УДК 514.75

О. О. Белова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
olgaobelova@mail.ru

Индуцирование аналога связности Нейфельда пространства центрированных плоскостей

В n-мерном проективном пространстве рассмотрено пространство центрированных плоскостей. Над ним возникает некоторое главное расслоение. В этом расслоении задается аналог связности Нейфельда. Доказано, что аналог сильной нормализации Нордена индуцирует данную связность.

Ключевые слова: проективное пространство, пространство центрированных плоскостей, главное расслоение, аналог сильной нормализации Нордена, связность Нейфельда.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, ... = \overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^I, ω_I^J, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы *GP(n)* (см.: [1]):

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \;\; D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \end{gathered} \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим пространство Π [2] центрированных плоскостей L_m^*. Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$ ($a,\ldots=\overline{1, m}$; $\alpha,\ldots=\overline{m+1, n}$), помещая вершину A в центр m-мерной плоскости, а вершины A_a — на центрированную плоскость L_m^*. Из формул (1) следует, что для пространства Π формы ω^a, ω^α, ω_a^α являются базисными.

Базисные формы удовлетворяют вытекающим из (2) структурным уравнениям

$$\begin{aligned} D\omega^\alpha &= \omega^a \wedge \omega_a^\alpha + \omega^\beta \wedge \Omega_\beta^\alpha, \\ D\omega^a &= \omega^b \wedge \Omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \Omega_\alpha^a, \\ D\omega_a^\alpha &= \omega_b^\beta \wedge \Omega_{\beta a}^{\alpha b} + \omega^\alpha \wedge \Omega_a, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} &\Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha,\ \Omega_b^a = \omega_b^a,\ \Omega_\alpha^a = \omega_\alpha^a, \\ &\Omega_{\beta a}^{\alpha b} = \delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b,\ \Omega_a = -\omega_a. \end{aligned} \tag{4}$$

Находим внешние дифференциалы от форм (4):

$$\begin{aligned} D\Omega_\beta^\alpha &= \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^\alpha + \omega^a \wedge \Omega_{\beta a}^\alpha - \omega_a^\alpha \wedge \Omega_\beta^a, \\ D\Omega_b^a &= \Omega_b^c \wedge \Omega_c^a + \omega^\alpha \wedge \Omega_{b\alpha}^a + \omega^c \wedge \Omega_{bc}^a + \omega_b^\alpha \wedge \Omega_\alpha^a, \\ D\Omega_\alpha^a &= -\Omega_\beta^b \wedge \Omega_{\alpha b}^{\beta a} + \omega^a \wedge \Omega_\alpha, \\ D\Omega_{\beta a}^{\alpha b} &= \Omega_{\beta c}^{\gamma b} \wedge \Omega_{\gamma a}^{\alpha c} + \omega^\alpha \wedge \Omega_{a\beta}^b - \omega^b \wedge \Omega_{\beta a}^\alpha + \omega_c^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma a}^{\alpha bc}, \\ D\Omega_a &= \Omega_a^b \wedge \Omega_b + \omega_a^\alpha \wedge \Omega_\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\Omega_{\beta\gamma}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha \omega_\gamma - \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta,\ \Omega_{\beta a}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \Omega_a,$$

$$\Omega_{bc}^a = -\delta_b^a \omega_c - \delta_c^a \omega_b,\ \Omega_{b\alpha}^a = -\delta_b^a \omega_\alpha,\ \Omega_\alpha = -\omega_\alpha,$$

$$\Omega_{\beta\gamma a}^{\alpha bc} = -\delta_a^b \delta_\gamma^\alpha \Omega_\beta^c - \delta_\beta^\alpha \delta_a^c \Omega_\gamma^b.$$

Над пространством центрированных плоскостей Π возникает главное расслоение L (Π) со структурными уравнениями (3), (5), типовым слоем которого является группа Ли L, действующая в касательном пространстве к Π . В главном расслоении L (Π) зададим аналог связности Нейфельда [3—5] способом Лаптева — Лумисте.

