Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* Non-symmetric structure of adjoining spaces of a principal bundle // Proceedings of Joint International Scientific Conference «New Geometry of Nature». Kazan, 2003. P. 187—190.
2. *Полякова К. В., Шевченко Ю. И.* Способы Лаптева—Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 114—121.
3. *Номидзу К.* Группы Ли и дифференциальная геометрия / пер. с англ. М., 1960.

K. Polyakova

Analytical and geometrical giving the affine connection

Analytical (by means of forms) and geometrical (by means of horizontal vectors) giving the affine connection are considered. New geometric interpretation of the curvature tensor is given.

УДК 514.76

К. В. Полякова, Ю. И. Шевченко

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы

Описаны два приема задания фундаментально-групповой связности в главном расслоении: способ Лаптева — Лумисте с помощью форм связности и двойственный способ с помощью горизонтальных векторов. Показана универсальность первого способа по сравнению со вторым.

***Ключевые слова*:** фундаментально-групповая связность, формы связности, объект связности, объект кривизны, горизонтальные векторы, геометрическая связность.

Рассмотрим главное расслоение $G_r(M_n)$, базой которого является n-мерное гладкое многообразие M_n, а типовым слоем служит r-членная группа Ли G_r. Структурные уравнения Г. Ф. Лаптева [1] расслоения $G_r(M_n)$ имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \ \ (i,... = \overline{1,n}), \tag{1}$$

$$D\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega_i^\alpha \ \ (\alpha,... = \overline{n+1, n+r}), \tag{2}$$

где D — внешний дифференциал, $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные постоянные группы Ли G_r, удовлетворяющие условиям антисимметрии $C^\alpha_{\beta\gamma} = -C^\alpha_{\gamma\beta}$ и тождествам Якоби

$$C^\alpha_{\beta\gamma}C^\beta_{\delta\varepsilon} + C^\alpha_{\beta\delta}C^\beta_{\varepsilon\gamma} + C^\alpha_{\beta\varepsilon}C^\beta_{\gamma\delta} = 0 .$$

В главном расслоении $G_r(M_n)$ зададим связность способом Лаптева — Лумисте [2; 3]. Преобразуем слоевые формы ω^α с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^i

$$\widetilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma_i^\alpha \omega^i . \tag{3}$$

Используя структурные уравнения (1), (2), дифференцируем формы $\widetilde{\omega}^\alpha$:

$$D\widetilde{\omega}^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \left(d\Gamma_i^\alpha - \Gamma_j^\alpha \omega_i^j + \omega_i^\alpha\right). \tag{4}$$

Преобразуем первое слагаемое, подставляя выражения слоевых форм из обозначения (3):

$$C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma = C^\alpha_{\beta\gamma}\left(\widetilde{\omega}^\beta + \Gamma_i^\beta\omega^i\right)\wedge\left(\widetilde{\omega}^\gamma + \Gamma_j^\gamma\omega^j\right) =$$
$$= C^\alpha_{\beta\gamma}\left(\widetilde{\omega}^\beta \wedge \widetilde{\omega}^\gamma + \Gamma_i^\beta\omega^i \wedge \widetilde{\omega}^\gamma + \widetilde{\omega}^\beta \wedge \Gamma_j^\gamma\omega^j + \Gamma_i^\beta\omega^i \wedge \Gamma_j^\gamma\omega^j\right).$$

Во втором и третьем слагаемых вернемся к исходным обозначениям и раскроем скобки:

$$C^\alpha_{\beta\gamma}\widetilde{\omega}^\beta \wedge \widetilde{\omega}^\gamma + \Gamma_i^\beta\omega^i \wedge \omega^\alpha_\beta - C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma_i^\beta\Gamma_j^\gamma\omega^i \wedge \omega^j ,$$
$$\omega^\alpha_\beta = 2C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma . \tag{5}$$

Подставим результат в формулу (4):

$$D\widetilde{\omega}^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\widetilde{\omega}^{\beta} \wedge \widetilde{\omega}^{\gamma} + \omega^{i} \wedge \left(\Delta\Gamma^{\alpha}_{i} + \omega^{\alpha}_{i}\right) - C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}\omega^{i} \wedge \omega^{j}\,, \qquad (6)$$

где тензорный дифференциальный оператор действует обычным образом:

