Т е о р е м а 3. В ассоциированном расслоении возникает внутренняя связность.

Подобъекты объекта связности Γ могут быть охарактеризованы следующим образом: I/Подобъект $\{\Gamma^{ij}, \Gamma^{ik}_j\}$ объекта связности Γ определяет проекцию гиперплоскости $P+dP$,смежной к гиперплоскости P параболоида, на гиперплоскость P параллельно направлению $\bar{e}$; 2/Подобъект $\{\Gamma^k\}$ объекта связности Γ определяет проекцию одномерных направлений $\bar{e}+d\bar{e}$, смежных $\bar{e}$,на направление $\bar{e}$ параллельно гиперплоскости P параболоида; 3/Подобъект $\{\Gamma^{ik}_j\}$ объекта связности определяет проекцию (n-I)-мерных направлений $E+dE$ смежных к $E=\{\bar{e}_i\}$, на исходные направления E ,параллельно направлению; 4/Направление $\bar{e}$ инвариантно относительно преобразования параллельного переноса; 5/ характеристическую точку M гиперплоскости P параболоида переносить параллельно в связности Γ нельзя.

Обозначим через $\bar{\ell}$ -прямую с направляющим вектором $\bar{e}$ и проходящую через точку M .Из 5/ заключаем, что нормаль ℓ гиперплоскости P параболоида переносить параллельно в связности Γ нельзя.

Список литературы

I.Малаховский В.С.,Остиану Н.М. Поля геометрических объектов в однородных и обобщенных пространствах.Деп. ВИНИТИ АН СССР.М.,1979,№3640-79 ДРП.

2.Шевченко Ю.И.Параллельные перенесения на поверхности.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.10.Калининград,1979,с.154-158.

3.Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.12. Калининград,1981,с.126-130.

4.Лаптев Г.Ф. Структурные уравнения главного расслоенного многообразия.-Тр.Геометрич.семинара,1969,т.2 с.161-178.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.15 1984

УДК 514.75

М.Г. З о г р а б я н

К ГЕОМЕТРИИ ОБЩЕГО ОСНОВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В статье рассматривается орбита G-пространства $\mathcal{M}(n)$ множества квадратных матриц n-го порядка, G-структура которого определяется отображением

$$G\times\mathcal{M}(n)\to\mathcal{M}(n):\ (a,x)\to axa^{-1}, \qquad (1)$$

где $G\subset GL(n,\mathbb{R})$-группа линейных преобразований вида

$$G=\left\{\begin{pmatrix} E_m & 0\\ a & T\end{pmatrix}\ \middle|\ a=(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_m)\in\mathbb{R}^{n-m},\ T\in GL(n-m,\mathbb{R})\right\}.$$

Общее основное пространство X определяется как орбита в G-пространстве $\mathcal{M}(n)$, с начальным элементом

$$\mathcal{E}_m=\begin{pmatrix} 0_m & 0\\ 0 & \mathcal{E}\end{pmatrix},\quad \mathcal{E}=\begin{pmatrix} E_k & 0\\ 0 & -E_p\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $\mathcal{E}\neq E_{n-m}$, $n-m=k+p$. G-пространство X есть подпространство пространства троек, минимальный многочлен $m(\lambda)$ которого равен $\lambda^3-\lambda$. Изучаются касательное расслоение, полиномиальные морфизмы и фокальные образы общего основного пространства.

1.Рассмотрим орбиту X в G-пространстве $\mathcal{M}(n)$, G-структура которого задана отображением (1), начальным элементом которой будет элемент (2).

В этом случае легко подсчитать, что

$$X=\left\{x=\begin{pmatrix} 0_m & 0\\ -\tilde{x}a & \tilde{x}\end{pmatrix}\right\},$$

где $\tilde{x}^2=E_{k+p}$, $\tilde{x}=T\mathcal{E}T^{-1}$ -есть элемент пространства пар [3,4].Так как $\mathcal{E}_m^3=\mathcal{E}_m$,то $x\in X \Rightarrow x^3=x\Leftrightarrow m(\lambda)=\lambda^3-\lambda$, и поэтому общее основное пространство X является подпространством пространства троек.

Исходя из минимального многочлена $m(\lambda)=\lambda^3-\lambda$ общего основного пространства, можно определить полиномиальный морфизм

$$P_0 : X \to P_0(x) : x \to E - x^2, \qquad (3)$$

где легко подсчитать, что $x_0 = x^2 = \begin{pmatrix} O_m & O \\ -a & E_{k+p} \end{pmatrix}$.
Если $\bar a_1, \dots, \bar a_m$ линейно независимы, то они определят $(m-1)$-мерную аффинную плоскость.

