The plane surface as manifold of plane is considered in the projective space and Bortolotti's equipment is made. Bortolotti's equipment induces in associated bundle the bunches of connections of the 1-st and 2-nd types. It is shown, that fixing of Bortolotti's plane is their coinsidence conditions. Parallel displacements in the bunches of connections of both types are described. They are freely and connectly degenerate.

УДК 514.76

Л.В. Степанова, М.Б. Банару

*(Военный университет ВПВО ВС РФ,
Смоленский гуманитарный университет)*

О КВАЗИСАСАКИЕВЫХ И КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Найден критерий того, что на гиперповерхности специального эрмитова многообразия индуцируется квазисасакиева структура. Доказано, что не существует вполне омбилической и отличной от вполне геодезической гиперповерхности у 6-мерного специального эрмитова подмногообразия алгебры Кэли.

Понятие квазисасакиевой структуры было введено Блэром [1]. Квазисасакиевы структуры – одни из наиболее интересных объектов изучения контактной геометрии, поскольку они являются элегантным обобщением, с одной стороны, сасакиевых, с другой – косимплектических структур, изучению которых посвящено огромное количество публикаций, характеризующих эти структуры как с точки зрения дифференциальной геометрии, так и точки зрения математической физики. Не вдаваясь в подробности столь обширной тематики, особо выделим классические работы [2], [3], [4], [5]. Однако, несмотря на то, что квазисасакиевыми структурами занимались многие математики, до настоящего времени известно сравнительно небольшое число примеров квазисасакиевых структур, отличных от сасакиевых и косимплектических.

В настоящей статье изучены квазисасакиевы структуры, индуцированные на гиперповерхностях специальных эрмитовых многообразий. Найдено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого почти контактная метрическая структура на гиперповерхности специального эрмитова многообразия является квазисасакиевой. Доказано, что всякая вполне омбилическая косимплектическая гиперповерхность специального эрмитова $M^6 \subset O$ является вполне геодезическим подмногообразием.

Пусть { $M^{2n}, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle$}– почти эрмитово подмногообразие, J – оператор почти комплексной структуры, g – риманова метрика. При этом должны выполняться условия:

$$J^2 = -id,\ \langle JX, JX \rangle = \langle X, Y \rangle,\ X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ – модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на M^{2n}.

Через ∇ обозначим риманову связность g. Все рассматриваемые многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса

Рассмотрим один из классов Грея-Хервеллы [6] почти эрмитовых многообразий – класс W_3, или класс специальных эрмитовых (SH-) многообразий. Такие многообразия характеризуются тождеством [7]

$$\nabla_X(J)Y - \nabla_{JX}(J)(JY) = \delta F, \tag{1}$$

где $F = \langle X, JY \rangle$ – фундаментальная (или келерова) форма многообразия, δ – оператор кодифференцирования.

В работе [8] установлено, что (1) равносильно следующему условию, налагаемому на тензоры Кириченко почти эрмитова многообразия:

$$B^{\alpha\beta\gamma} = B_{\alpha\beta\gamma} = 0,\ B^{\alpha\beta}{}_{\beta} = B_{\alpha\beta}{}^{\beta} = 0\ (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n).$$

Напомним [7], что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$ тензорных полей на N, где ξ – вектороное поле, η – ковекторное поле, Φ – поле тензора типа (1,1), g – риманова метрика. При этом

$$\eta(\xi) = 1,\ \Phi(\xi) = 0,\ \eta \circ \Phi = 0,\ \Phi^2 = -\mathrm{id} + \eta \otimes \xi$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\{Y),\ X, Y \in \aleph(N).$$

Пусть $N_\Phi(X, Y) = \Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]$ – тензор Нейенхейса оператора Φ. Почти контактная метрическая структура называется квазисасакиевой, если ее фундаментальная форма $\Omega(X,Y) = \langle X \Omega Y)$ замкнута, и выполняется условие $N_\Phi + \frac{1}{2} d\eta \otimes \xi = 0$; сасакиевой, если $d\eta = \Omega$ и косимплектической, если $\nabla \eta = .\nabla \Phi = 0$.