Введем новые формы:

$$\tilde{\Omega}^\alpha_\beta = \Omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma - \Gamma^\alpha_{\beta a}\omega^a - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a ,$$

$$\tilde{\Omega}^a_b = \Omega^a_b - \Gamma^a_{b\alpha}\omega^\alpha - \Gamma^a_{bc}\omega^c - L^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c ,$$

$$\tilde{\Omega}^a_\alpha = \Omega^a_\alpha - \Gamma^a_{\alpha\beta}\omega^\beta - \Gamma^a_{\alpha b}\omega^b - L^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b ,$$

$$\tilde{\Omega}_a = \Omega_a - L_{a\alpha}\omega^\alpha - L_{ab}\omega^b - \Pi^b_{a\alpha}\omega^\alpha_b , \tag{6}$$

$$\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\beta a} = \Omega^{\alpha b}_{\beta a} - L^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^\gamma - L^{\alpha b}_{\beta ac}\omega^c - \Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}\omega^\gamma_c .$$

Находя дифференциалы форм (6), получаем, что связность в главном расслоении L (Π) задается с помощью поля объекта связности $\Gamma = \{ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma},\ \Gamma^\alpha_{\beta a},\ L^{\alpha a}_{\beta\gamma},\ \Gamma^a_{b\alpha},\ \Gamma^a_{bc},\ L^{ac}_{b\alpha},\ \Gamma^a_{\alpha\beta},\ \Gamma^a_{\alpha b},\ L^{ab}_{\alpha\beta},$ $L_{a\alpha},\ L_{ab},\ \Pi^b_{a\alpha},\ L^{\alpha b}_{\beta a\gamma},\ L^{\alpha b}_{\beta ac},\ \Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} \}$ на базе Π уравнениями

$$\Delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta a}\Omega^a_\gamma - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\Omega_a + \Omega^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma a}\omega^a + \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_a ,$$

$$\Delta\Gamma^\alpha_{\beta a} + \delta^\alpha_\beta\Omega_a = \Gamma^\alpha_{\beta a\gamma}\omega^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta ab}\omega^b + \Gamma^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^\gamma_b ,$$

$$\Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\Omega^a_\beta = L^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu + L^{\alpha a}_{\beta\gamma b}\omega^b + L^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^\mu_b ,$$

$$\Delta\Gamma^a_{b\alpha} - \Gamma^a_{bc}\Omega^c_\alpha - L^{ac}_{b\alpha}\Omega_c + \delta^a_b\Omega_\alpha = \Gamma^a_{b\alpha\beta}\omega^\beta + \Gamma^a_{b\alpha c}\omega^c + \Gamma^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\beta_c ,$$

$$\Delta\Gamma^a_{bc} + \delta^a_b\Omega_c + \delta^a_c\Omega_b = \Gamma^a_{bc\alpha}\omega^\alpha + \Gamma^a_{bce}\omega^e + \Gamma^{ae}_{bc\alpha}\omega^\alpha_e ,$$

$$\Delta L^{ac}_{b\alpha} + \delta^c_b\Omega^a_\alpha = L^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^\beta + L^{ac}_{b\alpha e}\omega^e + L^{ace}_{b\alpha\beta}\omega^\beta_e , \tag{7}$$

$$\Delta\Gamma^a_{\alpha\beta} - \Gamma^a_{\alpha b}\Omega^b_\beta - L^{ab}_{\alpha\beta}\Omega_b - \Gamma^a_{b\beta}\Omega^b_\alpha + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Omega^a_\gamma = \Gamma^a_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + \Gamma^a_{\alpha\beta b}\omega^b + \Gamma^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_b ,$$

$$\Delta\Gamma^a_{\alpha b} - \Gamma^a_{cb}\Omega^c_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha b}\Omega^a_\beta + \delta^a_b\Omega_\alpha = \Gamma^a_{\alpha b\beta}\omega^\beta + \Gamma^a_{\alpha bc}\omega^c + \Gamma^{ac}_{\alpha b\beta}\omega^\beta_c ,$$

$$\Delta L^{ab}_{\alpha\beta} + L^{\gamma b}_{\alpha\beta}\Omega^a_\gamma - L^{ab}_{c\beta}\Omega^c_\alpha = L^{ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma + L^{ab}_{\alpha\beta c}\omega^c + L^{abc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_c ,$$

$$\Delta L_{a\alpha} - L_{ab}\Omega^b_\alpha + (\Gamma^b_{a\alpha} - \Pi^b_{a\alpha})\Omega_b = L_{a\alpha\beta}\omega^\beta + L_{a\alpha b}\omega^b + L^b_{a\alpha\beta}\omega^\beta_b ,$$

$$\Delta L_{ab} + \Gamma^c_{ab}\Omega_c = L_{ab\alpha}\omega^\alpha + L_{abc}\omega^c + L^c_{ab\alpha}\omega^\alpha_c ,$$

$$\Delta \Pi^b_{a\alpha} + L^{cb}_{a\alpha}\Omega_c + \delta^b_a\Omega_\alpha = \Pi^b_{a\alpha\beta}\omega^\beta + \Pi^b_{a\alpha c}\omega^c + \Pi^{bc}_{a\alpha\beta}\omega^\beta_c ,$$