Т е о р е м а 1. Элемент общего основного пространства можно геометрически интерпретировать как совокупность m-точек аффинного пространства A_{n-m} и оператора проектирования, и наряду с полиномиальным морфизмом P_0 имеются еще два полиномиальных морфизма

$$P_1 : X \to P_1(x) : x \to x_1 = \frac{1}{2}(x^2 + x), \qquad (4)$$

$$P_{-1} : X \to P_{-1}(x) : x \to x_{-1} = \frac{1}{2}(x^2 - x),$$

причем отображения

$\vartheta_J : X \to P_0(x) \times P_J(x) : x \to (P_0(x), P_J(x))$, где $J = 1, -1$,

есть изоморфизмы, т.е. основной элемент можно интерпретировать как совокупность m-точек и проходящих через них m одинаково оснащенных вполне параллельных плоскостей.

Здесь также справедливы следующие теоремы, аналогичные теоремам, указанным в [3,4].

Т е о р е м а 2. Касательное расслоение $T(X)$ общего основного пространства X есть G-пространство, являющееся инвариантной частью $X \times M(n)$ и

$$T(X) = \{(x,\Omega) \in X \times M(n) \mid x \in X,\ \Omega x^2 + x \Omega x = 0\},$$

где $\Omega = \dfrac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0}$.

Т е о р е м а 3. Для всякого элемента $(x,\Omega) \in T(X)$ выполняются условия $\Omega^2 m(\Omega^2) = 0$, $(E+x)\Omega m(\Omega^2) = 0$, где $m(\lambda)$ -минимальный многочлен общего основного пространства. Кроме того, определяются полиномиальные морфизмы

$$\varphi_1 : T(X) \to \overrightarrow{P_0(x)} : (x,\Omega) \to \Omega m(\Omega^2),$$

$$\varphi_2 : T(X) \to P_0(x) \cup \overrightarrow{P_0(x)} : (x,\Omega) \to (E+x) m(\Omega^2).$$

2. Рассмотрим главное расслоение $\xi = (G, \pi; X)$, где $\pi : G \to X : a \to \pi(a) = a \mathcal{E}_m a^{-1}$. Очевидно, что это есть гладкое локальное тривиальное отображение, и поэтому для всякой точки $x \in X$ найдется такая координатная окрестность $\mathcal{U}$ точки x, что $s : \mathcal{U} \to G : x \to s(x) = a(x)$. Условие того, что $a(x)$ есть локальное сечение, запишется в виде

$$a(x) \mathcal{E}_m [a(x)]^{-1} = x \Rightarrow a(x) \mathcal{E}_m = x\, a(x). \qquad (5)$$

О п р е д е л е н и е 1. Репером, адаптированным элементу $x \in X$, называется всякий элемент $a \in G$, который принадлежит $\pi^{-1}(x)$.

Таким образом, репер $a \in G$, адаптированный элементу $x \in X$, находится из условия (5). Так как в нашем случае группа G есть линейная группа и $a \in G$ можно представить в виде: $a = \begin{pmatrix} O_m & O \\ P & T \end{pmatrix}$, где $P = (\bar p_1, \dots, \bar p_m)$, а $T = (\bar e_{m+1}, \dots, \bar e_n)$-векторный репер, то (5) эквивалентно условию:

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P(x) & T(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_m & O \\ O & \mathcal{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_m & O \\ -\tilde{x} a & \tilde{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O \\ P(x) & T(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = P(x),\ T(x)\mathcal{E} = \tilde{x}\, T(x).$$

Второе из полученных условий есть условие того, что $T(x) = (\bar e_{m+1}(x), \dots, \bar e_{m+k}(x), \bar e_{m+k+1}(x), \dots, \bar e_n(x))$ адаптирован элементу $\tilde{x}$ пространства пар. Ясно, что $\begin{pmatrix} O_m & O \\ O & \tilde{x} \end{pmatrix} = S(x)$, и это означает, что первые k векторов лежат в плоскости $\mathcal{J}m\,\tilde{x}$, а последние p векторов – в плоскости $\mathrm{Ker}\,\tilde{x}$. Таким образом, репер, адаптированный элементу $x \in X$, имеет вид:

$$a = \begin{pmatrix} O_m & O \\ (\bar a_1, \dots, \bar a_m) & (\bar e_{m+1}, \dots, \bar e_{m+k}, \bar e_{m+k+1}, \dots, \bar e_n) \end{pmatrix},$$

где $\bar a_1, \dots, \bar a_m \in P_0(x)$ -начальные элементы x и

$$\tilde x \bar e_{\alpha'} = \bar e_{\alpha'}, \quad \tilde x \bar e_{\hat\alpha} = -\bar e_{\hat\alpha}, \tag{6}$$

