi_4^4 - \pi_3^3\right) - 2\pi_4^3.$$

Фиксируя оставшиеся вторичные параметры так, чтобы

$$a_{12} + a_{33} = 0, \quad \Delta = -1, \quad \Gamma_1^{31} + \Gamma_2^{32} = 0, \tag{3.5}$$

получим канонический репер невырожденной конгруэнции $\mathcal{K}^*$.

Положим

$$\Gamma_1^{31} = \alpha, \quad \Gamma_3^{11} = a, \quad \Gamma_3^{12} = b, \quad \Gamma_3^{22} = c, \tag{3.6}$$

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = 2q^k\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 = 4r^k\omega_k. \tag{3.7}$$

Тогда

$$\omega_1^3 = \alpha\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2, \quad \omega_2^3 = \Gamma_2^{31}\omega_1 - \alpha\omega_2, \quad \omega_3^4 = 0,$$
$$\omega_3^1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_3^2 = b\omega_1 + c\omega_2, \tag{3.8}$$

$$\omega_1^2 = h_1(\alpha\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2), \quad \omega_2^1 = h_2(\Gamma_2^{31}\omega_1 - \alpha\omega_2),$$

$$\omega_4^\alpha = \Gamma_4^{\alpha\kappa}\omega_\kappa, \tag{3.9}$$

$$\omega_1^1 = (p^\kappa + \tau^\kappa)\omega_\kappa, \quad \omega_2^2 = (\tau^\kappa - p^\kappa)\omega_\kappa,$$

$$\omega_3^3 = (\tau^\kappa - q^\kappa)\omega_\kappa, \quad \omega_4^4 = (q^\kappa - 3\tau^\kappa)\omega_\kappa, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}\omega_1 = (\alpha h_1 + q^2 - 4\tau^2 - p^2)\,\omega_1\wedge\omega_2,$$

$$\mathcal{D}\omega_2 = (4\tau^1 - p^1 - q^1 + \alpha h_2)\,\omega_1\wedge\omega_2, \tag{3.11}$$

причем

$$ac - b^2 + 1 = 0, \quad \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31} \neq 0. \tag{3.12}$$

Уравнения коники (I.I) принимают вид:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{3.13}$$

Ассоциированные геометрические образы (2.15)-(2.23) в каноническом репере задаются следующими формулами.

Оснащающая прямая

$$x^1 - x^2 = 0, \quad x^4 = 0 \tag{3.14}$$

Поляра точки P_3 относительно коники C:

$$x^3 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{3.15}$$

Оснащающая точка

$$M_1 = A_2 + A_1. \tag{3.16}$$

Сопряженно оснащающая точка

$$M_2 = A_2 - A_1. \tag{3.17}$$

Индуцированная прямая

$$(c-b)x^1 + (a-b)x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{3.18}$$

Индуцированная точка

$$N_1 = (a-b)A_1 + (c-b)A_2. \tag{3.19}$$

Сопряженно индуцированная точка

$$N_2 = (a-b)A_1 + (b-c)A_2. \tag{3.20}$$

Сопряженно оснащающая прямая

$$x^1 + x^2 = 0, \quad x^4 = 0. \tag{3.21}$$

Сопряженно индуцированная прямая

$$(c-b)x^1 + (a-b)x^2 = 0, \; x^4 = 0. \tag{3.22}$$

Оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_1 = \omega_1 + \omega_2. \tag{3.23}$$

Сопряженно оснащающая форма Пфаффа

$$\Theta_2 = \omega_1 + \frac{a+b}{b+c}\omega_2. \tag{3.24}$$

§4. Конгруэнции $\mathcal{K}_0^*$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{K}_0^*$ называется конгруэнция $\mathcal{K}^*$, обладающая следующими свойствами:

I)оснащающая точка M_1 является характеристической точ плоскости (A_1, A_2, A_4), 2)существует одностороннее расслоени от конгруэнции (C) коник к линейчатому многообразию (M_1A_4) [2].

