УДК 514.76

О. О. Белова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
olgaobelova@mail.ru
SPIN-код: 8664-1683, AuthorID: 112532
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-3

Объект неабсолютных перенесений для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$

В n-мерном проективном пространстве рассмотрена коконгруэнция $K_{(n-m)m}$. В главном расслоении, ассоциированном с данной коконгруэнцией, строится фундаментально-групповая связность, находится объект кривизны. Произведено композиционное оснащение коконгруэнции $K_{(n-m)m}$. Данное оснащение индуцирует связность в главном расслоении, ассоциированном с $K_{(n-m)m}$. Вводится и исследуется объект неабсолютных перенесений. Доказано, что данный объект является псевдотензором.

Ключевые слова: коконгруэнция, связность, ковариантный дифференциал, объект кривизны, объект неабсолютных перенесений

Теория многомерных плоскостей проективного пространства [1; 27; 28; 34], являющаяся одной из наиболее красивых и интересных областей дифференциальной геометрии, находит применение в интегральной геометрии и теоретической физике.

Дифференциальная геометрия комплексов многомерных плоскостей полностью не изучена, чем обусловлена актуальность представленной работы [9; 10; 12; 16]. При исследовании будем применять метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [14], основанный на инвариантном дифференциально-алгебраическом аппарате структурных дифференциальных

Поступила в редакцию 19.08.2025 г.
© Белова О. О., 2026

форм рассматриваемых расслоений [17; 22; 30; 32; 33]. Фундаментально-групповая связность, которая широко используется для параллельных перенесений [2; 3; 25; 29; 31], задается в главном расслоении на коконгруэнции $K_{(n-m)m}$. Показано, что объект кривизны данной связности является псевдотензором. При осуществлении композиционного оснащения коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ индуцируется связность в ассоциированном расслоении. Введен ковариантный дифференциал оснащающего квазитензора и получен объект неабсолютных перенесений, который оказался псевдотензором, то есть его обращение в нуль инвариантно.

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную плоскость L_m $(1 \leq m < n)$. При специализации подвижного репера $\{A, A_i\}$, $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, n$, с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i,\ dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A$$

путем помещения вершин A, A_a на плоскость L_m уравнения стационарности данной плоскости имеют вид $\omega^\alpha = 0$ и $\omega_a^\alpha = 0$. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения

$$a, b, c, \ldots = 1, \ldots, m;\quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n.$$

Рассмотрим коконгруэнцию $K_{(n-m)m}$ m-мерных плоскостей L_m (см.: [5—7]). Принимаем формы ω_a^α за базисные, тогда уравнения $K_{(n-m)m}$ (ср.: [11; 13]) имеют вид

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta. \qquad (1)$$

Замечание. Комплекс K_r m-мерных плоскостей — это r-мерное подмногообразие грассманова многообразия $Gr(m, n)$ m-мерных плоскостей проективного пространства P_n, где $\dim r < (m+1)(n-m)$. В данной статье будем использовать терминологию В. И. Близникаса, который дал классификацию подмногообразий многообразия Грассмана $Gr(m, n)$ (см.: [8]) и назвал комплекс $K_{(n-m)m}$ коконгруэнцией m-мерных плоскостей.

Используя структурные уравнения

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

$$D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j,$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i$$

проективной группы $GP(n)$, действующей в пространстве P_n, находим дифференциалы базисных форм ω_a^α:

$$D\omega_a^\alpha = (\delta_\beta^\alpha \omega_a^b - \delta_a^b \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\beta^{\alpha b}\omega_a) \wedge \omega_b^\beta. \qquad (2)$$

При продолжении системы (1) получим дифференциальные уравнения на компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\beta^{\alpha a}\}$

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\gamma^{\alpha b}\Lambda_\beta^{\gamma a}\omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a = \Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a b}\omega_b^\gamma,$$

причем $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha a b} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha b a}$, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом (см., напр., [24]):

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} = d\Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\beta^{\gamma a}\omega_\gamma^\alpha + \Lambda_\beta^{\alpha b}\omega_b^a - \Lambda_\gamma^{\alpha a}\omega_\beta^\gamma.$$

С коконгруэнцией $K_{(n-m)m}$ ассоциируется главное расслоение $G_s(K)$ со структурными уравнениями (2) и уравнениями

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + (\delta_b^a \omega_c + \delta_c^a \omega_b) \wedge \omega^c + (\delta_b^a \Lambda_\alpha^{\beta c}\omega_\beta -$$

$$- \delta_\alpha^\beta \delta_b^c \omega_\beta^a) \wedge \omega_c^\alpha,$$

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a - \Lambda_\beta^{\alpha b}\omega_\alpha^a \wedge \omega_b^\beta,$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega_\alpha \wedge \omega_a^\alpha;$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \omega_a \wedge \omega^a + (\Lambda_\gamma^{\alpha a}\omega_\beta + \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{\mu a}\omega_\mu +$$

$$+ \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a) \wedge \omega_a^\gamma;$$

$$D\omega_\alpha^a = (\delta_b^a \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \omega_b^a) \wedge \omega_\beta^b + \omega_\alpha \wedge \omega^a;$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta.$$