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{i} = d\Gamma^{\alpha}_{i} - \Gamma^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{i} + \Gamma^{\beta}_{i}\omega^{\alpha}_{\beta}\,. \qquad (7)$$

Пользуясь теоремой Картана — Лаптева [2], получим дифференциальные уравнения объекта связности

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{i} + \omega^{\alpha}_{i} = \Gamma^{\alpha}_{ij}\omega^{j}\,. \qquad (8)$$

Подставим эти уравнения в структурные уравнения (6):

$$D\widetilde{\omega}^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}\widetilde{\omega}^{\beta} \wedge \widetilde{\omega}^{\gamma} + R^{\alpha}_{ij}\omega^{i} \wedge \omega^{j}\,, \qquad (9)$$

где компоненты объекта кривизны фундаментально-групповой связности имеют вид

$$R^{\alpha}_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{[ij]} - C^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{i}\Gamma^{\gamma}_{j}\,. \qquad (10)$$

Утверждение 1. *Фундаментально-групповая связность в главном расслоении $G_r(M_n)$ задается полем объекта связности Γ^{α}_{i} на базе M_n, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (8). Объект фундаментально-групповой связности Γ^{α}_{i} определяет формы связности $\widetilde{\omega}^{\alpha}$ (3) со структурными уравнениями (9), в которые входят компоненты объекта кривизны связности R^{α}_{ij}, выражающиеся по формуле (10).*

Расслоение $G_r(M_n)$ есть специальное гладкое $(n+r)$-мерное многообразие, поэтому дифференциал dA точки $A \in G_r(M_n)$, описывающий ее смещение (см., напр., [4; 5]), определяется формулой

$$dA = \omega^{i}e_{i} + \omega^{\alpha}e_{\alpha}\,, \qquad (11)$$

где e_i, e_α — векторы подвижного репера 1-го порядка, на которые натянуто касательное пространство $T_{n+r} = [e_i, e_\alpha]$ к расслоению $G_r(M_n)$ в точке A. Из структурных уравнений (1) видно, что система уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируема. Она фиксирует точку базы M_n, иначе говоря, слой расслоения $G_r(M_n)$, проходящий через точку A. Формула (11) упрощается:

$$\partial A = \overline{\omega}^\alpha e_\alpha \;\; (\partial = d\big|_{\omega^i=0},\; \overline{\omega}^\alpha = \omega^\alpha\big|_{\omega^i=0}).$$

Следовательно, касательное пространство T_{n+r} содержит вертикальное пространство $T_r = [e_\alpha]$, касательное к слою в точке A.

Рассмотрим голономный случай [5], когда дифференциал dA полный, т. е. $D(dA) = \overline{0}$. С помощью этого равенства продолжим дифференциальное уравнение (11):

$$de_i - \omega_i^j e_j - \omega_i^\alpha e_\alpha = \omega^j e_{ij} + \omega^\alpha e_{i\alpha}, \tag{12}$$

$$de_\alpha - C_{\alpha\gamma}^\beta \omega^\gamma e_\beta = \omega^i e_{\alpha i} + \omega^\beta e_{\alpha\beta}; \tag{13}$$

$$e_{[ij]} = \overline{0},\; e_{[i\alpha]} = \overline{0},\; e_{[\alpha\beta]} = \overline{0}.$$

Так появляются векторы 2-го порядка (см., напр., [4; 5]), которые вместе с векторами 1-го порядка определяют соприкасающееся пространство

$$T_{\frac{1}{2}(n+r)(n+r+3)} = [e_i, e_\alpha, e_{ij}, e_{i\alpha}, e_{\alpha\beta}].$$

Упростим деривационную формулу (13):

$$de_\alpha - \omega^\beta E_{\alpha\beta} = \omega^i e_{\alpha i},\; E_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma. \tag{14}$$

Предполагая полноту дифференциалов de_α, т. е. $D(de_\alpha) = \overline{0}$, продолжим дифференциальные уравнения (14_1) и запишем результат в виде сравнений по модулю базисных и слоевых форм ω^i, ω^α:

$$de_{\alpha i} \cong -\omega_i^j e_{\alpha j} + \omega_i^\beta E_{\alpha\beta},\; dE_{\alpha\beta} \cong \overline{0}. \tag{15}$$

