через центр квадрики Q [1];3)точка E_3^* является фокальной точкой квадрики Q ;4) если точка E_2 является фокальной точкой квадрики Q ,то и точка E_2^* также фокальная точка Q^i ;5)точки E_1 и E_1^* не могут являться одновременно фокальными точками квадрики Q .

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (AE_2) имеет вид: $\alpha\omega_1\omega_2 = 0$ ($\alpha \neq 0$). 2) Действительно,уравнения ассоциированных квадрик Q^i принимают следующий вид:

$$F^i \equiv c_1^i (x^1)^2 + c_2^i (x^2)^2 + \lambda x^1 x^2 + b^i x^i x^3 + \varepsilon x^j x^3 + \alpha \delta_i^1 x^i = 0 . \qquad (3)$$

Доказательство свойств 3),4) и 5) следует из системы уравнений,определяющей фокальные точки квадрики Q :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0 . \qquad (4)$$

Из конгруэнции L выделим класс конгруэнций L_1 .

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией L_1 назовем конгруэнцию L ,у которой точки E_i являются фокальными.

В силу этого определения конгруэнции L_1 выделяются из конгруэнций L соотношениями:

$$c_2^1 = 0, \quad c_1^1 = -\alpha, \quad c_1^2 = 0, \quad c_2^2 = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \beta = 0, \quad b^2 = 1 . \qquad (5)$$

С учетом (5) система уравнений Пфаффа конгруэнции L_1 имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \\ \omega^1 = \alpha\omega_1, \quad \omega_2^1 = \lambda^k \omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega^1 = 0, \quad \omega_3^1 = (b^1 - 1)\,\omega_1 . \end{cases} \qquad (6)$$

Произвол существования конгруэнций L_1 -одна функция двух аргументов.Для конгруэнций L_1 справедлива

Т е о р е м а 2.Конгруэнции L_1 обладают следующими свойствами: I)поверхность (E_1) вырождается в линию с касательной,параллельной вектору $\bar{e}_3$;2)поверхность (E_3) вырождается в линию с касательной,параллельной вектору $\bar{e}_1$;3) векторы $\bar{e}_i$, $\bar{e}_3$ сопряжены относительно ассоциированных квадрик Q^j; 4)индикатриса вектора $\bar{e}_3$ вырождается в линию,касательная к которой коллинеарна вектору $\bar{e}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о свойств I) и 2) непосредственно следует из системы уравнений (6): $d\bar{E}_1 = \omega_1 \bar{e}_3$, $d\bar{E}_3 = (\alpha + b^1 - 1)\bar{e}_1\omega_1$ 3) Учитывая соотношения (5) в (3),придем к указанному утверждению. 4)Действительно, $d\bar{e}_3 = (b^1 - 1)\,\bar{e}_1\omega_1$.

Библиографический список

I.Лаптев Г.Ф.Распределение касательных элементов//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

УДК 514.75

К ВОПРОСУ О ФОКАЛЬНЫХ ОБРАЗАХ МНОГООБРАЗИЙ КОНИК В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Н.Х у д е н к о

(Калининградский государственный университет)

В четырехмерном проективном пространстве рассматриваются псевдоконгруэнции коник.Выделен класс псевдоконгруэнций,каждая коника которого обладает шестью фокальными точками.Указаны аналогии с конгруэнциями коник в трехмерном проективном пространстве.

