

A. Kuleshov

SIX TYPES OF INDUCED GROUP CONNECTION
ON THE FAMILY OF CENTRED PLANES IN PROJECTIVE SPACE

Family of centered planes in projective space is investigated. Factor-bundles of the principal bundle, associated with this bundle, are described. It is shown, that composite equipment of this family induces 6 bunches of group connection. In each of this bunches one connection is allocated.

УДК 574.76

В. С. Малаховский

*(Российский государственный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

**ПРАВИЛЬНАЯ ПРОДОЛЖАЕМОСТЬ СИСТЕМЫ
ПФАФФОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ
МНОГООБРАЗИЙ ОСНАЩЕННЫХ
И ИНДУЦИРУЮЩИХ ФИГУР**

(К столетию со дня рождения Г. Ф. Лаптева)

Показано, что установленный Г. Ф. Лаптевым закон о правильной продолжаемости системы уравнений Пфаффа дифференцируемого многообразия в однородных и обобщенных пространствах [1, с. 323—326] необходимо соблюдать и при рассмотрении вырожденных многообразий [2, с. 41—43] оснащенных и индуцирующих фигур [3, с. 186—187].

В n -мерном аффинном пространстве A_n рассмотрены правильно продолжаемые системы уравнений Пфаффа m -мерных вырожденных многообразий некоторых типов линейных и квадратичных пар фигур $\{F_1, F_2\}$, когда фигура F_1 описывает m -мерное многообразие, а фигура F_2 — r -мерное многообразие ($r < m < n$).

Несоблюдение закона Г. Ф. Лаптева о правильной продолжаемости при исследовании вырожденных многообразий оснащенных или индуцирующих фигур приводит к некорректным результатам.

§1. Система уравнений Пфаффа вырожденного многообразия пар фигур в однородном пространстве

Рассмотрим в n -мерном однородном пространстве E_n [1, с. 285] вырожденное m -мерное многообразие простых неинцидентных пар фигур $F = \{F_1, F_2\}$ ранга N_1, N_2 [3, с. 181, 187].

Такое многообразие можно рассматривать как многообразие оснащенных фигур F_1 , так как задание фигуры F_1 по определению пары фигур однозначно определяет оснащающую фигуру F_2 . Обозначим его символом $(F_1, F_2)_{m,r}$ [2, с. 42].

Пусть фигура F_1 описывает m -мерное многообразие $\mathbf{M}_m^{(1)}$, а оснащающая фигура F_2 — r -мерное многообразие $\mathbf{M}_r^{(2)}$ ($r < m$).

Обозначим через $\Omega_1^{I_1}, \Omega_2^{I_2}$ структурные формы соответственно фигур F_1, F_2 ($I_1, J_1, K_1 = \overline{1, N_1}; I_2, J_2, K_2 = \overline{1, N_2}$).

Так как система уравнений стационарности каждой из фигур F_1, F_2 вполне интегрируема [1, с. 288], то

$$d\Omega_1^{I_1} = \Omega_1^{K_1} \wedge \Omega_{1,K_1}^{I_1}, \quad d\Omega_2^{I_2} = \Omega_2^{K_2} \wedge \Omega_{2,K_2}^{I_2}, \quad (1.1)$$

где формы Пфаффа $\Omega_{1,K_1}^{I_1}, \Omega_{2,K_2}^{I_2}$ однозначно определены структурными уравнениями фундаментальной группы G однородного пространства E_n [1, с. 281].

Не умаляя общности, можно считать формы Пфаффа Ω_1^i линейно независимыми формами многообразия $\mathbf{M}_m^{(1)}$, а формы

Дифференциальная геометрия многообразий фигур

Пфаффа $\Omega_2^{\hat{i}}$ — линейно независимыми формами многообразия $\mathbf{M}_r^{(2)}$ ($i, j, k, = \overline{1, m}; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \overline{1, r}$).

