

А. А. Иванов, А. И. Иванов

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ТУННельНОГО ТОКА ЧЕРЕЗ ДВОЙНУЮ КВАНТОВУЮ ТОЧКУ НА ЕЕ ДИНАМИКУ

Рассмотрен основанный на уравнении Линдблада способ учета влияния процесса измерения туннельного тока, протекающего через двойную квантовую точку, на ее динамику. Предложена самосогласованная процедура нахождения оператора детектируемого тока. Построен график, отражающий зависимость среднего значения туннельного тока от частоты измерений. Показано, что с увеличением частоты измерений величина туннельного тока стремится к нулю, что является проявлением квантового эффекта Зенона.

In this paper we study the backaction of measuring tunneling current through double quantum dot on its dynamics. We propose a new method for evaluating of measured current operator. Results are demonstrated as a graph representing measured stationary current through double quantum dot as a function of detection performance. It is shown that increasing of detection performance leads to quick decreasing of current through double quantum dot, which is consistent with quantum Zeno effect.

Ключевые слова: двойная квантовая точка, квантовый эффект Зенона.

Key words: double quantum dot, quantum Zeno effect.

В последнее время квантовые точки привлекают большое внимание исследователей как объекты, наиболее подходящие для изучения эволюции простых открытых квантовых систем. Более того, квантовые точки могут быть использованы для обработки квантовой информации. Их можно рассматривать как искусственные атомы, и тогда две или более связанные квантовые точки можно принять за искусственную молекулу. Системы из взаимодействующих квантовых точек представляют значительный практический интерес, так как они обладают высокой степенью свободы и, будучи различными способами соединены с проводниками, выполняют роль квантовых приборов.

Обратное действие процесса измерения на измеряемый объект — неотъемлемое свойство любой квантовой системы, в том числе и квантовых точек. Квантовый эффект Зенона — одно из проявлений такого обратного действия. В статье обсуждается этот эффект в рамках теоретической модели, называемой моделью слабовозмущающего измерения [1; 2]. В качестве объекта исследования рассматривается созданная в полупроводниковой наноструктуре двойная квантовая точка, в которой измеряется туннельный ток.

Положим, что измерение тока осуществляется с помощью полностью классического устройства: амперметром высокой частоты и чувствительности измерения. Основным параметром измерения, учитываемым в теории, является чувствительность измерений, определяемая согласно [3] параметром

$$\gamma = (\Delta t)^{-1} (\Delta I)^{-2},$$

где Δt — величина, обратная пропускной способности, ΔI — статистическая ошибка, характеризующая неточность детектирования среднего тока за период Δt .

Современные коммерческие амперметры характеризуются скоростями детектирования порядка 10^7 электрон/с, с пропускной способностью 10^4 Гц, что соответствует $\gamma = 10^{-10}$ с. Частота Раби, определяющая внутреннюю когерентную динамику двойной квантовой точки, характеризуется величиной $\Omega \approx 10^{10}$ Гц, и, следовательно, для таких измерений справедливо $\gamma \Omega \approx 1$. В рамках марковского приближения, предполагающего усреднение по состояниям окружения, состояния двойной квантовой точки описываются редуцированной матрицей плотности $\hat{\rho}$ и соответствующим эффективным оператором тока \hat{I} . Тогда среднее значение детектируемого тока определяется средним по ансамблю

$$\langle \hat{I} \rangle = \text{Tr}(\hat{I} \hat{\rho}).$$

Рассмотрим упрощенную модель двойной квантовой точки, представляющую собой две потенциальные ямы с внутренним барьером, позволяющим когерентное туннелирование между ними и двумя внешними барьерами, разрешающими некогерентное туннелирование между каждой точкой и подходящим к ней контактом. В режиме кулоновской блокады при низких

температурах в каждой точке может находиться не более одного избыточного электрона. Сильное межточечное кулоновское взаимодействие позволяет остановиться на трех ортогональных базисных состояниях: $|0\rangle \equiv |0,0\rangle$ – электрон отсутствует и в левой, и в правой точках, $|L\rangle \equiv |1,0\rangle$ – электрон в левой точке, $|R\rangle \equiv |0,1\rangle$ – электрон в правой точке.

