P_I к V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$:

$$P_I = (A_0 A_{m+1} \dots A_{n+1}) \qquad (18)$$

полярно сопряжена нормали второго рода $P_{II} = L^*_{m-1}$ относительно абсолюта Q.

Из условия $A_{n+1} \in Q$ в силу (18) и (12) следует, что

$$A_{n+1} = (\Gamma_{m+1} \cap P_I) \cap Q. \qquad (19)$$

4. Учитывая (18), замечаем, что изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ оказывается внутренним образом оснащенной нормалями первого рода. Поэтому к такой поверхности можно применить результаты статьи [2]. При этом точка A_{n+1} геометрически определена в смысле (19), причем рассматриваемая изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ с учетом ([2], (28), (32)) и (4) не может быть m-поверхностью каждого из классов S^4_m и $S_{m,\tau}$ (в силу выбора репера R).

Из (10), (19) и (17) замечаем, что каждой точке $A_0 \in V_m$ отвечает гиперплоскость

$$G_n = (A_1 A_2 \dots A_{n+1}) = P_{II} \cup \widetilde{L}_{n-m-1} \cup A_{n+1}. \qquad (20)$$

Если точка $X = x^{\alpha} A_{\alpha} + x^{a} A_{a} + x^{n+1} A_{n+1}$ описывает $Ch\, G_n$-характеристический элемент гиперплоскости G_n, то из

$$(dX \; A_1 A_2 \dots A_{n+1}) = 0$$

в силу ([1], (3)), (3), (9), (15) и (20) получаем

$$x^{\alpha} \overset{0}{A}_{\alpha\beta} + x^{a} \overset{0}{A}_{a\beta} = 0. \qquad (21)$$

Из (21), ([2], (28)), (3), (10) и (16) вытекают следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ является m-поверхностью класса S^3_m.

Т е о р е м а 2. Изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ является m-поверхностью класса S^1_m (S^2_m) тогда и только тогда, когда $Ch\, G_n \supset P_{II}$ ($Ch\, G_n \supset \widetilde{L}_{n-m-1}$).

Заметим, что изотропная m-поверхность V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$ каждого из классов S^1_m и S^2_m обладает теми же геометрическими свойствами, которые определяются соответствующими инвариантными связностями в [3].

Библиографический список

1. И в л е в Е.Т. Об одной классификации неизотропных многомерных поверхностей в невырожденных неевклидовых пространствах // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1994. Вып. 25. С. 51-55.

2. И в л е в Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Там же, 1991. Вып. 22. С. 49-56.

3. И в л е в Е.Т. Об инвариантных расслоениях и связностях в них на оснащенной поверхности проективного пространства // Там же, 1992. Вып. 23. С. 41-45.

4. И в л е в Е.Т. Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности // Там же, 1974. Вып. 4. С. 6-28.

УДК 514.76+517.93

ПРОБЛЕМА ТРИВИАЛЬНОСТИ ДЛЯ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В.А. И г о ш и н

(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

Решена проблема локальной изоморфности квазигеодезического потока (КП) - обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка простейшему (тривиальному) КП, который описывается координатным уравнением $d^2x^i/dt^2 = 0$.

1. Все объекты будут предполагаться дифференцируемыми достаточное число раз. Пусть M - многообразие, $\dim M = n-1$; $(M, f) \equiv f$ - квазигеодезический поток на M, локально (в пределах каждой карты (U, x^i), $1 \le i \le n-1$) представленный уравнением

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i\left(x^j, t, \frac{dx^j}{dt}\right). \qquad (1)$$

Как известно [1] - [4], в пространстве событий $\bar{M} = M \times R$ КП f существует пульверизация $\mathcal{D}$, геодезические $(x(\tau), t(\tau)) = \widetilde{x}(\tau)$ которой моделируют своими проекциями $x(\tau) = P_\tau \widetilde{x}(\tau)$ траектории $x(t)$ КП f: $x(t) = P_\tau \widetilde{x}(\tau(t))$. При этом пульверизация в естественных координатах (адаптированных к произведению)

Зак. 1606

описывается уравнением

$$d^2x^\alpha/d\tau^2 = \mathcal{D}^\alpha(x^\beta,\ dx^\beta/d\tau), \qquad (2)$$

где $1 \le \alpha, \beta \le n$; $x^n = t$; $\mathcal{D}^i = \dot t^2 f^i(x^j, t, \dot x^j/\dot t)$, $\mathcal{D}^n \equiv 0$

(точка - дифференцирование по каноническому параметру τ).