Система пфаффовых уравнений многообразий $\mathbf{M}_m^{(1)}$, $\mathbf{M}_r^{(2)}$ запишется соответственно в виде

$$\Omega_1^a = \lambda_i^a \Omega_1^i \quad (a, b, c = \overline{m+1, N_1}), \quad (1.2)$$

$$\Omega_2^{\hat{a}} = \mu_{\hat{i}}^{\hat{a}} \Omega_2^{\hat{i}} \quad (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \overline{r+1, N_2}). \quad (1.3)$$

Так как задание фигуры F_1 однозначно определяет фигуру F_2 , то

$$\Omega_2^{\hat{i}} \equiv 0 \pmod{\Omega_1^1, \dots, \Omega_1^m}. \quad (1.4)$$

Следовательно, система уравнений Пфаффа многообразия $(F_1, F_2)_{m,r}$ состоит из уравнений (1.2), (1.3) и уравнений

$$\Omega_2^{\hat{i}} = \nu_j^{\hat{i}} \Omega_1^j. \quad (1.5)$$

Замыкание уравнений (1.2), (1.3), (1.5) имеет вид:

$$\Delta \lambda_i^a \wedge \Omega_1^i = 0, \quad \Delta \mu_{\hat{i}}^{\hat{a}} \wedge \Omega_2^{\hat{i}} = 0, \quad \Delta \nu_j^{\hat{i}} \wedge \Omega_1^j = 0, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_i^a &= \nabla \lambda_i^a - \lambda_j^a \lambda_i^b \Omega_{1,b}^j + \Omega_{1,i}^a, \\ \Delta \mu_{\hat{i}}^{\hat{a}} &= \nabla \mu_{\hat{i}}^{\hat{a}} - \mu_{\hat{j}}^{\hat{a}} \mu_{\hat{i}}^{\hat{b}} \Omega_{2,\hat{b}}^{\hat{j}} + \Omega_{2,\hat{i}}^{\hat{a}}, \\ \Delta \nu_j^{\hat{i}} &= \nabla \nu_j^{\hat{i}} - \nu_k^{\hat{i}} \nu_j^a \Omega_{1,a}^k + \mu_{\hat{j}}^{\hat{a}} \nu_j^{\hat{j}} \Omega_{2,\hat{a}}^{\hat{i}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

а символы ∇ означают ковариантное дифференцирование.

Замечание. При исследовании вырожденного многообразия индуцирующих фигур в случае если структурные формы индуцируемой фигуры F_2 являются частью структурных форм индуцирующей фигуры F_1 , можно положить $\Omega_2^{\hat{i}} \equiv \Omega_1^{\hat{i}}$ и уравнения (1.5) исключить.

Многообразии $(F_1, F_2)_{m,r}$ ($r < m$) нельзя задавать системой уравнений Пфаффа

$$\Omega_1^a = \lambda_i^a \Omega_1^i, \quad \Omega_2^{I_2} = \mu_i^{I_2} \Omega_1^{\bar{i}}, \quad (1.8)$$

так как для ее подсистемы

$$\Omega_2^{I_2} = \mu_i^{I_2} \Omega_1^{\bar{i}} \quad (1.9)$$

нарушается закон Лаптева о правильной продолжаемости и она не определяет дифференцируемого многообразия $\mathbf{M}_r^{(2)}$ фигур F_2 .

Действительно, замыкание уравнений (1.9) имеет вид

$$\Theta_i^{I_2} \wedge \Omega_1^i = 0, \quad (1.10)$$

где

$$\Theta_i^{I_2} \stackrel{def}{=} \nabla \mu_i^{I_2} - \mu_j^{I_2} \lambda_i^a \Omega_{1,a}^{\bar{j}}; \quad \Theta_p^{I_2} \stackrel{def}{=} -\mu_i^{I_2} (\lambda_p^a \Omega_{1,a}^{\bar{i}} + \Omega_{1,p}^{\bar{i}}) \quad (1.11)$$

$$(p, q = \overline{r+1, m}).$$

Разрешая (1.10) по лемме Картана [4, с. 14—15], получим

$$\Theta_i^{I_2} = h_{ij}^{I_2} \Omega_1^j, \quad \Theta_p^{I_2} = h_{pj}^{I_2} \Omega_1^j \quad (h_{ij}^{I_2} = h_{ji}^{I_2}). \quad (1.12)$$