В выбранном базисе введем операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}_L = |0\rangle\langle L|, \quad \hat{a}_L^+ = |L\rangle\langle 0|, \quad \hat{a}_R = |0\rangle\langle R|, \quad \hat{a}_R^+ = |R\rangle\langle 0|$$

и операторы числа электронов

$$\hat{n}_L = |L\rangle\langle L|, \quad \hat{n}_R = |R\rangle\langle R|, \quad \hat{n}_0 = |0\rangle\langle 0|. \quad (1)$$

Гамильтониан двойной квантовой точки выберем в виде

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\delta(\hat{n}_L - \hat{n}_R) + \Omega(\hat{a}_L^+\hat{a}_R + \hat{a}_R^+\hat{a}_L),$$

где δ – разность энергий в квантовых точках.

В рамках марковского приближения, предполагающего усреднение по состояниям окружения, управляющее уравнение для двойной квантовой точки имеет вид [3]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \hat{L}\hat{\rho}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}\hat{\rho} \equiv & -i(\hat{H}_0\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}_0) + \Gamma_L(\hat{a}_L^+\hat{\rho}\hat{a}_L - \frac{1}{2}(\hat{a}_L\hat{a}_L^+\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}_L\hat{a}_L^+)) + \\ & + \Gamma_R(\hat{a}_R\hat{\rho}\hat{a}_R^+ - \frac{1}{2}(\hat{a}_R\hat{\rho}\hat{a}_R^+ + \hat{\rho}\hat{a}_R^+\hat{a}_R)), \end{aligned} \quad (3)$$

где Γ_L – скорость туннелирования электрона из левого проводника в левую квантовую точку, Γ_R – скорость туннелирования электрона из правой квантовой точки в правый проводник. Уравнение эволюции (2) приводит к следующему квантовому уравнению движения для некоторого оператора \hat{n} :

$$\dot{\hat{n}} = \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} + \hat{M}\hat{n},$$

$$\hat{M}\hat{n} = i[\hat{H}_0, \hat{n}] + \Gamma_L(\hat{a}_L^+\hat{n}\hat{a}_L - \frac{1}{2}\{\hat{a}_L\hat{a}_L^+, \hat{n}\}) + \Gamma_R(\hat{a}_R\hat{n}\hat{a}_R^+ - \frac{1}{2}\{\hat{a}_R^+\hat{a}_R, \hat{n}\}).$$

В качестве оператора \hat{n} можно выбрать операторы (1). Пусть \hat{I}_{LO} – оператор тока, протекающего из левого контакта в левую квантовую точку, \hat{I}_{RL} – оператор туннельного тока между квантовыми точками, \hat{I}_{OR} – оператор тока из правой квантовой точки в правый контакт, тогда согласно [4]:

$$\dot{\hat{n}}_0 = \hat{I}_{OR} - \hat{I}_{LO}, \quad \dot{\hat{n}}_L = \hat{I}_{LO} - \hat{I}_{RL}, \quad \dot{\hat{n}}_R = \hat{I}_{RL} - \hat{I}_{OR}. \quad (4)$$

Запишем операторы в матричном виде, расположив базисные векторы в следующем порядке: $|0\rangle, |L\rangle, |R\rangle$. Тогда для операторов $\hat{n}_0, \hat{n}_L, \hat{n}_R$ находим:

$$\begin{aligned} \hat{n}_0 &= \begin{pmatrix} -\Gamma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_R \end{pmatrix}, \quad \hat{n}_L = \begin{pmatrix} \Gamma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\Omega \\ 0 & i\Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{n}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\Omega \\ 0 & -i\Omega & -\Gamma_R \end{pmatrix}, \\ \hat{I}_{LO} &= \begin{pmatrix} \Gamma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_{OR} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_R \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_{RL} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\Omega \\ 0 & i\Omega & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Определив оператор тока соотношением

$$\hat{I} = \frac{1}{3}(\hat{I}_{LO} + \hat{I}_{OR} + \hat{I}_{RL}), \quad (6)$$

с учетом (5) находим его явное выражение:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \Gamma_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\Omega \\ 0 & -i\Omega & \Gamma_R \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Этот оператор эрмитов. Измерение туннельного тока, протекающего через двойную квантовую точку, изменит ее динамику. Учтем влияние измерения тока на состояние двойной квантовой точки. С этой целью к уравнению эволюции (2) добавим дополнительное слагаемое (в форме Линдблада), учитывающее это влияние:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \hat{L}\hat{\rho} - \frac{\gamma}{8}[\hat{I}, [\hat{I}, \hat{\rho}]], \quad (8)$$

где оператор \hat{L} задается формулой (3), а \hat{I} – оператор наблюдаемого тока.

