5. *Долгарев А.И.* Кривые в одулярной дифференциальной геометрии пространства на дисоне // Изв. вузов. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. 2003. №6(9). С. 43—49.

6. *Долгарев А.И.* Недифференцируемый одуль. // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 34—37.

7. *Сабинин Л.В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью // ДАН СССР. 1977. № 5. С. 800—803.

8. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. Изд. 4-е. М., 1956.

A. Dolgarew

THE NATURAL EQUATIONS OF CURVE
3-MEASURING ODULAR GALILEAN SPACES

It is proved that the curves of 3-measuring odular Galilean spaces are defined by the natural equations — scalar real functions of curvature and torsion.

УДК 514.75

Н.А. Елисеева

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОСНАЩЕНИЯ В СМЫСЛЕ Э. КАРТАНА *L*-, *M*-ПОДРАССЛОЕНИЙ ПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Продолжается изучение m-полосных распределений $H(P)$ [1]. Для структурных *L*-, *M*-подрасслоений $H(P)$-распределения построены оснащения в смысле Э. Картана. Приведены условия неподвижности оснащающих плоскостей Картана подрасслоений L и M.

Схема использования индексов:

$$I,K,L,\ldots=\overline{1,n}\,;\ p,q,s,t,r,f=\overline{1,r}\,;\ i,j,k,l,m,h=\overline{r+1,m}\,;$$

$$a,b,c,d,e,g=\overline{1,m}\,;\ \alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\delta=\overline{m+1,n-1}\,;$$

$$\hat{a},\hat{b}=\overline{m+1,n}\,;\ u,v,w,x=\overline{r+1,n-1}\,;\ \hat{u},\hat{v}=\overline{r+1,n}\,;$$

$$\xi,\zeta,\psi,\eta=\{\overline{1,r};\overline{m+1,n-1}\}\ .$$

Пару распределений соответственно r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение) и m-мерных плоскостей M (M-распределение) проективного пространства P_n с отношением инцидентности $A_0 \in \Lambda \subset M$ $(1 \le r < m < n-1)$ их соответствующих элементов в каждом центре A_0 назовем m-полосным распределением Π (Π-распределением), в котором Λ-распределение назовем базисным, а M-распределение — оснащающим. Π-распределение, оснащенное полем гиперплоскостей H, назовем $H(\Pi)$-распределением [1].

Выделим характеристику $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ (Φ-плоскость) гиперплоскости $H(A_0)$, полученную при смещениях центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих Λ-распределению. Плоскость $\Phi(A_0)$ пересекает соответствующую плоскость $M(A_0)$ Π-распределения по s-мерной ($s=m-r$) плоскости L_s : $\Phi(A_0)\cap M(A_0)=L(A_0)$. Другим фокальным образом плоскости $H(A_0)$ является ее характеристика $E_{n-m-1}(A_0)$ (E-плоскость), полученная при смещениях центра A_0 вдоль интегральных кривых M-распределения. Плоскость, натянутую в каждом центре A_0 на плоскости $E(A_0)$ и $\Lambda(A_0)$, назовем плоскостью Ψ, а распределение этих плоскостей — Ψ-распределением. При этом в каждом центре A_0 $H(\Pi)$-распределения выполняются соотношения инцидентности:

$$[\Lambda,L]=M,\ [L,E]=\Phi,\ [E,\Lambda]=\Psi,\ L\cap\Lambda=A_0,\ M\cap E=A_0.$$

Относительно репера первого порядка R^1 дифференциальные уравнения $\mathrm{H}(\mathrm{P})$-распределения имеют вид [1]

$$
\begin{gathered}
w_p^n = \mathrm{L}_{pK}^n w_0^K, \; w_p^i = \mathrm{L}_{pK}^i w_0^K, \; w_p^a = \mathrm{L}_{pK}^a w_0^K, \\
w_i^n = \mathrm{L}_{iK}^n w_0^K, \; w_i^p = \mathrm{L}_{iK}^p w_0^K, \; w_i^a = \mathrm{L}_{iK}^a w_0^K, \qquad (1) \\
w_a^n = \mathrm{L}_{aK}^n w_0^K, \; w_a^p = \mathrm{L}_{aK}^p w_0^K, \; w_a^i = \mathrm{L}_{aK}^i w_0^K .
\end{gathered}
$$

Определение. *L-подрасслоение называется оснащенным в смысле Э. Картана [2], если каждому центру A_0 поставлена в соответствие плоскость $C_{n-s-1}(A_0)$ размерности $n-s-1$, не имеющая общих точек с текущим элементом $L_s(A_0)$ L-подрасслоения.*

Плоскость $C_{n-s-1}(A_0)$ в каждой текущей точке A_0 можно задать точками C_V и C_n:

$$C_V = A_V + n_V^0 A_0, \; C_n = n_n^0 A_0 + n_n^i A_i + n_n^x A_x + A_n .$$

Следуя работе [3], находим, что функции, входящие в последние соотношения, удовлетворяют уравнениям:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{C} n_x^0 + w_x^0 = n_{xK}^0 w_0^K ; \\
\mathrm{C} n_n^0 + n_n^i w_i^0 + n_n^x w_x^0 + w_n^0 = n_{nK}^0 w_0^K ; \\
\mathrm{C} n_n^V + w_n^V = n_{nK}^V w_0^K ; \\
\mathrm{C} n_n^i + w_n^i = n_{nK}^i w_0^K . \qquad (2)
\end{gathered}
$$