В пульверизационном пространстве $(\bar M, \mathcal{D})$, иначе говоря, в общем пространстве путей (геодезических) определена связность (см., например, [5], [6])

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x,\dot x) = -\tfrac{1}{2}\dot\partial_\beta \dot\partial_\gamma \mathcal{D}^\alpha, \qquad (3)$$

где $\dot\partial_\beta = \partial/\partial \dot x^\beta$.

Четверка

$$((\bar M, \mathcal{D}), P_\tau, M) \equiv ((\bar M, \Gamma), P_\tau, M)$$

- геодезическая (пульверизационная) модель КП (M, f).

О п р е д е л е н и е 1. Связность Γ назовем (стандартной) связностью КП (M,f). Все объекты, определяемые связностью Γ КП (M,f), будем также называть объектами КП (M,f).

В соответствии с этим определены, в частности, следующие объекты КП (M,f) ($1 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \sigma \le n$):

1) проективные параметры КП

$$\Pi^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{1}{n+1}(\delta^\alpha_\beta \Gamma^\sigma_{\sigma\gamma} + \delta^\alpha_\gamma \Gamma^\sigma_{\sigma\beta} + \dot x^\alpha \Gamma^\sigma_{\sigma\beta\gamma}), \qquad (4)$$

где $\Gamma^\alpha_{\sigma\beta\gamma} = \dot\partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$;

2) тензор кривизны КП

$$K^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\delta\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\Gamma^\sigma_{\delta\beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\delta\gamma}\Gamma^\sigma_\beta \big|_{[\beta,\gamma]}, \qquad (5)$$

где $\Gamma^\sigma_\beta = -\frac{1}{2}\dot\partial_\beta \mathcal{D}^\sigma$;

3) тензор проективной кривизны КП

$$W^\alpha_{\beta\gamma\xi} = K^\alpha_{\beta\gamma\xi} + \frac{1}{n+1}\delta^\alpha_\xi K_{\beta\gamma} + \frac{\dot x^\alpha}{n+1}\dot\partial_\xi K_{\beta\gamma} + \frac{1}{n^2-1}\delta^\alpha_\beta (nK_{\xi\gamma} + K_{\gamma\xi} + \dot x^\sigma \dot\partial_\xi K_{\gamma\sigma})\big|_{[\beta,\gamma]}, \qquad (6)$$

где $K_{\alpha\beta} = K^\sigma_{\beta\sigma\alpha}$;

4) тензор

$$B^\alpha_{\beta\gamma\xi} = \dot\partial_\xi \Pi^\alpha_{\beta\gamma}, \qquad (7)$$

характеризующий "отклонение" геометрии пространства $(\bar M, \Gamma)$ от геометрии обычного пространства аффинной связности.

З а м е ч а н и е. Пользуясь формулами (1)-(7), нетрудно выразить все введенные выше объекты КП (M,f) через правые части уравнения (1). В целях экономии места эти выражения не приводятся.

7*

2. Пусть (M,f) и (N,h) - два КП, $(\bar M, \Gamma)$ и $(\bar N, H)$ - их связности. Диффеоморфизм $\Phi: \bar M \to \bar N = N \times R$ называется (см., например, [7], [8]) точечным изоморфизмом КП f и h, если он переводит интегральные кривые первого в интегральные кривые второго.

Из свойств пульверизационного моделирования следует

Т е о р е м а 1. Диффеоморфизм $\Phi: \bar M \to \bar N$ тогда и только тогда осуществляет точечный изоморфизм КП f и h, когда он является проективным изоморфизмом связностей Γ и H этих потоков.