В стационарном случае $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = 0$, и из уравнения (8) в матричном виде находим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Gamma_L(-\rho_{11}) + \Gamma_R(\rho_{33}) &= 0, \\ \rho_{12}(-\Gamma_L/2 + a_{11,22} + n + i\alpha) + \rho_{13}(b + i\beta) &= 0, \\ \rho_{12}(b^* + i\beta) + \rho_{13}(-\Gamma_L/2 - \Gamma_R/2 + a_{11,33} + n - i\alpha) &= 0, \\ \rho_{21}(-\Gamma_L/2 + a_{11,22} + n - i\alpha) + \rho_{31}(b^* + i\beta) &= 0, \\ \rho_{32}(u - i\beta) + \rho_{23}(u^* + i\beta) + \rho_{11}\Gamma_L + \rho_{22}(2n) + \rho_{33}(-2n) &= 0, \\ \rho_{23}(-\Gamma_R/2 + a_{22,33} + 2n - 2i\alpha) + \rho_{33}(-u - i\beta) + \rho_{32}(-2m) + \rho_{22}(u + i\beta) &= 0, \\ \rho_{21}(b - i\beta) + \rho_{31}(-\Gamma_L/2 - \Gamma_R/2 + a_{11,33} + n + i\alpha) &= 0, \\ \rho_{22}(u^* - i\beta) + \rho_{32}(-\Gamma_R/2 + a_{22,33} + 2n + 2i\alpha) + \rho_{33}(-u^* + i\beta) + \rho_{23}(-2k) &= 0, \\ \rho_{23}(-u^* - i\beta) + \rho_{32}(-u + i\beta) + \rho_{33}(-\Gamma_R + 2n) + \rho_{22}(-2n) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{xx,yy} &\equiv -\gamma'(I_{xx} - I_{yy})^2, b \equiv -\gamma'(I_{22} + I_{33} - 2I_{11})I_{32} \\ u &\equiv -\gamma'(I_{33} - I_{22})I_{23}, n \equiv -\gamma'|I_{23}|^2, \\ m &\equiv -\gamma'I_{23}^2, k \equiv -\gamma'I_{32}^2, \gamma' = \gamma/72, \alpha = \delta/2, \beta = \Omega. \end{aligned}$$

Выбирая оператор \hat{I} в виде (7), полагая $\Gamma_L = \Gamma_R = \Omega$ и $\delta = 0$, приводим эту систему уравнений к виду

$$\begin{aligned} -\rho_{11} + \rho_{33} &= 0 \\ \rho_{12}(-1/2 - 2\gamma'\Omega) + \rho_{13}(-i\gamma'\Omega + i) &= 0, \\ \rho_{12}(i\gamma'\Omega + i) + \rho_{13}(-1 - \gamma'\Omega) &= 0, \\ \rho_{21}(-1/2 - 2\gamma'\Omega) + \rho_{31}(i\gamma'\Omega + i) &= 0, \\ \rho_{32}(-i\gamma'\Omega - i) + \rho_{23}(i\gamma'\Omega + i) + \rho_{11} + \rho_{22}(-2\gamma'\Omega) + \rho_{33}(2\gamma'\Omega) &= 0, \\ \rho_{23}(-1/2 - 3\gamma'\Omega) + \rho_{33}(i\gamma'\Omega - i) + \rho_{32}(-2\gamma'\Omega) + \rho_{22}(-i\gamma'\Omega + i) &= 0, \\ \rho_{21}(-i\gamma'\Omega - i) + \rho_{31}(-1 - \gamma'\Omega) &= 0, \\ \rho_{22}(i\gamma'\Omega - i) + \rho_{32}(-1/2 - 3\gamma'\Omega) + \rho_{33}(-i\gamma'\Omega + i) + \rho_{23}(-2\gamma'\Omega) &= 0, \\ \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Выражения для матричных элементов ρ_{ik} матрицы плотности, являющиеся решениями этой системы уравнений, можно представить в виде