Рассмотрим геометрическую связность [6; 7] в главном расслоении $G_r(M_n)$. Преобразуем невертикальные векторы e_i с помощью линейных комбинаций вертикальных векторов e_α:

$$E_i = e_i + L_i^\alpha e_\alpha .$$

Дифференцируем эти векторы с помощью деривационных формул (12, 14_1):

$$dE_i = \omega_i^j E_j + (dL_i^\alpha - L_j^\alpha \omega_i^j + \omega_i^\alpha) e_\alpha + \tag{16}$$

$$+\omega^j (e_{ij} + L_i^\alpha e_{\alpha j}) + \omega^\alpha (e_{i\alpha} + L_i^\beta E_{\beta\alpha}) .$$

Совокупность векторов E_i будет инвариантна в каждой точке расслоения $G_r(M_n)$, если задать на нем поля r квазитензоров [2, с. 62]:

$$dL_i^\alpha - L_j^\alpha \omega_i^j + \omega_i^\alpha = L_{ij}^\alpha \omega^j + L_{i\beta}^\alpha \omega^\beta . \tag{17}$$

Подставим эти дифференциальные уравнения в деривационные формулы (16):

$$dE_i = \omega_i^j E_j + \omega^j E_{ij} + \omega^\alpha E_{i\alpha} ; \tag{18}$$

$$E_{ij} = e_{ij} + L_i^\alpha e_{\alpha j} + L_{ij}^\alpha e_\alpha , \; E_{i\alpha} = e_{i\alpha} + L_i^\beta E_{\beta\alpha} + L_{i\alpha}^\beta e_\beta . \tag{19}$$

Из формулы (18) следует

Утверждение 2. *В каждой точке главного расслоения $G_r(M_n)$ инвариантно горизонтальное подпространство $H_n = [E_i]$, дополняющее вертикальное подпространство T_r до касательного пространства T_{n+r}: $T_r \oplus H_n = T_{n+r}$.*

Подставляя формы геометрической связности $\hat{\omega}^\alpha = \omega^\alpha - L_i^\alpha \omega^i$ в уравнения (14_1), получим

$$\nabla e_\alpha = \nabla_i e_\alpha \omega^i ; \tag{20}$$

$$\nabla e_\alpha = de_\alpha - \hat{\omega}^\beta E_{\alpha\beta} , \; \nabla_i e_\alpha = e_{\alpha i} + L_i^\beta E_{\alpha\beta} . \tag{21}$$

Учитывая соотношения (15, 17), найдем

$$d\nabla_i e_\alpha \cong \omega_i^j \nabla_j e_\alpha .$$

Следовательно, ковариантные производные $\nabla_i e_\alpha$ образуют r тензоров, поэтому равенства $\nabla_i e_\alpha = 0$ инвариантны. Согласно уравнениям (20) и обозначениям (21) они дают частный случай

$$e_{\alpha i} = -L_i^{\beta} E_{\alpha\beta}\,,\ de_{\alpha} = \hat{\omega}^{\beta} E_{\alpha\beta}\,. \tag{22}$$

Замечание. Равенства (22_1) могут выполняться лишь для специального расслоения $G_r(M_n)$.

Удалим векторы $E_{\alpha\beta}$ (14_2) из формулы (16):

$$dE_i = \omega_i^j E_j + (dL_i^{\alpha} - L_j^{\alpha}\omega_i^j + L_i^{\beta} C_{\beta\gamma}^{\alpha}\omega^{\gamma} + \omega_i^{\alpha})e_{\alpha} +$$
$$+\omega^j(e_{ij} + L_i^{\alpha} e_{\alpha j}) + \omega^{\alpha}(e_{i\alpha} + L_i^{\beta} e_{\beta\alpha})\,.$$

Используем равенства (22_1) и условие симметрии $e_{\alpha i} = e_{i\alpha}$:

$$dE_i = \omega_i^j E_j + (dL_i^{\alpha} - L_j^{\alpha}\omega_i^j - 2L_i^{\gamma} C_{\beta\gamma}^{\alpha}\omega^{\beta} + \omega_i^{\alpha})e_{\alpha} +$$
$$+\omega^j(e_{ij} + L_i^{\alpha} e_{\alpha j})\,. \tag{23}$$

Если потребовать инвариантность совокупности горизонтальных векторов E_i не только при фиксации точки $A \in G_r(M_n)$, а уже при фиксации слоя, проходящего через точку *A*, то уравнения (17) и (23) дадут условие [2, с. 62]:

$$L_{i\beta}^{\alpha} = 2C_{\beta\gamma}^{\alpha} L_i^{\gamma}\,, \tag{24}$$

которое получается также из предположения $E_{i\alpha} = \nabla_i e_{\alpha}$.