О п р е д е л е н и е 2. Изоморфизм $\Phi: M \to N$ КП (M,f) и (N,h) будет называться аффинным или проективным в зависимости от того, является Φ аффинным или проективным изоморфизмом связностей Γ и H этих потоков.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы КП (M,f) был локально аффинно изоморфен тривиальному КП, необходимо и достаточно, чтобы функции f^i его уравнения (I) удовлетворяли условиям:

1) f^i - полиномы 2-ой степени по "скоростям" $\lambda^j = dx^j/dt$

$$f^i = -A^i(x^\ell, t) - 2B^i_j(x^\ell, t)\lambda^j - \Gamma^i_{jk}(x^\ell, t)\lambda^j\lambda^k;$$

2) тензор кривизны КП (M,f) тождественно равен нулю $K^\alpha_{\beta\gamma\delta} \equiv 0$.

З а м е ч а н и е. По отношению к M величины A^i - компоненты векторного поля, B^i_j - аффинорного, Γ^i_{jk} - аффинной связности (все объекты, вообще говоря, зависят от t).

Условие 2 теоремы 2 распадается на следующие ($K^n_{\beta\gamma\delta} = 0$):

$$K^i_{jk\ell} = \partial_k \Gamma^i_{\ell j} + \Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{\ell j}\big|_{[j,k]} = 0, \qquad (8)$$

$$K^i_{jn\ell} = -K^i_{nj\ell} = \partial_n \Gamma^i_{\ell j} - \nabla_j B^i_\ell = 0, \qquad (9)$$

где ∇_j - ковариантное дифференцирование в связности Γ^i_{jk};

$$K^i_{jnn} = -K^i_{njn} = \partial_n B^i_j + B^s_j B^i_s - \nabla_j A^i = 0, \qquad (10)$$

$$K^i_{jkn} = -K^i_{kjn} = \nabla_k B^i_j - \nabla_j B^i_k = 0. \qquad (11)$$

С л е д с т в и е 1. Для одномерного КП (M,f) условия теоремы 2 принимают вид:

I) $f = -A(x,t) - 2B(x,t)\lambda - C(x,t)\lambda^2$,

2) $\partial C/\partial t - \partial B/\partial x = 0, \qquad (9')$

$$\partial B/\partial t - \partial A/\partial t + B^2 - AC = 0. \qquad (10')$$

Следствие 2. Для того, чтобы одномерный однородный 2-ой степени КП $f = -C(x,t)\lambda^2$ был аффинно изоморфен тривиальному КП $h=0$, необходимо и достаточно, чтобы КП f был автономным ($\partial C/\partial t = 0$).

Замечание. Условия (8) - (11) - тензорные по отношению к M; в частности, таковыми же являются (9′) и (10′).

Следствие 3. КП (M,f) допускает полную (n^2+n)-мерную алгебру Ли g_{n^2+n} точечных инфинитезимальных аффинных симметрий, подобную аффинной алгебре с образующими

$$X_{\alpha\beta} = x^\alpha \partial_\beta, \quad X_\alpha = \partial_\alpha \quad (1 \le \alpha, \beta \le n = \dim M + 1),$$

тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям теоремы 2.

Примеры одномерных КП. а) Свободная частица $x'' = 0$ (штрих - производная по t). б) Свободно падающая частица $x'' + g = 0$ ($g = \mathrm{const}$). в) Простой гармонический осциллятор $x'' + \omega^2 x = 0$ ($\omega = \mathrm{const}$). г) Форсированный гармонический осциллятор

$$x'' + \omega^2 x = f_0 \cdot \sin \Omega t \qquad (f_0 = \mathrm{const},\ \Omega = \mathrm{const}).$$

д) Демпфированный гармонический осциллятор

$$x'' + 2kx' + \omega^2 x = 0 \quad (k = \mathrm{const}).$$

е) Падающая частица в вязкой среде $x'' + kx' + g = 0$.

