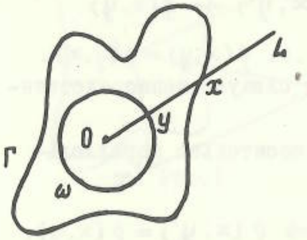
ражение $\gamma:\ \omega \to \Gamma$,при котором $x = \gamma(y)$,где $\{x\} = L(y) \cap \Gamma$, а y -любая точка на ω , взаимно однозначно и взаимно непрерывно.Поэтому Γ - замкнутая кривая.



Кроме этого, Γ-невыпуклая кривая,так как в противном случае

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

для любой тройки из Ω ,что противоречит выбору μ .

Список литературы

1.Б у з е м а н Г. Геометрия геодезических.Физматгиз,М.,1962.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

В.Г. И в а н о в

ОБОБЩЕННЫЙ ПАРАЛЛЕЛИЗМ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе рассматривается класс пространств с обобщенным параллелизмом на проективной плоскости P^2 с выделенной гладкой кривой,дается аналитический признак этого класса.

1.Пусть M_2 -дифференцируемое многообразие класса C^∞ .Обозначим через $G_1(M_2)$ многообразие линейных элементов многообразия M_2 ,элемент которого будем называть направлением.Расслоение $G_1(M_2)$ является проективизацией касательного расслоения: его можно получить из касательного расслоения $T(M_2)$,заменив каждое касательное линейное пространство размерности два одномерным проективным пространством.

О п р е д е л е н и е.Обобщенным параллелизмом на дифференцируемом многообразии M_2 называется произвольная гладкая тривиализация

$$t:\ G_1(M_2) \longrightarrow P^1 \qquad (1)$$

расслоения $G_1(M_2)$ линейных элементов многообразия M_2.

Ограничение отображения t на каждом слое P^1_x , $x \in M_2$ расслоения $G_1(M_2)$ является диффеоморфизмом $[x]: P^1_x \to P^1$. Пусть $a \in P^1$,тогда $t^{-1}(a)$ есть множество линейных элементов,взятых по одному из каждого слоя P^1_x над точкой $x \in M_2$,т.е. множество направлений $G_1(M_2)$ разбивается на классы:одному классу принадлежат те линейные элементы,которые при отображении t имеют один и тот же образ на P^1. Направления, принадлежащие одному классу, будем называть параллельными или соответствующими друг другу в силу обобщенного параллелизма. Таким образом, задание на M_2 обобщенного параллелизма означает, что на $G_1(M_2)$ задано такое соответствие, при котором каждому фиксированному направлению, выбранному в какой-то точке многообразия M_2, в любой другой точке многообразия ставится в соответствие однозначно вполне определенное направление.

О п р е д е л е н и е. Интегральные кривые поля параллельных направлений называются автопараллельными кривыми.

Обобщенный параллелизм в аффинном пространстве совпадает с "обычным" понятием параллельности в аффинном пространстве, в этом случае тривиализация (1) такая, что ограничение ее на каждом слое расслоения линейных элементов является линейным изоморфизмом.

Отнесем многообразие M_2 к такому семейству реперов, что вектор e_1 подвижного репера $R=\{x, e_1, e_2\}$ всякий раз принадлежит полю параллельных направлений. Относительно такого семейства реперов необходимым и достаточным признаком обобщенного параллелизма является полная интегрируемость уравнения $\omega_1^2=0$ [1], а уравнения структуры обобщенного параллелизма имеют вид:

$$
\begin{aligned}
d\omega^1 &= \omega_1^1\wedge\omega^1+\omega_2^1\wedge\omega^2,\\
d\omega^2 &= \omega_1^2\wedge\omega^1+\omega_2^2\wedge\omega^2,\\
d\omega_1^2 &= \omega_1^2\wedge\omega_1^1+\omega_2^2\wedge\omega_1^2,\\
d\omega_2^2 &= \omega_1^2\wedge\omega_2^1+K\omega^1\wedge\omega^2+Q\omega_1^2\wedge\omega^2,\\
d\omega_1^1 &= \omega_2^1\wedge\omega_1^2+K\omega^1\wedge\omega^2,\\
d\omega_2^1 &= \omega_1^1\wedge\omega_2^1+\omega_2^1\wedge\omega_2^2+R\omega^2\wedge\omega^1+E\,\omega_1^2\wedge\omega^2,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где K, Q, R – относительные инварианты, а величина E вместе с Q образует обобщенный тензор $\{E, Q\}$.