Пусть M^{2n} – специальное эрмитово многообразие, N^{2n-1} – его ориентируемая гиперповерхность, σ – вторая квадратичная форма погружения N^{2n-1} в M^{2n}. Известно [10], что первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности эрмитова многообразия имеет вид:

$$d\omega^a = \omega^a{}_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + \left(\sqrt{2}B^{an}{}_b + i\sigma^a{}_b\right)\omega^b \wedge \omega +$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_n + i\sigma^{ab}\right)\omega_b \wedge \omega,$$
$$d\omega_a = -\omega^b{}_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + \left(\sqrt{2}B_{an}{}^b - i\sigma^b{}_a\right)\omega_b \wedge \omega +$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{ab}{}^n - i\sigma_{ab}\right)\omega^b \wedge \omega, \ (2)$$
$$d\omega = \left(\sqrt{2}B^{na}{}_b - \sqrt{2}B_{nb}{}^a - 2i\sigma^a{}_b\right)\omega^b \wedge \omega_a + \left(B_{nb}{}^n + i\sigma_{nb}\right)\omega \wedge \omega^b +$$
$$+\left(B^{nb}{}_n - i\sigma^b{}_n\right)\omega \wedge \omega_b \ \ (a,b,c = 1,\ldots,n-1).$$

Пусть на гиперповерхности $N^{2n\text{-}1}$ специального эрмитова многообразия M^{2n} индуцируется квазисасакиева структура. Тогда первая группа ее структурных уравнений Картана выглядит так [7]:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^a_b\omega \wedge \omega^b, d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B^b_a\omega \wedge \omega_b, d\omega = 2B^a_b\omega^b \wedge \omega_a \ (3)$$

Сопоставляя (2) и (3), получаем необходимые и достаточные условия, при выполнении которых на гиперповерхности специального эрмитова многообразия индуцируется квазисасакиева структура:

$$\sigma_{ab}=0,\ \sigma^a_b = -i\sqrt{2}B_{nb}{}^a + iB^a_b,\ \sigma^b_n = iB^{nb}{}_n,\ B^{ab}_c=0,\ B^{ab}_n=0. \qquad (4)$$

и формулы комплексного сопряжения (ф.к.с.), запись которых мы опускаем. Записав полученные условия в безындексной форме, получаем следующий результат:

Теорема 1. *На гиперповерхности N специального эрмитова многообразия индуцируется квазисасакиева структура тогда и только тогда, когда:*

1. $\sigma(X,Y) = h\eta(X)\eta(Y) + B(X,\Phi Y) + \frac{1}{2}\left(\eta(X)\eta\left(\nabla_\xi\left(\Phi^2 Y\right)\right) + \eta(Y)\eta\left(\nabla_\xi(J)\left(\Phi^2 X\right)\right)\right) +$
$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\eta\left(-\nabla_{\Phi^2 Y}(J)(\Phi^2 X) - \nabla_{\Phi Y}(J)(\Phi X)\right),$
2. $\Phi\left(\nabla_{\Phi X}(J)(\Phi Y) + \nabla_{\Phi^2 X}(J)(\Phi^2 Y)\right) = 0,$
3. $\Phi\left(\nabla_\xi(J)(\Phi^2 X)\right) = 0,$
4. $\eta\left(\nabla_{\Phi^2 Y}(J)(\Phi^2 X) + \nabla_{\Phi Y}(J)(\Phi X)\right) = \eta\left(\nabla_{\Phi^2 X}(J)(\Phi^2 Y) + \nabla_{\Phi X}(J)(\Phi Y)\right),$

где $X,Y \in \aleph(N)$, $h = \sigma(\xi,\xi)$.