Базой главного расслоения $G_s(K)$ является коконгруэнция $K_{(n-m)m}$, а типовым слоем — s-членная подгруппа G_s стационарности плоскости L_m, причем

$$s = n(n+1) - m(n-m-1).$$

На коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ способом Лаптева — Лумисте (см., напр., [18; 23]) задается связность при помощи следующих преобразований слоевых форм:

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^{ac}\omega_c^\alpha, \quad \widetilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_\alpha^{ab}\omega_b^\alpha, \\ \widetilde{\omega}_\alpha^a &= \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b^\beta, \quad \widetilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a^\gamma, \\ \widetilde{\omega}_a &= \omega_a - \Gamma_{a\alpha}^b\omega_b^\alpha, \quad \widetilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^a\omega_a^\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Связность в главном расслоении задается с помощью поля объекта групповой связности $\Gamma = \{\Gamma_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_\alpha^{ab}, \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{a\alpha}^b, \Gamma_{\alpha\beta}^a\}$ на базе $K_{(n-m)m}$. Компоненты объекта Γ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} \Delta\Gamma_{b\alpha}^{ac} + \left(\Gamma_{b\beta}^{ae}\Lambda_\alpha^{\beta c} - \delta_b^a\Gamma_\alpha^{ec} - \delta_b^e\Gamma_\alpha^{ac}\right)\omega_e - \delta_b^a\Lambda_\alpha^{\beta c}\omega_\beta + \delta_b^c\omega_\alpha^a + \\ + (\delta_b^a\Gamma_{e\alpha}^c + \delta_e^a\Gamma_{b\alpha}^c)\omega^e = \Gamma_{b\alpha\beta}^{ace}\omega_e^\beta, \\ \Delta\Gamma_\alpha^{ab} + \Gamma_\beta^{ac}\Lambda_\alpha^{\beta b}\omega_c + \Lambda_\alpha^{\beta b}\omega_\beta^a - \Gamma_{e\alpha}^{ab}\omega^e = \Gamma_{\alpha\beta}^{abc}\omega_c^\beta, \\ \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{ac}\Lambda_\beta^{\gamma b}\omega_c - \Gamma_\beta^{ab}\omega_\alpha + \left(\delta_c^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma\Gamma_{c\beta}^{ab}\right)\omega_\gamma^c + \\ + \Gamma_{\alpha\beta}^b\omega^a = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{abc}\omega_c^\gamma, \\ \Delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + \left(\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha b}\Lambda_\gamma^{\mu a} - \delta_\beta^\alpha\Gamma_\gamma^{ba}\right)\omega_b - \left(\delta_\beta^\mu\Lambda_\gamma^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha\Lambda_\gamma^{\mu a}\right)\omega_\mu - \\ - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^a + \delta_\beta^\alpha\Gamma_{b\gamma}^a\omega^b = \Gamma_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab}\omega_b^\mu, \\ \Delta\Gamma_{a\alpha}^b + \left(\Gamma_{a\alpha}^{cb} + \Gamma_{a\beta}^c\Lambda_\alpha^{\beta b}\right)\omega_c + \delta_a^b\omega_\alpha = \Gamma_{a\alpha\beta}^{bc}\omega_c^\beta, \\ \Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a + \left(\Gamma_{\alpha\gamma}^b\Lambda_\beta^{\gamma a} + \Gamma_{\alpha\beta}^{ba}\right)\omega_b + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma - \Gamma_{b\beta}^a\omega_\alpha^b = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\omega_b^\gamma. \end{gathered} \tag{4}$$

Учитывая во внешних дифференциалах форм связности (3) дифференциальные уравнения (4) компонент объекта фунда-

ментально-групповой связности Γ, перепишем структурные уравнения в виде

$$D\widetilde{\omega}_b^a = \widetilde{\omega}_b^c \wedge \widetilde{\omega}_c^a + (\delta_b^a \widetilde{\omega}_c + \delta_c^a \widetilde{\omega}_b) \wedge \widetilde{\omega}^c + R_{b\alpha\beta}^{ace} \omega_c^\alpha \wedge \omega_e^\beta,$$

$$D\widetilde{\omega}^a = \widetilde{\omega}^b \wedge \widetilde{\omega}_b^a + R_{\alpha\beta}^{abc} \omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta,$$

$$D\widetilde{\omega}_\alpha^a = \widetilde{\omega}_\alpha^b \wedge \widetilde{\omega}_b^a + \widetilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \widetilde{\omega}_\beta^a + \widetilde{\omega}_\alpha \wedge \widetilde{\omega}^a + R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma,$$