Система (2) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования – входящие в нее величины K, Q, R, E составляют систему объектов, инвариантно связанных с обобщенным параллелизмом, что позволяет дать по ним общую классификацию обобщенного параллелизма на M_2.

2. Пусть в уравнениях структуры (2) относительный инвариант K равен нулю, $K=0$. Тогда можно показать, что $R=0$ и система (2) приводится к виду:

$$
\begin{aligned}
d\omega^1 &= \omega_1^1\wedge\omega^1+\omega_2^1\wedge\omega^2,\\
d\omega^2 &= \omega_1^2\wedge\omega^1+\omega_2^2\wedge\omega^2,\\
d\omega_1^2 &= \omega_1^2\wedge\omega_1^1+\omega_2^2\wedge\omega_1^2,\\
d\omega_2^2 &= \omega_1^2\wedge\omega_2^1+Q\omega_1^2\wedge\omega^2,\\
d\omega_1^1 &= \omega_2^1\wedge\omega_1^2,\\
d\omega_2^1 &= \omega_1^1\wedge\omega_2^1+\omega_2^1\wedge\omega_2^2+E\omega_1^2\wedge\omega^2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где величины Q и E подчинены дифференциальным уравнениям:

$$dQ+Q(2\omega_2^2-\omega_1^1)=Q_2\omega^2+Q_{\bar 2}\omega_1^2, \tag{4}$$

$$dE+E(3\omega_2^2-2\omega_1^1)-Q\omega_2^1=E_2\omega^2+E_{\bar 2}\omega_1^2. \tag{5}$$

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть на проективной плоскости P^2 задана произвольная гладкая кривая $\mathcal{L}$. Зададим параллелизм следующим образом: прямые проективной плоскости будем считать параллельными, если точка их пересечения принадлежит выделенной кривой $\mathcal{L}$. Отнесем проективную плоскость к подвижному реперу, состоящему из четырех точек M_0, M_1, M_2, E, нормированных так, что $M_0+M_1+M_2=E$, совместив вершину M_1 этого репера с текущей точкой, заданной кривой, которая является центром связки параллельных прямых и расположив точки M_1, M_2 на касательной к кривой $\mathcal{L}$. Деривационные формулы движения репера имеют вид:

$$
\begin{aligned}
dM_0 &= -\theta_0^0 M_0 - \theta_0^1 M_1 - \theta_0^2 M_2, \\
dM_1 &= -\theta_1^0 M_0 - \theta_1^1 M_1 - \theta_1^2 M_2, \\
dM_2 &= -\theta_2^0 M_0 - \theta_2^1 M_1 - \theta_2^2 M_2,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где формы $\theta_\mu^\lambda \ (\lambda, \mu, \nu \ldots = 0,1,2)$ удовлетворяют соотношению

$$\theta_0^0 + \theta_1^1 + \theta_2^2 = 0. \tag{7}$$

Компоненты инфинитезимального перемещения репера θ_μ^λ являются инвариантными формами проективной группы и определены структурными уравнениями Картана

$$d\theta_\mu^\lambda = \theta_\nu^\lambda \wedge \theta_\mu^\nu, \tag{8}$$

выражающими условие полной интегрируемости системы дифференциальных уравнений (6) движения репера.

