ratic elements) $(n \geq 3, m < n)$ is considered, in the assumption, that hyperplanes of quadrics also form *m*-parametrical family, and that the characteristic of a hyperplane is not intersect with its polar subspace relative to Q_{n-2}.

Using computer program of finding of continuations and scopes of fields of geometrical objects on differentiable manifold, tensor and quasitensor fields on V_m are found and geometrical images determined by them are considered. For every $Q_{n-2} \in V_m$ two invariant points are found in P_n which determine on V_m two invariant equipments.

УДК 514.756.2

А. М. Матвеева

(Чувашский государственный педагогический университет)

КОНФОРМНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СФЕРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Дается понятие сферического распределения $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов конформного пространства C_n, и изучаются некоторые вопросы дифференциальной геометрии указанного распределения.

Во всей работе индексы принимают следующие значения:
$K, L = \overline{1, n}$; $i, j, k, s, t = \overline{1, n-1}$; $\bar{i} = \overline{0, n-1}$; $\alpha = 0, n$.

1. В конформном пространстве C_n рассмотрим распределения [2] $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ (n–1)-мерных и одномерных линейных элементов (A_0, L_{n-1}) и (A_0, L_1) соответственно; при этом будем

считать, что $n \geq 3$. Здесь L_{n-1} есть связка гиперсфер $P = \xi^0 A_0 + \xi^i P_i$, натянутых на точку A_0 и гиперсферы P_i; аналогично L_1 есть пучок гиперсфер $Q = \eta^0 A_0 + \eta^n P_n$. Гиперсферы P_i, P_n имеют следующие разложения:

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0, \; P_n = A_n + x_n^0 A_0 . \tag{1}$$

Известно [2], что распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ имеют соответственно следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \; \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega_0^K . \tag{2}$$

Обращение в нуль тензора $\Lambda_{[ij]}^n$ есть условие голономности распределения $\mathcal{M}$: $(n-1)$-мерные линейные элементы L_{n-1} распределения огибаются гиперповерхностями V_{n-1} однопараметрического семейства непересекающихся гиперповерхностей. В силу равенства $\Lambda_{[nn]}^i = 0$ распределение $\mathcal{H}$ всегда является голономным.

Потребуем, чтобы в каждом центре A_0 текущие элементы L_{n-1} и L_1 распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ были ортогональны, т. е. $(P_i P_n) \equiv (A_i A_n) = g_{in} = 0$; при выполнении последних соотношений распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ называются взаимно ортогональными [2].

Между функциями Λ_{iK}^n и Λ_{nK}^i имеют место следующие зависимости:

$$g_{ij} \Lambda_{nK}^j + g_{nn} \Lambda_{iK}^n = 0 .$$

Задание полей функций x_i^0, x_n^0, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &dx_i^0 + x_i^0 \omega_0^0 - x_j^0 \omega_i^j + \omega_i^0 = x_{iK}^0 \omega_0^K, \quad (a) \\ &dx_n^0 + x_n^0 (\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = x_{nK}^0 \omega_0^K, \quad (б) \end{aligned} \tag{3}$$

равносильно полному оснащению [5] обоих ортогональных распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$. Если в (3) выполняется лишь одна из групп уравнений — (а) или (б), — то говорят, что задано частичное оснащение распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$: поле окружностей $[P_i]$ задает нормальное оснащение распределения $\mathcal{M}$, а поле гиперсфер P_n — его касательное оснащение.

В силу этого по отношению к распределению $\mathcal{M}$ поле P_n называется [2] полем касательных гиперсфер, а поле $[P_i]$ — полем нормальных окружностей.