$$D\widetilde{\omega}_\beta^\alpha = \widetilde{\omega}_\beta^\gamma \wedge \widetilde{\omega}_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \widetilde{\omega}_a \wedge \widetilde{\omega}^a + R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} \omega_a^\gamma \wedge \omega_b^\mu,$$

$$D\widetilde{\omega}_a = \widetilde{\omega}_a^b \wedge \widetilde{\omega}_b + R_{a\alpha\beta}^{bc} \omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta,$$

$$D\widetilde{\omega}_\alpha = \widetilde{\omega}_\alpha^a \wedge \widetilde{\omega}_a + \widetilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \widetilde{\omega}_\beta + R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} \omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma.$$

Компоненты $R_{b\alpha\beta}^{ace}, R_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, R_{\alpha\beta}^{abc}, R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab}, R_{a\alpha\beta}^{bc}, R_{\alpha\beta\gamma}^{ab}$ объекта кривизны R выражаются по формулам

$$R_{b\alpha\beta}^{ace} = \Gamma_b^a[{}_{\alpha\beta}^{ce}] - \Gamma_b^d[{}_\alpha^c \Gamma_{d\beta}^{ae}] - \delta_b^a \Gamma_{d\lfloor\alpha}^{\lceil c} \Gamma_\beta^{de}] - \Gamma_{b\lfloor\alpha}^{\lceil c} \Gamma_\beta^{ae}],$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = \Gamma_\alpha^a[{}_{\beta\gamma}^{bc}] - \Gamma_\alpha^e[{}_\beta^b \Gamma_{e\gamma}^{ac}] - \Gamma_\alpha^\mu[{}_\beta^b \Gamma_{\mu\gamma}^{ac}] - \Gamma_{\alpha\lfloor\beta}^{\lceil b} \Gamma_\gamma^{ac}],$$

$$R_{\alpha\beta}^{abc} = \Gamma_{\lfloor\alpha\beta}^{a\lceil bc}] - \Gamma_{\lfloor\alpha}^{e\lceil b} \Gamma_{e\beta}^{ac}],$$

$$R_{\beta\gamma\mu}^{\alpha ab} = \Gamma_\beta^\alpha[{}_{\gamma\mu}^{ab}] - \Gamma_\beta^\eta[{}_\gamma^a \Gamma_{\eta\mu}^{\alpha b}] - \delta_\beta^\alpha \Gamma_{c\lfloor\gamma}^{\lceil a} \Gamma_\mu^{cb}],$$

$$R_{a\alpha\beta}^{bc} = \Gamma_{a\lfloor\alpha\beta}^{\lceil bc}] - \Gamma_{a\lfloor\alpha}^{e\lceil b} \Gamma_{e\beta}^{c}],$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = \Gamma_{\alpha\lfloor\beta\gamma}^{\lceil ab} - \Gamma_\alpha^c[{}_\beta^a \Gamma_{c\gamma}^b] - \Gamma_\alpha^\mu[{}_\beta^a \Gamma_{\mu\gamma}^b].$$

Квадратные скобки означают альтернирование по парам индексов, например $\Gamma_{\alpha\lfloor\beta\gamma}^{\lceil ab} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{ab} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta}^{ba})$.

Продолжая дифференциальные уравнения (4), учитывая сравнения, соответствующие уравнениям для пфаффовых производных фундаментального объекта 1-го порядка, и условие симметрии $\Lambda_{\beta\gamma}^{\alpha ab} = \Lambda_{\gamma\beta}^{\alpha ba}$, находим следующие дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны R по модулю базисных форм ω_a^α:

$$\Delta R^{ace}_{b\alpha\beta} + \left(R^{acd}_{b\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma e}_{\beta} + R^{ade}_{b\gamma\beta}\Lambda^{\gamma c}_{\alpha} - \delta^{a}_{b}R^{dce}_{\alpha\beta} - \delta^{d}_{b}R^{ace}_{\alpha\beta}\right)\omega_d +$$
$$+ (\delta^{a}_{b}R^{ce}_{d\alpha\beta} + \delta^{a}_{d}R^{ce}_{b\alpha\beta})\omega^d \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta} + (R^{abe}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_{\beta} + R^{aec}_{\gamma\beta}\Lambda^{\gamma b}_{\alpha})\omega_e - R^{abc}_{e\alpha\beta}\omega^e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{bc}_{a\alpha\beta} + (R^{ebc}_{a\alpha\beta} + R^{be}_{a\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_{\beta} - R^{ce}_{a\beta\gamma}\Lambda^{\gamma b}_{\alpha})\omega_e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + (R^{abe}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu c}_{\gamma} + R^{aec}_{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu b}_{\beta})\omega_e + R^{bc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^a +$$
$$+ (\delta^{a}_{e}R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma} - \delta^{\mu}_{\alpha}R^{abc}_{e\beta\gamma})\omega^{e}_{\mu} - R^{abc}_{\beta\gamma}\omega_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} + \left(R^{\alpha ac}_{\beta\gamma\eta}\Lambda^{\eta b}_{\mu} + R^{\alpha cb}_{\beta\eta\mu}\Lambda^{\eta a}_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta}R^{cab}_{\gamma\mu}\right)\omega_c +$$
$$+ \delta^{\alpha}_{\beta}R^{ab}_{c\gamma\mu}\omega^c \equiv 0,$$
$$\Delta R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + \left(R^{cab}_{\alpha\beta\gamma} + R^{ac}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu b}_{\gamma} - R^{bc}_{\alpha\gamma\mu}\Lambda^{\mu a}_{\beta}\right)\omega_c - R^{ab}_{c\beta\gamma}\omega^c_\alpha +$$
$$+R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu \equiv 0.$$