ё) КП с уравнением

$$x'' + 2U(t)x' + V(t)x + W(t) = 0.$$

Проверка условий 1 и 2 следствия 1 показывает: 1) КП из примеров а), б), д) при $k^2 = \omega^2$ и ё) при любых функциях U, W и $V = \partial U/\partial t + U^2$ локально аффинно тривиальны и, следовательно, допускают аффинную алгебру $\mathrm{aff}(\mathbb{R}^2)$; 2) КП из примеров в), г), д) при $k^2 \ne \omega^2$, е) и ё) при $V \ne \partial U/\partial t + U^2$ не являются аффинно тривиальными.

3. Теорема 1 и классические теоремы (см., например, [5], [6]) приводят к следующему результату

Теорема 3. Необходимое и достаточное условие локальной проективной изоморфности (эквивалентности) КП (M,f) тривиальному КП заключается в выполнении соотношений $B^\alpha_{\beta\gamma\xi} = W^\alpha_{\beta\gamma\xi} = 0$ при $n > 2$, или

$$B^\alpha_{\beta\gamma\xi} = 0, \quad 2(\nabla_\beta K_\alpha - \nabla_\alpha K_\beta) + (\nabla_\beta K_{\alpha\sigma} - \nabla_\alpha K_{\beta\sigma}) \cdot \dot{x}^\sigma = 0,$$

где

$$K_\beta = K^\sigma_{\beta\sigma\delta}\, \dot{x}^\delta, \quad \text{при } n = 2.$$

Условие $B^\alpha_{\beta\gamma\xi} = 0$ равносильно тому, что функции f^i из уравнения (1) являются полиномами 3-й степени относительно $\lambda^j = dx^j/dt$. При $n = 2$ условия теоремы 3 принимают вид, указанный в [9] и повторенный в [10]. Здесь этот результат Трессе [9] получается в качестве приложения метода пульверизационного моделирования, который - в отличие от методов [9] и [10] - "работает" для случая КП произвольной размерности.

В заключение, остается заметить: 1) КП (M,f) тогда и только тогда удовлетворяет условиям теоремы 3, когда он допускает полную (n^2+2n)-мерную алгебру Ли точечных инфинитезимальных проективных симметрий, подобную стандартной проективной алгебре с образующими

$$X_\alpha = x^\alpha x^\sigma \partial_\sigma, \quad X_{\alpha\beta} = x^\alpha \partial_\beta, \quad \widetilde{X}_\alpha = \partial_\alpha;$$

2) к одномерным КП, допускающим проективную алгебру, подобную алгебре

$$g_8 = \langle \partial_x, \partial_t, x\partial_x, x\partial_t, t\partial_x, t\partial_t,$$
$$x^2\partial_x + xt\partial_t,\ xt\partial_x + t^2\partial_t \rangle \cong sl(3,\mathbb{R}),$$

относятся КП всех примеров от а) до ё) включительно; для каждого КП из примеров а) - е) и ё) при $2U = t^{-1}$, $V = t^{-2}$ и $W = 0$ допускаемые ими алгебры симметрий найдены в работе [11].

Библиографический список

1. Игошин В.А. О квазигеодезических потоках / Горьков. ун-т. Горький, 1989. Деп. в ВИНИТИ, 1990. №392-В90. 67с.

2. Игошин В.А. О пульверизационном моделировании/ Горьков. ун-т. Горький, 1989. Деп. в ВИНИТИ, 1990. №1238-В90. 36 с.

3. Игошин В.А. Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Докл. АН СССР. 1991. Т.320. № 3. С.531-535.

4. Игошин В.А. Пульверизационное моделирование. I. // Известия вузов. Матем. 1992. № 6. С.63-71.

5. Лаптев Б.Л. Производная С. Ли для объектов, яв-

ляющихся функциями точки и направления // Известия физико-математического общества и НИИ математики и механики при Казанском ун-те. Казань, 1938. Т.10. Сер.3. С.3-38.

6. Yano K. The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam: North-Holland. Publ. Co.; Groningen: P. Noordhoff L.T.D. 1957. 299 p.

7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

8. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Знание, 1991. 48 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика". № 7).

9. Tresse A. Determination des invariants ponctuels de l'équation differentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. Leipzig, 1986.