2. Возьмем систему форм Пфаффа $\{\omega_0^K, \theta_i^j\}$, где

$$\begin{cases} \theta_0^j = \omega_0^j, \\ \theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j\left(\omega_0^0 - x_K^0\omega_0^K\right) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j; \end{cases} \tag{4}$$

эта система удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [1]:

$$\begin{cases} D\omega_0^K = \omega_0^L \wedge \left(\omega_L^K - \delta_L^K\omega_0^0\right), \\ D\theta_0^j = \theta_0^k \wedge \theta_k^j + \dfrac{1}{2}r_{0KL}^j\omega_0^K \wedge \omega_0^L, \\ D\theta_i^j = \theta_i^k \wedge \theta_k^j + \dfrac{1}{2}r_{iKL}^j\omega_0^K \wedge \omega_0^L. \end{cases} \tag{5}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *При полном оснащении распределения $\mathcal{M}$, погруженного в конформное пространство C_n, на подмногообразии $\mathcal{M}$ индуцируется пространство аффинной связности $A_{n,n-1}$, базой которого является пространство C_n и слоевыми формами — формы (4), причем каждая из систем функций r_{0KL}^j, r_{iKL}^j образует соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства $A_{n,n-1}$.*

Компоненты тензора кручения пространства $A_{n,n-1}$ имеют строения:

$$r^j_{0st} = 0, \quad r^j_{0sn} = -\left(\Lambda^j_{ns} + x^0_n \delta^j_s\right), \quad r^j_{0nn} = 0. \tag{6}$$

Следовательно, имеет место следующее предложение:

Теорема 2. *Если пространство аффинной связности* $A_{n,n-1}$, *индуцируемое на вполне оснащенном распределении* $\mathcal{M}$, *имеет нулевое кручение, то исходное подмногообразие* $\mathcal{M}$ *является голономным, причем поле касательных гиперсфер* P_n *внутренним образом определяется в первой дифференциальной окрестности охватом* $x^0_n \equiv \Lambda^0_n \overset{def}{=} -\dfrac{1}{n-1}\Lambda^j_{nj}$.

3. Найдем условие неподвижности касательной гиперсферы P_n (см. (1)) при смещении вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$ [2]:

$$l_{\mathcal{M}} : \omega^n_0 = 0, \omega^i_0 = l^i \theta. \tag{7}$$

Продифференцировав второе выражение из (1), с использованием уравнений (3, б) получим:

$$dP_n = P_n \omega^n_n + [(\Lambda^i_{nk} + \delta^i_k x^0_n) A_i + x^0_{nk} A_0] \omega^k_0 \pmod{l}. \tag{8}$$

Из последних уравнений следует условие неподвижности касательной гиперсферы P_n при смещении вдоль кривых $l_{\mathcal{M}}$:

$$\tilde{\Lambda}^i_{nk}(x) \overset{def}{=} \Lambda^i_{nk} + \delta^i_k x^0_n = 0, \tag{9}$$

$$x^0_{nk} = 0. \tag{10}$$

Можно доказать, что соотношения (9), (10) равносильны между собой.

Таким образом, *для того чтобы касательная гиперсфера* P_n *была неподвижной при смещении вдоль кривых* $l_{\mathcal{M}}$, *необходимо и достаточно выполнение одной из групп соотношений (9) или (10)*.

Если выполнена одна из групп соотношений (9) или (10), то исходное распределение $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов назовем *сферическим*.

Геометрически выполнение этих соотношений означает, что сферическое распределение является голономным и расслаивается на однопараметрическое семейство непересекающихся гиперсфер P_n, которые являются неподвижными при смещении вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$, и в каждом центре $A_0 \in P_n$ гиперплоскостные элементы L_{n-1} распределения огибаются гиперсферами P_n.

В силу (6) и (9) справедлива

Теорема 3. *При полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов конформного пространства C_n пространство аффинной связности $A_{n,n-1}$ имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда исходное распределение $\mathcal{M}$ является сферическим.*

4. Пусть распределение $\mathcal{M}$ конформного пространства C_n вполне оснащено полями квазитензоров x_i^0, x_n^0.