Важнейшими примерами специальных эрмитовых структур являются структуры, индуцируемые на 6-мерных ориентируемых подмногообразиях алгебры октав. Пусть $\mathrm{O} \equiv R^8$ – алгебра Кэли. Как известно [10], в ней определены два антиизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,Y,Z) = -X(\overline{Y}Z) + <X,Y> Z + <Y,Z> X - <Z,X> Y;$$
$$P_2(X,Y,Z) = -(X\overline{Y})Z + <X,Y> Z + <Y,Z> X - <Z,X> Y.$$

Здесь $X,Y,Z \in \mathrm{O}$, $<\cdot,\cdot>$ – скалярное произведение в O, $X \to \overline{X}$ – оператор сопряжения в O. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных.

Если $M^6 \subset \mathrm{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{M^6, J_\alpha, <\cdot,\cdot>\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2),\ \alpha = 1,2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ – произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [10].

Напомним [11], что точка $p \in M^6$ называется общей, если

$$e_0 \notin T_p(M^6) \subseteq L(e_0)^\perp,$$

где e_0 – единица алгебры Кэли, $L(e_0)^\perp$ – ее ортогональное дополнение.

Подмногообразие, состоящее только из общих точек, называется подмногообразием общего типа [11]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathrm{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

В [12] получены структурные уравнения Картана 6-мерных специальных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли:

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta{}^\alpha \wedge \omega^\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta\mu} D_{\mu\gamma}\omega^\gamma \wedge \omega_\beta,$$
$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha{}^\beta \wedge \omega_\beta + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{\alpha\beta\mu} D^{\mu\gamma}\omega_\gamma \wedge \omega^\beta ?.$$

Здесь $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{123}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma}$ – компоненты тензора Кронекера порядка три [13];

$$D_{\mu\gamma} = \pm T_{\mu\gamma}{}^8 + T_{\mu\gamma}{}^7,\ D^{\mu\gamma} = D_{\hat{\mu}\hat{\gamma}} = \pm T_{\hat{\mu}\hat{\gamma}}{}^8 - T_{\hat{\mu}\hat{\gamma}}{}^7,$$

где $\{T^\varphi_{kj}\}$ – система функций на пространстве расслоения комплексных реперов. Эти функции являются компонентами тензора эйлеровой кривизны

[14], или, по Грею [15], конфигурационного тензора. При этом φ=7,8; α,β,γ,μ=1,2,3; $\hat{\alpha}=\alpha+3$; k,j=1,2,3,4,5,6..

Пусть N^5 – ориентируемая гиперповерхность специального эрмитова $M^6\subset$O, σ – вторая квадратичная форма ее погружения в M^6. Принимая во внимание, что первая группа структурных уравнений Картана косимплектической структуры должна иметь следующий вид [7]:

$$d\omega^a=\omega^a_b\wedge\omega^b,\ d\omega_a=-\omega^b_a\wedge\omega_b,\ d\omega=0\ (a,b=1,2),$$

из (3) и (4) получаем условия, одновременное выполнение которых является критерием косимплектичности гиперповерхности N^5:

$$\begin{aligned}&1.\ B^{ab}{}_c=0,\\&2.\ \sqrt{2}B^{a3}{}_b+i\sigma^a_b=0,\\&3.\ -\frac{1}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_3+i\sigma^{ab}=0,\\&4.\ B^{3a}{}_b-\sqrt{2}B_{3b}{}^a-2i\sigma^a_b=0,\\&5.\ B^{3b}{}_3-i\sigma^b_3=0\end{aligned}\tag{5}$$

и формулы комплексного сопряжения, запись которых мы опустим.