Т е о р е м а 4.I. Конгруэнции $\mathcal{K}_0^*$ существуют и оп деляются с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия I) определени следует

$$\omega_1^3 + \omega_2^3 = 0. \qquad (4$$

Имеем

$$\Gamma_2^{31} = -\alpha, \quad \Gamma_1^{32} = \alpha, \quad \alpha \neq 0. \qquad (4$$

Следовательно,

$$\omega_1^3 = \alpha\,\theta_1, \quad \omega_2^3 = -\alpha\,\theta_1, \qquad (4$$

$$\omega_1^2 = \beta\,\theta_1, \quad \omega_2^1 = \gamma\,\theta_1, \qquad (4$$

где

$$\beta = \alpha h_1, \quad \gamma = -\alpha h_2. \qquad (4$$

Замыкая (4.I), находим:

$$\omega_4^3 \wedge \theta_1 + 2\alpha(p^2 - p^1)\,\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \qquad (4$$

Для получения аналитической характеристики условия расслоения от (C) к (M_1A_4) зададим произвольную точку M коники (3.I3) с помощью параметра σ посредством урав

$$M = A_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 A_2 + \sigma A_3. \qquad (4.7)$$

Так как касательная плоскость к поверхности (M) содержит прямую M_1A_4, то

$$(dM\, M\, M_1 A_4) = 0. \qquad (4.8)$$

Учитывая (4.I), (4.7), получаем

$$(2+\sigma^2)\,d\sigma = -\frac{1}{2}\sigma^4\omega_1^3 + \sigma^3(\omega_2^1 + \omega_3^3 - \omega_2^2) + \qquad (4.9)$$
$$+\sigma^2(2\omega_1^3 + 2\omega_3^1 - 2\omega_3^2) + 2\sigma(\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_1^2) - 2\omega_1^3$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом с учетом (4.9), находим для σ уравнение шестой степени, которое должно обращаться в тождество. Имеем:

$$\omega_4^3 \wedge \omega_i = 0, \quad (\omega_4^i - \omega_4^j) \wedge \omega_j = 0,$$
$$\vartheta_1 \wedge \omega_3^i = 0, \quad \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 = 0, \qquad (4.10)$$
$$(\omega_1^1 - \omega_2^2) \wedge \omega_1^3 = 0,$$

где

$$\vartheta_1 = \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_2^1 - \omega_1^2, \qquad (4.11)$$
$$\vartheta_2 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3$$

Из (4.10) находим:

$$\omega_4^1 - \omega_4^2 = 0\,, \quad \omega_4^3 = 0\,, \quad \vartheta_1 = 0\,. \tag{4.12}$$

Замыкания (4.12) не приводят к новым уравнениям.

Обозначим:

$$\Gamma_4^{1i} = c^i\,.$$

Матрица деривационных формул канонического репера конгруэнции $\mathcal{K}_0^*$ примет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\beta-\gamma)\theta_1+\psi & \beta\theta_1 & \alpha\theta_2 & \omega_1 \\ \gamma\theta_1 & \psi+\frac{1}{2}(\gamma-\beta)\theta_1 & -\alpha\theta_1 & \omega_2 \\ a\omega_1+b\omega_2 & b\omega_1+c\omega_2 & \psi-\chi & 0 \\ c^k\omega_k & c^k\omega_k & 0 & \chi-3\psi \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

где

$$\psi = \tau^k\omega_k = \frac{1}{4}\,(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4)\,,$$
$$\chi = q^k\omega_k = \frac{1}{2}\,(\omega_1^1+\omega_2^2-2\,\omega_3^3)\,. \tag{4.14}$$

Пфаффова система имеет вид:

$$\omega_3^4 = 0\,, \quad \omega_4^1 - \omega_4^2 = 0\,, \quad \omega_1^3 + \omega_2^3 = 0\,,$$

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 = (\beta-\gamma)\,\theta_1\,, \quad \omega_1^2 = \beta\,\theta_1\,, \quad \omega_2^1 = \gamma\,\theta_1\,, \quad \omega_1^3 = \alpha\,\theta_1\,,$$
$$\omega_3^1 = a\omega_1 + b\,\omega_2\,, \quad \omega_3^2 = b\omega_1 + c\,\omega_2\,, \tag{4.15}$$
$$\psi = \tau^k\omega_k\,, \quad \chi = q^k\omega_k\,,$$

причем

$$ac - b^2 + 1 = 0 \tag{4.16}$$

Из (4.15),(4.16) следует,что конгруэнции $\mathcal{K}_0^*$ существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 4.1. Линейчатое многообразие (M_1A_4) ассоциированное с конгруэнцией $\mathcal{K}_0^*$,вырождается в неподвижную прямую.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$d[MA_4] = \{\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\theta_1 + \chi - 2\psi\}[MA_4]\,. \tag{4.17}$$

§5. Конгруэнции $\mathcal{L}$.

