УДК 514.75

М. В. Кретов[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
kretov1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-9

Дифференцируемое отображение, порожденное комплексами эллиптических параболоидов

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматривается дифференцируемое отображение, порожденное комплексами эллиптических параболоидов. Геометрически охарактеризованы индикатриса и главное направление исследуемого отображения.

Ключевые слова: комплекс, эквиаффинное пространство, отображение, эллиптический параболоид, главное направление, индикатриса отображения, система уравнений Пфаффа, координатные векторы, репер, характеристическое многообразие.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассмотрим дифференцируемое отображение

$$f : C \in A_3 \to q \in \hat{\Pi}_3,$$

где C — вершина эллиптического параболоида, q — эллиптический параболоид (образующий элемент) комплекса $\hat{\Pi}_3$, рассмотренного в работе [1], когда координатные векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены и лежат в касательной плоскости эллиптического параболоида в его вершине, координатный вектор $\bar{e}_3$ направлен по главному диаметру образующего элемента так,

Поступила в редакцию 27.01.2020 г.

чтобы концы P_1 и P_2 соответственно векторов $\overline{e}_1 + \overline{e}_3$ и $\overline{e}_2 + \overline{e}_3$ лежали на параболоиде q, при этом индикатрисы векторов $\overline{e}_i\,(i, j, k, ... = \overline{1, 3})$ описывают линии с касательными, параллельными вектору $\overline{e}_1$, а точка P_1 принадлежит характеристическому многообразию [2].

Исследование отображения f будем проводить в репере $r = \{A, \overline{e}_i\}$, где A — вершина эллиптического параболоида, векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ сопряжены и лежат в касательной плоскости эллиптического параболоида в его вершине, вектор $\overline{e}_3$ направлен по главному диаметру образующего элемента так, чтобы концы P_1 и P_2 соответственно векторов $\overline{e}_1 + \overline{e}_3$ и $\overline{e}_2 + \overline{e}_3$ лежали на параболоиде q. При этом уравнение эллиптического параболоида согласно [1] будет иметь вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - x^3 = 0. \tag{1}$$

В репере r система уравнений Пфаффа отображения f, как показано в работах [1; 3; 4], будет иметь вид

$$\omega_1^1 = -\theta^1 - \theta^3,\ \omega_2^1 = \lambda\theta^2,$$
$$\omega^3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0, \tag{2}$$

где $\theta^1 = \omega^1$, $\theta^2 = \omega^2$, $\theta^3 = \omega_3^1$.

Отображение f существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента [5].

Пусть x^i — координаты точки C, тогда согласно работе [6] уравнения отображения f примут вид

$$a_{11} = 1 + 2x^1 + 2x^3 + 3(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 + 5x^1x^3 + <3>,$$
$$a_{22} = 1 - \lambda^2(x^2)^2 + <3>, \quad a_{33} = -(x^3)^2 + <3>,$$
$$a_{12} = a_{21} = -\lambda x^2 + \frac{3}{2}\lambda x^1x^2 - \frac{1}{2}\lambda x^2x^3 + <3>,$$

$$a_{13} = a_{31} = -\lambda x^3 + \frac{3}{2} x^1 x^3 + \frac{3}{2} (x^3)^2 + <3>, \qquad (3)$$

$$a_{23} = a_{32} = -\lambda x^2 x^3 + <3>,$$

$$a_1 = -x^1 - 2(x^1)^2 - \lambda(x^2)^2 + (x^3)^2 - 2x^1 x^3 + <3>,$$

$$a_2 = -x^2 + \lambda x^1 x^2 + <3>, \quad a_3 = x^1 x^3 + <3>,$$

где символ $<3>$ означает совокупность членов порядка малости не меньше трех относительно приращений координат точки области определения.

Теорема. *Индикатриса отображения f и конус $K_f(0)$ главных направлений этого отображения вырождаются в точку, совпадающую с вершиной образующего элемента исследованного в работе* [1] *комплекса эллиптических параболоидов.*

Согласно работе [3] система уравнений индикатрисы I_f отображения f имеет вид

$$x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^1(3x^1 - 2) = 0, \quad x^1(2x^1 - 1) = 0. \qquad (4)$$

По методике, изложенной в работе [6], находим систему уравнений $K_f(0)$ — главных направлений отображения f. Эта система уравнений имеет вид

$$x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \quad x^1(3x^1 + 5x^3) = 0, \quad x^1(x^1 + x^3) = 0. \qquad (5)$$

Из систем уравнений (4) и (5) непосредственно следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. *Виноградова Н.В., Кретов М.В.* Комплексы эллиптических параболоидов // ДГМФ. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 35—38.

2. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1974. Т. 6. С. 113—134.

3. *Кретов М.В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированные с многообразиями гиперквадрик // Междунар. конф. по геометрии и приложениям. Смолян, 1986. С. 23.

4. *Кретов М.В.* О подклассах дифференцируемого отображения, порожденного комплексами гиперквадрик // ДГМФ. Калининград, 2010. Вып. 41. С. 70—74.

5. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

6. *Кретов М.В.* О главных точках дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами гиперквадрик // ДГМФ. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 51—58.

M. V. Kretov[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
kretov1@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-9

Differentiable mapping generated by elliptic paraboloid complexes

Submitted on January 27, 2020

In three-dimensional equiaffine space, we consider a differentiable map generated by complexes with three-parameter families of elliptic paraboloids according to the method proposed by the author in the materials of the international scientific conference on geometry and applications in Bulgaria in 1986, as well as in works published earlier in the scientific collection of *Differ. Geom. Mnogoobr. Figur*. The study is carried out in the canonical frame, the vertex of which coincides with the top of the generating element of the manifold, the first two coordinate vectors are conjugate and lie in the tangent plane of the elliptic paraboloid at its vertex, the third coordinate vector is directed along the main diameter of the generating element so that the ends are, respectively, the sums of the first and third, and also the sums of the second and third coordinate vectors lay on a paraboloid, while the indicatrixes of all three coordinate vectors describe lines with tangents, parallel to the first coordinate vector. The existence theorem of the mapping under study is proved, according to which it exists and is determined with the arbitrariness of one function of one argument. The systems of equations of the indicatrix and the main directions of the mapping under consideration are obtained. The indicatrix and the cone of the main directions of the indicated mapping are geometrically characterized.

Keywords: complex, equiaffine space, mapping, elliptical paraboloid, main direction, display index, system of Pfaff equations, coordinate vectors, reference, characteristic variety.

References

1. *Vinogradova, N. V., Kretov, M. V.:* Complexes of elliptic paraboloids. DGMF. Kaliningrad. 41, 35—38 (2010).

2. *Malakhovsky, V. S., Makhorkin, V. V.:* Differential geometry of manifolds of hyperquadrics in *n*-dimensional projective space. Tr. Geom. Sem., 6, 113—134 (1974).

3. Kretov, M. V.: Differentiable mappings associated with hyperquadric varieties. International Conference on Geometry and Applications. Smolyan. P. 23 (1986).

4. *Kretov, M. V.:* On subclasses of a differentiable map generated by complexes of hyperquadrics. DGMF. Kaliningrad. 41, 70—74 (2010).

5. *Malakhovsky, V. S.:* Introduction to the theory of external forms. Kaliningrad (1978).

6. *Kretov, M. V.:* On the main points of differentiable mappings associated with complexes of hyperquadrics. DGMF. Kaliningrad. 37, 51—58 (2006).