Отнесем четырехмерное проективное пространство P_4 к проективному реперу $R=\{A_I\}$ ($I,J,K = \overline{1,5}$). Деривационные формулы репера R и уравнения структуры проективного пространства имеют обычный вид:

$$dA_I = \omega_I^J A_J , \qquad D\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J .$$

Рассмотрим в этом пространстве псевдоконгруэнцию (двупараметрическое семейство) коник C . Поместим вершины A_α репера R в двумерной плоскости коники C ,а вершины A_a -вне этой плоскости. Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3 \ ; \quad a,b = 4,5; \quad i,j,k = 1,2 .$$

Тогда система уравнений,определяющая конику C ,запишется в виде

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0 . \qquad (I)$$

Из требований относительной инвариантности коники C получаем, что структурными [1] формами многообразия коник в P_4 будут являться [2] формы ω_α^a, $\theta_{\alpha\beta}$ ($\theta_{\alpha\beta} = \theta_{\beta\alpha}$),где

$$\theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma - a_{\beta\gamma}\,\omega_\alpha^\gamma + \tfrac{2}{3}\, a_{\alpha\beta}\,\omega_\gamma^\gamma . \qquad (2)$$

Зададим псевдоконгруэнцию коник C с помощью уравнений Пфаффа

$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\,\tau^i , \qquad \omega_\alpha^a = \Lambda_{\alpha i}^a\,\tau^i , \qquad (3)$$

где τ^i - параметрические формы,удовлетворяющие структурным уравнениям бесконечной аналитической группы [3]

$$D\tau^i = \tau^j \wedge \tau_j^i ,$$
$$D\tau_j^i = \tau_j^k \wedge \tau_k^i + \tau^k \wedge \tau_{jk}^i ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Рассмотрим множество точек коники C псевдоконгруэнции, которые также принадлежат смежной конике, т.е. фокальное многообразие коники. Это многообразие будет определяться системой уравнений

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, & x^a = 0, \\ d(a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) = 0, & dx^a = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Система уравнений (4) приводится к виду

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, & x^a = 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta i} x^\alpha x^\beta \tau^i = 0, & \Lambda^a_{\alpha i} x^\alpha \tau^i = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим частный класс псевдоконгруэнций коник C, выделяемый равенствами

$$\omega_1^4 = \lambda \omega_1^5, \quad \omega_2^4 = \lambda \omega_2^5, \quad \omega_3^4 = \lambda \omega_3^5, \tag{6}$$

где λ - отличная от нуля величина. Назовем такой класс псевдоконгруэнциями C_0. В этом случае из системы (5) можно исключить параметрические формы τ^i и преобразовать систему (5) к виду

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, & x^a = 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta[i} \Lambda_{|\gamma|j]} x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, & (i \neq j). \end{cases} \tag{7}$$

Анализируя систему алгебраических уравнений (7), приходим к выводу, что она определяет в четырехмерном проективном пространстве многообразие шестого порядка нулевой размерности [4]. Таким образом, имеет место

П р е д л о ж е н и е. Каждая коника C псевдоконгруэнции C_0 в четырехмерном проективном пространстве обладает шестью фокальными точками.

Охарактеризуем геометрически систему равенств (6). Имеем:

$$d[A_1, A_2, A_3] = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)[A_1, A_2, A_3] +$$

$$+ \omega_1^5 [A_2, A_3, \lambda A_4 + A_5] + \omega_2^5 [A_1, A_3, \lambda A_4 + A_5] + \omega_3^5 [A_1, A_2, \lambda A_4 + A_5]. \tag{8}$$

Равенство (8) означает, что грассманово многообразие плоскостей коник C в данном случае имеет размерность 3. Следовательно, псевдоконгруэнция C_0 в P_4 является аналогом конгруэнции коник в трехмерном проективном пространстве, каждая коника которой обладает шестью фокальными точками.

Последнее есть известный факт проективно-дифференциальной геометрии (см., например, [5]).

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр. геометр.семинара / ВИНИТИ.М., 1971.Т.3.С.29-48.

2. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях многомерных квадрик в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр. / Калинингр.ун-т.Калининград, 1977.Вып.8.С.126-134.

3. О с т и а н у Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве // Тр.геом. семинара / ВИНИТИ.М., 1969.Т.2.С.247-262.

4. Х о д ж В. и П и д о Д. Методы алгебраической геометрии. М., 1954. Т.2.

5. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве: Учеб. пособие/Калинингр.ун-т.Калининград, 1989.72с.