О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией $\mathcal{L}$ называется конгруэнция $\mathcal{K}^*$,на которой имеют место односторонние расслоения от прямолинейных конгруэнций (A_iA_4) к прямолинейной конгруэнции (M_1A_3) ([3],стр.66).

Обозначим:

$$\Omega_1 = \omega_3^1 - \omega_3^2\,, \quad \Omega_2 = \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_2^1 - \omega_1^2\,. \tag{5.1}$$

Условия одностороннего расслоения от прямолинейных конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_4) к прямолинейной конгруэнции (M_1A_3) запишутся в виде:

$$\omega_4^3 \wedge \Omega_1 + \omega_4^2 \wedge \Omega_2 = 0,$$

$$\omega_1^2 \wedge \theta_1 = 0,$$

$$\omega_1^3 \wedge \Omega_1 + \omega_1^2 \wedge \Omega_2 - \omega_4^2 \wedge \theta_1 = 0, \qquad (5.2)$$

$$\omega_4^3 \wedge \Omega_1 + \omega_4^1 \wedge \Omega_2 = 0,$$

$$\omega_2^1 \wedge \theta_1 = 0, \quad \omega_2^3 \wedge \Omega_1 + \omega_2^1 \wedge \Omega_2 + \omega_4^1 \wedge \theta_1 = 0.$$

Имеем:

$$\omega_1^2 = \beta\,\theta_1, \quad \omega_2^1 = \gamma\,\theta_1. \qquad (5.3)$$

Сравнивая (5.3) с уравнениями

$$\omega_1^2 = h_1\,\omega_1^3, \quad \omega_2^1 = h_2\,\omega_2^3, \qquad (5.4)$$

получим

$$h_1(\Gamma_1^{32} - \alpha) = 0, \quad h_2(\Gamma_2^{31} + \alpha) = 0,$$
$$h_1\Gamma_1^{32} - \beta = 0, \quad h_2\Gamma_2^{31} - \gamma = 0. \qquad (5.5)$$

Анализируя уравнения (5.5) выделяем четыре случая, каждый из которых определяет конгруэнции с произволом двух функций двух аргументов. Объединение этих четырех классов исчерпывает конгруэнции $\mathcal{L}$.

§6. Конгруэнции $\mathcal{L}^*$.

О п р е д е л е н и е 4. Конгруэнцией $\mathcal{L}^*$ называется конгруэнция $\mathcal{L}$, обладающая следующими свойствами:

1) оснащающая точка M_1 является характеристической точкой плоскости $(M_1A_3A_4)$, 2) сопряженно индуцированная точка N_2 совпадает с оснащающей точкой M_1.