Из (1.12) следует, что вторая группа уравнений (1.11) устанавливает нетривиальные связи на фундаментально независимые групповые параметры фундаментальной группы G пространства E_n . Приходим к противоречию. Из (1.10), (1.11) следует, что система пфаффовых уравнений (1.9) относительно неинвариантна, а значит, не определяет многообразия $\mathbf{M}_r^{(2)}$ (см. [6, с. 75—76]).

§2. Вырожденное многообразие $(A, B)_{m,r}$ в A_n

Рассмотрим в n -мерном аффинном пространстве A_n -вырожденное многообразие пар точек $\{A, B\}$.

Дифференциальная геометрия многообразий фигур

Определение 2.1. Многообразием $(A, B)_{m,r}$ называется m -мерное вырожденное многообразие пар точек $\{A, B\}$, когда точка A описывает m -мерную поверхность, а точка B — r -мерную поверхность ($r < m$).

Отнесем многообразие $(A, B)_{m,r}$ к реперу $\{A, \vec{e}_I\}$ $(I, J, K = \overline{1, n})$, совместив начало с точкой A , а конец вектора \vec{e}_n — с точкой B , т. е.

$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{e}_n. \quad (2.1)$$

Имеем

$$d\vec{A} = \omega^I \vec{e}_I, \quad d\vec{B} = \theta^I \vec{e}_I, \quad (2.2)$$

где

$$\theta^I \stackrel{def}{=} \omega^I + \omega_n^I. \quad (2.3)$$

Из (2.2) следует, что формы Пфаффа ω^I, θ^I являются структурными формами соответственно точек A, B .

Не умаляя общности, можно считать

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^m \neq 0, \quad \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^r \neq 0. \quad (2.4)$$

Тогда

$$\omega^a = \lambda_i^a \omega^i, \quad \theta^{\hat{a}} = \mu_{\hat{i}}^{\hat{a}} \theta^{\hat{i}}, \quad (2.5)$$

где индексы принимают следующие значения

$$i, j, k = \overline{1, m}; \quad \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \overline{1, r}; \quad a, b, c = \overline{m+1, n}; \quad (2.6)$$

$$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \overline{r+1, n}.$$

Так как при фиксации точки A (т. е. при $\omega^i = 0$) точка B фиксируется, то формы Пфаффа $\theta^{\hat{i}}$ являются линейными комбинациями форм ω^i , т. е.

$$\theta^{\hat{i}} = \nu_k^{\hat{i}} \omega^k. \quad (2.7)$$

Система пфаффовых уравнений (2.5), (2.7) определяет вырожденное многообразие пар точек — многообразие $(A, B)_{m,r}$. Ее замыкание имеет вид

$$\Delta \lambda_i^a \wedge \omega^i = 0, \quad \Delta \mu_i^{\bar{a}} \wedge \theta^{\bar{i}} = 0, \quad \Delta \nu_k^{\bar{i}} \wedge \omega^k = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_i^a &= \nabla \lambda_i^a - \lambda_k^a \lambda_i^b \omega_b^k + \omega_i^a, \\ \Delta \mu_i^{\bar{a}} &= \nabla \mu_i^{\bar{a}} - \mu_k^{\bar{a}} \mu_i^{\bar{b}} \omega_b^{\bar{k}} + \omega_i^{\bar{a}}, \\ \Delta \nu_k^{\bar{i}} &= \nabla \nu_k^{\bar{i}} - \nu_j^{\bar{i}} \lambda_k^a \omega_a^j + \mu_j^{\bar{a}} \nu_k^{\bar{j}} \omega_a^{\bar{i}}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

а символом ∇ обозначено здесь и в дальнейшем ковариантное дифференцирование.