Вводя обозначения

$$M^{acde}_{b\alpha\beta} = R^{acd}_{b\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma e}_{\beta} + R^{ade}_{b\gamma\beta}\Lambda^{\gamma c}_{\alpha} - \delta^{a}_{b}R^{dce}_{\alpha\beta},$$
$$M^{ebc}_{a\alpha\beta} = R^{ebc}_{a\alpha\beta} + R^{be}_{a\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_{\beta} - R^{ce}_{a\beta\gamma}\Lambda^{\gamma b}_{\alpha},$$

указанные выше сравнения можно переписать более компактно:

$$\Delta R^{ace}_{b\alpha\beta} + \left(M^{acde}_{b\alpha\beta} - \delta^{d}_{b}R^{ace}_{\alpha\beta}\right)\omega_d + (\delta^{a}_{b}R^{ce}_{d\alpha\beta} + \delta^{a}_{d}R^{ce}_{b\alpha\beta})\omega^d \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta} + (R^{abe}_{\alpha\gamma}\Lambda^{\gamma c}_{\beta} + R^{aec}_{\gamma\beta}\Lambda^{\gamma b}_{\alpha})\omega_e - R^{abc}_{e\alpha\beta}\omega^e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{bc}_{a\alpha\beta} + M^{ebc}_{a\alpha\beta}\omega_e \equiv 0,$$
$$\Delta R^{abc}_{\alpha\beta\gamma} + (R^{abe}_{\alpha\beta\mu}\Lambda^{\mu c}_{\gamma} + R^{aec}_{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu b}_{\beta})\omega_e + R^{bc}_{\alpha\beta\gamma}\omega^a +$$
$$+ (\delta^{a}_{e}R^{\mu bc}_{\alpha\beta\gamma} - \delta^{\mu}_{\alpha}R^{abc}_{e\beta\gamma})\omega^{e}_{\mu} - R^{abc}_{\beta\gamma}\omega_\alpha \equiv 0,$$
$$\Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} + M^{\alpha acb}_{\beta\gamma\mu}\omega_c + \delta^{\alpha}_{\beta}R^{ab}_{c\gamma\mu}\omega^c \equiv 0,$$
$$\Delta R^{ab}_{\alpha\beta\gamma} + M^{cab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_c - R^{ab}_{c\beta\gamma}\omega^c_\alpha + R^{\mu ab}_{\alpha\beta\gamma}\omega_\mu \equiv 0.$$

Замечание. Объект кривизны R связности Г на коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ является псевдотензором [20], который содержит два подпсевдотензора: $R_1 = \{R^{abc}_{e\alpha\beta}, R^{abc}_{\alpha\beta}, R^{ab}_{c\alpha\beta}\}$ и $R_2 = \{R_1,\ R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\}$ (см.: [5]).

Оснащением многообразия называется процесс присоединения к точкам базы некоторых дополнительных геометрических образов в пространстве P_n, которые позволяют естественным образом определить связность в проективном расслоении [15], при этом связность индуцируется данным оснащением. Классические оснащения были рассмотрены в статьях [15; 21]. К таким оснащениям относятся оснащение Картана и нормализация Нордена. Оснащения многообразий плоскостей были описаны в работе [19].

Осуществим композиционное оснащение [22] комплекса $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой плоскости L_m $(n-m-1)$-мерную плоскость C_{n-m-1}, не имеющую общих точек с плоскостью L_m, и точку $C = A + \lambda^a A_a$.