Если специально не оговорено, то ниже в качестве функций n_n^V, n_V^0 будем брать соответственно квазитензоры первого $l_n^V = \{l_n^p, l_n^a\}$ и второго $l_V^0 = \{l_p^0, l_a^0\}$ порядков $n_n^V = l_n^V$, $n_V^0 = l_V^0$, где

$$l_p^0 = \frac{1}{s}\mathrm{L}_{pi}^i, \; \mathrm{C} l_p^0 - w_p^0 = l_{pK}^0 w_0^K ; \; l_a^0 = \frac{1}{s}\mathrm{L}_{ap}^p ,$$

$$\mathrm{C} l_a^0 - w_a^0 = l_{aK}^0 w_0^K ; \; l_n^p = \frac{1}{s}\mathrm{L}_{ij}^p \mathrm{L}_n^{ji}, \mathrm{C} l_n^p - w_n^p = l_{nK}^p w_0^K ;$$

$$l_n^a = \frac{1}{s} L_{ij}^a L_n^{ji}, \quad C l_n^a - w_n^a = l_{nK}^a w_0^K .$$

В силу этого оснащение L-подрасслоения в смысле Э. Картана равносильно заданию на подмногообразии L полей геометрических объектов $\{n_n^i\}$, $\{n_n^i, n_n^0, l_n^V\}$, $\{l_V^0\}$; при этом в каждом центре A_0 распределения оснащающая плоскость $C_{n-s-1}(A_0)$ пересекает характеристику $Y_{n-s-1}(A_0)$ по оси Кёнига [4]

$$[C_V] \subset C_{n-s-2}(A_0) \subset C_{n-s-1}(A_0) \cap Y_{n-s-1}(A_0),$$

$$\text{где } C_V = A_V + l_V^0 A_0 .$$

Плоскость $C_{n-s-2}(A_0)$ будем называть *первой осью Кёнига* L-подрасслоения в его центре A_0 [4].

Отметим, что оснащение L-подрасслоения в смысле Э. Картана влечет за собой оснащение подмногообразия L полем нормалей первого рода n_n^i (2). Обратно, если на L-подрасслоении задано поле нормалей первого рода, индуцируемое полем квазитензора n_n^i, то такое оснащение подмногообразия L определяет его оснащение в смысле Э. Картана, ибо в качестве одного из возможных охватов функции n_n^0 можно взять

$$n_n^0 = -\left[\frac{1}{s}\left(n_{nj}^j - L_{lj}^n n_n^l n_n^j\right) + l_x^0 l_n^x\right];$$

при таком охвате функции n_n^0 оснащающая плоскость Картана C_{n-s-1} называется *плоскостью Кёнига* нормали n_n^i [4].

Условия неподвижности оснащающей плоскости Картана $C_{n-s-1}(A_0)$ имеют вид

$$\begin{aligned} & n_{nK}^0 + l_x^0(l_{nK}^x + n_n^0 d_K^x + n_n^i L_{iK}^x) - \\ & - (n_n^0 + l_x^0 l_n^x)(l_n^h L_{hK}^n + n_n^0 d_K^n + n_n^i L_{iK}^n) = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

$$n^i_{nK} + n^0_n d^i_K + l^x_n L^i_{xK} - n^i_n (n^0_n d^n_K + n^j_n L^n_{jK} + l^h_n L^n_{hK}) = 0; \quad (4)$$

$$l^0_{VK} + l^0_x l^0_V d^x_K + (n^0_n + l^0_x l^x_n)(L^n_{VK} - l^0_V d^n_K) = 0; \quad (5)$$

$$L^i_{VK} - l^0_V d^i_K + n^i_n (l^0_V d^n_K - L^n_{VK}) = 0. \quad (6)$$

Согласно работе [3] одновременное выполнение условий (4) и (6) является условием того, что смещение оснащающей плоскости $C_{n-s-1}(A_0)$ не выходит из нормали первого рода $N_{n-s}(A_0)$ и при $s > 1$ влечет за собой выполнение соотношений (3) и (5). При этом, как показано в монографии [3], оснащающая плоскость Картана является плоскостью Кёнигса нормали N^i_n:

$$N^i_n = \frac{1}{n - s - 1} L^{xV}_n L^i_{Vk}, \quad (7)$$

так как из соотношений (4; 6; 7) следует

$$n^i_n = N^i_n, \; n^0_n = -\left[l^0_x l^x_n + \frac{1}{s}\left(L^j_{nj} - L^n_{lj} L^l_n L^j_n\right)\right].$$