$\alpha' = m+1;\dots; m+k,\quad \hat\alpha = m+k+1;\dots;n.$

Определение 2. Подвижным репером общего основного пространства X, определенным в открытой части $\mathcal U \subset X$, называется произвольное гладкое сечение

$$\sigma: \mathcal U \to G: x \to a(x).$$

По определению: сечение $a(x)$ есть репер, отнесенный элементу $x \in \mathcal U$. Также, как и в случае пространства пар [3.4], запишем уравнения инфинитезимального перемещения

$$V = da = \sum_{\alpha'} \omega^{\alpha'} \bar e_{\alpha'} + \sum_{\hat\alpha}\omega^{\hat\alpha}\bar e_{\hat\alpha}, \quad d\bar e_\alpha = \sum_{\alpha'}\omega^{\alpha'}_\alpha \bar e_{\alpha'} + \sum_{\hat\alpha}\omega^{\hat\alpha}_\alpha \bar e_{\hat\alpha}, \tag{7}$$

где $\alpha = m+1,\dots,n$.

Соответственно можно записать матрицу Ω в подвижном репере. По определению, имеем

$$\Omega = \frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ -\tilde x V - \omega a & \omega\end{pmatrix},$$

где

$$\omega = \frac{d\tilde x(t)}{dt}\Big|_{t=0}, \quad V = \frac{da(t)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Кроме того, из условий (6) дифференцированием и простыми вычислениями легко устанавливаем, что

$$\omega \bar e_{\alpha'} = 2\sum_{\hat\alpha}\omega^{\hat\alpha}_{\alpha'}\bar e_{\hat\alpha}, \quad \omega\bar e_{\hat\alpha} = -2\sum_{\alpha'}\omega^{\alpha'}_{\hat\alpha}\bar e_{\alpha'}.$$

Отсюда следует, что в адаптированном репере матрица имеет строение

$$\omega_J = \frac12\omega = \begin{pmatrix} 0_k & \omega^{\alpha'}_{\hat\alpha} \\ -\omega^{\hat\alpha}_{\alpha'} & 0_p\end{pmatrix}. \tag{8}$$

3. Так как для общего основного пространства имеются два полиномиальных морфизма (4), образами которых будут подпространства пространства троек, т.е. пространства пар, то соответственно определятся элементы (x_J, ω_J) касательных расслоений пространств пар. Поэтому можно использовать основные уравнения для фокальных элементов

[3.4], которые в нашем случае будут иметь следующий вид:

$$\Omega_J\begin{pmatrix}E_m & 0\\ a+X & 0\end{pmatrix} = 0,\ x_J\begin{pmatrix}E_m&0\\a+X&0\end{pmatrix}=0,\ \begin{pmatrix}E_m&0\\a+X&0\end{pmatrix}\in P_0(x),$$

где $J=-1,-1$, и легко подсчитать, что

$$x_J = \begin{pmatrix}0_m&0\\-y_J a & y_J\end{pmatrix}, \quad \Omega_J = \begin{pmatrix}0_m & 0\\ -\omega_J a - y_J V & \omega_J\end{pmatrix},$$

$$\omega_J = \frac12\omega = \frac{d y_J(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

Отсюда следует, что уравнения для фокальных образов в подробной записи имеют вид: $-y_J V + \omega_J X = 0$, $y_J X = 0$, а в силу $y_J^2 = y_J \Rightarrow \omega_J = \omega_J y_J + y_J\omega_J$ эти уравнения эквивалентны уравнениям $y_J(V-\omega_J X)=0$, $y_J X = 0$.

Условие $y_J X=0$ есть условие того, что X лежит в плоскости, определяемой элементом $y_1 = \frac12(x^2+x)$ $\left(y_{-1} = \frac12(x^2-x)\right)$, а условие $y_1(V-\omega_1 X)=0$ $\left(y_{-1}(V-\omega_1 X)=0\right)$ говорит о фокальности. Именно, если даны пути $y_J(t)$, $X(t)$ такие, что

$$y_J(t)X(t)=0,\quad y_J(0)=y_J,\quad \omega_J = \frac{dy_J(t)}{dt}\Big|_{t=0},$$

и так как $V = \frac{da(t)}{dt}\Big|_{t=0}$, $y_J^2 = y_J$, то

$$(7)\Leftrightarrow y_J\left(\frac{da(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}X(t)\right) = 0 \Leftrightarrow y_J\frac{d}{dt}(a+X)=0.$$

Но полученные равенства говорят о том, что касательный вектор к пути $\begin{pmatrix}E_m&0\\a(t)+X(t)&0\end{pmatrix}$ при $t=0$ принадлежит $\mathrm{Ker}\, y_J$, т.е. касается плоскости y_J, и это есть по определению фокальная точка.

Список литературы

1. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.-М.:Мир,1964.

2. Джекобсон Н. Алгебра Ли.-М.:Мир,1964.

3. Ведерников С.В. Специальные морфизмы G-пространств.- Проблемы геометрии, ВИНИТИ АН СССР, 1975, вып.7, с.49-68

4. Ведерников С.В. Геометрия основного пространства.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.10, Калининград, 1979, с.6-21