Рассмотрим систему форм $\{\overset{0}{\Theta}{}_n^\alpha\} = \{\overset{0}{\Theta}{}_n^0, \overset{0}{\Theta}{}_n^n\}$, где

$$\begin{cases} \overset{0}{\Theta}{}_n^0 = \omega_n^0 - x_i^0 \omega_n^i + \dfrac{1}{2} g_{nn} g^{ks} x_k^0 x_s^0 \omega_0^n + \dfrac{1}{2}(x_n^0)^2 \omega_0^n, \\ \overset{0}{\Theta}{}_n^n = \omega_n^n - \omega_0^0 + x_i^0 \omega_0^i + x_n^0 \omega_0^n. \end{cases} \tag{11}$$

Эта система форм удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [1]:

$$\begin{cases} D\overset{0}{\Theta}{}_n^0 = \overset{0}{\Theta}{}_n^n \wedge \overset{0}{\Theta}{}_n^0 + \dfrac{1}{2} \overset{0}{R}{}_{nKL}^{\;\;0} \omega_0^K \wedge \omega_0^L, \\ D\overset{0}{\Theta}{}_n^n = \dfrac{1}{2} \overset{0}{R}{}_{nKL}^{\;\;n} \omega_0^K \wedge \omega_0^L. \end{cases} \tag{12}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *На вполне оснащенном полями квазитензоров x_i^0, x_n^0 распределении $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов конформного пространства C_n в расслоении окружностей $[P_i]$*

индуцируется нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ [4], *определяемая системой форм (11).*

В структурных уравнениях (12) компоненты тензора кривизны-кручения $\overset{0}{R}{}^{\alpha}_{nKL}$ соответствующего пространства нормальной связности имеют следующие строения:

$$\overset{0}{R}{}^{0}_{nij} = \left((x^0_n)^2 + g_{nn} g^{st} x^0_s x^0_t\right)\Lambda^n_{[ij]} + 2(\Lambda^k_{n[i} x^0_{|k|j]} - x^0_t \Lambda^t_{n[i} x^0_{j]}),$$

$$\overset{0}{R}{}^{0}_{nin} = x^0_n x^0_{ni} - 2x^0_{j[i} \Lambda^j_{|n|n]} - \frac{1}{2} x^0_i (x^0_n)^2 + \frac{1}{2}(x^0_n)^2 \Lambda^n_{in} - x^0_j x^0_n \Lambda^j_{ni} + \tag{13}$$

$$+ x^0_i x^0_j \Lambda^j_{nn} + x^0_{ji} x^0_s g_{nn} g^{js} + \frac{1}{2} x^0_k x^0_s g_{nn} g^{ks} \Lambda^n_{in} - \frac{1}{2} x^0_s x^0_t x^0_i g_{nn} g^{st},$$

$$\overset{0}{R}{}^{n}_{nij} = 2\left(x^0_n \Lambda^n_{[ij]} - x^0_{[ij]}\right), \quad \overset{0}{R}{}^{n}_{nin} = x^0_n \Lambda^n_{in} - 2x^0_{[in]} - x^0_j \Lambda^j_{ni}.$$

Дифференциальное уравнение (3, б) с использованием уравнений (2) и соотношений (11) запишется в виде:

$$dx^0_n - x^0_n \overset{0}{\Theta}{}^{n}_{n} + \overset{0}{\Theta}{}^{0}_{n} = (x^0_{ni} - x^0_j \Lambda^j_{ni} - x^0_n x^0_i)\omega^i_0 +$$

$$+ (x^0_{nn} - x^0_j \Lambda^j_{nn} + \frac{1}{2} g_{nn} g^{ks} x^0_k x^0_s - \frac{1}{2}(x^0_n)^2)\omega^n_0. \tag{14}$$

Рассмотрим класс распределений $\mathcal{M}$ конформного пространства C_n, допускающих такое полное оснащение, при котором тензор

$$X^0_{ni} \overset{def}{=} x^0_{ni} - x^0_j \Lambda^j_{ni} - x^0_n x^0_i \tag{15}$$

обращается в нуль:

$$X^0_{ni} \equiv x^0_{ni} - x^0_j \Lambda^j_{ni} - x^0_n x^0_i = 0 \tag{16}$$

вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$.