Определение. *M-подрасслоение называется оснащенным в смысле Э. Картана [2], если каждому центру A_0 поставлена в соответствие плоскость $S_{n-m-1}(A_0)$ размерности $n - m - 1$, не имеющая общих точек с текущим элементом $M_m(A_0)$ M-подрасслоения.*

Плоскость $S_{n-m-1}(A_0)$ в каждой текущей точке A_0 зададим точками S_a и S_n:

$$S_a = A_a + n^0_a A_0, \; S_n = n^0_n A_0 + n^a_n A_a + n^a_n A_a + A_n,$$

где

$$C n^0_a + w^0_a = n^0_{aK} w^K_0;$$

$$C n^0_n + n^a_n w^0_a + M^a_n w^0_a + w^0_n = n^0_{nK} w^K_0;$$

$$C n^a_n + w^a_n = n^a_{nK} w^K_0;$$

$$C n^a_n + w^a_n = n^a_{nK} w^K_0.$$

Если специально не оговорено, то ниже в качестве функций n_n^a, n_a^0 будем брать соответственно квазитензоры первого M_n^a и второго M_a^0 порядков:

$$n_n^a = M_n^a, \; n_a^0 = M_a^0,$$

$$M_n^a = \frac{1}{m} L_{ab}^a L_n^{ba}, \quad C M_n^a + w_n^a = M_{nK}^a w_0^K,$$

$$M_a^0 = \frac{1}{m} L_{aa}^a, \quad C M_a^0 + w_a^0 = M_{aK}^0 w_0^K.$$

Оснащение M -подрасслоения в смысле Э. Картана равносильно заданию на подмногообразии M полей геометрических объектов $\{n_n^a\}$, $\{n_n^a, n_n^0, M_n^a\}$, $\{M_a^0\}$; при этом в каждом центре A_0 распределения оснащающая плоскость $S_{n-m-1}(A_0)$ пересекает характеристику $E_{n-m-1}(A_0)$ по оси Кёнигса [4]

$$[S_a] \epsilon \; S_{n-m-2}(A_0) \epsilon \; S_{n-m-1}(A_0) З \, E_{n-m-1}(A_0),$$

где $S_a = A_a + M_a^0 A_0$.

Плоскость $S_{n-m-2}(A_0)$ будем называть *первой осью Кёнигса* [4] M-подрасслоения в его центре A_0. Оснащение M-подрасслоения в смысле Э. Картана влечет за собой оснащение подмногообразия M полем нормалей первого рода n_n^a. Обратно, если на M-подрасслоении задано поле нормалей первого рода, индуцируемое полем квазитензора n_n^a, то такое оснащение подмногообразия M определяет его оснащение в смысле Э. Картана, ибо в качестве одного из возможных охватов функции n_n^0 можно взять

$$n_n^0 = - \left[\frac{1}{m}\left(n_{nb}^b - L_{cb}^n n_n^c n_n^b\right) + M_a^0 M_n^a\right];$$

при таком охвате функции n_n^0 оснащающая плоскость Картана $S_{n-m-1}(A_0)$ называется *плоскостью Кёнигса* нормали n_n^a.

Условия неподвижности оснащающей плоскости Картана $\mathrm{S}_{n-m-1}(A_0)$ имеют вид

$$n^0_{nK} + M^0_a(M^a_{nK} + n^0_n d^a_K + n^a_n \mathrm{L}^a_{aK}) -$$

$$- (n^0_n + M^0_a M^a_n)(M^b_n \mathrm{L}^n_{bK} + n^0_n d^n_K + n^a_n \mathrm{L}^n_{aK}) = 0$$

$$n^a_{nK} + n^0_n d^a_K + M^a_n \mathrm{L}^a_{aK} - n^a_n(n^0_n d^n_K + n^b_n \mathrm{L}^n_{bK} + M^b_n \mathrm{L}^n_{bK}) = 0,$$

$$M^0_{bK} + M^0_a M^0_b d^a_K + (n^0_n + M^0_a M^a_n)(\mathrm{L}^n_{bK} - M^0_b d^n_K) = 0,$$

$$\mathrm{L}^a_{bK} - M^0_b d^a_K + n^a_n(M^0_b d^n_K - \mathrm{L}^n_{bK}) = 0.$$

Список литературы

1. *Елисеева Н.А.* $\mathrm{H}(\mathrm{P})$-распределения проективного пространства. Калининград, 2002. Деп. в ВИНИТИ РАН 01.02.2002. №206-В2002.

2. *Cartan E.* Les éspaces á connexion projective // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1937. Вып. 4. С. 147—159.

3. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. 2-е изд. Чебоксары, 1994.

4. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

N. Eliseeva

THE EQUIPMENTS IN E. CARTAN ‘S SENSE OF *L-, M*-SUBBUNDLES OF STRIP DISTRIBUTION

The study of m-strip distributions $\mathrm{H}(\mathrm{P})$ is continued [1]. For structural *L-, M*-subbundles of $\mathrm{H}(\mathrm{P})$-distribution the equipments in E. Cartan’s sense are constructed. The conditions of stationarity of equipping Cartan’s planes of subbundles L and M are given.