Проанализируем полученные условия. Из $(5)_3$ следует, что $\sigma^{ab}=-\frac{i}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_3$. Проальтернируем это соотношение:

$$0=\sigma^{[ab]}=-\frac{i}{\sqrt{2}}B^{[ab]}{}_3=-\frac{i}{2\sqrt{2}}\left(B^{ab}{}_3-B^{ba}{}_3\right)=-\frac{i}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_3.$$

Следовательно, $B^{ab}{}_3=0$, а, значит, и σ^{ab}=0 $(5)_2$ получаем, что $B^{3a}{}_b=-\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^a_b$. Подставим это значение в $(5)_4$. В итоге окажется $\sigma^a_b=i\sqrt{2}B_{3b}{}^a$.

Теперь воспользуемся выражением для тензоров Кириченко 6-мерных специальных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли [8], [12]:

$$B^{\alpha\beta}{}_\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}D_{\mu\gamma},\ B_{\alpha\beta}{}^\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{\alpha\beta\mu}D^{\mu\gamma}.$$

Из $(5)_1$ можем извлечь:

$$B^{ab}{}_c=0\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ab\gamma}D_{\gamma c}=0\ \Leftrightarrow\ \varepsilon^{ab3}D_{3c}=0\ \Leftrightarrow D_{3c}=0.$$

Точно такие же рассуждения применим к условию $B^{ab}{}_3 = 0$, полученному выше:

$$B^{ab}{}_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ab\gamma}D_{\gamma 3} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^{ab3}D_{33} = 0 \Leftrightarrow D_{33} = 0.$$

Итак, $D_{3c} = D_{33} = 0$, т.е.$D_{3\alpha}$=0.

Из $(5)_5$ получаем: $\sigma_3^b = \sigma_{3\hat{b}} = -iB^{3b}{}_3 = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{3b\gamma}D_{\gamma 3} = 0$.

Следовательно, $\sigma_{ab} = \sigma_{\hat{a}\hat{b}} = \sigma_{3b} = \sigma_{3\hat{b}} = 0$. Вычислим и остальные компоненты второй квадратичной формы σ, используя $(5)_5$:

$$\sigma_{\hat{a}b} = \sigma_b^a = i\sqrt{2}B^{a3}{}_b = i\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{a3\gamma}D_{\gamma b} = i\varepsilon^{a3c}D_{cb}.$$

Тогда:

$$\sigma_{\hat{1}1} = i\varepsilon^{13c}D_{c1} = i\varepsilon^{132}D_{21} = -iD_{12},\ \sigma_{\hat{1}2} = i\varepsilon^{13c}D_{c2} = i\varepsilon^{132}D_{22} = -iD_{22},$$
$$\sigma_{\hat{2}1} = i\varepsilon^{23c}D_{c1} = i\varepsilon^{231}D_{11} = iD_{11},\ \sigma_{\hat{2}2} = i\varepsilon^{23c}D_{c2} = i\varepsilon^{231}D_{12} = iD_{12},$$
$$\sigma_{1\hat{1}} = \overline{\sigma_{\hat{1}1}} = iD_{\hat{1}\hat{2}},\ \sigma_{1\hat{2}} = \overline{\sigma_{\hat{1}2}} = iD_{\hat{2}\hat{2}},\ \sigma_{2\hat{1}} = \overline{\sigma_{\hat{2}1}} = -iD_{\hat{1}\hat{1}},\ \sigma_{2\hat{2}} = \overline{\sigma_{\hat{2}2}} = -iD_{\hat{1}\hat{2}}.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2. *Матрица второй квадратичной формы погружения косимплектической гиперповерхности N^5 специальное эрмитово $M^6 \subset O$ имеет вид:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iD_{\hat{1}\hat{2}} & iD_{\hat{2}\hat{2}} \\ 0 & 0 & 0 & -iD_{\hat{1}\hat{1}} & iD_{\hat{1}\hat{2}} \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ -iD_{12} & -iD_{22} & 0 & 0 & 0 \\ iD_{11} & iD_{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению [7], гиперповерхность многообразия называется вполне омбилической, если $\sigma=\lambda g$, $\lambda=const$.