Из (2.8) следует, что система пфаффовых уравнений (2.5), (2.7) правильно продолжается.

Замечание. Система пфаффовых уравнений

$$\Theta^I = \mu_i^I \omega^{\bar{i}} \quad (2.10)$$

не определяет r -мерного дифференцируемого многообразия, описанного точкой B , так как она приводит, как было отмечено в §1, к нетривиальным связям на свободные параметры аффинной группы преобразований пространства A_n . Проиллюстрируем это на примере двумерного многообразия $(A, B)_{2,1}$ в трехмерном аффинном пространстве A_3 . Замыкая уравнения

$$\Theta^I = \mu_1^I \omega^1 \quad (I = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

с использованием уравнений структуры аффинного пространства [5, с. 11—12] и формул (1.1), (1.2), $\omega^3 = \lambda_1^3 \omega^1 + \lambda_2^3 \omega^2$, получим

$$(\nabla \mu_1^I - \mu_1^I \lambda_1^3 \omega_3^1) \wedge \omega^1 - \mu_1^I (\omega_2^1 + \lambda_2 \omega_3^1) \wedge \omega^2 = 0. \quad (2.12)$$

Разрешая это уравнение по лемме Картана, приходим к уравнениям Пфаффа

Дифференциальная геометрия многообразий фигур

$$\nabla \mu_1^I - \mu_1^I \lambda_1^3 \omega_3^1 = h_{11}^I \omega^1 + h_{12}^I \omega^2; \quad (2.13)$$

$$-\mu_1^I (\omega_2^1 + \lambda_2 \omega_3^1) = h_{12}^I \omega^1 + h_{22}^I \omega^2. \quad (2.14)$$

Обозначим

$$\pi^I \stackrel{def}{=} \omega^I \Big|_{\omega^1=0, \omega^2=0}, \quad \pi_I^K \stackrel{def}{=} \omega_I^K \Big|_{\omega^1=0, \omega^2=0}. \quad (2.15)$$

В силу выбора репера

$$\pi^1 = 0, \quad \pi^2 = 0, \quad \pi^3 = 0, \quad \pi_3^1 = 0, \quad \pi_3^2 = 0, \quad \pi_3^3 = 0, \quad (2.16)$$

$$\pi_1^1 \neq 0, \quad \pi_1^2 \neq 0, \quad \pi_1^3 \neq 0, \quad \pi_2^1 \neq 0, \quad \pi_2^2 \neq 0, \quad \pi_2^3 \neq 0. \quad (2.17)$$

Но из (2.14) следует

$$\mu_1^I \pi_2^1 = 0. \quad (2.18)$$

Так как $|\mu_1^1| + |\mu_1^2| + |\mu_1^3| \neq 0$ (точка B описывает линию), то

$$\pi_2^1 = 0, \quad (2.19)$$

что противоречит неравенствам (2.17).

§3. Вырожденное многообразие $(A, \varphi)_{m,r}$ в P_n

Определение 3.1. Многообразием $(A, \varphi)_{m,r}$ в n -мерном проективном пространстве P_n называется t -мерное многообразие, образующим элементом которого является точка A , описывающая t -мерную поверхность, и неинцидентная ей гиперплоскость φ , описывающая r -параметрическое семейство ($r < t < n$).

Отнесем многообразие $(A, \varphi)_{m,r}$ к реперу $\{\bar{A}_\alpha\} (\alpha, \beta, \gamma = \overline{0, n})$, совместив вершину A_0 с точкой A и расположив вершины A_I ($I, J, K = \overline{1, n}$) в гиперплоскости φ . Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам (т.е. при фиксации образующего элемента $\{A, \varphi\}$), а символами

π_α^β — значения компонент ω_α^β дериационных формул репера при фиксации образующего элемента. В силу выбора репера

$$\delta \bar{A}_0 = \pi_0^0 \bar{A}_0; \delta \bar{A}_I = \pi_I^K \bar{A}_K. \quad (3.1)$$

Следовательно, формы Пфаффа

$$\omega_0^I \stackrel{def}{=} \omega^I, \omega_I^0 \stackrel{def}{=} \omega_I \quad (3.2)$$

являются структурными формами фигуры $\{A, \varphi\}$.