Условия 1) и 2) определения 4 в силу (3.12) приводятся соответственно к виду

$$\Omega_2 = 0, \qquad (6.1)$$

$$\Omega = \varepsilon\,\theta_1, \quad \varepsilon^2 = 1 \qquad (6.2)$$

Присоединяя (6.1) и (6.2) к уравнениям, характеризующим конгруэнции $\mathcal{L}$, и анализируя полученную систему, убеждаемся, что существует четыре и только четыре класса конгруэнций $\mathcal{L}^*$ (конгруэнции $\mathcal{L}_1^*, \mathcal{L}_2^*, \mathcal{L}_3^*, \mathcal{L}_4^*$) определяемые соответственно следующими системами уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 0, \ \omega_2^1 = 0, \ \omega_1^3 = \alpha\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2, \ \omega_1^3 + \omega_2^3 = \kappa\,\theta_1, \\ \omega_3^1 = (b+\varepsilon)\omega_1 + b\,\omega_2, \ \omega_3^2 = b\omega_1 + (b-\varepsilon)\omega_2, \ \omega_3^4 = 0, \\ \omega_4^3 = \kappa_3\,\theta_1, \ \omega_4^2 - \omega_4^1 = \kappa_2\,\theta_1, \ \varepsilon\,\omega_1^3 - \omega_4^1 = \kappa_1\,\theta_1, \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \ \omega_1^1 = \tau\,\theta_1, \ \omega_1^1 - \omega_3^3 = q^\kappa\omega_\kappa, \end{cases} \qquad (6.3)$$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = 0, \ \omega_1^3 = \alpha\,\theta_1, \ \omega_1^3 + \omega_2^3 = 0, \ \omega_2^1 = h_2\,\omega_2^3, \\ \omega_3^1 = (b+\varepsilon)\omega_1 + b\omega_2, \ \omega_3^2 = b\omega_1 + (b-\varepsilon)\omega_2, \ \omega_3^4 = 0, \end{cases} \qquad (6.4)$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_2^1=0\,,\quad \omega_4^1=\kappa_1\theta_1\,,\quad \omega_4^2=\varepsilon\,\omega_1^3\,,\quad \omega_4^3=0\,,$$
$$\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=2q^k\omega_k\,,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=4\tau\theta_1\,, \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} \omega_1^3=\alpha\theta_1\,,\quad \omega_1^3+\omega_2^3=0\,,\quad \omega_1^2=h_1\omega_1^3\,,\quad \omega_2^1=0\,,\\ \omega_3^1=(b+\varepsilon)\omega_1+b\,\omega_2\,,\quad \omega_3^2=b\,\omega_1+(b-\varepsilon)\omega_2\,,\quad \omega_3^4=0\,,\\ \omega_1^1-\omega_2^2-\omega_1^2=0\,,\quad \omega_4^1=\varepsilon\,\omega_1^3\,,\quad \omega_4^2=\kappa_2\theta_1\,,\quad \omega_4^3=0\,,\\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=2q^k\omega_k\,,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=4\tau\theta_1 \end{cases} \tag{6.5}$$

$$\begin{cases} \omega_1^3=\alpha\theta_1\,,\quad \omega_1^3+\omega_2^3=0\,,\quad \omega_1^2=h_1\omega_1^3\,,\quad \omega_2^1=h_2\omega_2^3\,,\\ \omega_3^1=(b+\varepsilon)\omega_1+b\,\omega_2\,,\quad \omega_3^2=b\,\omega_1+(b-\varepsilon)\omega_2\,,\quad \omega_3^4=0\,,\\ \omega_1^1-\omega_2^2-\omega_1^2+\omega_2^1=0\,,\quad \omega_4^1=\kappa_1\theta_1\,,\quad \omega_4^2=\kappa_2\theta_1\,,\\ \omega_4^3=\kappa_3\theta_1\,,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=2q^k\omega_k\,,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3-\omega_4^4=4\tau\theta_1 \end{cases} \tag{6.6}$$

Из (6.3)-(6.6) следует, что конгруенции $\mathcal{L}_1^*$ определяются с произволом восьми функций одного аргумента, а конгруенции $\mathcal{L}_2^*, \mathcal{L}_3^*, \mathcal{L}_4^*$ с произволом одной функции двух аргументов. Из (6.3)-(6.6) непосредственно вытекает также

Т е о р е м а 6.I. Конгруэнции $\mathcal{L}_\alpha^*$ обладают следующими свойствами: I) поверхности $(A_1), (A_2), (A_4)$ конгруэнций $\mathcal{L}_2^*, \mathcal{L}_3^*, \mathcal{L}_4^*$ вырождаются в линии, 2) точка A_i конгруэнции $\mathcal{L}_1^*$ является характеристической точкой плоскости $(A_i A_3 A_4)$, 3) точка A_1 (A_2) конгруэнции $\mathcal{L}_2^*$ $(\mathcal{L}_3^*)$ является характеристической точкой плоскости $(A_1 A_3 A_4)$ $((A_2 A_3 A_4))$.

Л и т е р а т у р а

I. Малаховский В.С., К геометрии касательно оснащенных многообразий. Математика, Изв. Высш. уч. зав. I972, 9(I24), 54-65.

2. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Труды геом. семинара. Ин-т научн. инф. АН СССР, М., I971, 3, I93-220.

3. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956.