$$\rho_{ik} = \Delta_{ik} / \Delta$$

где

$$y = \gamma' \Omega, \Delta = 69y/2 + 20y^2 + 13/4.$$

$$\Delta_{11} = \Delta_{33} = 21y/2 + 5y^2 + 1,$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{21} = \Delta_{31} = 0,$$

$$\Delta_{22} = 27y/2 + 10y^2 + 5/4,$$

$$\Delta_{23} = -\Delta_{32} = i(-5y^2 + 9y/2 + 1/2).$$

Таким образом, среднее значение тока в стационарном состоянии $\langle I_\infty \rangle$ легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \langle I_\infty \rangle &= \text{Tr}(\hat{I}\hat{\rho}) = I_{11}\rho_{11} + I_{23}\rho_{32} + I_{32}\rho_{23} + I_{33}\rho_{33}, \\ \frac{\langle I_\infty \rangle}{\Omega} &= \frac{(\Delta_{11} + \Delta_{33}) + i(\Delta_{32} - \Delta_{23})}{\Delta}, \\ \frac{\langle I_\infty \rangle}{\Omega} &= \frac{4}{y/9 + 13}. \end{aligned} \quad (10)$$

Представленная формула отражает зависимость среднего тока в стационарном состоянии от относительной частоты измерения. На основе этой формулы построен график, приведенный на рисунке (пунктирная линия).

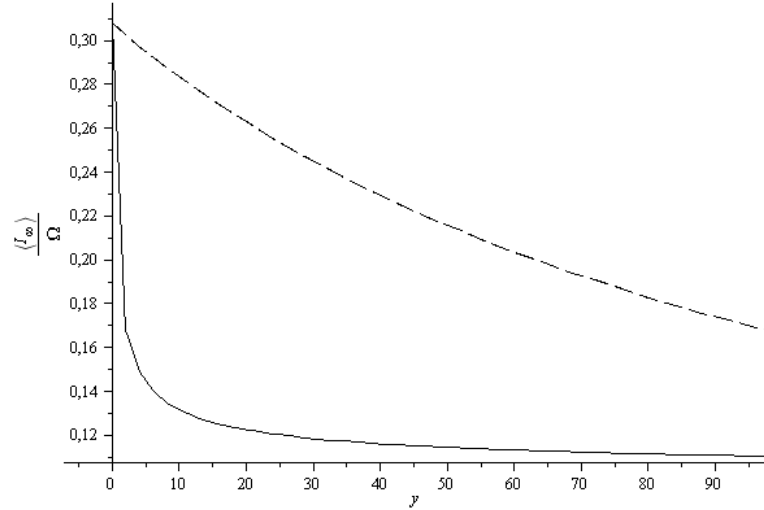


Рис. График зависимости среднего тока в стационарном состоянии от относительной частоты измерения для симметричного туннелирования $\Gamma_L = \Gamma_R = \Omega$ (пунктирная линия – ток в нулевом приближении, сплошная линия – самосогласованный ток)

Заметим, что формула (10) для среднего значения измеряемого тока получена в так называемом нулевом приближении, в котором оператор \hat{I} имеет вид (7). Найдем далее самосогласованное выражение для оператора измеряемого тока. С этой целью положим, что в процессе самосогласования структура оператора измеряемого тока, определяемая формулой (6), не изменяется и операторы I_{L0} , I_{0R} , I_{RL} в ней по-прежнему определяются согласно (4). Однако квантовое уравнение движения, на основе которого определяются операторы \hat{n}_0 , \hat{n}_L , \hat{n}_R , в этом случае примет другой вид

$$\dot{\hat{n}} = \frac{\partial \hat{n}}{\partial t} + \hat{M}\hat{n} - \frac{\gamma}{8}[\hat{I}, [\hat{I}, \hat{n}]].$$

Выбирая теперь в качестве оператора \hat{n} в этом уравнении оператор \hat{n}_L и учитывая (4), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
-\gamma' \langle I_{23} I_{32} \rangle &= \langle I_{L0} - I_{RL} \rangle_{22}, \\
-i\Omega - \gamma' \langle I_{23} I_{33} - I_{23} I_{22} \rangle &= \langle I_{L0} - I_{RL} \rangle_{23}, \\
\gamma' \langle I_{23} I_{32} \rangle &= \langle I_{L0} - I_{RL} \rangle_{23}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание структуру оператора измеряемого тока (6), эту систему уравнений перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
2\gamma' |I_{23}|^2 &= I_{22}, \\
i\Omega + \gamma' I_{23} \langle I_{33} - I_{22} \rangle &= I_{23}, \\
2\gamma' |I_{23}|^2 &= \Gamma_R - I_{33},
\end{aligned} \tag{11}$$