Зная, как выглядит матрица метрического тензора [9]:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что необходимым условием того, что N^5 – вполне омбилическая гиперповерхность специального эрмитова $M^6 \subset \mathrm{O}$, являются тождества:

$$D_{11}=D_{22}=D_{\hat{1}\hat{1}}=D_{\hat{2}\hat{2}}.$$

Используя тождества из [8]

$$\left(D_{12}\right)^2 = D_{11}D_{22},\ \left(D_{\hat{1}\hat{2}}\right)^2 = D_{\hat{1}\hat{1}}D_{\hat{2}\hat{2}},$$

получаем, что тогда матрица должна иметь вид:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а, следовательно, $\lambda=0$, а, значит, и $\sigma_{33}=0$. Поэтому матрица σ оказывается нулевой. Доказана следующая

Теорема 3. *Всякая вполне омбилическая косимплектическая поверхность 6-мерного специального эрмитова подмногообразия алгебры Кэли является вполне геодезическим подмногообразием.*

Список литературы

1. *Blair D.E.* The theory of quasi-Sasakian structures//J.Diff. Geometry. 1967. V. 1. P. 331-345.
2. *Blair D.E.* Contact manifolds in Riemannian geometry// Lect. Notes Math. 1976.
3. *Kiritchenko V.F.* Sur la géometrie des variétés approximativement cosymplectiques// C.R. Acad. Sci. 1982. Ser. 1. № 12. P. 673-676.
4. *Goldberg S.* Totally geodesic hypersurfaces of Kachler manifolds// Pacif. J. Math. 1968. V. 27. № 2. P. 275-281.
5. *Goldberg S., Yano K.* Integrability of almost cosymplectic structures// Pacif. J. Math. 1969.
6. *Gray A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pure ed Appl. 1980. V. 123. № 4. P. 35-58.
7. *Кириченко В.Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии. М.,1986. Т. 18. С. 25-72.
8. *Банару М.Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли: Дис. …канд. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МПГУ им. В.И. Ленина, 1993. 99 с.
9. *Степанова Л.В.* Контактная геометрия гиперповерхностей квазикелеровых многообразий: Дис.…канд. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МПГУ им. В.И. Ленина, 1995. 105 с.
10. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 465-504.

11. *Кириченко В.Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Вестник МГУ. Сер. мат., мех. 1973. № 3. С. 70-75.

12. *Банару М.Б.* О почти эрмитовых структурах, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных ориентируемых подмногообразиях алгебры октав // Полианалитические функции. Смоленск, 1997. С. 113-117.

13. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИИЛ, 1960. 216 с.

14. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во МГУ, 1960. 298 с.

15 *Gray A.* Some examples of almost Hermitian Manifolds // Ill. J. Math. 1966. V. 10. № 2. P. 353-366.

V. Stepanova, M.B. Banaru

ON QUASI-SASAKIAN AND CO-SIMPLECTIC HYPERSURFACES OF SPECIAL HERMITEAN MANIFOLDS

The criterion is found that on the hypersurface of special hermitean manifold quasi-sasakian structure is induced. It is proved, that there is no quite hypersurface, different from quite geodesic one, for ombilic 6-dimensional special hermitean submanifold of Cauley's algebra.

УДК 514.75

А.В. Столяров

(*Чувашский государственный педагогический университет*)

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Изучаются некоторые вопросы внутренней геометрии нормализованного проективно-метрического пространства K_n с абсолютом Q^2_{n-1}. Доказано, что внутренняя геометрия нормализованного пространства K_n с невырожденным абсолютом суть вейлева тогда и только тогда, когда нормализация является полярной; при этом эта геометрия является римановой постоянной кривизны.

В работе все результаты получены в минимально специализированной системе отнесения и с использованием инвариантных методов дифференциально-геометрических исследований [4], [5].

Индексы пробегают следующие значения: $\bar{I}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n}$; $I, K, L, P, Q = \overline{1, n}$.