Плоскость C_{n-m-1} зададим совокупностью точек $C_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$. Плоскость C_{n-m-1} — аналог плоскости Э. Картана. Прямая сумма данной плоскости и плоскости L_m дает все проективное пространство P_n, то есть

$$L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n.$$

Точка $C = A + \lambda^a A_a$ принадлежит плоскости L_m и не принадлежит плоскости N_{m-1} — аналогу нормали 2-го рода А. П. Нордена. Прямая сумма данной точки и плоскости N_{m-1} дает плоскость L_m, то есть

$$C \in L_m,\ C \notin N_{m-1},\ C \oplus N_{m-1} = L_m.$$

Находя дифференциалы точек C_α, учитывая в них деривационные формулы и выражения базисных точек плоскости C_{n-m-1} и точки C, сворачивая часть слагаемых при помощи дифференциального оператора Δ и требуя относительной ин-

вариантности оснащающей плоскости C_{n-m-1} и точки C, получим дифференциальные сравнения для компонент оснащающего геометрического объекта $\lambda = \{\lambda^a, \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$ по модулю базисных форм ω^α_a

$$\begin{aligned} &\Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a \equiv 0,\\ &\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha \equiv 0,\\ &\Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha \equiv 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Замечание. Оснащающий геометрический объект λ с компонентами $\lambda^a, \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha$ является квазитензором.

Внесем в дифференциальные уравнения

$$\Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a = \lambda^{ab}_\alpha\omega^\alpha_b,$$

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha = \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b,$$

$$\Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a,$$

соответствующие сравнениям (5), формы связности (3), получим выражения ковариантных дифференциалов компонент объекта λ через ковариантные производные

$$\nabla\lambda^a = \nabla^b_\alpha\lambda^a\cdot\omega^\alpha_b, \quad \nabla\lambda^a_\alpha = \nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha\cdot\omega^\beta_b, \quad \nabla\lambda_\alpha = \nabla^a_\beta\lambda_\alpha\cdot\omega^\beta_a,$$

где ковариантные дифференциалы компонент объекта λ относительно связности имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla\lambda^a &= d\lambda^a + \lambda^b\widetilde{\omega}^a_b - \lambda^a\lambda^b\widetilde{\omega}_b + \widetilde{\omega}^a,\\ \nabla\lambda^a_\alpha &= d\lambda^a_\alpha + \lambda^b_\alpha\widetilde{\omega}^a_b - \lambda^a_\beta\widetilde{\omega}^\beta_\alpha + \lambda_\alpha\widetilde{\omega}^a + \widetilde{\omega}^a_\alpha,\\ \nabla\lambda_\alpha &= d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\widetilde{\omega}^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha\widetilde{\omega}_a + \widetilde{\omega}_\alpha, \end{aligned}$$

а ковариантные производные выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \nabla^b_\alpha\lambda^a &= \lambda^{ab}_\alpha - \lambda^c\Gamma^{ab}_{c\alpha} + \lambda^a\lambda^c\Gamma^b_{c\alpha} - \Gamma^{ab}_\alpha,\\ \nabla^b_\beta\lambda^a_\alpha &= \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^c_\alpha\Gamma^{ab}_{c\beta} + \lambda^a_\gamma\Gamma^{\gamma b}_{\alpha\beta} - \lambda_\alpha\Gamma^{ab}_\beta - \Gamma^{ab}_{\alpha\beta},\\ \nabla^a_\beta\lambda_\alpha &= \lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_\gamma\Gamma^{\gamma a}_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha\Gamma^a_{b\beta} - \Gamma^a_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Находим внешние дифференциалы от ковариантных дифференциалов

$$D\nabla\lambda^a = \nabla\lambda^b \wedge \widetilde{\omega}_b^a - \nabla(\lambda^a\lambda^b) \wedge \widetilde{\omega}_b + T_{\alpha\beta}^{abc}\omega_b^\alpha \wedge \omega_c^\beta,$$

$$D\nabla\lambda_\alpha^a = \nabla\lambda_\alpha^b \wedge \widetilde{\omega}_b^a - \nabla\lambda_\beta^a \wedge \widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \nabla\lambda_\alpha \wedge \widetilde{\omega}^a + T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}\omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma,$$

$$D\nabla\lambda_\alpha = -\nabla\lambda_\beta \wedge \widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \nabla\lambda_\alpha^a \wedge \widetilde{\omega}_a + T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma.$$

При внешнем дифференцировании ковариантного дифференциала появляется объект $T = \{T_{\alpha\beta}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$ неабсолютных перенесений (ср.: [26]) с компонентами, зависящими от компонент объекта кривизны групповой связности и композиционно оснащающего квазитензора:

$$T_{\alpha\beta}^{abc} = R_{\alpha\beta}^{abc} + \lambda^e R_{e\alpha\beta}^{abc} - \lambda^a\lambda^e R_{e\alpha\beta}^{bc},$$

$$T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = R_{\alpha\beta\gamma}^{abc} - \lambda_\mu^a R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu bc} + \lambda_\alpha R_{\beta\gamma}^{abc} + \lambda_\alpha^e R_{e\beta\gamma}^{abc},$$

$$T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = R_{\alpha\beta\gamma}^{ab} - \lambda_\mu R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu ab} + \lambda_\alpha^c R_{c\beta\gamma}^{ab}.$$

Теорема. Объект $T = \{T_{\alpha\beta}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$ неабсолютных перенесений является псевдотензором, который содержит два подпсевдотензора $T_1 = \{T_{\alpha\beta}^{abc}\}$ и $T_2 = \{T_{\alpha\beta\gamma}^{abc}, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab}\}$.