Не умаляя общности, можно считать формы Пфаффа ω^i и ω_i ($i, j, k = \overline{1, m}; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \overline{1, r}$) линейно независимыми. Система уравнений Пфаффа многообразия $(A, \alpha)_{m, r}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \omega^a = \lambda_i^a \omega^i, \omega_{\hat{a}} = \mu_{\hat{a}}^{\hat{i}} \omega_{\hat{i}}, \omega_i = \nu_{ik} \omega^k \\ (a, b, c = \overline{m+1, n}; \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \overline{r+1, n}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Замыкая (3.3), получим:

$$\Delta \lambda_i^a \wedge \omega^i = 0, \Delta \mu_{\hat{a}}^{\hat{i}} \wedge \omega_{\hat{i}} = 0, \Delta \nu_{ik} \wedge \omega^k = 0, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_i^a &= \nabla \lambda_i^a - \lambda_k^a \lambda_i^b \omega_b^k + \omega_i^a, \\ \Delta \mu_{\hat{a}}^{\hat{i}} &= \nabla \mu_{\hat{a}}^{\hat{i}} + \mu_{\hat{a}}^{\hat{k}} \mu_{\hat{b}}^{\hat{i}} \omega_{\hat{k}}^{\hat{b}} - \omega_{\hat{a}}^{\hat{i}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\Delta \nu_{ik} = \nabla \nu_{ik} + 2\nu_{ik} \omega_0^0 - \nu_{ij} \lambda_k^a \omega_a^j - \mu_{\hat{a}}^{\hat{k}} \nu_{kk} \omega_{\hat{i}}^{\hat{a}}.$$

Из (3.4) следует, что система пфаффовых уравнений (3.3) многообразия $(A, \varphi)_{m, r}$ правильно продолжаема.

§4. Конгруэнция квадратичных элементов в A_n с вырождающейся поверхностью центров

Определение 4.1. Конгруэнцией квадратичных элементов в n -мерном аффинном пространстве A_n называется $(n-1)$ -мерное многообразие невырожденных $(n-2)$ -мерных квадрик $Q_{n-2} \in A_n$.

Определение 4.2. Многообразием $V_{n-1}^{(m)}$ называется конгруэнция центральных квадратичных элементов, гиперплоскости которых образуют $(n-1)$ -параметрическое семейство, а центры квадрики $Q_{n-2} \in V_{n-1}^{(m)}$ описывают m -мерную поверхность $(m < n-1)$.

Отнесем многообразию $V_{n-1}^{(m)}$ к реперу $\{A, \vec{e}_I\}$ $(I, J, K = \overline{1, n})$, где A — центр квадратичного элемента Q_{n-2} , а векторы \vec{e}_i $(i, j, k = \overline{1, n-1})$ расположены в его гиперплоскости.

Уравнения квадратичного элемента Q_{n-2} запишутся в виде

$$\begin{cases} a_{ij}x^i x^j - 1 = 0, \\ x^n = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

В силу выбора репера

$$\pi^I = 0, \quad \pi_i^n = 0, \quad \nabla a_{ij} \stackrel{def}{=} \delta a_{ij} - a_{kj} \pi_i^k - a_{ik} \pi_j^k = 0. \quad (4.2)$$

Обозначим

$$\omega_i \stackrel{def}{=} \omega_i^n. \quad (4.3)$$

Так как гиперплоскости квадрики Q_{n-2} образуют $(n-1)$ -параметрическое семейство, то