Полная система дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемый параллелизм с выделенной кривой на проективной плоскости, относительно репера нулевого порядка имеет вид:

$$
\begin{cases}
\theta_1^0 = 0, \\
\theta_2^0 \wedge \theta_1^2 = 0.
\end{cases}
\tag{9}
$$

Формы θ_1^2 определяют смещение вершины M_1 по кривой $\mathcal{L}$. Продолжения (9) приводят к следующим уравнениям:

$$\theta_2^0 = A\theta_1^2, \tag{10}$$

$$dA + A(2\theta_2^2 - \theta_1^1 - \theta_0^0) = A_2\theta_1^2, \tag{11}$$

$$dA_2 + A_2(3\theta_2^2 - 2\theta_1^1 - \theta_0^0) + 3A\theta_2^1 - 3A^2\theta_0^2 = A_{22}\theta_1^2, \tag{12}$$

$$\Delta A_{22} \wedge \theta_1^2 = 0.$$

С учетом (10) уравнения (8) примут вид:

$$
\begin{aligned}
d\theta_0^0 &= A\theta_1^2 \wedge \theta_0^2, \\
d\theta_0^1 &= (\theta_1^1 - \theta_0^0) \wedge \theta_0^1 + \theta_2^1 \wedge \theta_0^2, \\
d\theta_0^2 &= \theta_1^2 \wedge \theta_0^1 + (\theta_2^2 - \theta_0^0) \wedge \theta_0^2, \\
d\theta_1^2 &= \theta_1^2 \wedge \theta_1^1 + \theta_2^2 \wedge \theta_1^2, \\
d\theta_1^1 &= \theta_2^1 \wedge \theta_1^2, \\
d\theta_2^1 &= A\theta_0^1 \wedge \theta_1^2 + \theta_1^1 \wedge \theta_2^1 + \theta_2^1 \wedge \theta_2^2, \\
d\theta_2^2 &= A\theta_0^2 \wedge \theta_1^2 + \theta_1^2 \wedge \theta_2^1.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Рассмотрим формы ω_1^1, ω_2^2, определенные равенствами

$$\omega_1^1 = \theta_1^1 - \theta_0^0, \quad \omega_2^2 = \theta_2^2 - \theta_1^1.$$

Тогда $d\theta_1^2 = \theta_1^2 \wedge \omega_1^1 + \omega_2^2 \wedge \theta_1^2$, а внешний дифференциал формы ω_1^1 имеет вид:

$$d\omega_1^1 = (\theta_2^1 + A\theta_0^2) \wedge \theta_1^2.$$

Сделаем подстановку $\theta_2^1 \to \omega_2^1 - A\theta_0^2$, при которой $(13)_{2,3}$ удовлетворяются и

$$
\begin{aligned}
d\omega_2^2 &= \theta_1^2 \wedge \omega_2^1 - 3A\theta_1^2 \wedge \theta_0^2, \\
d\omega_2^1 &= \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 + \omega_2^1 \wedge \omega_2^2 + A_2\theta_1^2 \wedge \theta_0^2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, если ввести в рассмотрение формы ω, определенные равенствами

$$
\begin{aligned}
&\omega^1 = \theta_0^1, \quad \omega^2 = \theta_0^2, \quad \omega_1^2 = \theta_1^2, \\
&\omega_1^1 = \theta_1^1 - \theta_0^0, \quad \omega_2^2 = \theta_2^2 - \theta_0^0, \quad \omega_2^1 = \theta_2^1 + A\theta_0^2,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

то в силу (13) они подчинены уравнениям структуры (3), где

$$Q = -3A\,, \quad E = A_2\,. \tag{15}$$

В силу (11),(12),(14) величины A и A_2 удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA + A\,(2\omega_2^2 - \omega_1^1) = A_2\,\omega_1^2\,, \tag{16}$$

$$dA_2 + A_2\,(3\omega_2^2 - 2\omega_1^1) + 3A\,\omega_2^1 = 6A^2\omega^2 + A_{22}\,\omega_1^2\,,$$

тогда Q, E подчинены дифференциальным уравнениям (4), (5), где

$$\begin{aligned} &Q_2 = 0\,, \quad Q_{\hat{2}} = -3A_2\,, \\ &E_2 = 6A^2\,, \; E_{\hat{2}} = A_{22}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