Доказательство. Находим дифференциальные сравнения компонент объекта T по модулю базисных форм ω_a^α:

$$\Delta T_{\alpha\beta}^{abc} + (T_{\alpha\gamma}^{abe}\Lambda_\beta^{\gamma c} + T_{\gamma\beta}^{aec}\Lambda_\alpha^{\gamma b} - \lambda^e T_{\alpha\beta}^{abc} - \lambda^a T_{\alpha\beta}^{ebc})\omega_e \equiv 0,$$

$$\Delta T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} + (T_{\alpha\beta\mu}^{abe}\Lambda_\gamma^{\mu c} + T_{\alpha\mu\gamma}^{aec}\Lambda_\beta^{\mu b})\omega_e + T_{\alpha\beta\gamma}^{bc}\omega^a \equiv 0, \qquad (6)$$

$$\Delta T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} + (T_{\alpha\beta\gamma}^{cab} + T_{\alpha\beta\mu}^{ac}\Lambda_\gamma^{\mu b} + T_{\alpha\mu\gamma}^{cb}\Lambda_\beta^{\mu a})\omega_c \equiv 0.$$

Мы видим, что в дифференциальные сравнения (6) помимо самих компонент объекта T входят компоненты фундаментального объекта 1-го порядка Λ и оснащающего квазитензора λ. Таким образом, T является псевдотензором, его обращение в нуль инвариантно. Другими словами, равенства $T_{\alpha\beta}^{abc} = 0$, $T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = 0$, $T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = 0$ инвариантны в совокупности. В этом слу-

чае дифференциальные уравнения $\nabla\lambda_\alpha^a = 0$, $\nabla\lambda_\alpha = 0$ вполне интегрируемы и задают абсолютные параллельные перенесения аналога плоскости Картана (ср.: [31]), а уравнения $\nabla\lambda^a = 0$ вполне интегрируемы и задают абсолютные перенесения точки C.

Замечание. При исследовании грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей [27] были получены выражения компонент объекта кривизны, которые зависели от компонент фундаментального объекта 1-го порядка Λ. В дифференциальных сравнениях компонент объекта R объект Λ не входил, а для обобщенного случая в дифференциальных сравнениях присутствовали компоненты виртуального тензора (см.: [4]).

Список литературы

1. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с многообразием Грассмана // ДГМФ. 2000. Вып. 31. С. 8—11.

2. *Белова О. О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей центрированного многообразия Грассмана // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 10—13.

3. *Белова О. О.* Геометрическая характеристика индуцированных связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей // ДГМФ. 2008. Вып. 39. С. 13—18.

4. *Белова О. О.* Тензор кривизны связности в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // ДГМФ. 2009. Вып. 40. С. 18—28.

5. *Белова О. О.* Дифференциальная геометрия *(n-m)m*-комплексов в *n*-мерном проективном пространстве // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 17—27.

6. *Белова О. О.* Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 39—48.

7. *Белова О. О.* Параллельные перенесения в связностях трех типов для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2024. №54 (2). С. 57—69.

8. *Близникас В. И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 43—111.

9. *Бубякин И. В.* О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей в проективном пространстве P^5 с единственным торсом // Матем. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, №2. С. 3—12.

10. *Бубякин И.В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащих конечное число торсов // Матем. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, №4. С. 3—16.

11. *Жовтенко О.М.* Роль оснащения Бортолотти конгруэнции плоскостей // ДГМФ. 2000. Вып. 31. С. 31—36.

12. *Коннов В.В.* Об одном условии редуцируемости главных расслоений и его применении в проективной геометрии подмногообразий // Фундамент. и прикл. матем. 2001. Т. 7, №4. С. 1003—1035.

13. *Кулешов А.В.* Обобщенные связности на комплексе центрированных плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. 2010. Вып. 41. С. 75—85.

14. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. М., 1953. Вып. 2. С. 275—382.

15. *Лумисте Ю.Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Тр. по математике и механике. Учен. зап. Тартуского гос. ун-та. 1965. Вып. 177. С. 6—41.

16. *Никитина Е.С.*, *Бубякин И.В.* К геометрии многообразия Сегре *S(m, n)* // Матем. заметки СВФУ. 2004. С. 57—62.

17. *Полякова К.В.* Обобщение деривационных формул проективного пространства // ДГМФ. 2009. Вып. 40. С. 109—117.