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{n-1} \neq 0. \quad (4.4)$$

Принимая формы Пфаффа ω_i , являющиеся частью структурных форм квадрики Q_{n-2} , за базисные формы многообразия $V_{n-1}^{(m)}$, запишем его систему пфаффовых уравнений в виде:

$$\begin{aligned} \nabla a_{ij} = b_{ij}^k \omega_k, \quad \omega^a = \lambda_i^a \omega^{\hat{i}}, \quad \omega^{\hat{i}} = \mu^{\hat{i}k} \omega_k \\ (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \overline{1, m}; \quad a, b, c = \overline{m+1, n}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Замыкание уравнений (4.5) имеет вид

$$\Delta b_{ij}^k \wedge \omega_k = 0, \quad \Delta \lambda_i^a \wedge \omega^i = 0, \quad \Delta \mu^{\bar{ik}} \wedge \omega_k = 0, \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta b_{ij}^k &= db_{ij}^k - b_{ij}^k \omega_n^n - (a_{hj} \delta_i^k + a_{ih} \delta_j^k) \omega_n^h, \\ \Delta \lambda_i^a &= d\lambda_i^a - \lambda_j^a \lambda_i^b \omega_b^j + \omega_i^a, \\ \Delta \mu^{\bar{ik}} &= \nabla \mu^{\bar{ik}} - \mu^{\bar{ik}} \omega_n^n + \lambda_j^a \mu^{\bar{jk}} \omega_a^i. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.6) следует, что система уравнений Пфаффа многообразия $V_{n-1}^{(m)}$ правильно продолжаема.

Заключение

Из изложенного вытекает, что при исследовании вырожденных многообразий оснащенных и индуцирующих фигур необходимо соблюдать закон Г.Ф. Лаптева о правильной продолжаемости системы уравнений Пфаффа для многообразий каждой из фигур, составляющих оснащение фигуры F_1 или индуцируемых ею. Некорректности, приводящие к нарушению правильной продолжаемости системы пфаффовых уравнений r -мерного многообразия оснащающих фигур F_2 , когда основная фигура F_1 описывает многообразие размерности $m > r$, возникают, как правило, тогда, когда все структурные формы фигуры F_2 линейно выражаются через r структурных форм фигуры F_1 , тогда как эти структурные формы не являются частью структурных форм фигуры F_2 . Хотя формально множество фигур F_2 при таком задании r -мерно, но оно не является дифференцируемым многообразием, так как задается относительно неинвариантной системой пфаффовых уравнений.

Список литературы

1. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

Дифференциальная геометрия многообразий фигур

2. Малаховский В. С. О вырожденных многообразиях пар фигур в трехмерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1973. Вып. 3. С. 41—49.

3. Малаховский В. С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНТИ АН СССР. 1969. Т. 2. С. 179—206.

4. Малаховский В. С. Введение в теорию внешних форм I. Калининград, 1978.

5. Малаховский В. С. Введение в теорию внешних форм II. Калининград, 1980.

6. Малаховский В. С. О голономном расслоении реперов на дифференцируемом многообразии // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2004. Вып. 35. С. 69—78.

V. Malakhovsky

TAME PROLONGATION OF SYSTEM OF PFAFFIAN
EQUATIONS OF DEGENERATE MANIFOLDS
OF EQUIPPED AND INDUCED FIGURES

It is shown that the rule of G. F. Laptev of tame prolongation of the system of pfaffian equations of differentiable manifold in homogeneous and generalized spaces is necessary fulfill also for degenerated manifolds of equipped and induced figures.

УДК 514.75

О. М. Омелян

*(Российский государственный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

**О СВЯЗНОСТИ 1-ГО ТИПА, ИНДУЦИРОВАННОЙ
НА СЕМЕЙСТВЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ
ПЛОСКОСТЕЙ, ОБОБЩАЮЩЕМ ПОВЕРХНОСТЬ**

В работе способом Лаптева — Лумисте задана ассоциированная связность в расслоении, ассоциированном с семейством центрированных плоскостей, обоб-