С учетом (15),(17) имеем

$$Q_{\hat{2}} = -3E\,, \; E_2 = \frac{2}{3}\,Q^2.$$

Таким образом, параллелизм в P^2 с выделенной гладкой кривой является обобщенным параллелизмом, удовлетворяющим условиям:

$$K = 0\,, \quad Q_2 = 0\,, \quad Q_{\hat{2}} = -3E\,, \quad E_2 = \frac{2}{3}Q^2. \tag{18}$$

Условия (18) являются необходимыми, покажем, что они и достаточны, т.е. если имеем обобщенный параллелизм со структурными уравнениями (2) и условия (18), то можно построить формы θ_β^α, которые будут являться инвариантными формами проективной группы и подчинены уравнениям (13), где объект A удовлетворяет дифференциальному уравнению (11), а продолжение A подчинено (12).

Положим

$$A = -\frac{1}{3}\,Q\,, \quad A_2 = E \tag{19}$$

и рассмотрим формы

$$\theta_0^1 = \omega^1, \;\; \theta_0^2 = \omega^2, \;\; \theta_1^2 = \omega_1^2\,, \;\; \theta_0^0 = -\frac{1}{3}\,(\omega_1^1 + \omega_2^2),$$

$$\theta_1^1 = \frac{1}{3}(2\omega_1^1 - \omega_2^2)\,, \; \theta_2^2 = \frac{1}{3}(2\omega_2^2 - \omega_1^1)\,, \; \theta_2^1 = \omega_2^1 - A\,\omega^2.$$

Тогда будут справедливы (14) и выполняется соотношение (7). В силу (14),(19),(18),(4) объект A удовлетворяет дифференциальному уравнению (11) и с учетом (5) объект A_2 подчинен дифференциальному уравнению (12). Ясно, что внешние дифференциалы форм θ_0^1, θ_0^2, θ_1^2 удовлетворяют соотношениям $(13)_{2,3,4}$. В силу (2),(11),(14),(19) получаем

$$d\theta_0^0 = -\frac{1}{3}\,(\omega_2^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + Q\,\omega_1^2 \wedge \omega^2) = A\,\theta_1^2 \wedge \theta_0^2\,,$$

$$d\theta_1^1 = \frac{1}{3}\,(2\omega_2^1 \wedge \omega_1^2 - \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + 3A\,\omega_1^2 \wedge \omega^2) = \omega_2^1 \wedge \omega_1^2 + A\,\omega_1^2 \wedge \omega^2 =$$

$$= \theta_2^1 \wedge \theta_1^2\,,$$

$$d\theta_2^2 = \frac{1}{3}\,(2\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 - 6A\,\omega_1^2 \wedge \omega^2 - \omega_2^1 \wedge \omega_1^2) = A\,\theta_0^2 \wedge \theta_1^2 + \theta_1^2 \wedge \theta_2^1\,,$$

$$d\theta_2^1 = \omega_2^1 \wedge (\omega_2^2 - \omega_1^1) + A_2\,\omega_1^2 \wedge \omega^2 - dA \wedge \omega^2 - A\,\omega_1^2 \wedge \omega^1 -$$

$$- A\,\omega_2^2 \wedge \omega^2 = A\,\theta_0^1 \wedge \theta_1^2 + \theta_1^1 \wedge \theta_2^1 + \theta_2^1 \wedge \theta_2^2\,.$$

Таким образом, в силу теоремы [2] имеем, что обобщенный параллелизм, заданный на дифференцируемом многообразии M_2, при условии (18) является параллелизмом с выделенной гладкой кривой на проективной плоскости.

Т е о р е м а. Обобщенный параллелизм на дифференцируемом многообразии M_2 тогда и только тогда является параллелизмом с выделенной кривой на проективной плоскости P^2, если выполнены условия (18).

Список литературы

1. И в а н о в В.Г. Пространства с обобщенным параллелизмом.-В сб.: Геометрия погруженных многообразий. М. 1978, с.47-54.

2. Ф а в а р Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. Пер. с франц. (Под ред. М.А.Акивиса). М., ИЛ, 1960.