18. *Полякова К.В.*, *Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

19. *Шевченко Ю.И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. 1978. Вып. 9. С. 124—133.

20. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

21. *Шевченко Ю.И.* Оснащения подмногообразий голономного и неголономного центропроективных многообразий // ДГМФ. 1997. Вып. 28. С. 86—98.

22. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

23. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 185—193.

24. *Akivis M.A.*, *Goldberg V.V.* Projective differential geometry of submanifolds // North-Holland Mathematical Library. 1992. Vol. 49.

25. *Belova O. O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. (New York). 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632 (пер. см.: Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 29—67).

26. *Belova O. O.* Tensor of nonabsolute displacements on Grassman-like manifold of centered planes // J. Math. Sci. (New York). 2011. Vol. 177, №5. P. 647—648 (пер. см.: Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, вып. 2. С. 3—5).

27. *Belova O. O.* The Grassmann-like manifold of centered planes // Math. Notes. 2018. Vol. 104, №6, P. 789—798 (пер. см.: Матем. заметки. 2018. Т. 104, вып. 6. С. 812—822).

28. *Belova O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Mathematics MDPI. 2021. Vol. 9, №7. Art. №782. https://doi.org/10.3390/math9070782.

29. *Mikeš J.*, *Stepanova E.*, *Vanžurova A. et al.* Differential geometry of special mappings. Olomouc, 2015.

30. *Polyakova K. V.* Connections in the bundles associated with the manifold of pairs of tangent and contact planes of a surface // Tr. Geom. Sem. Kazan Math. Soc. 1997. Vol. 23. P. 99—112.

31. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. (New York). 2009. Vol. 162, №5. P. 675—709 (пер. см.: Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 129—177).

32. *Polyakova K. V.* Second-order tangent-valued forms // Math. Notes. 2019. Vol. 105, №1. P. 71—79 (пер. см.: Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 1. С. 84—94).

33. *Polyakova K. V.* Prolongations generated by horizontal vectors // J. Geom. 2019. Vol. 110. Art. №53. https://doi.org/10.1007/s00022-019-0510-2.

34. *Shevchenko Y. I.* Degeneration of plane affine Stolyarov connections // J. Math. Sci. (New York). 2011. Vol. 177, №5. P. 753—757 (пер. см.: Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16, вып. 2. С. 155—161).

Для цитирования: *Белова О. О.* Объект неабсолютных перенесений для коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2026. №57 (2). С. 19—34. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-3.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 2010: 53A20, 53B15

O. O. Belova
Immanuel Kant Baltic Federal Univetsity, Russia
14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-3

Non-absolute transfer object for cocongruence $K_{(n-m)m}$

Submitted on August 19, 2025

In the present paper, we use the method of prolongations and coverages of G. F. Laptev with assignment of connections in the principal bundle.

In the n-dimensional projective space, the cocongruence $K_{(n-m)m}$ is considered. It has the following equations

$$\omega^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha a}\omega_{a}^{\beta}.$$

In the principal bundle associated with this cocongruence, a fundamental-group connection is constructed.

The compositional clothing of the cocongruence $K_{(n-m)m}$ is produced. It is given by $(n-m-1)$-planes C_{n-m-1}:

$$L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$$

and the point $C = A + \lambda^a A_a$.

This clothing induces a connection in the principal bundle associated with $K_{(n-m)m}$.

Expressions for the components of a curvature object, which is a pseudo-tensor, are found.

The object of non-absolute translations is introduced and investigated. It is proved that this object is a pseudo-tensor. In other words, the equalities

$$T_{\alpha\beta}^{abc} = 0, T_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = 0, T_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = 0$$

are invariant in total. In this case, the differential equations

$$\nabla\lambda_{\alpha}^{a} = 0, \nabla\lambda_{\alpha} = 0$$

are completely integrable and define absolute parallel displacements of the Cartan plane analog, and the equations

$$\nabla\lambda^a = 0$$

are completely integrable and define absolute parallel displacements of the point C.

In the author's previous studies of the Grassmann-like manifold of centered planes, expressions were obtained for the components of the curvature object which depended on the components of the fundamental object of the 1st order. In the differential comparisons for the components of the object *R*, the object Λ was not included, and for the generalized case, the components of the virtual tensor were present in the differential comparisons.

Keywords: cocongruence, connection, covariant differential, curvature object, object of non-absolute translations

References

1. *Belova, O. O.:* A connection in fibering associated with the Grassmann manifold. DGMF, 31, 8—11 (2000).

2. *Belova, O. O.:* The geometrical characteristic of induced connections of centered Grassmann manifold. DGMF, 37, 10—13 (2006).

3. *Belova, O. O.:* The geometrical characteristic for induced connections of Grassmann-like manifold of centered planes. DGMF, 39, 13—18 (2008).