10. Cartan E. Sur les varietes a connexion projective // Bull. Soc. math. de France. 1924. V.52. p.205-241.

11. Aguirre M., Krause J. SL(3,R) as the group of symmetry transformations for all one-dimensional linear systems. III. Realizations of the Lie Algebra // J. Math. Phys. 1988. V.29. №8. p.1746-1752.

УДК 514.75

О КОНФОРМНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ОБЛАСТЯМИ ЕВКЛИДОВА n-ПРОСТРАНСТВА

Г.В.Кузнецов

(Тульский государственный педагогический институт)

Конформные соответствия между областями евклидова n-пространства - это хорошо изученный и важный для применений раздел дифференциальной геометрии.

В работе рассматриваются конформное соответствие между двумя областями Ω, $\bar{\Omega}$ евклидова пространства E^n и гиперраспределение Δ^{n-1} в области Ω. Находится необходимое и достаточное условие, при котором интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ являются прямыми, где $\vec{e}_n \perp \Delta^{n-1}$.

Пусть $f: \Omega \to \bar{\Omega}$ - точечное невырожденное дифференцируемое отображение области Ω пространства E^n в область $\bar{\Omega}$ пространства E_n, так что для точки $x \in \Omega$ имеем $y = f(x) \in \bar{\Omega}$. Тогда в области Ω будет определено гиперраспределение Δ^{n-1}, ортогональное прямой (xy). В отображении f ему будет соответствовать гиперраспределение $\bar{\Delta}^{n-1}$ области $\bar{\Omega}$. Присоединим к точке x множество реперов $\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_n\}$ $(i, j, k = 1, \dots, n-1)$ с началом в этой точке. Положим $\vec{a}_A = f^*_x(\vec{e}_A)$, где $A, B, C = \overline{1,n}$ и f^*_x - касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f^*_x - невырожденное отображение, то векторы $\vec{a}_A$ независимы и образуют репер в области $\bar{\Omega}$ с началом в точке y.

Уравнения перемещения реперов $\{x, \vec{e}_A\}$ и $\{y, \vec{a}_A\}$ запишем в виде
$$\begin{cases} d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, & d\vec{e}_A = \omega^B_A \vec{e}_B; \\ d\vec{y} = \bar{\omega}^A \vec{a}_A, & d\vec{a}_A = \bar{\omega}^B_A \vec{a}_B; \end{cases} \tag{1}$$
1-формы, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства (см., напр., [1]):
$$d\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B, \quad d\omega^A_B = \omega^C_B \wedge \omega^A_C, \quad d\bar{\omega}^A = \bar{\omega}^B \wedge \bar{\omega}^A_B, \quad d\bar{\omega}^A_B = \bar{\omega}^C_B \wedge \bar{\omega}^A_C. \tag{2}$$

Основная система уравнений, определяющая распределение Δ^{n-1}, запишется в виде
$$\omega^n_i = \Lambda_{ij}\omega^j + \Lambda_i \omega^n,$$
т.е. Δ^{n-1} натянуто на векторы $\vec{e}_i$, а $\vec{e}_n$ им перпендикулярен.

Обозначим через $g_{AB} = (\vec{e}_A, \vec{e}_B)$ и $\bar{g}_{AB} = (\vec{a}_A, \vec{a}_B)$ метрические тензоры областей Ω и $\bar{\Omega}$ в точках x и y соответственно.

В силу согласованного выбора реперов в областях Ω и $\bar{\Omega}$ 1-формы ω^A и $\bar{\omega}^A$, определяющие перемещение точек x и y, связаны равенствами
$$\bar{\omega}^A = \omega^A. \tag{3}$$
Эти равенства представляют собой основные дифференциальные уравнения рассматриваемого соответствия $f: \Omega \to \bar{\Omega}$. Дифференцируя их внешним образом и применяя лемму Картана, получим
$$\bar{\omega}^A_B - \omega^A_B = h^A_{BC}\,\omega^C, \tag{4}$$
где $h^A_{BC} = h^A_{CB}$ - симметричный тензор деформации евклидовой связности при точечном соответствии f.

Предположим, что отображение $f: \Omega \to \bar{\Omega}$ является конформным, т.е.