откуда получается кубическое уравнение относительно компоненты I_{22} детектируемого тока:

$$I_{22}^3 + \left(\frac{1}{\gamma'} - \Gamma_R \right) I_{22}^2 + \left(\frac{\Gamma_R^2}{4} - \frac{\Gamma_R}{2\gamma'} + \frac{1}{4\gamma'^2} \right) I_{22} - \frac{\Omega^2}{2\gamma'} = 0.$$

Будем рассматривать для I_{22} только решение, остающееся действительным при любых значениях параметров γ' , Γ_R . Решив это уравнение, легко найдем также из системы уравнений (11) компоненты I_{23} , I_{32} , I_{33} . Найденное таким путем матричное представление оператора тока является самосогласованным, поскольку оно входит в уравнение эволюции (8), на основе которого и определяется уравнениями (4).

Подставим найденные таким образом самосогласованные значения компонент оператора тока в систему уравнений (9) для матрицы плотности и учтем, что значения параметров в этой системе примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
a_{11,22} &= -\gamma' \langle I_{L0} - I_{22} \rangle, \quad a_{11,33} = -\gamma' \langle I_{L0} - \Gamma_R + I_{22} \rangle, \quad a_{22,33} = -\gamma' \langle I_{22} - \Gamma_R \rangle, \\
b &= \gamma' \langle I_{R0} - 2\Gamma_L \rangle \frac{i\Omega}{1 - \gamma' \langle I_{R0} - 2I_{22} \rangle}, \quad u = -\gamma' \langle I_{R0} - 2\Gamma_L \rangle \frac{i\Omega \langle I_{R0} - 2I_{22} \rangle}{1 - \gamma' \langle I_{R0} - 2I_{22} \rangle}, \\
n &= \gamma' \frac{\langle \Omega^2 \rangle}{\langle -\gamma' \langle I_{R0} - 2I_{22} \rangle \rangle}, \quad k = m = -\gamma' \frac{\langle \Omega^2 \rangle}{\langle -\gamma' \langle I_{R0} - 2I_{22} \rangle \rangle}, \quad \alpha = \frac{\delta}{2}, \quad \beta = \Omega.
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (9) с этим набором параметров, найдем самосогласованную стационарную матрицу плотности и по формуле $\langle I_\infty \rangle = \text{Tr}(\hat{I}\hat{\rho})$ вычислим самосогласованные значения тока в стационарном состоянии. Результаты расчета можно видеть на рисунке (непрерывная линия).

Из представленных на рисунке графиков видно, что $\langle I_\infty \rangle \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Это затухание тока происходит вследствие затухания межточечного когерентного транспорта электронов, причем самосогласованное решение предсказывает более быстрый спад тока. Физически механизм затухания обусловлен увеличением населенности на левой точке и блокировкой поступления новых электронов на точку. Такое поведение стационарного тока служит проявлением квантового эффекта Зенона.

Список литературы

1. Di'osi L. Weak measurements in quantum mechanics // Encyclopedia of Mathematical Physics / eds.: J.-P. Francoise [et al.]. Elsevier, Oxford, 2006. Vol. 4. P. 276.
2. Jacobs K., Steck D.A. // Contemp. Phys. 2006. Vol. 47. P. 279.
3. Bernad J.Z., Diosi L. et al. Simple Theory of measured current through quantum dots // E-print, URL: arxiv.org: 0707.2535v1
4. Novotny T., Prachar J. Charge conservation breaking within generalized master equation description of electronic transport through dissipative double quantum dots // E-print, URL: arxiv.org: 0902.2382v1

Об авторах

А.И. Иванов — д-р физ.-мат. наук, проф., РГУ им. И. Канта.
А.А. Иванов — студ., РГУ им. И. Канта.

Authors

A. Ivanov – Prof., IKSUR.
A. Ivanov – student, IKSUR.