4. *Belova, O. O.:* The curvature tensor of connection in the fibering over Grassmann-like manifold of centered planes. DGMF, 40, 18—28 (2009).

5. *Belova, O. O.:* Differential geometry of *(n-m)m*-dimensional complexes in *n*-dimensional projective space. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 220, 17—27 (2023).

6. *Belova, O. O.:* The deformation pseudotensor of connections in cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54(1), 39—48 (2023).

7. *Belova, O. O.:* Parallel transports in the connections of three types for cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54(2), 57—69 (2024).

8. *Bliznikas, V. I.:* Certain questions on the geometry of hypercomplexes of lines. Trudy Geometricheskogo Seminara, 6, 43—111 (1974).

9. *Bubyakin, I.V.:* About the structure of five-dimensional complexes of two-dimensional planes in projective space P^5 with a single developable surface. Math. Notes of NEFU, **24**:2, 3—12 (2017).

10. *Bubyakin, I.V.:* Anout the structure of complees of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surface. Math. Notes of NEFU, **24**:4, 3—16 (2017).

11. *Zhovtenko, O.M.*: The role of Bortollotti's equipment of the congruence of planes. DGMF, 31, 31—36 (2000).

12. *Konnov, V.V.:* On one condition of reducibility of principal bundles and its applicaton in projective geometry of submanifolds. Fund. i Prikl. Math., **7**:4, 1003—1035 (2001).

13. *Kuleshov, A.V.:* Generalized connections on the complex of centered planes in projective space. DGMF, 41, 75—85 (2010).

14. *Laptev, G.F.:* Differential geometry of immersed manifolds. Group-theoretical method of differential-geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., Moscow, 2, 275—382 (1953).

15. *Lumiste, Yu.G.:* Induced connections in immersed projactive and affine bundles. Transactions on Math. and Mech. Scientific Notes of Tartu University, 177, 6—41 (1965).

16. *Nikitina, E.S., Bubyakin, I.V.:* On the geometry of the Segre manifols *S(m, n)*. Math. Notes of NEFU. P. 57—62 (2004).

17. *Polyakova, K.V.:* Generalization for derivation formulas of projective space. DGMF, 40, 109—117 (2009).

18. *Polyakova, K.V.*, *Shevchenko, Yu.I.:* Laptev — Lumiste's method of giving connection and geometrical vectors. DGMF, 43, 114—121 (2012).

19. *Shevchenko, Yu.I.:* On the equipment of manifolds of planes in projective space. DGMF, 9, 124—133 (1978).

20. *Shevchenko, Yu.I.:* Equipment of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad, 1998.

21. *Shevchenko, Yu.I.:* Equipment of submanifolds of holonomic and non-holonomic center-projective manifolds. DGMF, 28, 86—98 (1997).

22. *Shevchenko, Yu.I.:* Equipment of centroprojective manifolds. Kaliningrad, 2000.

23. *Shevchenko, Yu.I.:* Laptev's and Lumiste's ways of connection representation in the principal fibre bundle. DGMF, 37, 185—193 (2006).

24. *Akivis, M.A.*, *Goldberg, V.V.:* Projective differential geometry of submanifolds. North-Holland Mathematical Library, 49 (1992).

25. *Belova, O. O.:* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci. (New York), **162**:5, 605—632 (2009).

26. *Belova, O. O.:* Tensor of nonabsolute displacements on Grassman-like manifold of centered planes. J. Math. Sci. (New York), **177**:5, 647—648 (2011).

27. *Belova, O. O.:* The Grassmann-like manifold of centered planes. Math. Notes, **104**:6, 789—798 (2018).

28. *Belova, O.:* Generalized affine connections associated with the space of centered planes. Mathematics MDPI, **9**:7, 782 (2021), https://doi.org/10.3390/math9070782.

29. *Mikeš, J.*, *Stepanova, E.*, *Vanžurova, A., et al.:* Differential geometry of special mappings. Olomouc, 2015.

30. *Polyakova, K. V.:* Connections in the bundles associated with the manifold of pairs of tangent and contact planes of a surface. Tr. Geom. Sem. Kazan Math. Soc., 23, 99—112 (1997).

31. *Polyakova, K. V.:* Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci. (New York), **162**:5, 675—709 (2009).

32. *Polyakova, K. V.:* Second-order tangent-valued forms. Math. Notes, **105**:1, 71—79 (2019).

33. *Polyakova, K. V.:* Prolongations generated by horizontal vectors. J. Geom., 110, 53 (2019), https://doi.org/10.1007/s00022-019-0510-2.

34. *Shevchenko, Y. I.:* Degeneration of plane affine Stolyarov connections. J. Math. Sci. (New York), **177**:5, 753—757 (2011).

For citation: Belova, O. O.: Non-absolute transfer object for cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, **57**:2, 19—34 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-3.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)