Поскольку дифференциальные уравнения (17) при условии (24) совпадают с уравнениями (8), в которых используются обозначения (5), (7), то справедливо

Утверждение 3. *Объект геометрической связности L_i^{α} при условии (24) становится объектом фундаментально-групповой связности Γ_i^{α}.*

Таким образом, справедлива

Теорема. *Фундаментально-групповая связность в голономном главном расслоении $G_r(M_n)$ задается с помощью горизонтальных векторов $E_i = e_i + L_i^{\alpha} e_{\alpha}$, если их совокупность инвариантна при фиксации слоя, проходящего через точку A, к которой приложены векторы, и выполняется следующее условие в одной из трех эквивалентных форм:*

— вертикальные векторы e_α *ковариантно постоянны относительно геометрической связности, определенной объектом* L_i^α *;*

— имеется зависимость между векторами 2-го порядка, т. е. векторы $e_{\alpha i}$ *выражаются через векторы* $E_{\alpha\beta}$ *по формуле* (22$_1$);

— при параллельном перенесении вертикальных векторов в геометрической связности их смещения (22$_2$) *принадлежат вертикальному соприкасающемуся пространству* $T_{\frac{1}{2}r(r+3)} = [\, e_\alpha, E_{\alpha\beta}\,] = [\, e_\alpha, E_{(\alpha\beta)}\,]$, *точнее, каждый вектор* e_α *смещается в (r+1)-мерном подпространстве* $[\, e_\alpha, E_{\alpha\beta}\,]_{\alpha=const}$.

Отметим, что при условиях (24), когда $L_i^\alpha = \Gamma_i^\alpha$, из выражений (19) базисных E_{ij} и слоевых $E_{i\alpha}$ пфаффовых производных векторов E_i имеем

$$E_{[ij]} = R_{ij}^\alpha e_\alpha \,, \; E_{i\alpha} = 0 \,. \tag{25}$$

Равенства (25$_1$) дают новую геометрическую интерпретацию объекта кривизны R_{ij}^α , а равенства (25$_2$) означают задание поля векторов E_i на базе M_n .

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2. С. 161—178.
2. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.
3. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 179—187.
4. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1997.
5. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1997.

6. *Близникас В. И.* Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов // Литовский мат. сб. 1966. Т. 6, №2. С. 141—209.

7. *Шевченко Ю. И.* Связность в составном многообразии и ее продолжение // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1992. Вып. 23. С. 110—118.

K. Polyakova, Yu. Shevchenko

Laptev — Lumiste′s methods of giving connection and geometrical vectors

Two modes for the giving fundamental-group connection in a principal bundle are described: Laptev — Lumiste′s method by means of connection forms and dual method by means of horizontal vectors. Universality of the first method in comparison with the second one is shown.

УДК 514.75

Ю. И. Попов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

Нормальные связности касательно r-оснащенной гиперполосы $H_m(\Lambda)$ аффинного пространства

Дано задание нормальных центроаффинных связностей гиперполосы $H_m(\Lambda)$ и ее Λ-, L-подрасслоений, а также внутренней (касательной) аффинной связности гиперполосы $H_m(\Lambda)$. Построены тензоры кривизны этих связностей.

Ключевые слова: гиперполоса, связность, расслоение, тензор кривизны.

Схема использования индексов:

$$I,J,K=\overline{1,n};\ i,j,k,l=\overline{1,m};\ p,q,t=\overline{1,r};\ a,b,c=\overline{r+1,m};$$

$$\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\ \hat{\alpha},\hat{\beta}=\overline{m+1,n};\ A,B=\{a;\alpha\};$$

$$P,Q=\{p,\alpha\};\ \hat{A},\hat{B}=\{a,\alpha,n\};\ \hat{P},\hat{Q}=\{p,\alpha,n\};\ s=m-r.$$