Учитывая (15) и (7), замкнем уравнение (14) с использованием (12), получим равенства $\overset{0}{R}{}^{0}_{nij} = x^0_n \overset{0}{R}{}^{n}_{nij}$.

Из последних соотношений непосредственно следует

Теорема 5. *Нормальная связность* $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, *индуцируемая полным оснащением распределения* $\mathcal{M}$ *конформного пространства* C_n, *допускающим обращение в нуль тензора* X^0_{ni} *вдоль кривых, принадлежащих распределению* $\mathcal{M}$, *является плоской* [4] ($\overset{0}{R}{}^{\alpha}_{nij} \equiv 0$) *тогда и только тогда, когда она полуплоская* ($\overset{0}{R}{}^{n}_{nij} \equiv 0$).

Заметим, что класс таких распределений $\mathcal{M}$, для которых $X^0_{ni} \equiv 0$, не пуст; например, этому классу принадлежит сферическое распределение $\mathcal{M}$.

5. Полное оснащение распределения $\mathcal{M}$ в конформном пространстве C_n определяет поле оснащающих точек [2]:

$$X_{n+1} = -\frac{1}{2}\left[g^{ij} x^0_i x^0_j + g^{nn} (x^0_n)^2\right] A_0 - g^{ij} x^0_j A_i - g^{nn} x^0_n A_n + A_{n+1}.$$

Образом точки $X_{n+1} \in C_n$ при отображении Дарбу является точка X_{n+1}, лежащая на гиперквадрике Дарбу Q^2_n проективного пространства P_{n+1}: $\mathrm{X}_{n+1} \in Q^2_n \subset \mathrm{P}_{n+1}$.

Дифференциал точки $\mathrm{X}_{n+1} \in Q^2_n$ при смещении вдоль кривых (7) в силу (15) имеет вид:

$$\begin{aligned} d\mathrm{X}_{n+1} = \left(x^0_j \omega^j_0 - \omega^0_0\right) \mathrm{X}_{n+1} + [g^{kj}(x^0_j x^0_i - x^0_{ji})\omega^i_0 - \frac{1}{2} g^{ij} x^0_i x^0_j \omega^k_0 - \\ - g^{nn} x^0_n (\frac{1}{2} x^0_n \omega^k_0 + \omega^k_n)]\mathrm{P}_k - g^{nn} X^0_{nk} \omega^k_0 \mathrm{P}_n \quad (\mathrm{mod}\, l). \end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно, в конформном пространстве C_n имеем второе распределение гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}^*$ с центром в точке X_{n+1}.

Разложение (17) доказывает следующее предложение:

Теорема 6. *При полном оснащении распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ конформного пространства C_n образы текущих элементов гиперплоскостных распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$, пересекаются по нормали второго рода* $[\mathrm{P}_i]$ *тогда и только тогда, когда указанное оснащение допускает обращение в нуль тензора X^0_{nk} (см. (15)).*

В этом заключается геометрический смысл обращения в нуль тензора X^0_{nk}.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

2. *Столяров А. В.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований и его приложения. Чебоксары, 2002.

3. *Чакмазян А. В.* Двойственная нормализация // ДАН Арм. ССР. 1959. Т. 28. №4. С. 151—157.

4. *Чакмазян А. В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография. Ереван, 1990.

5. *Akivis M. A.* Goldberg V. V. Conformal differential geometry and its generalizations. USA, 1996.

A. Matveeva

CONFORMAL DIFFERENTIAL GEOMETRY OF THE SPHERICAL DISTRIBUTION OF HYPERPLANE ELEMENTS

In this work it is given a definition of the spherical distribution $\mathcal{M}$ of hyperplane elements of the conformal space C_n. The purpose of this work is to investigate some questions concerning the differential geometry of this distribution.