$$\Delta L^{\alpha b}_{\beta a\gamma} - L^{\alpha b}_{\beta ac}\Omega^c_\gamma - \Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}\Omega_c + \delta^\alpha_\gamma\delta^b_a\Omega_\beta = L^{\alpha b}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu + L^{\alpha b}_{\beta a\gamma c}\omega^c + L^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu_c ,$$

$$\Delta L^{\alpha b}_{\beta ac} - \delta^\alpha_\beta\delta^b_c\Omega_a = L^{\alpha b}_{\beta ac\gamma}\omega^\gamma + L^{\alpha b}_{\beta ace}\omega^e + L^{\alpha be}_{\beta ac\gamma}\omega^\gamma_e ,$$

$$\Delta \Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\delta^b_a\Omega^c_\beta - \delta^\alpha_\beta\delta^c_a\Omega^b_\gamma = \Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu + \Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma e}\omega^e + \Pi^{\alpha bce}_{\beta a\gamma\mu}\omega^\mu_e .$$

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [6] данного многообразия полями следующих геометрических образов: (*n-m-1*)-плоскостью P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m, и (*m-1*)-плоскостью P_{m-1}, принадлежащей плоскости L^*_m и не проходящей через ее центр. Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость P_{m-1} — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$. Находя дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей и требуя относительную инвариантность этих плоскостей, получим

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \Omega^a_\alpha \equiv 0,\ \Delta\lambda_\alpha - \lambda^a_\alpha\Omega_a - \omega_\alpha \equiv 0,\ \Delta\lambda_a - \Omega_a \equiv 0. \qquad (8)$$

Аналог сильной нормализации Нордена, задаваемой полем квазитензора $\lambda = \{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_a\}$ на многообразии Π, позволяет охватить компоненты объекта связности Γ:

$$L^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma\lambda^a_\beta,\ \Gamma^\alpha_{\beta a} = -\delta^\alpha_\beta\lambda_a,\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta - \delta^\alpha_\beta\eta_\gamma ,$$

$$L^{ac}_{b\alpha} = \delta^c_b\lambda^a_\alpha,\ \Gamma^a_{bc} = -\delta^a_b\lambda_c - \delta^a_c\lambda_b,\ \Gamma^a_{b\alpha} = -\delta^a_b\eta_\alpha + \lambda^a_\alpha\lambda_b ,$$

$$L^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^b_\alpha\lambda^a_\beta,\ \Gamma^a_{\alpha b} = -\delta^a_b\eta_\alpha,\ \Gamma^a_{\alpha\beta} = -\lambda_b\lambda^b_\alpha\lambda^a_\beta, \qquad (9)$$

$$\Pi^b_{a\alpha} = -\delta^b_a\lambda_\alpha,\ L_{ab} = \lambda_a\lambda_b,\ L_{a\alpha} = -\lambda_a\lambda_b\lambda^b_\alpha ,$$

$$\Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} = -\delta^b_a \delta^\alpha_\gamma \lambda^c_\beta - \delta^\alpha_\beta \delta^c_a \lambda^b_\gamma , \; L^{\alpha b}_{\beta ac} = \delta^\alpha_\beta \delta^b_c \lambda_a ,$$

$$L^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = -\delta^b_a \delta^\alpha_\gamma \lambda_\beta - \delta^\alpha_\beta \lambda_a \lambda^b_\gamma ,$$

где $\eta_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda^a_\alpha \lambda_a$. Функции (9) в силу сравнений (8) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (7). Таким образом, справедлива

Теорема. *Аналог сильной нормализации пространства центрированных плоскостей индуцирует аналог связности Нейфельда в ассоциированном расслоении* L *(П)*.

Список литературы

1. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

2. *Belova O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centred planes // Journal of Mathematical Sciences. Springer New York. 2009. Vol. 162, № 5. P. 605—632.

3. *Нейфельд Э.Г.* Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства // Изв. вузов. Матем. 1976. № 11. С. 48—55.

4. *Норден А.П.* Проективные метрики на грассмановых многообразиях // Там же. 1981. № 11. С. 80—83.

5. *Малахальцев М.А.* О внутренней геометрии связности Нейфельда // Там же. 1986. № 2. С. 67—69.

6. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

O. Belova

Inducing an analog of Neifeld's connection on the space of centred planes

Space *П* of centred *m*-planes is considered in the projective space P_n. Principal fiber bundle is arised above it. Analog of Neifeld's connection is given in this fibering. It is proved that the analog of Norden's normalization of the space of centred planes induces this connection.